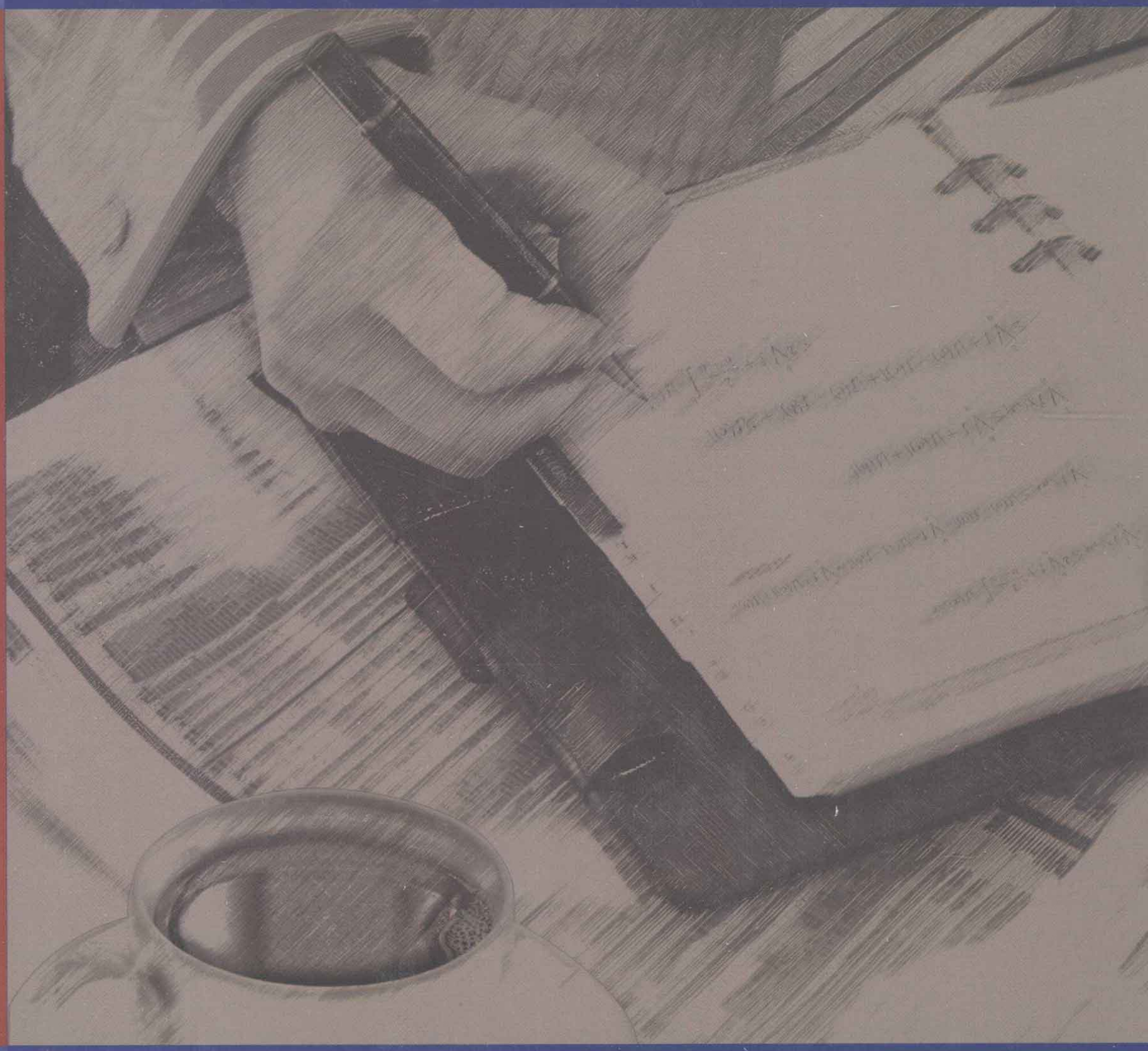
数学之英文写作

Mathematical Writing in English

汤涛 丁玖



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

本书作者在数学研究及写作上均颇有建树。难能可贵的是他们能把对数学写作与演讲的真知灼见汇类成书。我认为该书应当成为每一位数学研究生和青年教师常翻阅的掌上读物，并毫不犹豫地把它推荐给所有爱好数学写作的读者。

王元，中国科学院院士

此书内容殷实，不仅切合实用，而且注重说理，必能开卷有益：研究生及青年科学工作者在撰写论著时将少走不少弯路，而相对成熟的科学工作者也将找到知音，引起共鸣。

李大潜，中国科学院院士

真没想到汤涛和丁玖能抽出时间来写这样一本书。对华人数学界，特别是年轻的数学工作者们，这是一本难得的参考书。它不仅系统地讨论了怎样写数学文章和书籍，而且对怎样在数学界生存和发展也有精辟的论述。他们的例子选得也很好，很有代表性。

鄂维南，中国科学院院士

这是为中国数学研究者所撰写的一本及时之作，对希望提高英文交流能力的年轻学者和学生尤为如此。本书特色之一是作者均为在英文表达上具有广泛经验的数学家。我将推荐我所有的华人学生阅读此书。

舒其望，布朗大学 Theodore B. Stowell 讲座教授

本书旨在帮助需要从事英文写作与演讲的科研人员和大学生、研究生了解关于科技英语写作的方方面面，尤其是数学文章写作的基本常识和注意事项。写作中参考了西方学者关于英文数学写作的观点，并揉合了作者自己的观念、认识及经验。阅读本书对初学者尤其会有帮助。

全书内容包括：

- 数学文章的结构
- 数学文章的词句
- 怎样修改文章
- 文章投稿
- 怎样写书
- 数学综合写作
- 其它文体的书写
- 怎样讲数学

学科类别：数学、科学素养
academic.hep.com.cn

ISBN 978-7-04-036893-2
9 787040 368932 >
定价 49.00元

数学之英文写作

Mathematical Writing in English

汤涛　丁玖

SHUXUE ZHI YINGWEN XIEZUO

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书旨在帮助需要从事英文写作与演讲的科研人员和大学生、研究生了解关于科技英语写作的方方面面，尤其是数学文章写作的基本常识和注意事项。写作中参考了西方学者关于英文数学写作的观点，并揉合了作者自己的观念、认识及经验。阅读本书对初学者尤其会有帮助。

全书内容包括：数学文章的结构，数学文章的词句，怎样修改文章，文章投稿，怎样写书，数学综合写作，其它文体的书写，怎样讲数学。

图书在版编目（CIP）数据

数学之英文写作 / 汤涛，丁玖 编著 -- 北京：高等教育出版社，2013.4

ISBN 978-7-04-036893-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①汤… ②丁… Ⅲ. ①数学—英语—论文—写作 Ⅳ. ① H315

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 018016 号

策划编辑　赵天夫　　责任编辑　赵天夫　　封面设计　张申申　　责任印制　韩　刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京汇林印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm× 1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	19.75	版　　次	2013 年 4 月第 1 版
字　　数	300 千字	印　　次	2013 年 4 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有　侵权必究

物 料 号　36893-00

本書作者在数学研究及写作上
均頗有建树难能可貴的是他们
能把对数学写作与演讲的真
知灼見滙類成書我认為该書
应當成為每一位数学研究生和青
年教師常翻閱的掌上读物並堂
不犹豫地把它推荐給所有爱好
数学写作的读者

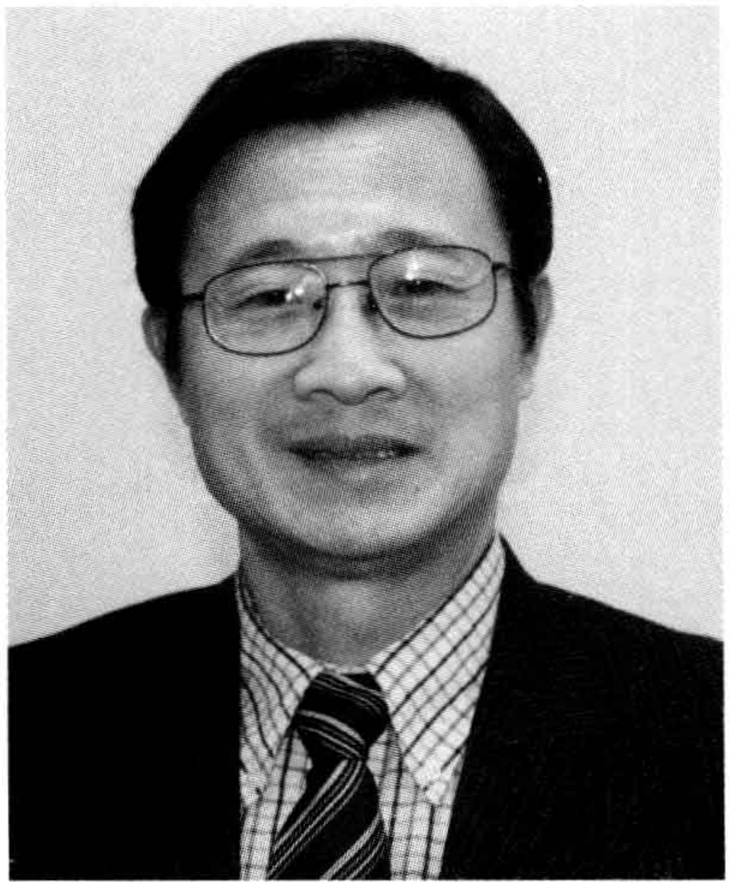
壬辰王元

作者简介



汤涛

汤涛，香港浸会大学数学系讲座教授、理学院院长，教育部长江讲座教授，北京大学客座教授，美国工业与应用数学协会 (SIAM) 会士。长期从事数值分析和计算物理方面的研究。2003 年获冯康科学计算奖。曾任东亚 SIAM 理事长、香港数学会理事长。曾任或现任 *SIAM Journal on Numerical Analysis* 和 *Journal of Computational Physics* 等国际著名学术期刊编委，*Frontiers of Mathematics in China* 副主编，《数学文化》杂志联合主编。



丁玖

丁玖，美国南密西西比大学数学系教授。曾获校级应用研究奖、基础研究创新奖、杰出教学奖及毕业典礼大典礼官荣誉称号。现为学术期刊 *International Journal of Bifurcation and Chaos* 编委，《数学文化》杂志编委及撰稿人。主要研究领域为计算遍历理论，出版多部中、英文数学著作。从事学术工作之余，旁涉中美教育比较及数学文化普及。撰有随笔、杂文，并翻译相关文献多篇。

前　言

数学不光是人类知识宝库的重要组成部分，也在所有科学技术领域中有无穷无尽的应用。作为数学思想传递及学术交流之载体，数学写作与演讲和一个数学人的学术生涯相伴一生，因此提升数学学习和研究的这方面能力至关重要。

近年来，我国政府对科技工作的重视和资助与日俱增，科技工作者做研究、写论文的热情和投入也日益增长。英国《卫报》2011 年 3 月 28 日报道，英国皇家学会 (The Royal Society) 最近的分析表明，中国有望在 2013 年超过美国成为科研成果发表的霸主。皇家学会指出，中国目前英语科研论文的数量已超越英国位列全球第二，仅次于美国。这一段报道显示，中国的英文科技论文数量在过去的十年里突飞猛进，已经步入世界领先的行列。

在过去的二十年里，全世界数学领域的英文文章数量急剧增加。很多刊物的论文发表数量已经增加了两倍、五倍，甚至十倍以上；数学刊物亦不例外。二十年前 SCI 的数学刊物不到五十种，现在至少已经翻了两番，并仍在持续增长。由于种种原因（包括国内很多高校以发表一定数目的 SCI 文章作为研究生的毕业要求），中国的作者群为这些英文期刊提供了成千上万的稿源。某位数学期刊的主编告诉我们，他们刊物一年有一两千个投稿，其中一大半来自中国大陆的作者。然而，一个不争的事实是，虽然很多文章的学术质量还可以，但是由于英语水平不足，经常遭到退稿。

一个人用非母语写作而效果不彰，是无可厚非的。大部分中国学生缺乏在日常生活中交流英语的环境，缺乏大量阅读英文著作的机会，缺乏以科技英语写作论文的训练，在尝试用英文进行专业写作方面困难重重。但很多成功的例子告诉我们，只要通过系统的训练，用心去摸索规律，并吸取教训，反复提高，研究者完全可以克服先天不足，写出语言表达上乘的学术论文（当然，高质量的科研文章最主要还是取决于研究成果，我们这里只能关注文章的语言质量）。况且数

学的英语写作相对简单，一般通过半年至一年的训练，已能展现显著的成效。

本书以《数学之英文写作》为名。顾名思义，目的就是为了帮助青年学生和年轻的数学工作者学会怎样写好数学文章。由于讲数学与写数学息息相关，书中专列一章谈怎样做一个好的数学报告。这本书的主要读者对象是刚刚接触数学英文写作的大学生、研究生和科研人员。当然，书中的内容对经常从事数学写作的大学教师和研究人员也会有启发作用，尤其是那些关于写英文研究性论文和专业书籍的章节。

本书中的内容主要是关于科技论文、尤其是数学论文写作的基本常识和注意事项。写作中参考了欧美一些国家的作者关于英文数学写作的畅销书籍，有相当一些内容是我们两位合作者本人的观点、认识及经验之谈，所以并不一定是百分之百的有道理，仅供初学者们参考。我们希望本书能起到敲门砖的作用，协助那些初学科技英文写作者尽快掌握所需，进而熟能生巧，对此我们是信心十足的。

语言是思想的载体。由于写作或演讲应遵循的基本原则与所使用的具体语言并无直接关系，这本书的许多章节不光适用于英文数学写作或演讲，也同样适用于采用其它语言的学术性写作或演讲，自然包括我们的母语——中文。

本书虽然主要面向数学工作者，但对于需要使用英文交流的其他理论科学研究者，比如计算理论、理论物理，工程计算方面的研究者，比如计算力学、计算科学，以及范围广泛的工程、技术领域的工程师或科学管理人员，也都会有一定的参考价值。

本书面向的读者主要是大学生、研究生或初学科技英文的写作者。对于大学生来说，几年的学习期间可以给你提供较长时间进行写作摸索训练，你的文章还可以经过导师作反复的修改，这些都是宝贵的机会，千万不要怕烦，怕花时间；专人指导是提高英文写作最佳的一种形式。作者之一在英国读博士期间，研究流体力学计算方法，写出的第一篇论文投到流体力学较好的一个期刊《流体力学杂志》(*Journal of Fluid Mechanics*，缩写为 JFM)；这个期刊当时的主编叫 George Batchelor，是剑桥大学的一位教授。他不但对文章的结果感兴趣，对英文的写作（包括文章结构、引言、结果的说明）也非常重视。作者在写作期间不断请教其指导教授。导师口述指导，但不操笔修改，显然是在给他的外国学生提供一个训练英文写作的实战

机会（另一方面，这篇文章是博士论文的主要部分，自己主写也是理所当然的事）。这篇最后在 JFM 发表的文章总共修改了八次，历时一年，但副产品是大大提高了作者的英文写作能力。这一例子说明了一定要珍惜被人指导的机会，这样必然事半功倍。

自然科学的发展往往是在推翻或修正旧的理论基础上建立新理论的大厦。如哥白尼的地动说推翻了统治人们思想一千五百年的托勒密的地心说；伽利略的比萨塔落体实验否定了亚里士多德的错误想象；爱因斯坦的相对论则是对牛顿运动定律的修正。然而，作为自然科学的共同语言，数学的独特之处在于它不需要被订正，新的数学理论只是为旧的建筑添砖加瓦，而无须连根拔起。在数学里，已证明为真的命题永远为真。正如美国卓越的犹太人科普作家阿西莫夫所说的："托勒密也许对天体系统给出了错误的描绘，但他为了计算而发展出的三角系统永远保持正确"（见本书第五章第三节）。数学这个与众不同的特点也反映在它的语言表达上：数学词汇的意义经久不衰，不为时代所动；数学概念的定义严密准确，无懈可击；数学定理的证明服从逻辑规律，以三段论推理为其宗旨；数学写作的方式技巧，有章可循。不难想象，数学概念的精确性和无歧义性，加上数学思维的周密性和美妙性，给数学的写作提出了更高的要求，尽管最简单的数学写作通常是不难掌握的。这些要求就是：如何能让我们的写作体现数学之美？如何能让我们的文章结构、遣词造句、思想流动、动机结论让人读之犹如行云流水？如何能让表述之美和推导之美并驾齐驱、相辅相成？基于这些想法，有一本实用的写作参考书对于初学者来说，是会有一些帮助的。这也是我们写作此书的一个初衷。

纵观本书的内容可以发现，除了在最后一章我们集中讨论怎样讲数学，其它的七章里覆盖了英文数学写作以及有关其它写作的方方面面，包括研究或综述性论文、教科书或学术专著、申请信或推荐信、审稿报告或书评等等。但是我们没有特别提及怎样写研究建议书这一重要的论题。这是因为本书主要面向学生和英文学术写作的起步者，而撰写英文研究建议书主要是英语国家或地区的研究型大学教授所要做的事。他们理应拥有娴熟的学术英文写作能力，基本上没有阅读写作入门书籍的必要。不过，我们书中讲述的许多原则和技巧，对研究建议书的写作亦应该不无裨益。

为了方便读者阅读理解，书中对几乎所有的英文词汇、短语、例句、段落及引文都提供了中文翻译。任何翻译都没有绝对的标准，所

以附在原文后的译文仅作参考。读者可以自行翻译某些英文段落以自我训练，并与书中所列相比，相互借鉴，这也不失为提高写作能力的一个方法。我们欢迎对作者误译之处的批评指正。

在本书的写作过程中，作者得到香港城市大学电子工程系陈关荣教授的支持，特别他为书中的一节（第三章第五节）提供了素材。美国依阿华大学数学系韩渭敏教授认真仔细地阅读了书的初稿，提出了一些好的改进建议。作者感谢香港浸会大学、香港研究资助局的资助。作者之一丁玖对香港浸会大学理学院及数学系对他在参与本书写作时所给予的热情接待深表谢意。我们特别感谢香港浸会大学中国语言文学系的研究生刘健生先生，他仔细地阅读了本书的初稿，并提出了许多宝贵的修改建议。

本书作者虽然在英美大学获得博士学位，在多年的境外教学和研究生涯中也积累了一些英文数学写作和演讲的经验，但远远不是这方面的专家。本书仅希望为初学英文写作的朋友们提供一些帮助；书中的错误或不当之处敬请读者不吝指教（电子信箱 ttang@math.hkbu.edu.hk 或 Jiu.Ding@usm.edu)。此外，如果大家对提升这本书的质量和功能有任何建议，也欢迎告知作者，以便我们进一步学习和改进。

最后，我们想告诉读者朋友：在多阅读、多练习的基础上，掌握技巧，熟练使用一些典型句型和结构，是写出好的科技论文的第一步。

汤涛，丁玖

2013 年 1 月

目　录

第一章　数学文章的结构 ——— 1

1.1　题目 5
1.2　摘要 9
1.2.1　一些好的例子 10
1.2.2　应注意事项 15
1.3　引言 19
1.3.1　引言的开首 20
1.3.2　引言的中间 23
1.3.3　引言的结尾 25
1.3.4　引言中的常见词 28
1.4　主体 30
1.4.1　理论性较强的文章 31
1.4.2　计算或应用数学的文章 32
1.4.3　报告计算结果的常见用法 35
1.5　结论 37
1.5.1　结论应该有什么内容 37
1.5.2　结束语的注意事项 37
1.5.3　结束语中的一些常用词 38
1.6　致谢 40
1.7　文献 44
1.8　附录 48
1.9　其它 49
1.9.1　文章的署名 49
1.9.2　文章的日期 51

1.9.3 文章的关键词和学科分类 51
1.9.4 文章的章节标题 53
1.10 总结 53

第二章 数学文章的词句 61

2.1 基本词汇 64
2.2 符号概观 84
2.3 常用短语 94
2.4 语言结构 98
2.4.1 一些常见的句型 98
2.4.2 修饰性词汇 101
2.4.3 数学运算的动词 103
2.4.4 常见动词 107
2.4.5 过渡语句 109
2.5 证明用语 111
2.5.1 证明开始时的用语 111
2.5.2 证明结束时的用语 112
2.5.3 有关不予证明的用语 113
2.5.4 常见的证明用语 115
2.5.5 证明中常用的短语句子 118
2.6 重要连词 123
2.7 优劣比较 129
2.7.1 句子比较 130
2.7.2 定冠词和不定冠词 131
2.7.3 容易混淆的英语单词 132

第三章 怎样修改文章 135

3.1 删减字句 136
3.2 突出重点 145
3.3 美容结构 147

3.4 善用图表 157
3.5 修改范例 159
3.6 避免抄袭 168
3.6.1 什么叫抄袭? 169
3.6.2 如何避免抄袭? 170

第四章 文章投稿 171

4.1 投稿准备 173
4.2 投稿过程 181
4.3 审稿意见 185
4.4 文章发表 193

第五章 怎样写书 199

5.1 准备工作 202
5.2 写作过程 204
5.3 序言目录 210
5.4 辅助材料 214
5.5 书的出版 218

第六章 数学综合写作 223

6.1 综述文章 225
6.2 读书报告 231
6.3 学位论文 233
6.4 数学文化 235
6.5 人物传记 241

第七章 其它文体的书写 245

7.1 申请 246
7.2 推荐 250
7.3 审稿 262

7.4 书评 270
7.5 文评 273

第八章 怎样讲数学 279

8.1 基本原则 281
8.2 演讲准备 284
8.3 演讲技巧 288
8.4 论文答辩 292

参考文献 297

第一章 数学文章的结构

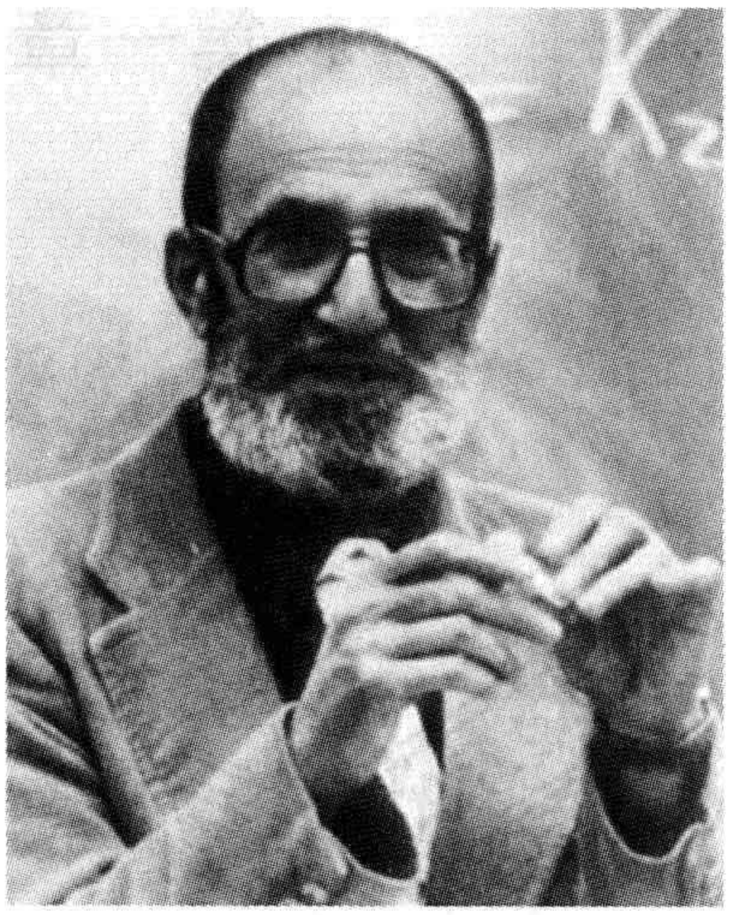


本书主要讲的是怎样用英文写数学文章。以英文写作数学文章，与以中文写作其它文章一样，都有对语法、句法、修辞等语言及文字写作的基本要求。但是正因为数学文章是一类特殊的学术性文章，它们的写作自然有一些特别的要求。

数学文章包括研究论文 (research paper)、综述报告 (survey article 或 review paper)、审稿报告 (referee report)、研究建议书 (research proposal)、书评 (book review)、文评 (paper review)、阅读心得 (reading notes) 等等。无论写哪一类文章，要写好它，作者动笔前要对写作内容了然于胸，动笔时则需言之有物，动笔后亦不忘仔细推敲。

在进入正题之前，我们先简单地谈一谈写文章前的一些准备工作以及写作过程中应该遵循的几项基本原则。

- 第一，科技论文的写作目的是交流学术思想和科学发现。除了日记这类写给自己看的文类之外，一般文章的写作目的均是让别人清楚地知道你想叙述和表达的东西。动笔前，你一定要明确知道为什么要写这篇文章，文章为谁而写，要表述什么，读者群是哪些人，要告诉读者何种信息，在作者的脑海里一定要有清楚的概念。无病呻吟、无的放矢，是写不出好文章的。
- 第二，要收集一些与写作有关的材料，特别要有几篇关键的文献。这几篇关键文献一方面使你对研究课题的历史及发展有所了解，另一方面可以使你知道如何运用一些重要的术语。灵活和正确地运用学术术语，对一篇科技论文来说是非常重要的。初学者可以用彩笔把关键文献上的一些关键词或关键句子标示下来，以后你的文章中有些难以说好的地方，这些词或句子往往能作为参考之用。整段整段地抄写别人的文章是绝对不允许的，但从别人文章中选用几个词或一两个句子用自己的语言重新表述，则往往有画龙点睛、恰到好处的作用。



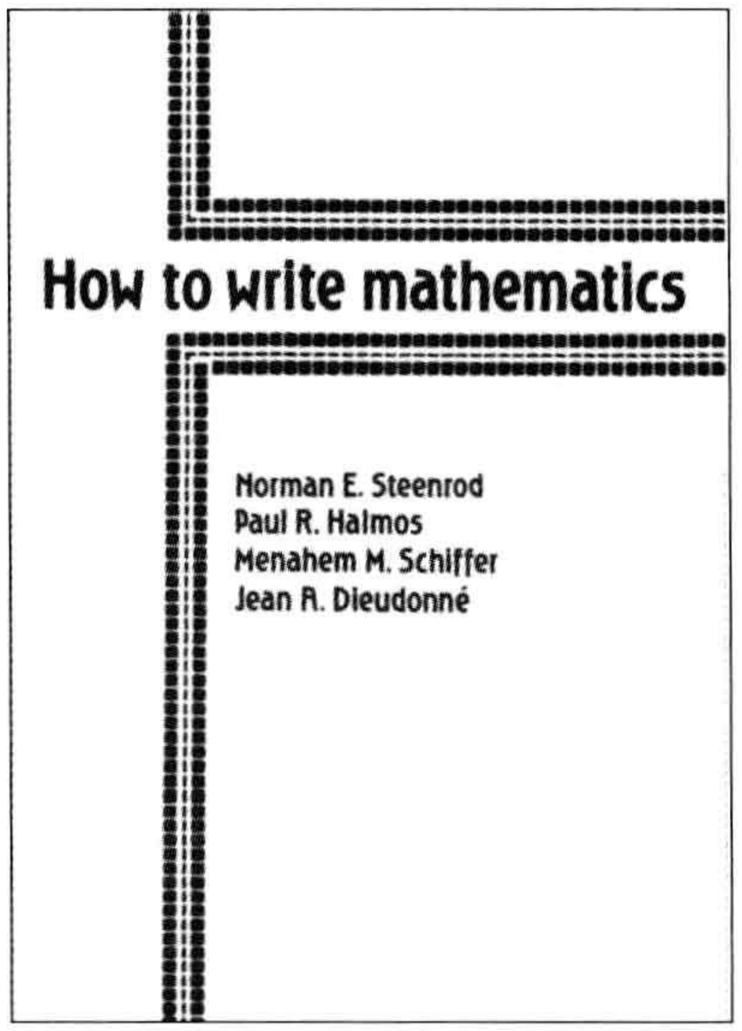
Paul Halmos

- 第三，文章要精确、清楚、简洁地表达你想说的东西。清晰的思维能力与熟练的写作能力是相辅相成的。对于数学文章，基本概念的定义、主要定理的叙述、证明过程的推导，都应该如玻璃般的清晰可见，合乎三段论式的逻辑推理。把该说的事情说清楚、说明白、说完全，不作间断跳跃的陈述，说完后就应中止，切忌拖泥带水，更防画蛇添足。
- 第四，文章初稿完成后，要反复修改，不要冀望一次成功。对初学者来说，一蹴而就几乎是不可能的。即便是大文豪如鲁迅，也反复修改自己的文稿。美国著名数学家、写作高手和名师哈尔莫斯 (Paul Halmos, 1916—2006) 说过，他发表的每一个字词都要写上至少六次 (Every single word I publish I write it at least six times)。最好大声朗读写好的初稿，揣摩语感、推敲文字、寻找感觉。如果感觉不对，就要对症下药。比如，尽量避免在相邻两个句子里使用同一词汇，甚至读音相同者，当然定冠词 the 和不定冠词 a 或需要讨论的一些名词除外。文章要多改几次，大至文章的结构，小至标点符号，都要仔细咀嚼。写文章熟能生巧，但一开始时必须多花时间，反复推敲。
- 第五，平生第一篇（甚至前几篇）英文文章写作之时，应该找一些有英文写作经验或英语为母语的人士帮忙修改一下，并能仔细琢磨别人修改那些句子的原因。通过别人的修改意见来完善文章，是一个非常有效的提高写作水平的方法。清乾隆诗人蘅塘退士孙洙（1771—1778）在《唐诗三百首》的前言中所列的谚语“熟读唐诗三百首，不会吟诗也会吟”，对英文写作训练同样有意义。平时养成阅读国外英文学术书籍、期刊的习惯，对提高科技英文写作能力大有裨益。

哈尔莫斯把“要想说好某件事，一定要有某事说” (In order to say something well you must have something to say) 作为写作的 **first principle（第一原则）**。他宣称：

> Much bad writing, mathematical and otherwise, is caused by a violation of that first principle.
>
> 数学或其它方面的许多劣质写作都是因为违反这个第一原则而造成的。

他把“为谁而写”列为写作的**第二原则**：当你决定写东西时，问问自己预期中的读者是谁。(When you decide to write something, ask yourself who it is that you want to reach.) 比方说，你是写只让自己看的日记？给远方朋友的信？还是给情人的浪漫情书？给专家读的研究报告？还是大学生用的教科书？你的写作方式、考虑重点、内容布局、行文风格等都需根据读者作出考量。因此哈尔莫斯总结道：



> All writing is influenced by the audience, but, given the audience, the author's problem is to communicate with it as best he can ...
>
> 所有写作都被读者所左右。但是，当读者是既定的，作者的课题就是尽他所能与之交流 ·····

在《怎样写数学》(*How to Write Mathematics*) [25] 这本六十四页的小书中，作者之一的哈尔莫斯用一段话概括了数学写作的精髓：

> The basic problem in writing mathematics is the same as in writing biology, writing a novel, or writing directions for assembling a harpsichord: the problem is to communicate an idea. To do so, and to do it clearly, you must have something to say, and you must have someone to say it to, you must organize what you want to say, and you must arrange it in the order that you want it said in, you must write it, rewrite it, and re-rewrite it several times, and you must be willing to think hard about and work hard on mechanical details such as diction, notation, and punctuation. That's all there is to it ...
>
> 写数学的基本问题和写生物、写小说或写键琴安装指南一样：如何交流想法。为了这样做并做得好，你必须有述说的内容，你必须有说话的对象，你必须组织好你想说的一切，你必须按照你想说的次序来安排它，你必须写、重写，并重复改写几次，你必须愿意绞尽脑汁，在措词、记号及标点符号等细节上猛下功夫。这就是一切的一切 ·····

在这一章里，我们讨论一篇英文数学文章的主要结构，并通过具体例子来说明一些写作时需要注意的事项。

一篇数学文章一般由如下几个部分组成：

- 题目 (Title)
- 摘要 (Abstract)
- 引言 (Introduction)
- 主体 (Main body of the article)
- 结论 (Conclusions)
- 致谢 (Acknowledgments)
- 文献 (References)
- 附录 (Appendix)

文章的题目就是用最少的文字去描述文章的主要内容。因此，文章的题目一定要简单明了，并能对文章的主要贡献起到画龙点睛的作用。据统计，一篇文章的全文如果被一个人读过的话，那么它的题目将会被五百个人读过。尤其在当今的信息时代，由于互联网以及 Science Citation Index (SCI) 的作用，文章的题目被浏览的机会可能更多。一个好的文章题目可以吸引读者去阅读文章的摘要，或进一步阅读文章的部分或整体内容。可以说，**题目是文章的一句广告词**。

文章摘要的目的就是简要地告诉读者这篇文章的主要内容，要研究什么问题，有什么新结论或新发现。摘要要短而精，但也必须要提供足够的信息给读者，并需使读者保留接下去阅读全文的兴趣。**文章的摘要应被看成是一篇有足够信息的微型文章**。

文章的引言是引导读者进入文章主体的导向图，亦可视为更详尽的摘要，故应对摘要作出更详细的说明和扩展。

文章的主体是一篇文章中最主要、最重要的部分，它包括问题的描述、主要方法、定理、证明等。对于应用或计算型文章它还包括实验或计算结果。文章主体的精华部分在于给出新的结论或新的方法，并对结论或方法进行合理的分析或比较。这一部分占据了文章的大部分篇幅，要尽可能抓住重点，即俗称的突出主题，不要东拉西扯，让读者抓不住问题面对的主要困难和解决问题的主要思路和方法。

在下面的几节里，我们将就一篇文章的结构作更为具体的分析。

1.1 题目

一般而言，一篇文章的题目会被很多人读到，而文章本身并不一定有多少人细读。要让更多的潜在读者有兴趣阅读这篇文章，就要想方设法在文章标题上下功夫。所以文章的题目一定要准确、精练，并且尽量能够吸引读者的眼球。好的题目让读者难忘，并激起继续阅读文章摘要甚至全文的欲望。不过，通过题目中短短的一两行字就能使读者知道本文的主要目的和贡献，并不是一件简单的事。



Benoit Mandelbrot

第一，文章的题目应能向读者直接地传递关于“这篇文章是干什么”的信息，它一般不宜太长，也不宜太短。过长的题目里多含有一些无关紧要甚至无用的字词，这些词很可能就在题目的开头，像 Studies on，Investigations on 或 Observations on。应尽可能避免使用这些词，因为它们本质上并没提供任何信息。另一方面，过短的题目则容易让读者抓不住文章的主旨，看不到它的主要论题。

第二，除非写的是一篇综述文章 (review or expository article)，否则文章的题目应具体、明确，最好能反映文章的主要贡献，如：

- Hilbert's tenth problem is unsolvable
  希尔伯特第十问题不可解
- A proof of Minkowski's inequality for convex curves
  闵可夫斯基凸曲线不等式的一个证明
- Nonperiodic deterministic flows
  非周期确定性流

一些提问式的题目常常会有扣人心弦的奇妙效果。这方面的精彩例子包括分形之父 Benoit Mandelbrot (1924—2010) 1967 年发表在美国《科学》(*Science*) 杂志上的著名论文 [23]

- How long is the coast of Britain?
  英国的海岸线有多长?

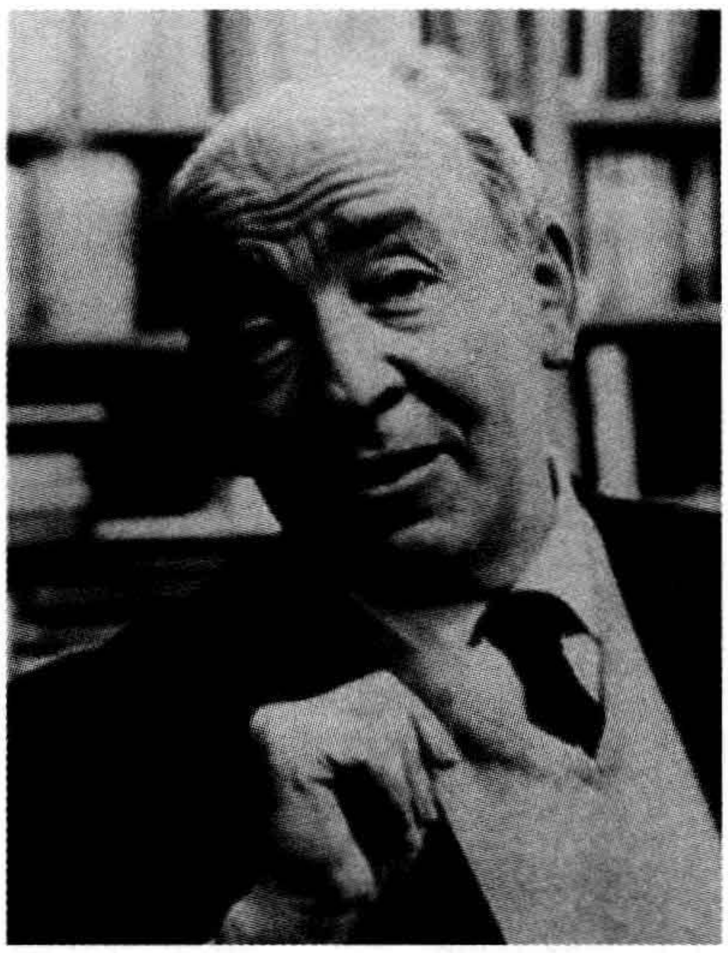
和美国分析学家 Ralph P. Boas (1912—1992) 1981 年发表在《美国数学月刊》(*The American Mathematical Monthly*) 上的文章 [6]

- Can we make mathematics intelligible?
  我们能让数学易懂吗?

这种提问式的题目让读者一下子就对文章的内容产生好奇。波兰



Ralph P. Boas



Mark Kac



人能听见鼓的形状吗?

裔美国数学家 Mark Kac (1914—1984) 的一篇题为 Can one hear the shape of a drum? (人能听见鼓的形状吗?) 的文章 [16] 1966 年在《美国数学月刊》上登出后，反响巨大，悬而未决的数学问题一目了然，引人入胜。文章的一个亮点便是这个不见其物却闻其声的绝妙标题。这篇妙文使得作者将两枚最佳论文写作的奖章 (Chauvenet Prize 和 Lester R. Ford Award) 尽收囊中。1992 年，Carolyn Gordon 等人 [13] 给了 Kac 的问题一个否定的回答，他们在《美国数学会通报》(*Bulletin of the American Mathematical Society*) 上的文章题目直截了当：One cannot hear the shape of a drum (人不能听见鼓的形状)，与 Kac 二十六年前的文章题目遥相呼应。这在当时是轰动数学界的一大新闻。

第三，文章的题目中不要泛指一个过大的方向，像：

- Computational methods for Euler equations
  欧拉方程的计算方法
- Numerical analysis for fluid mechanics
  流体力学的数值分析
- Theoretical studies for the ordinary differential equations
  常微分方程的理论研究

等等都不是什么好的选择。从这些题目读者基本上不知道你的研究成果是什么 (这些可以是教科书或专著的书名，但不应该是文章的题目)! 还有一些题目，比如：

- An efficient numerical method for solving a class of delay differential equations
  解一类时滞微分方程的一个有效数值方法
- A new numerical method for solving optimization problems
  求解最优化问题的一个新的数值方法

给读者的信息量也是非常有限的。

另外，不同的研究领域在选择标题上会有不同的基本规则或通常习惯。纯粹数学和应用数学的题目取法不尽相同，应用数学和更为应用的工程学科的论文题目的定名也有区别。最好能够多参考同类文章的标题，再决定取什么样的题目。

下面我们列举一些好题目的简单例子，供读者参考。一些较有原

创性的工作，其论文的标题可以比较简单明了。

例 1.1. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series

机器计算复傅里叶级数的一个算法

（这是第一篇研究快速傅里叶变换 (FFT) 的文章的标题。它指出了文章的主要特点：算法、机器运算、复数傅里叶级数。） ♦

例 1.2. Good approximation by splines with variable knots

带有变量节点样条函数的好逼近

（这是 Carl R. de Boor 1973 年的文章，提出了用变步长的方法来取得更好的函数逼近。） ♦

例 1.3. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems

边值问题的多层自适应解

（这是 A. Brandt 1977 年的文章，给出了用多重网格计算边值问题的思想和方法。） ♦

例 1.4. Methods of conjugate gradients for solving linear systems

解线性系统的共轭梯度法

（这是 M. R. Hestenes 和 E. Stiefel 最早提出用共轭梯度法求解线性方程组的文章。） ♦

例 1.5. A rapidly convergent descent method for minimization

用于极小化的一个快速收敛下降法

（这是 R. Fletcher 和 M. Powell 最早提出用最速下降法求解优化问题的文章。） ♦

例 1.6. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations

哈密尔顿–雅可比方程的黏性解

（这是 M. Crandall 和菲尔兹奖获得者 P.-L. Lions 较全面地研究哈密尔顿–雅可比方程的文章。） ♦

例 1.7. Period three implies chaos

周期三意味着混沌

（这是李天岩和 J. Yorke 1975 年混沌数学定义的文章。） ♦

例 1.8. Yet another chaotic attractor

另一个混沌吸引子

（这是陈关荣和 T. Ueta 1999 年给出新奇异吸引子的文章。） ♦

如果文章所在的领域某一方面已经有很多扎实的成果，而文章与这一方面密切有关，这时题目中能作比较详细的说明则效果会更好。换句话说，要多加一些说明词，把背景说得更详细一些。比如：

例 1.9. The optimization of convergence for Chebyshev polynomial methods in an unbounded domain

无界区域切比雪夫多项式方法收敛性的最优化

（关键词：收敛、优化、切比雪夫多项式、无穷区域。此文要处理的事情从题目上已一目了然。） ♦

例 1.10. On one-sided filters for spectral Fourier approximation of discontinuous functions

关于不连续函数傅里叶谱逼近的单边过滤器

（关键词：单边过滤器、傅里叶谱方法、间断函数。信息也是足够了。） ♦

例 1.11. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids

任意网格间距下的有限差分公式的生成

（关键词：有限差分公式、任意间距网格。这里 arbitrarily 一词非常重要，起到突出重点的作用。） ♦

例 1.12. Boundary layer resolving pseudospectral methods for singular perturbation problems

奇异摄动问题的边界层伪谱方法

（关键词：边界层、伪谱方法、奇异摄动。同样，这三个缺一不可的关键词把要研究的问题收窄到一个较小的范围内。） ♦

例 1.13. Iterative and parallel performance of high-order compact systems

高阶紧致系统的迭代和并行性能

（关键词：迭代、并行、高阶、紧致系统。这里提供的信息也很充分。） ♦

例 1.14. Overcoming corner singularities using multigrid methods

用多重网格法来克服拐角奇点

（关键词：拐角奇点、多重网格法。虽然关键词不多，但意思足够清楚。这种动名词加 using 的形式也是一种可行的标题做法。） ♦

作为本节的总结，我们指出标题是文章的脸面。对读者来说，成功的文章标题取决于：

(1) 是否有继续阅读的必要；
(2) 文章的主要研究成果或创新点；
(3) 文章的类型：综述性、理论性、应用性或实验性。

而对作者来说，文章的标题需：

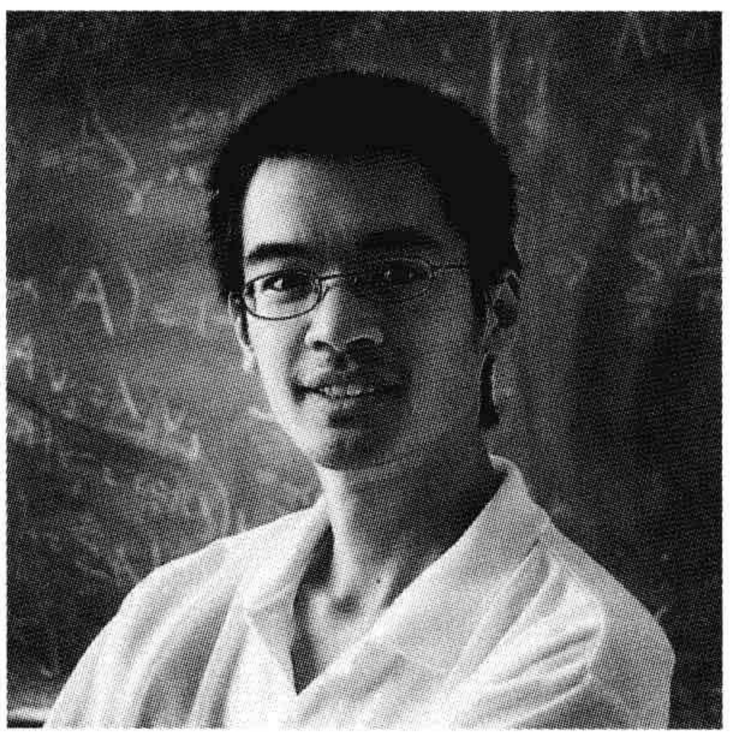
(1) 含有一定的信息量，使读者可通过搜索引擎搜到你的文章；
(2) 能够吸引读者的注意力；
(3) 言简意赅地表述文章的研究成果；
(4) 和现有的标题有一定的区别。

1.2 摘要

文章的摘要就是要把文章的主要内容用精练的语言加以总结。读者一般通过阅读摘要来决定是否要阅读文章的全部或部分内容。论文摘要本身就是一篇小文章 (minipaper)，有其特殊的作用。

论文摘要应该：

(1) 概括文章的主要目的、思想和结果；
(2) 尽可能简明扼要（很多数学期刊给出摘要的字数上限；在文章投稿前应阅读期刊的作者须知），但又要有足够的内容；
(3) 用词精准、意思明确，尽可能让更多的人读懂你的叙述。我们常说研究中有大同行（比如应用数学同行、纯数学同行）或小同行（比如计算数学领域中的偏微分方程数值解、纯数学里的代数几何）。文章的主体是写给小同行看的，而摘要应该使大同行也能部分看懂。



陶哲轩

有些作者常常把文章的引言 (Introduction) 或结论 (Conclusion) 部分中的一些句子搬来，拼凑成一个论文摘要，这会给人以雷同的感觉，是应尽量避免的。

摘要一般在文章初稿写完后才撰写。写摘要时，要重新开始构思句子，用与文章主体部分不同的语言结构来概括文章所提供的主要信息，让读者在读完摘要后进入文章时依然有耳目一新之感。

摘要一般一个段落即可，通常包含一百到三百个单词。在保证传达足够信息的前提下，摘要越短越好，越精练越好；不要花时间去描述细节。

1.2.1 一些好的例子



Pierre-Louis Lions

下文我们将看看一些标准的摘要。摘要当然不需要千篇一律，可以有很多样式。一般来说，纯数学的论文许多只是以证明一个主要定理为目的，故其摘要不必太长；而应用或计算数学的文章包含理论、方法和计算实验，考虑的方方面面较多，摘要上有时就要费点心思。我们不妨先读读两篇著名论文的摘要。第一篇的作者之一是 2006 年菲尔兹奖获得者陶哲轩，而第二篇的作者之一为 1994 年菲尔兹奖获得者 Pierre-Louis Lions。

例 1.15 (*Annals of Mathematics*, **167**, 2008, p. 481).

Title. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions

Abstract. We prove that there are arbitrarily long arithmetic progressions of primes. There are three major ingredients. The first is Szemeredi's theorem, which asserts that any subset of the integers of positive density contains progressions of arbitrary length. The second, which is the main new ingredient of this paper, is a certain transference principle. This allows us to deduce from Szemeredi's theorem that any subset of a sufficiently pseudorandom set of positive relative density contains progressions of arbitrary length. The third ingredient is a recent result of Goldston and Yildirim. Using this, one may place the primes inside a pseudorandom set of "almost primes" with positive relative density.

题目： 所有素数包含任意长等差数列

摘要： 本文将证明有任意长素数等差数列。文中有三个主要组成部分。第一个是 Szemeredi 定理，它断言具有正密度的整数子集包括任意长的数列。第二个为某个转移原则，它是本文主要的创新成分。我们将从 Szemeredi 定

理推出，任一个足够伪随机集的具有正相对密度的任何子集包含有任意长的等差数列。第三部分是 Goldston 和 Yildirim 的最新结果。利用它能把所有素数放进一个具有正相对密度的“几乎素数”伪随机集。 ♦

例 1.16 (*Annals of Mathematics*, **130**, 1989, p. 321).

Title. On the Cauchy problem for Boltzmann equations: Global existence and weak stability

Abstract. We study the large-data Cauchy problem for Boltzmann equations with general collision kernels. We prove that sequences of solutions which satisfy only the physically natural a priori bounds converge weakly in L^1 to a solution. From this stability result we deduce global existence of a solution to the Cauchy problem. Our method relies upon recent compactness results for velocity averages, a new formulation of the Boltzmann equation which involves nonlinear normalization and an analysis of subsolutions and supersolutions. It allows us to overcome the lack of strong a priori estimates and define a meaningful collision operator for general configurations.

题目： 玻尔兹曼方程的柯西问题：大范围存在性和稳定性

摘要： 我们研究带有一般碰撞核的玻尔兹曼方程的大数据柯西问题。我们证明仅满足物理自然先验界的解序列 L^1 弱收敛到一个解。从这个稳定性结果，我们推断柯西问题解的大范围存在性。我们的方法是根据速度平均的最新紧性结果，涉及非线性正规化的玻尔兹曼方程的一个新的公式，以及次解和超解的分析。它使我们能够克服缺乏强先验估计的困难，并总体地为一个有意义的碰撞算子作出定义。 ♦

我们在下面举出更多的例子，有些地方作出了评述，供读者参考。

例 1.17 (*Journal of the American Mathematical Society*, **9**, 1996, p. 605).

Title. Splittings of surfaces

Abstract. The main result characterizes small actions of surface groups on **R**-trees (文章贡献).

题目： 曲面的分裂

摘要： 主要结果刻画了曲面群在 **R**-树上的小作用。

这篇十二页论文证明了作者 1990 年宣布的一个定理，故摘要也一语中的，非常精练。 ♦

例 1.18 (*Transactions of the American Mathematical Society*, **186**, 1973, p. 481).

Title. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations

Abstract. A class of piecewise continuous, piecewise C^1 transformations on the interval $[0, 1]$ is shown to have absolutely continuous invariant measures.

题目： 关于逐段单调变换不变测度的存在性

摘要： 本文证明区间 $[0, 1]$ 上的一类逐段连续、逐段 C^1 的变换有绝对连续不变测度。

该经典论文证明了一个定理，主要结果在一句话的摘要中说得清清楚楚、简明扼要。 ♦

例 1.19 (*Proceedings of the American Mathematical Society*, **129**, 2001, p. 1207).

Title. On the definition of viscosity solutions for parabolic equations

Abstract. In this short note we suggest a refinement for the definition of viscosity solutions for parabolic equations (文章的目的). The new version of the definition is equivalent to the usual one and it better adapts to the properties of parabolic equations (主要结果). The basic idea is to determine the admissibility of a test function based on its behavior prior to the given moment of time and ignore what happens at times after that (思想方法).

题目： 关于抛物方程黏性解的定义

摘要： 在这篇短文中我们对抛物型方程黏性解的定义有精细化的理解。新定义与通常的那个等价，但它更适应抛物型方程的属性。新定义的基本思想是基于一个试验函数在既定时刻之前的行为来确定它的可受理性，而在那时刻后发生的事则一概忽略。

摘要里指出了文章的目的、新定义的优点以及其背后的基本思路。 ♦

例 1.20 (*Journal of Computational Physics*, **31**, 1994, p. 607).

Title. Nonlinearly stable compact schemes for shock calculations

Abstract. In this paper the authors discuss the applications of high-order compact finite difference methods for shock calculations (文章的目的). The main idea is the definition of a local mean that serves as a reference for introducing a local nonlinear limiting to control spurious numerical

oscillations while keeping the formal accuracy of the scheme (方法的主要思想). For scalar conservation laws, the resulting schemes can be proven total variation stable in one-space dimension and maximum norm stable in multispace dimensions (一些理论结果). Numerical examples are shown to verify accuracy and stability of such schemes for problems containing shocks (计算结果和目的). The idea in this paper can also be applied to other implicit schemes such as the continuous Galerkin finite element methods (可能的推广).

题目： 激波计算的非线性稳定紧格式

摘要： 作者在文章里讨论高阶紧有限差分法在激波计算中的应用。主要思想是局部平均的定义，它用以引进控制伪数值振荡而保持格式形式精度的局部非线性限制。可以证明，所产生的格式对标量守恒律而言，在一维空间情形是全变差稳定的，在多维空间情形是最大范数稳定的。给出的数值例子对产生激波的问题验证了这些格式的精确度和稳定性。本文的思想也可用于像连续伽辽金方法这样的其它隐式格式。

这是一个标准的论文摘要，从目的、方法、理论和实验结果，可能的范围都谈到了，并且用词也较简单明了。 ♦

例 1.21 (*SIAM Journal on Numerical Analysis*, **36**, 1999, p. 719). **Title.** A fast and accurate numerical scheme for the primitive equations of the atmosphere

Abstract. We present a fast and accurate numerical scheme for the approximation of the primitive equations of the atmosphere (文章要干什么). The temporal variable is discretized by using a special semi-implicit scheme which requires only to solve a Helmholtz equation and a nonlocal Stokes problem at each time step; the spatial variables are discretized by a spectral-Galerkin procedure with the horizontal components of vectorial spherical harmonics for the horizontal variables and Legendre or Chebyshev polynomials for the vertical variable (解决问题的具体方法). The new scheme has two distinct features: (i) it is unconditionally stable given fixed physical parameters, and (ii) the Helmholtz equation and the nonlocal Stokes problem which need to be solved at each time step can be decomposed into a sequence of one-dimensional equations (in the vertical variable) which can be solved by a spectral-Galerkin method with optimal computational complexity (主要贡献，即提出的新方法的主要优点).

题目： 大气原始方程的一个快速精确数值格式

摘要： 我们提出用于逼近大气原始方程的一个快速精确数值格式。时间变

量每一步用一个只需要解一个亥姆霍兹方程和一个非局部斯托克斯问题的特殊半隐式格式来离散化；空间变量由一个谱–伽辽金程序来离散化，其水平分量是用于水平变量的向量球面谐波，垂直分量为勒让德或切比雪夫多项式。新格式有两大明显特色：(i) 给定物理参数，它是无条件稳定的；(ii) 每一时间步要求解的亥姆霍兹方程和非局部斯托克斯问题能分解成一系列一维方程（垂直变量），它们可由具有最优计算复杂性的谱–伽辽金程序来求解。

在摘要里突出 (highlight) 方法的特点，使读者一下子知道新方法的优点，会使有兴趣的读者对整个文章产生兴趣。 ♦

例 1.22 (*SIAM Journal on Numerical Analysis*, **38**, 2000, p. 98).

Title. The fast multipole method I: Error analysis and asymptotic complexity

Abstract. This paper is concerned with the application of the fast multipole method (FMM) to the Maxwell equations (文章要干什么). This application differs in many aspects from other applications such as the N-body problem, Laplace equation, and quantum chemistry, etc (此问题和其它问题不同). The FMM leads to a significant speed-up in CPU time with a major reduction in the amount of computer memory needed when performing matrix-vector products. This leads to faster resolution of scattering of harmonic plane waves from perfectly conducting obstacles (这一研究引出的好处). Emphasis here is on a rigorous mathematical approach to the problem. We focus on the estimation of the error introduced by the FMM and a rigorous analysis of the complexity ($\mathcal{O}(n \log n)$) of the algorithm. We show that error estimates reported previously are not entirely satisfactory and provide sharper and more precise estimates (主要贡献，主要在理论方面).

题目： 快速多极子方法 I：误差分析与渐近复杂性

摘要： 本文涉及快速多极子方法 (FMM) 在麦克斯韦方程中的应用。此应用与其它应用在许多方面不一样，如 N-体问题、拉普拉斯方程、量子化学等等。FMM 导致 CPU 用时显著减少，大大减少计算机执行矩阵–向量相乘所需的内存空间。这导致来自完全传导障碍的调和平面波散射的更快求解。这里的着重点是对问题的严格数学处理。我们侧重于 FMM 带来的误差估计以及算法 ($\mathcal{O}(n \log n)$) 复杂性的严格分析。我们证明，以往报告的误差估计不完全令人满意，因而我们提供好得多并更精确的估计。

这也是一篇标准的摘要，关键词句 is concerned with, differs in many aspects from, leads to, emphasis is on, focus on, reported

previously are not entirely satisfactory, provide sharper and more precise 等等，刻画出文章一个整体的梗概。 ♦

1.2.2 应注意事项

第一，尽量避免在摘要里面出现数学符号，特别是一整行的数学公式。尝试用叙述性的语言来组织你的文章摘要。这对应用数学的文章尤其重要。

例 1.23. Abstract. In this paper, we consider the hyperbolic conservation laws

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0$$

and the viscous conservation laws

$$u_t^\epsilon + f(u^\epsilon)_x = \epsilon u_{xx}^\epsilon, \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0.$$

It will be proved that the error between u and u^ϵ is bounded by $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$ in the L^1-norm. If $f'' > 0$ and u is piecewise smooth, then the error bound can be improved to $\mathcal{O}(\epsilon)$.

摘要： 在这篇文章里我们考虑双曲守恒律:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0$$

及黏性守恒律:

$$u_t^\epsilon + f(u^\epsilon)_x = \epsilon u_{xx}^\epsilon, \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0.$$

我们将证明 u 和 u^ϵ 之间的误差在 L^1-范数下有上界 $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$。若 $f'' > 0$ 且 u 是逐片光滑的，则误差界改善为 $\mathcal{O}(\epsilon)$。

用下面的叙述，我们就能避免数学公式，并能表达同样的意思。

Abstract. It is proved that for scalar conservation laws the rate of convergence of viscosity solutions to the inviscid solution is one-half. If the flux function is strictly convex, and if the entropy solution is piecewise smooth, then the rate is improved to one.

摘要： 本文证明对标量守恒律，黏性解收敛到非黏性解的收敛阶是 1/2。如果流函数是严格凸的，且熵解逐片光滑，则它改善为 1。 ♦

第二，一些摘要里需要引用别人的文章（比如说你的研究是某一篇文章的延续，或某文的结果是你这篇文章的重要源泉），那么你可以在摘要里提及。但不要只写上引文在参考文献里的序号（比如说 [10]，虽然 [10] 在参考文献里会标示）。这是因为一篇文章的摘要

经常会被单独拿出来（比如说在研究基金的申请材料里，在一些杂志的网页里），而这时候参考文献并不会跟随在后。因此，如确实需要，应标明引用文章的全部信息（除了文章的标题）。举例如下：

例 1.24 (*SIAM Journal on Numerical Analysis*, **33**, 1996, p. 1484).
Title. Local error estimates for the Galerkin method applied to strongly elliptic integral equations on open curves

Abstract. Saranen [*Math. Comp.*, 48 (1987), pp. 485 – 502] proved local estimates in Sobolev norms for the Galerkin method applied to strongly elliptic equations on smooth closed curves in the plane. We extend his results to the case of open curves. Of particular interest are weakly singular and hypersingular integral equations on a slit. An interesting outcome from our result is that we can judge the orders of convergence of the local errors in some norms that do not exist in the global sense.

题目： 伽辽金方法用于开曲线上强椭圆型积分方程的局部误差估计

摘要： Saranen [*Math. Comp.*, 48 (1987), pp. 485 – 502] 对于光滑闭曲线上的强椭圆型方程的伽辽金方法证明了索伯列夫范数下的局部误差。我们将他的结果推广到开曲线。特别有趣的是裂缝上的弱奇异和超奇异积分方程。本文结论的一个有趣应用是，在某些范数下不存在全局意义上的局部误差，但我们可以判断其收敛的阶。

本文是要推广 Saranen 文章的结果，所以一开始就指出 Saranen 文章的研究成果非常合理。 ♦

例 1.25 (*SIAM Journal on Scientific Computing*, **23**, 2001, p. 1000).
Title. The random projection method for stiff detonation capturing

Abstract. In this paper we present a simple and robust random projection method for underresolved numerical simulation of stiff detonation waves in chemically reacting flows. This method is based on the random projection method proposed by the authors for general hyperbolic systems with stiff reaction terms [W. Bao and S. Jin, *J. Comput. Phys.*, 163 (2000), pp. 216 – 248], where the ignition temperature is randomized in a suitable domain. It is simplified using the equations of instantaneous reaction and then extended to handle the interactions of detonations. Extensive numerical experiments, including interaction of detonation waves, and in two dimensions, demonstrate the reliability and robustness of this novel method.

题目： 捕获刚性爆轰波的随机投影法

摘要： 在这篇文章里我们提出用于化学反应流中刚性爆轰波数值模拟的一

个简单却功能强的随机投影法。此法基于作者提出的对付具有刚性反应项的一般双曲系统的随机投影法 [W. Bao and S. Jin, *J. Comput. Phys.*, 163 (2000), pp. 216 – 248]；在那里点火温度在一个合适的区域被随机化。利用瞬时反应方程简化然后推广到处理爆轰反应。二维情形广泛的数值实验，包括爆轰波反应，证明了这个新方法的可靠性和鲁棒性。

本文的作者引用自己以前文章的方法，所以在摘要里把该篇文章引述出来是合乎情理的。引自己的文章，正确的用法是 proposed by the author(s)。 ♦

第三，文章的摘要里要点出文章的主要研究成果，这会引起别人对文章中研究成果的注意。也就是说，把你的结论部分简明扼要地点出来，并尽可能给予充分的信息，而有些句子，如：

– A numerical comparison of these methods is presented
  展示了这些方法的一个数值比较

和

– Some numerical experiments have been carried out
  进行了一些数值实验

不能给予读者足够的信息。除非是综述性的文章，否则摘要里一定要指出你的文章有新的贡献（新的理论、新的方法、新的发现等）。有些已经发表的文章，摘要看起来还是太简单。比方说：

例 1.26 (*Journal of Computational Mathematics*, **11**, 1993, p. 178).
Abstract. This paper develops an optimal-order multigrid method for the TRUNC plate element.

摘要： 本文为 TRUNC 板单元开发一个最优阶多重网格法。 ♦

例 1.27 (*Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **7**, 2001, p. 801).
Abstract. The method of generalized quasilinearization is extended to semilinear degenerate elliptic boundary value problems.

摘要： 推广广义拟线性化方法到半线性退化椭圆型边值问题。 ♦

以上的摘要似乎过于简单，使读者难于掌握文章的具体价值。如果只读摘要，读者不能理解文章所用的方法及得出的结论。

第四，摘要最好不要以像 In this paper 或 This paper 这类的短语开头。这些短语完全多余，因为它们没有任何实质内容。但是，它

们经常出现在许多文章的摘要里，如本节里的个别例子。为防止此类现象发生，一些期刊在作者须知里标明禁止在摘要中使用这些短语。

如果摘要非常短，比如只有两到三个句子或一个段落，叙述时最好只用一个固定的人称，并以使用第三人称较为普遍。较为详细的摘要，则不必拘泥于此，如上面的例 1.2.11。但是一般而言，在摘要里尽可能不要混用第一人称和第三人称，尤其在同一个段落里；最好只使用第三人称。最理想的做法是在整篇文章中也不混用各种人称。

最后, 摘要里面的语言要简单清楚，尽量用短句，而不要写太长太难懂的句子。很多杂志的题目和摘要可能被翻译成多种语言，太难读的长句子会增加错误翻译的可能性。另外，任何一篇文章都要避免错别字，摘要部分尤其重要。既要避免叙述上的不准确，也要避免英语文法的错误。摘要或引言中出错，会给审稿人和读者一个作者写作过于粗糙的印象。

作为本节的总结，我们指出摘要是文章的心脏。它一般要回答：

(1) 本文要干什么？本文涉及的问题是什么？
(2) 研究的问题如何解决？研究方法是什么？
(3) 主要的结果是什么？问题彻底解决还是部分解决了？
(4) 研究结果的意义？对科学或对读者有多大帮助？

对读者来说，一个好的摘要必须清晰明了，它应该简明扼要地阐述文章的结果和亮点，并可让读者

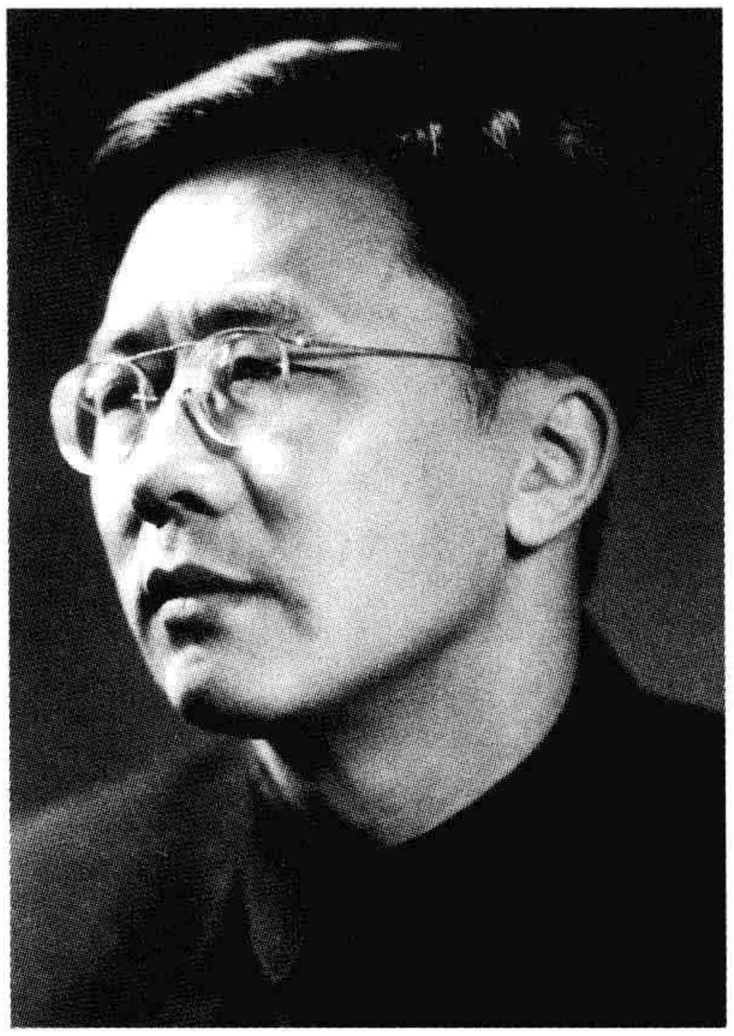
(1) 判断文章对自己是否有意义，是否有必要读下去；
(2) 知道文章的难易程度。

而对作者来说，文章的摘要

(1) 易于被读者搜索到（因为摘要比标题含有更多的关键词）;
(2) 把文章的贡献更进一步（相对于题目）或更清晰地描述出来。

1.3 引言

词汇是文章的建筑材料，犹如建造房屋的砖块。优美的语言让内容丰富的文章锦上添花。正如唱功再好的京剧演员也需要化妆得体，一篇文章，不管结果多么好，都需要一定的包装，而包装的一个主要部分就是引言。好的科技期刊尤其注重文章引言的质量。引言应该比较全面、准确并且客观地介绍文章中将要讨论问题的背景材料和简要发展，人们（包括自己，如果以前做过这方面的工作）对此已做的相关贡献，写这篇文章的动机，以及本文的主要结果。一般来说，引言部分要相对简明扼要，几百个词即可，但又不能过于简单或片面。



华罗庚

引言的客观性非常重要。一方面，作者对自己工作的概括叙述要适中，对自己工作的评价要掌握分寸，语气要平和，切忌自我吹嘘，如下面的句子

- Our new result is extremely important toward the proof of von Neumann's conjecture

  我们的新结果对于冯 · 诺依曼猜想的证明是极其重要的

就可能是夸大之言。正如华罗庚 (1910—1985) 曾告诫的：文章在自己，评价在别人。另外，不要随便贬低别人的研究。在引用他人的论文贡献时，尤其在比较结果时，不要咄咄逼人地批评别人，充当裁判。评判别人的事可以留到写审稿报告或书评时再做。总之，在写文章时，语言上的绅士风度会给你赢来同行的尊敬。如果你看到下面句子中的文献 [3] 就是你自己发表的论文，你就会理解写文章时为什么要谦虚谨慎：

- The result of this paper is most general, a trivial consequence of which is the main result of [3].

  这篇文章的结果是最具普遍性的，它的一个平凡推论是 [3] 的主要结果。

即便发现了别人的文章有错，在指出时也要语气委婉，切忌盛气凌人、锋芒毕露，如

- The conclusion of the main theorem of [3] is completely wrong, because the key inequality in the proof is unfortunately not correct.

  [3] 的主要定理的结论完全不对，因为证明中的关键不等式不幸是错误的。

还有一点需要指出的是，引言中不要把其他人甚至自己以前的文章句子原封不动地直接移植过来。如果整段整段地照抄不误，就会造成不能容许的学术道德问题。当我们引用别人的句子时，一定要加上引号，注明出处，并把被引用的原始论文或专著放在参考文献当中。和抄袭有关的话题在第三章第六节中还会重点提出来讨论。

1.3.1 引言的开首

就像约会的男女会被对方的第一印象所左右，一篇文章的第一段话是极其重要的。“好的开端就是成功的一半”这句格言也适用于文字的表达。绝妙的文章首句就像磁铁一样吸引读者，令他们毫不犹豫地继续读下去。如果文章一开始就出现这样或那样的毛病，特别是交代不清或概念模糊，即使该文的数学结果再漂亮，也可能会失去一部分潜在的读者。

最糟糕的（也是时常看到的）的开头可能是先给出一堆数学符号和定义，这种做法主要出现于纯数学文章里，因这类文章用到的概念和记号可能较多，需要在开始时加以引进。但是一般而言行文时应该避免在开头就罗列令人生烦的符号定义。最好的引言应该这样开始：先作一些较为通俗浅显的描述，这样会给读者一个容易的起头，以便他们轻松自如、有条不紊地登堂入室，进入角色，并能提高继续读下去的兴趣。当读者在文章主体中碰到数学符号和概念时就会从容不迫，轻松应对。这和后面将要讨论的怎样做数学演讲的原则是一致的。

文章引言一开始就应该把你所关心的问题提出来，开门见山、直奔主题，不要不着边际地叙述与文章的中心关系不大的事物。要用直截了当、浅显易懂的语言把问题指出来。比如一篇关于华林问题推广的文章是如此开始的：

例 1.28 (*Transactions of the American Mathematical Society*, **358**, 2006, p. 5523).

Title. Singularities of linear systems and the Waring problem

Introduction. Edward Waring stated in 1770 that every integer is a sum of at most 9 positive integral cubes, also a sum of at most 19 biquadrates, and so on. Later on Jacobi and others considered the problem of finding all the decompositions of a given number into the least number of powers, [Di]. In this paper we are concerned with a

similar question for general homogeneous forms.

题目： 线性系统的奇点和华林问题

引言： 1770 年爱德华 · 华林说每一个整数都是 9 个非负整数的立方和，也是 19 个整数的四次方之和，等等。后来雅可比及其他人考虑了这一问题：找到将一给定整数写成项数最少的幂次和的所有分解[Di]。在本文里我们所关注的是有关一般齐次形式的类似问题。

这三句开场白简单易懂，从古典华林问题，到雅可比的整数分解问题，到作者要研究的更抽象问题，三言两语便道出了文章的意图。 ♦

下一例是关于多重网格的一篇文章的开头：

例 1.29 (*Computing*, **56**, 1996, p. 215).

Title. Optimal multigrid preconditioning

Introduction. Among various techniques for solving partial differential equations, multigrid methods have proven to be one of the most efficient approaches. The efficiency of those methods, however, depends crucially on appropriate underlying multilevel structures. As such multilevel structures are not naturally available in most unstructured grids, multigrid methods are in general not easy to apply.

题目： 最优多重网格预处理

引言： 在解偏微分方程的各种技术中，多重网格法已被证明是最有效的处理方法之一。然而，这些方法的有效性本质上依赖于合适的基础多层结构。因为在大部分非结构化网格中这样的多层结构不能自然获得，多重网格法一般来说不易使用。

这样一开头就把你所关心的问题和困难指出来了。 ♦

下一篇文章的开头也引人入胜地交代了文章的写作目的：

例 1.30 (*BIT*, **23**, 1983, p. 209).

Title. How and how not to check Gaussian quadrature formulae

Introduction. The preparation of this note was prompted by the appearance, in the chemistry literature, of a 16-digit table of a Gaussian quadrature formula for integration with measure $d\lambda(t) = \exp(-t^3/3) \cdot dt$ on $(0, \infty)$, a table, which we suspected is accurate to only $1 \sim 2$ decimal digits. How does one go about convincing a chemist, or anybody else for that matter, that his Gaussian quadrature formula is seriously defective?

题目： 怎样检查或不检查高斯求积公式

引言： 化学文献中出现的 $(0,\infty)$ 上关于测度 $d\lambda(t)=\exp(-t^3/3)dt$ 积分的一个十六位数字高斯求积公式表促使我们写成这篇注记。我们疑心这张表只有一到二位小数点的精确度。谁能让一个化学家或类似的人信服他的高斯求积公式有严重缺陷?

这样的开头一开始就让读者明白作者关心的问题所在，也让读者决定是否有兴趣读下去。尤其是最末的一句反问，给读者留下极为生动的印象。 ♦

前面谈过，引言的一开头就引进数学符号不太好，但有时适当地给出一些一目了然的简单符号可使后面的行文变得容易。下面就是一个这方面的例子。

例 1.31 (*Mathematics of Computation*, **33**, 1979, p. 1289).

Title. Estimating the largest eigenvalue of a positive definite matrix

Introduction. Let A be a positive definite matrix of order n with eigenvalues $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ corresponding to the orthonormal system of eigenvectors $x_1, x_2, \ldots, x_n$. In some applications, one must obtain an estimate of λ_1 without going to the expense of computing the complete eigensystem of A. A simple technique that is applicable to a variety of problems is the power method.

题目： 估计正定矩阵的最大特征值

引言： 令 A 为一正定矩阵，具有特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$，且对应的正交归一特征向量系统为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$。在一些应用中人们必须得到 λ_1 的一个估计，而不以计算 A 的完全特征系统为代价。可用于各种各样问题的一个简单技术是幂方法。

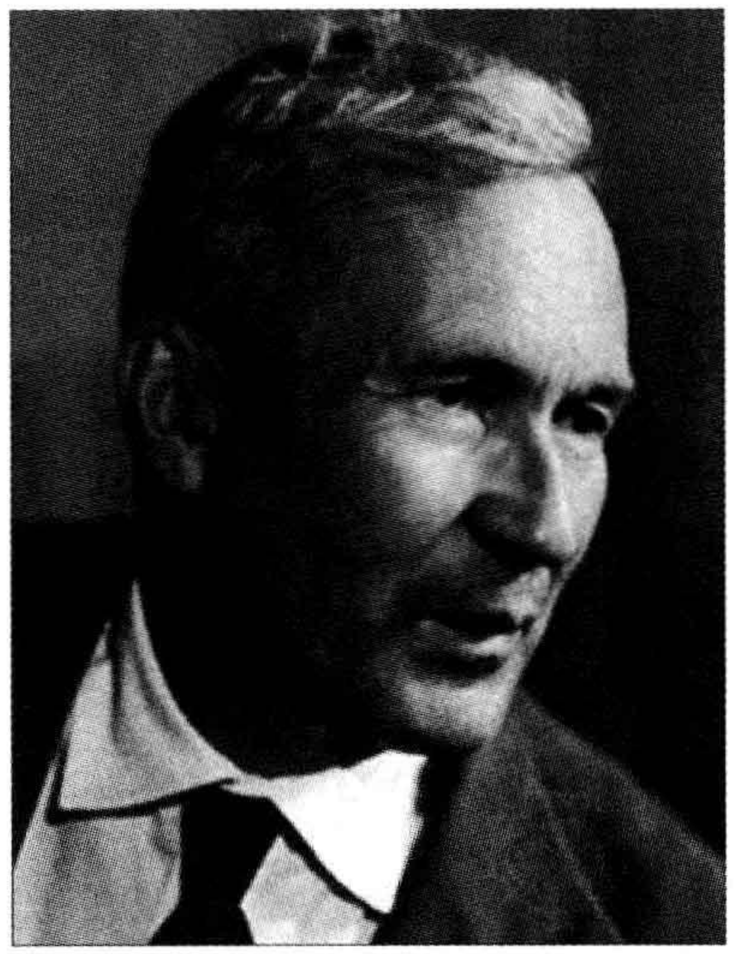
在上面引文接下来的四句话里，作者给出了幂方法的定义，说明这一方法的理论已经被很好地理解，并注意到这一方法的收敛性依赖于两个因素。然后分析了这两个因素。这样的开头直奔主题，没有多余的话。 ♦

总而言之，花点时间好好想一想怎样将引言的第一段写得引人入胜是完全值得的。这个引言的开头部分必须实事求是、清楚明确，**避免**大话、套话。它应该漂亮到让已被吊起胃口的读者继续向引言的中间奔去。

1.3.2 引言的中间

这一部分有多种写法，全凭作者自由发挥，但一般说来包含以下几个方面：

(1) 定义问题 (define the problem)；
(2) 解释准备解决什么问题 (explain what attempts to do)；
(3) 总结以前取得的主要成果及不足之处 (summarize the results achieved, progress made and problems unsolved)；
(4) 简介一下你解决问题主要的手法 (outline the plan of attack)。



Andrey Nikolaevich Kolmogorov

除极少数天才式的开创性研究以外 [例如柯尔莫果洛夫 (Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903—1987) 有十五篇论文没有任何参考文献]，一般的科技论文都是建立在已有研究的基础之上，如一个定理在不同层面下的推广、一类方法的改进或推广、某个算法的收敛性证明以及收敛速度估计，或其它。总结以前取得的主要成果——也就是说简单地回顾和本文相关的研究和发展——是相当必要的。在这里一定要提到最主要和最相关的文献，这也间接地表示你对相关研究的了解，因此你的研究并不是在重复他人的研究。

这一部分也不要过分东拉西扯，说些与自己的研究无直接关系的历史发展。回顾部分主要是回顾和本文密切相关的工作和成果，特别应提及那些下文将要用到的主要结果和方法。

指出写作的动机 (motivation) 和目的 (purpose) 也是很必要的。以前研究的不足、遗漏，目前的处理方法不够合理、不够有效或不够简单，都可能成为你写作的原因。实际的写作原因当然不限于此，但这里你需要为写作提供一个合理而主要的原因。下面我们提供几个简单的例子。

例 1.32 (*Proceedings of the American Mathematical Society*, **134**, 2006, p. 3268).

Title. A Weyl type formula for Fourier spectra and frames

The main purpose of this paper is (给出目的) to prove a Weyl type estimate (see e.g. [9, Ch. 5] for a description of the classical Weyl asymptotics in the context of Riemannian manifolds (历史渊源)) for $\#\{\Lambda \cap R \cdot K\}$, where K is a convex body in $\mathbb{R}^d$, symmetric with

respect to the origin, in the case when E_Λ is an orthogonal basis for $L^2(\Omega)$. In analogy with the classical Weyl formula we ask whether

$$\#\{\lambda : \|\lambda\|_K \leq R\} = c_{\Omega,\Lambda} R^d + o(R^d),$$

where $\|\cdot\|_K$ is the norm induced by K (提出问题).

It turns out that the answer is yes, and under some additional assumptions we obtain more quantitative estimates on the error term. We shall see that our estimates imply both (1) and (4) at the same time, thus presenting a unified description of geometric properties of spectra (主要结果).

题目： 傅里叶谱和框架的外尔型公式

本文主要结果是在 E_Λ 为 $L^2(\Omega)$ 一正交基的情形证明了关于 $\#\{\Lambda \cap R \cdot K\}$ 的一种外尔型估计（例如，黎曼流形背景下的经典外尔渐近可见 [9，第五章]），其中 K 是 $\mathbb{R}^d$ 中关于原点对称的一个凸体。与古典外尔公式相似，我们试问

$$\#\{\lambda : \|\lambda\|_K \leq R\} = c_{\Omega,\Lambda} R^d + o(R^d)$$

是否成立，其中 $\|\cdot\|_K$ 是 K 所诱导的范数。

事实证明，答案是肯定的，并且在某些额外假设下我们得到关于误差项更多的定量估计。我们将看到，这些估计同时隐含 (1) 和 (4)，因而给出了谱几何性质的一个统一描述。 ♦

例 1.33. ... However, in spite of quite a number of contributions dealing with these effects, there are no calculations taking into account all influences. To fill this gap (这里给出了原因), we present a highly accurate numerical method ...

..... 然而，尽管在处理这些效果上有相当多的贡献，没有计算把所有影响考虑在内。为填补这些空白，我们推出一个高精度数值方法 ..... ♦

例 1.34. In this work we will propose a boundary element method for solving the linear Poisson-Boltzmann equation for two proteins based on a single-layer formulation of the equations. This gives a simpler set of equations on the boundary and hence a more efficient starting point for solving them than the direct formulation of the boundary integral equations based on Green's theorem used in previous studies (这里给出了原因). More importantly, this will allow us to use a

method based on the cell multipole algorithm to rapidly evaluate the force and ...

在这项工作里我们将提出一个基于方程单层形式求解两个蛋白质的线性泊松–玻尔兹曼方程的边界元方法。这给出边界上的较简单方程组，因而为求解它们给出比先前研究中采用的基于格林定理的边界积分方程更有效的一个出发点。更重要的是，这将容许我们利用基于细胞多极子算法的方法来迅速评估受力和 ····· ♦

总而言之，引言的中间应该概括文章的主要贡献、可能达到的有意义的结果，以及得到这些结果的方法和技巧。这个部分应当实事求是，**避免**过于花哨。

1.3.3 引言的结尾

除非文章比较短，或作者不拘一格地在引言中间灵活机动地插入各节大意（参考例 1.3.5），否则我们建议在引言的结尾处简单地叙述本文的组成部分。一般的作法是对于文章引言后面的每一节内容写上一句话，概括地告诉读者这一节是干什么的，一般以

- An outline of this paper is as follows
  文章的概要如下

或者是

- This paper is organized as follows
  文章组织如下

或同类句型来作为引言末段的第一句。

这一部分最好不要把每一节的题目简单地罗列在一起，这种做法不光是偷懒之举，而且有重复之嫌。应该用不同的语句给出每一节大意一个简单的小结。下面举几个例子。

例 1.35 (*Transactions of the American Mathematical Society*, **357**, 2005, p. 3462).

Title. How to obtain transience from bounded radial mean curvature

1.3. Outline of the paper. We devote Section 2 to a discussion of those aspects of warped products and model spaces which will be instrumental for our comparison analysis. The general setup for the comparison techniques is then constructed in Section 3. The basic

comparison inequalities for the Laplacian are reviewed in Section 4, and in Sections 5 and 6 we define the capacity of general domains and explicitly calculate the modified (drifted) capacity of radially symmetric domains in model spaces. A first glimpse of the ensuing comparison result is given in Example 6.4. The local version of our main result is then established in Section 7. Finally the proofs of Theorem A and its corollaries are presented in Sections 8 and 9, respectively.

题目： 怎样从有界径向平均曲率获得瞬态变化?

1.3. 文章概要： 第二节用来讨论扭曲积和模型空间有助于我们那些方面的比较分析。比较技术的一般设置将在第三节中建构。用于拉普拉斯算子的基本比较不等式将在第四节作一综述，而在第五、六节我们将定义一般域的容量并明确计算型空间里径向对称区域的修改（漂移）容量。随之而来的比较结果在例 6.4 中得到初步的检视。然后第七节建立了我们主要结果的局部形式。最后，定理 A 及其推论的证明分别在第八、九节展现。 ♦

例 1.36. The present paper is built up as follows. The physical, mathematical and numerical aspects of the Lagrangian scheme are treated in Section 2, while the extra features needed to incorporate the scheme into a monotonic multi-dimensional Euler's method are presented in Section 3. Numerical results for shock tube flow and for supersonic flow in a wind tunnel with a step are given in Section 4. Finally, Appendix A adds some mathematical and numerical support to the earlier discussion of the interaction of gas slabs, while Appendix B discusses various ways to find a representative slope value for a distribution inside a slab.

此文如下构成: 第二节处理拉格朗日格式有关物理、数学及数值的几个方面，而将此格式与单调多维欧拉法结合一起所需要的额外特性将在第三节中展示。激波管流和风洞超音速流的一步数值结果将在第四节中给出。最后，附录 A 中加上的是早先讨论的气砖相互作用之数学及数值支持，而附录 B 则讨论找到管内代表性斜率值分布的各种方法。 ♦

例 1.37. The paper is organized as follows. The variational form for w and extraction formula for λ are developed in Section 2. We establish the well-posedness of the variational form in Section 3; the finite element method and its error analysis are given in Section 4;

proofs of two lemmas involving lengthy computations are presented in Section 5.

文章组织如下：w 的变分形式及 λ 的提取公式将在第二节中开展。在第三节我们建立变分形式的适定性。有限元方法以及误差分析在第四节中给出。涉及很长计算的两个引理的证明则放到第五节内。 ♦

例 1.38. This paper is organized as follows. In Section 2, we outline the method of our numerical solution and define the various approximate theories that we shall consider. Results and the basis for choosing any particular approximation are summarized in Section 3, which can be read without knowledge of the details of our numerical method presented in Section 4. Numerical experiments are then presented in the final section, showing that our proposed approaches are both more robust and orders of magnitude more efficient than existing methods.

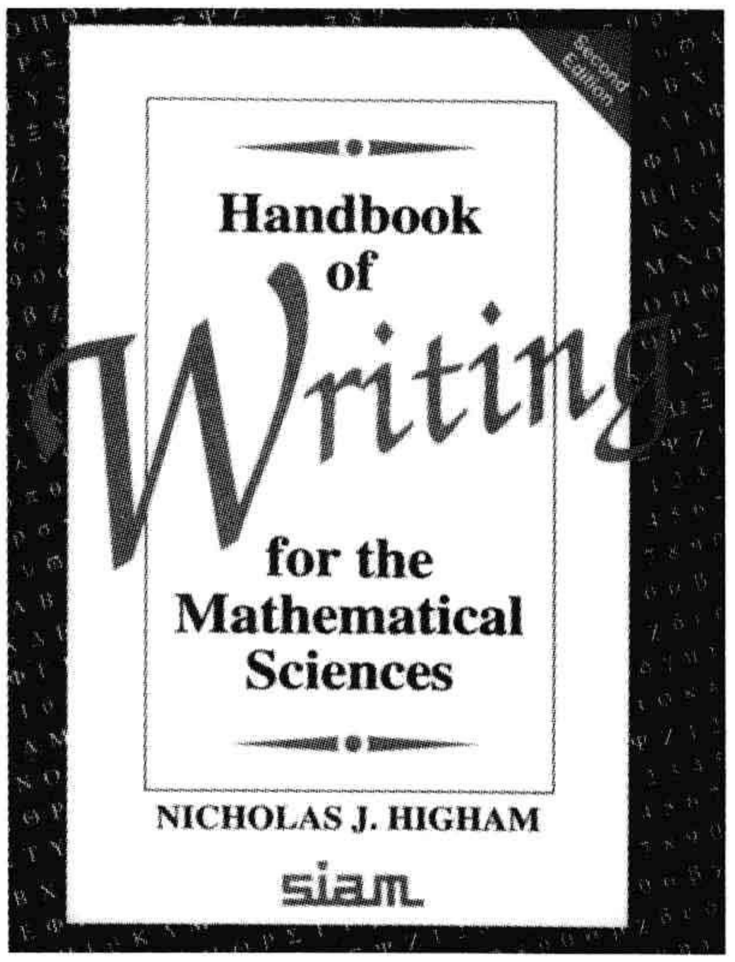
本文结构如下：第二节我们概述数值求解的方法并定义将要考虑的各种逼近理论。一些结果和选择特别逼近的依据在第三节总结。这些总结无须了解第四节中详细给出的数值方法就能阅读。最后一节呈现数值实验结果，它们显示我们提出的处理方法比现有的更有力且量级更有效。 ♦

以上的四个例子，大体上包括了引言部分结尾的 outline 部分。这一部分当然有其它写法，但基本上大同小异。应当指出，许多数学研究论文、尤其是纯粹数学领域的，不会如上形式化地结束引言节，而是不落俗套地展示结尾的多样性。另一方面，篇幅较长的研究性或综述性文章有时会像书一样标明目录，各章节的内容概要看上去一清二楚，就不必像这里在引言的末尾画蛇添足地说明章节内容。

总而言之，引言的结尾对每小节内容的概括应像报纸上的标题新闻那样醒目，但同时**避免**与后面的小节标题重复。

具体分析了引言中各个部分写作的基本要素后，我们再次强调引言应该没有多余的话，尽早把读者引入文章的核心。Higham 在他的 *Handbook of Writing for the Mathematical Sciences* ([14], 第 88 页) 一书中有个很好的建议。他说："改进引言的一个可行方法是删去第一句或前几句，因为它们常是无关紧要的泛泛之谈。" 他举的例子是：

– Polynomials are widely used as approximating functions in many areas of mathematics and they can be expressed in various bases. We consider here how to choose the basis to minimize the error



of evaluation in floating point arithmetic.

多项式在数学的许多领域里用来逼近函数，且能用各种各样的基底来表示。这里我们考察怎样选取基底以极小化浮点运算赋值的误差。

上述第一句是众所周知的常识，不必再提，第二句才说明文章试图解决的问题。Higham 把这两句话压缩成一句，并且用疑问句引起读者的好奇：

- In which basis should we express a polynomial to minimize the error of evaluation in floating point arithmetic?

  我们应当用什么基底来表示一个多项式以极小化浮点运算赋值的误差?

在开首时叙述人尽皆知的大道理或阐述自己研究的重要性、重大意义及多领域应用等是中国学者学术论文之引言部分常见的一个问题。希望上面的简单例子对我们有所启发。

有时，引言部分可以等到文章的主体部分完成后再补上，但一开始时可以先设定几项提纲，在写作过程中还可以不断添加一些注释及一些体会，供最后写引言部分时参考。优秀的引言可以帮助读者理解你的文章，同时也可协助你总结研究成果。通过引言的总结，你可以看出你的工作是否做出了贡献，是否可以带来后续研究。从这个角度来说，花点时间写好引言是非常值得的。

1.3.4 引言中的常见词

在数学论文中，有些词组和句型经常出现，我们在第二章也会介绍一些这样的词组和句型。这里我们简单介绍一下在引言中常见的一些词组及它们的惯常用法。

下面的词组和句型可能出现在引言的开头几段。

- ... methods have attracted considerable attention in the ... community, especially for the ...

  ····· 方法在 ····· 的研究群体中已引起极大的注意，特别对 ····· 而言。

- ... is still a controversial issue in the ... community.

  ····· 在 ····· 的研究群体中依然是一个争论之处。

- In recent years, there has been tremendous interest in developing ...
  近年来在发展 …… 方面已展现了极大的兴趣。
- In the past two decades, a great deal of mathematical effort in ··· has been devoted to the study of ...
  在过去的二十年中，大量的数学工作已用来研究 ……
- There have been extensive study and application of ...
  对于 …… 已有大量研究和应用。
- Limited work has been done in ...
  关于 …… 现有的工作相当有限。
- We are concerned in this paper with the ...
  本文我们关注 ……
- There has been renewed interest in this technique, originated by Smith 100 years ago, for ...
  对这个一百年前起始于 Smith 的技术用于 …… 方面已有复苏的兴趣。
- It should be pointed out that a number of issues related to ... are still unclear. For example ...
  应当指出，与 …… 有关的许多问题仍然不清楚。例如，……

下面的词组和句型可能出现在引言的讨论部分。

- A key issue for the ... study is the ...
  研究 …… 的关键点是 ……
- The main difficulties in ... are ...
  …… 的主要困难是 ……
- One of the most interesting and physically important features of ... is ...
  …… 最有趣并且在物理上最重要的特色之一是 ……
- This has been proven successful, for instance, in solving ...
  例如，这在求解 …… 方面已证明成功。
- There are some limitations to this approach to ...
  关于 …… 的这个处理有一些局限性。
- A related problem was studied by ...
  一个相关问题曾被 …… 探讨。

- The main purpose of this paper is to ...
  这篇文章的主要目的是 ·····
- There are two main motivations for the study of the ...
  研讨 ····· 有两个主要的动因。
- The objective of this paper is twofold. The first one is to ... The other is to ...
  本文有双重目的。一是 ····· 另一是 ·····
- An alternative to solving ... equation is to solve the following equation.
  求解 ····· 方程的另一途径是解下列方程。
- Alternative methods to derive ... are to use ...
  获得 ····· 的其它方法是用 ·····
- We emphasize that ...
  我们强调 ·····

作为本节的总结，我们指出引言是文章的四肢。好的引言应该关注四个为什么：

(1) 为什么现在要研究这个课题？(Why now? 即时效性)
(2) 为什么是这个问题？(Why this? 即有什么挑战性)
(3) 为什么用你提出的方法？(Why this way? 即你的方法的优越性)
(4) 为什么读者会对你的方法或结果感兴趣？(Why should the reader care? 即对读者的吸引力) 比如问题是否有新意；文章结果是否比别人的好，是否有新发现；所有工具是否有创新性；这些都有可能吸引读者。

1.4 主体

文章的主体是文章最重要的部分，它全面展现作者的研究成果和新结果的论证、推理过程，或新方法的构造过程和理论分析、数值实验。一般而言，文章的第一节“引言”和最后一节“结束语”之间的所有小节构成主体部分。

文章主体部分可以有多种组成结构，我们在下面分几种情形讨论。

1.4.1 理论性较强的文章

这一类文章一般可由以下几部分组成：

- Preliminaries（预备知识）
- Main results（主要结果）
- The outline of proofs（证明方法）
- Extensions（延伸）

Preliminary 部分主要是引进符号说明和概念定义。理论性强的文章抽象的记号 (notation) 比较多，有时也比较难理解，所以必须单独以一节篇幅详细加以引进和解释。在这一节里，有些已知的但对自己这篇文章很有用的结果可能也需要单独引出来，写成诸如引理 (lemma) 这样的形式。这样做是为下一节作准备，并能区别什么是你的文章的主要新结论，什么是以前的结果。

在文章下一节主要结果部分 (main results)，可以引出你的主要结论，并加以分析和讨论。为了使读者能理解你的结论的重要性，和你得出这些结论的主要思路，详细证明 (proofs) 不一定要马上加进来，它们可以放在再下一节或放在附录 (appendix) 里。

一些**注意事项**：

(1) 有些初学写作的作者在主要结论这一节里引出了太多的定理，部分十页篇幅左右的文章居然有十多个定理和引理，并且每个定理都加了太多的条件，这种文章读起来让人抓不住重点，提不起兴趣，最好是抓住一些重要的结论写成一、两个定理，至多三、四个，而把其它不重要的结论或推论省去，或仅略作讨论；

(2) 有些文章在给出定理的叙述之前作了较详细的推导，并在推导过程中引进了很多条件。可是把这些推导的结果写成定理时，常常会把这些条件忘掉。这是很不可取的。定理名下的东西，通常被看成是文章的主要成分，尤其是它的结论，但这些结论往往是在一些假设 (assumptions) 或条件 (conditions) 下成立的。所以在定理的叙述中要包含完整的条件和结论。

写作时还应该：

(1) **避免**使用太多的引理，除非是技巧性很强、证明很复杂的长文。一般文章三个引理已很足够了。有些假设、内容相差不远的引理可以“拼凑”在一起，将不同结果用数码 (i)、(ii) 或 1、2 等标出，减少不同引理中重复部分的书写。证明定理时需要用哪个部分就引用哪个部分；

(2) **避免**将所有引理放到一起。正确的做法是将它们依次置于证明时需用它们的定理之前，这样的好处是方便读者理解。

1.4.2 计算或应用数学的文章

这一类文章一般可由以下几个部分组成：

- The problem or governing equations (问题或主要方程)
- The numerical method or experimental method (数值方法或实验方法)
- Theoretical analysis (理论分析)
- Numerical results (数值结果)
- Conclusions (结束语)

一般来说，计算科学主要是针对一些典型的力学问题、工程问题或实际问题，比如说空气动力学、固体力学、弹性力学、生命科学、材料设计、结构优化等进行研究。这些问题总是和一些微分方程 (differential equation)、积分方程 (integral equation)、算子方程 (operator equation) 或数学规划 (mathematical programming) 联系在一起，所以应该有一节引入这些方程或问题，介绍相应的符号，并对方程里的未知函数和已知函数，或目标函数里的向量所对应的物理意义加以解释。有时，对你所考虑的特定问题，我们也有必要进行适当的方程简化，这些数学运算也可以在这一节完成。

例 1.39. The Poisson-Boltzmann equation for the electrostatic potential ψ in a symmetric $1:1$ electrolyte characterized by a Debye screening parameter κ has the form

$$\nabla^2 y = \kappa^2 \sinh y, \text{ outside the spheres,}$$
$$\nabla^2 y = 0, \text{ inside the spheres,}$$

where $y = ze\psi/(k_B T)$ is the scaled nondimensional potential.

由德拜筛选参数 κ 刻画的对称 $1:1$ 电解质中静电势 ψ 的泊松–玻尔兹曼方程具有形式

$$\nabla^2 y = \kappa^2 \sinh y, \text{ 球面外,}$$
$$\nabla^2 y = 0, \text{ 球面内,}$$

其中 $y = ze\psi/(k_B T)$ 是缩放无量纲势。 ♦

例 1.40. The existence and computation of absolutely continuous invariant measures associated with nonsingular transformations are two important problems in the application of ergodic theory to physical sciences. The density of such an invariant measure is a fixed point of the corresponding Perron-Frobenius operator. If S is a nonsingular transformation from a σ-finite measure space (X, Σ, μ) into itself, then the corresponding Perron-Frobenius operator $P_S : L^1 \to L^1$ is defined via

$$\int_A P_S f d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f d\mu, \ \forall\, A \in \Sigma$$

for all $f \in L^1$.

非奇异变换所对应的绝对连续不变测度的存在性与计算是遍历理论用于物理科学的两大重要问题。不变测度的密度是相关的佩龙–弗罗贝尼乌斯算子的不动点。若 S 是 σ–有限测度空间 (X, Σ, μ) 到其自身的一个非奇异变换，则对应的佩龙–弗罗贝尼乌斯算子 $P_S : L^1 \to L^1$ 对所有的 $f \in L^1$ 由下式：

$$\int_A P_S f d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f d\mu, \ \forall\, A \in \Sigma$$

定义。 ♦

对于一篇关于计算方法的文章, 数值格式 (numerical schemes) 这一节应该是当中的关键，而这一节的内容往往是你的文章的精华。但从写作的角度来说，这一节其实并不困难，因为它的内容比较具体。如果缺乏写作经验，可以参考相关文章的某些相关部分得到启发。

数值结果 (numerical results) 部分往往看起来容易，有图有表有数据，但计算和写作时都不一定容易。首先，选好用来计算的例子，是非常重要的。很多学术问题都有一些标准的参照问题 (benchmark problems)，选用这些例子时最好能选用那些有一定难度的。太简单

的问题（比如很多一维的算例）既难以说明问题，亦无法显示新提出的数值格式的优越性。最好的数值例子包含如下的关键信息：新的算法大大优于目前已有的其它算法。

很多关于数值方法的文章包含了数值实验的结果、观察和结论，其目的主要是要说明以下几个问题或其中的一部分：

(1) 有助于对计算方法本身有更深的认识；
(2) 通过计算结果和其它相关的结果进行比较；
(3) 确定理论预测结果的正确性；
(4) 有些计算格式里有些人为定义的参数 (user-defined parameters)，数值实验可以理解怎样选取这些参数；
(5) 考察某些软件的可行性和可靠性；
(6) 计算里发现一些比理论分析数值结果更好的东西，可能导致进一步理论分析及后续性工作。

比其它方法更准确、更好的计算结果绝对可以增加文章的价值，并能使审稿人尽快接受你的文章。适当地设计你的数值实验及有效地报告计算结果是非常有用的。

在数值结果的写作方法上，以下几点要值得注意：

(1) 描述数值实验过程时，要尽可能详细，把所用的参数值 (parameters) 和方法尽可能细致地描述出来，尽可能使读者在读完文章后可以重复计算出你的结果 (reproduce your results)；
(2) 尽可能用图 (figures) 或表 (tables) 来表述你的结果。如果可能，和以前的或其它方法的结果进行比较。最好能比较出不同之处，并能说明原因；
(3) 尽量使用一些大家都采用的算例。好的算例应该能反映出问题解的众多特性，并包含了解决问题时遇到的典型困难。它和实际问题应该联系很紧，最好是能知道精确解（当然最后一点一般情况下几乎是不可能的）；
(4) 最好能对数值实验进行一些评述：讨论你的计算结果（和方法）的优点；和别人结果（及方法）的比较；有什么有意义的观察 (observations)；和理论预测的关系等。最不好的做法是仅仅列出一些数据，而没有任何解释和分析；

(5) 还应该注意的是文章中**避免**使用太多的图。有的图可以合在一起以节省空间，并更利于数值结果相互比较。同样不需要列出太多的表，导出相同结论的表可以用一两个代表一下即可；

(6) 初学者最好先在对英文把关较严的期刊上，找到和你这一节相关的文章，观察一下别人是怎样写的。

1.4.3 报告计算结果的常见用法

在报告数值结果时，有些常用的说法。在下面我们将列举一些，仅供参考。首先是一些图或表的常用表达方式。相关的句子里经常有 show, give, display, present, illustrate 等单词。

例 1.41. Figure 2 shows the structure of the exact solution of this Riemann problem.

图 2 显示这个黎曼问题精确解的结构。 ♦

例 1.42. Results of these calculations are given (或 shown, presented, plotted) in Figs. 1 and 2.

这些计算的结果由图 1 和图 2 表示。 ♦

例 1.43. Fig. 6 shows a comparison between the integration methods versus the dimensional step size.

图 6 显示积分方法和维数步长之间的一个比较。 ♦

例 1.44. The two basis functions are distinct quadratic functions as illustrated in Figure 5.2.

两个基函数为相异的二次函数，如图 5.2 所示。 ♦

例 1.45. The density as a function of x is shown in Figure 3.2.

密度作为 x 的函数在图 3.2 中显示。 ♦

注意在上面的文字里，图有时用 Figure，有时用 Fig.。这两种用法都可以，但是在同一篇文章里必须保持一致。也就是说，如用 Figure，则整篇文章就不再混用 Fig. 这一缩写。另外，字母 F 必须大写。如同时有两张图，建议写成 Figs. 1 and 2 而不是 Fig. 1 and Fig. 2。

下面的描述稍微复杂一点，多了一些介绍背景或条件的词或句子，但模仿起来也并不难。

例 1.46. Figure 4.1 shows a computed solution to Burgers' equation using a high-resolution method with a time step that satisfies the CFL condition.

图 4.1 显示 Burgers 方程用时间步长满足 CFL 条件的高分辨率方法获得的一个计算解。 ♦

例 1.47. Computational results are shown in Figure 3.1, illustrating the oscillations that appear in this case, again with the first-order Godnunov method.

计算结果在图 3.1 中表示，说明在这一情形再次随一阶 Godnunov 方法出现的振荡。 ♦

例 1.48. These are seen much more clearly in Figure 3.2, which shows the same solution on a different scale.

这些在图 3.2 中更为清楚，显示在不同尺度下的相同解。 ♦

在比较图像时，有时会需要表达彼此很接近或相差得很远的结果。下面将提供几个例子加以说明。

例 1.49. Graphically, there is no observable difference between the interactions in these cases, showing that the effect of the presence of walls is not important under these conditions.

从图形上看这些情形没有相互作用之间的可观察差别，证实墙壁存在的影响在这些条件下并不重要。 ♦

例 1.50. As can be seen, there is a good agreement between the present result and the reference computation.

正如所见，目前的结果与参考的计算解之间相当吻合。 ♦

例 1.51. The streamlines for different values of the parameters, shown in Fig. 3, are in good agreement with the results published by Li et al. [6] and Zhang [8]. The difference on the separation points between our results and the results published in these two papers is less than 5%.

如图 3 所示，不同参数值的流线与李等人 [6] 以及张 [8] 发表的结果相当吻合。我们的结果和两篇论文发表的结果关于分离点的差异小于 5%。 ♦

我们常看到很多初学者在文章中虽然提供了图，但并没有给予应有的解释、比较或推测，这就使画图的意义极为有限。一般而言，我们只应提供非常必要的图，可有可无的图则应尽可能免掉。

1.5 结论



结论又称为结束语，它是文章主要部分结束后、文章结束前的最后一节。读者或许会有这样的疑虑：摘要 (Abstract)、引言 (Introduction) 和结论 (Conclusions 或 Concluding Remarks) 到底有什么不同？基本上说，结束语部分和前两部分只应有少许的重合 (overlapping)，大部分内容应该是不一样的。

1.5.1 结论应该有什么内容

结论节应该包含以下的信息：

(1) 非常简短地叙述文章的主要贡献 (Provide a summary of the main contribution)。注意要简短 (Keep the summary short)，并且不要重复引言或摘要里面的字词，尽量用一些意思相同的替代词 (Use fresh wording)。这时可以重申你的结果的重要性 (Emphasize the importance of your results)；

(2) 解释你在引言里提到的问题和疑问。经过整篇文章的论证过程，在结束语部分也许可以谈论部分答案了 (Turn back to something discussed in the Introduction)；

(3) 指出由于某些原因（比如篇幅），文章没有考虑的其它方面或更广泛的问题，并说明本文的论证方法是否可以推广到这些情形；

(4) 谈论一下你的这项研究可能带来的影响，以及可能会对解决其它相关研究工作的益处 (Explain the implications of your research)；

(5) 展望下一步，后续研究可以做什么 (Identify the next step or look to the future)？如果合适，讨论一些和本研究相关的猜想。

1.5.2 结束语的注意事项

(1) 不要过分谦虚，在结尾处说文章水平不高之类的话 (Don't say something like "I apologize for the poor quality of my paper")；

(2) 不要提及新的难以解决的问题 (Don't ask many difficult questions)；

(3) 不要引入全新的想法 (Don't bring up completely new ideas);

(4) 不要改变整篇文章已经形成的语言风格 (Don't change the tone or style of your writing);

(5) 不要提出和文中任何部分矛盾的结论或观点 (Don't contradict any part of your paper);

(6) 不要口气太大，不要夸大成果 (Don't make exaggerated claims);

(7) 不要逐字重复引言，需要时换种说法 (Don't restate the Introduction word for word)。

1.5.3 结束语中的一些常用词

表 1.1 列出的一些词组在结束语里常见到：

表 1.1 结束语中的常用词组

毕竟	after all	如已所述	as has been said
事项	as matters stand	无论如何	at any rate
即便如此	even so	最后	finally
由于这些理由	for these reasons	简言之	in brief, in short
一句话	in a word	总之	in conclusion
得出结论	in drawing to a close	确实	indeed
一般而言	in general	换言之	in other words
回想起来	in retrospect	总言之	in summary, to summarize, to sum up
总体上	on the whole	或简短地	or briefly
既然如此	such being the case	总括而言	to conclude
复述	to recapitulate	重复一遍	to repeat
现可看出	we now see	足够	it is enough

有些常用的词，比如 in summary, to summarize, in conclusion, to conclude 等经常在文章的结尾处见到；但若在同一节不停使用，可能会使读者感到老调重弹，缺乏新意。

以下让我们看一些例子：

例 1.52 (M. Holst and F. Saied, *Journal of Computational Chemistry*, **14**(1), 1993, 105 – 113).

Title. Multigrid solution of the Poisson-Boltzmann equation

Conclusions. The first conclusion to be drawn from the numerical evidence presented earlier is that the multigrid method is the most efficient method for the two test problems with a grid size of $65 \times 65 \times 65$. Secondly, the advantage of multigrid grows with the problem size, as it demonstrates optimal order behavior for our test problems. (评论：这一段非常简略地总结一下本文的贡献。)

A point that should be stressed is that the SOR and CG results reported here are based on highly optimized codes, and these codes ran close to their maximal rates on both architectures. Based on earlier results [15, 16], we expect a fully optimized multigrid method to run at rates comparable to the smoothing iteration alone on architectures such as those considered here. Thus, we expect that the multigrid method can achieve nearly the peak rate obtained by the SOR iteration. As a consequence of these points, it should be pointed out that the results presented here for the multigrid method are conservative, and gave only an indication of its potential for the LPBE. (评论：这一段讨论由于本研究可能导致的更进一步的结果。)

Finally, while we have considered only the LPBE in this paper, the multigrid method can be extended to nonlinear problems through either a combination of Newton's method and the linear multigrid algorithm presented here, or a nonlinear multigrid algorithm [13]. These methods have been used successfully for nonlinear problems in computational fluid mechanics [28] and semiconductor device simulation [29], and their application to the NPBE will be investigated in a future paper. (评论：这一段讨论更进一步的延展。这一段是不可能放到 Abstract 或 Introduction 部分的。)

题目： 泊松 – 玻尔兹曼方程的多重网格解

结论： 从先前展示的数值证据得到的第一个结论是，多重网格法对这两个实验问题是最有效的方法，其网格尺寸是 $65 \times 65 \times 65$。第二个是，多重网格的优势随问题尺寸的递增而加大，正如它对我们的实验问题展示了最优阶。

需要强调的一点是，这里报告的 SOR 和 CG 结果是基于高度优化的程序，且这些程序在这两种架构上以近乎最大速率运行。根据早前的结果 [15, 16]，我们期望在像此处考虑过的那些架构上单独能与光滑

迭代相比的一个完全优化的多重网格法。这样，我们期待多重网格法差不多能达到 SOR 获得的顶峰速率。作为这些论点的结论，应当指出这里展现的多重网格法的结果是保守的，仅仅给出它对 LPBE 潜力的一个迹象。

最后，尽管这篇文章只考虑了 LPBE，多重网格法能通过牛顿法和线性多重网格算法的组合或非线性多重网格算法 [13] 而推广到非线性问题。这些方法已成功用于计算流体力学的非线性问题 [28] 和半导体器件模拟 [29]。它们对 NPBE 的应用将在未来的文章中探索。 ♦

例 1.53. Conclusions. What we have seen from the above is the convergence of a piecewise linear approximation method for the class of Li-Wang piecewise monotone mappings of the unit interval. (评论：一句话总结一下本文的主要结果。) A different technique can be used to prove the convergence of the algorithm for the class of piecewise convex mappings of an interval, and the resulting paper will be published elsewhere. (评论：预告作者的另一篇有关文章。)

结论： 如上我们已经看到了逐片线性逼近法对一类单位区间的李–王逐片单调映射的收敛性。用不同的技术可以证明此算法对于区间上的逐片凸映射类的收敛性。相应的文章将另行发表。 ♦

有些作者在文章的结束语部分会就其进一步研究可能导致的后续文章向读者作出预告。如此断言需要小心，因为有时未来的文章并未如期诞生，或遥遥无期，甚至永不出现。除非有百分之百的把握，不要轻易打包票，以免开空头支票。

1.6 致谢



学会感谢!

很多文章的结束语后在结尾处都有一个简单的致谢部分 (Acknowledgments；英式英语拼写为 Acknowledgements)。致谢的对象主要包括给文章写作提供过意见或帮助的人或机构。我们在大多数时候必须对为研究提供了资助的机构表示感谢。很多研究基金均规定获资助者在所发表的相关论文中必须清楚表明获其资助，有时还需列出所获基金的号码。

不必在致谢中提及匿名审稿人，因为审稿是他（她）提供学术服务的工作的一部分。但是，如果审稿人对改进文章的质量有较大的贡献，比如对某定理提供了更短或更漂亮的证明，或对文章的英文从头

到尾修改了一番，那我们便应向他们致谢。

感谢用语应简单、精练。例如，I would like to thank 可缩短成 I thank。

下面我们提供几个例子。一般来说致谢部分和下面的例子大致相近, 初学者可尝试将它们作一些有机组合。

例 1.54. Acknowledgments. The financial support of the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) is gratefully acknowledged.（这是一个标准的句型，经常可以见到。）

致谢： 衷心感谢加拿大自然科学和工程研究局的资金支持。 ♦

例 1.55. Acknowledgments. The author gratefully acknowledges (非常感激)the support of the National Science Foundation (NSF) under grant number DMS1234567.

致谢： 作者非常感谢国家科学基金会（基金号为 DMS1234567）的支持。 ♦

例 1.56. Acknowledgments. This work was supported in part by the US Department of Energy under Contract #P-WENG04-05.

致谢： 美国能源部部分资助该工作，合同号为 P-WENG04-05。 ♦

例 1.57. Acknowledgments. This work was supported in part by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12345678).

致谢： 这项工作部分由中国国家自然科学基金资助，基金号为 12345678。 ♦

例 1.58. Acknowledgments. We are grateful to the two anonymous (匿名的；此词不可用中文式的习惯语 unknown 代替）referees for useful comments and suggestions.

致谢： 非常感谢两位审稿人有用的评论和建议。 ♦

例 1.59. Acknowledgments. We are grateful to Prof. M.-C. Zhang of Tsinghua University for many useful discussions. The second author would like to thank Prof. K.-C. Sun for his hospitality during his visit to Peking University. Part of this work was carried out while this author was visiting Peking University.

致谢： 非常感谢清华大学张默存教授许多有益的讨论。第二作者感谢孙克昌教授在访问北京大学期间给予的热情接待。文章的部分工作为该作者在北京大学访问期间进行的。 ♦

例 1.60. Acknowledgments. The author is greatly indebted to Prof. K.-C. Sun for many useful discussions and for (这个 for 不能省略) the guidance over the past years.

致谢： 作者非常感谢和孙克昌教授多次有意义的讨论以及他这几年的指导。 ♦

例 1.61. Acknowledgments. The author wishes to express his sincere appreciation to all those who made suggestions for improvements to this paper. Particular thanks go to Professor K. Wang who critically read the paper and made numerous (此处 numerous 比 many 更重一些) helpful suggestions.

致谢： 作者真诚地感谢所有给本文提供过改进建议的人。特别感谢王柯教授，他以批评的眼光通读全文并提出许多有用的建议。 ♦

例 1.62. Acknowledgments. The author is indebted to Dr. J. Smith for many helpful discussions, and to Dr. S. Fisher for correcting two errors in an earlier version of the paper.

致谢： 作者感谢 J. 史密斯博士很多有建设性的讨论，以及 S. 费希尔博士修正了论文早期的两处错误。 ♦

例 1.63. Acknowledgments. The authors would like to thank Dr. J. Smith for valuable comments, and the Nanjing University Research Fund as well as the US National Science Foundation for the financial support.

致谢： 作者感谢 J. 史密斯博士那些有价值的意见，以及南京大学研究基金和美国国家科学基金会的资助。 ♦

例 1.64. Acknowledgments. I am indebted to N. Smith and M. Wang for advices that both influenced the course of this research and improved its presentation. I also thank M. Fox for his helpful comments.

致谢： 我感谢 N. 史密斯和王明提供了影响研究过程以及改善表述质量的数项建议，同时感谢 M. 福克斯那些有帮助的意见。 ♦

对于一些教科书、专著或学位论文，感谢部分可能较长，感谢的人会较多。下面举两个典型的例子。

例 1.65. Acknowledgments. My deepest gratitude goes first and foremost to Professor AAA, my supervisor, for her constant encouragement and guidance. She has walked me through all the stages of the writing of this thesis. Without her consistent and illuminating instruction, this thesis could not have reached its present form. Second, I would like to express my heartfelt gratitude to Professor BBB, who led me into the world of mathematics. I am also greatly indebted to the professors and teachers at the Department of Mathematics: Professor CCC and Dr. DDD, who have instructed and helped me greatly in the past three years. Last, my thanks would go to my beloved family for their love and confidence in me all through these years. I also owe my sincere gratitude to my friends and my fellow classmates who gave me their help and time in listening to me and helping me work out my problems during the difficult course of the thesis.

致谢： 我首先对导师 AAA 教授致以深深的感谢，感谢她不断的鼓励和指导。她在这篇学位论文写作的各个阶段从头到尾指引我，没有她贯彻始终而有启发性的教导，本文不可能以现状面世。其次，我想对 BBB 教授表达衷心的谢意；他将我带入数学的世界。我也非常感激数学系的教授和老师们，尤其是过去三年内为我授课并予我莫大帮助的 CCC 教授和 DDD 博士。最后，我感谢我亲爱的家人，这些年来他们给予我爱和信心。对我的朋友和同学我还欠一份诚挚的谢意。他们不吝赐教、不吝时间与我交流，在我学位论文困难的写作过程中帮助我解决问题。 ♦

例 1.66. Acknowledgments. This research project would not have been possible without the support of many people. The author wishes to express her gratitude to her supervisor, Prof. AAA who offered invaluable assistance, support and guidance. Deepest gratitude is also due to the members of the supervisory committee, Dr. BBB and Dr. CCC, without their knowledge and assistance this study would not have been successful. Special thanks also go to her postgraduate friends, especially DD, EE and FF, for sharing the literature and friendship. The author would also like to convey thanks to the financial support provided by GH University. Finally, the author won't forget her beloved family members, for their understanding and endless love through the duration of her studies.

致谢： 若无许多人的支持这个研究计划可能不会存在。作者希望表

达对导师 AAA 教授的感激之情，他提供了宝贵的帮助、支持和引导。对指导委员会成员 BBB 博士和 CCC 博士作者也深表谢意，没有他们的知识和帮助这项研究不可能成功。还要特别感谢她的研究生朋友，尤其是 DD、EE 和 FF，他们与她共享文献和友谊。最后，作者对她亲爱的家庭成员在她求学过程中给予的理解和无尽之爱永志不忘。 ♦

1.7 文献

那些与文章内容有关、并在文章中引用的论文和书籍应列在参考文献的名下。读者阅读正文之前经常先浏览一下参考文献列出的资料看看是否熟悉，是否符合自己的兴趣，借以决定是否将文章读下去。如此看来，参考文献的制定很有意义。

参考文献中列出的文章必须包括如下信息：作者名 (authors)、文章名 (article title)、杂志名 (journal title)、卷数 (volume number)、期数 (issue number)、出版年 (publication year)、页数 (page numbers)。杂志名往往只写出其公认的简写形式，在其中介词等非关键词基本省略，如 *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 在参考文献中可写成 *J. Math. Anal. Appl.*。Volume 一般写成 Vol.，Number 则为 No.，但它们常常被省去，只列出卷数及放在圆括号内的期数，如 27(3) 或 **27**(3) 表示第二十七卷第三期。另外，page 常写成简写 p.，而 pp. 则表明页数的前后两个页码，如 p. 123 指的是页码 123，pp. 123–153 表示从页码 123 到页码 153，但这更通常地简写成 123–153。这些约定俗成的习惯写法在学术期刊上到处可见。此外，美国工业与应用数学协会 (Society for Industrial and Applied Mathematics) 的缩写为 SIAM，它旗下有不少杂志和其它出版物。例如它的《科学计算杂志》杂志可简写成 *SIAM J. Sci. Comput.*，甚至缩写成 SISC。美国的《数学评论》(*Mathematical Reviews*；缩写为 MR) 杂志及其网站 [可从美国数学会 (American Mathematical Society，简称 AMS) 网站 www.ams.org 中的链接口 MathSciNet 进入] 有数学杂志名称的标准缩写表。

参考文献中的书籍要提供以下信息：作者名、书名 (book title)、出版社名 (publisher)、版次（如非初版）(edition information)、出版地 (publication city)（有时可省掉）、出版年。

如果参考文献中列出会议论文集内的文章，则除了包含作者名、文章名、出版年以及页数外，还要列出论文集的书名以及编辑者 (editors) 的名字。

有时，文章中引用了某人的博士或硕士论文，那么在该文献的排列处须标示这篇学位论文所属的大学名称。例如，

R. Murray, *Discrete Approximation of Invariant Densities*, Ph.D. Thesis, Cambridge University, Cambridge, England, 1997.

当引用与你文章的新结果密切相关的前人研究时，单单提及该文献是不够的，因这样做读者不知那篇论文的贡献为何，问题的困难处在哪里，以及你自己与别人研究的异同。你必须同时列出作者名，并简述其与你文章有联系的主要贡献及未解决问题，作为你目前研究的出发点。

引用文献的方法主要有两种。一种只列出参考文献中的号码，通常放在方括号内，在数学文章中比较常见，如 the stability problem was first considered in [7] （稳定性问题在 [7] 中第一次考虑）。另一种则列出作者名（通常只写上姓）和出版年份，称为哈佛引用法，如 the stability problem was first considered by Bellman (1973)（稳定性问题由贝尔曼 (1973) 第一次考虑）。在哈佛引用法中，如果引用同一作者同一年份的几篇论文，可在年后加上 a, b, c, d 等区别开来，如 The idea of variation was introduced by Smith (1973a) and was applied to the convergence analysis in Smith (1973b)（变分思想由史密斯 (1973a) 引进并在史密斯 (1973b) 中用到收敛性分析上）。

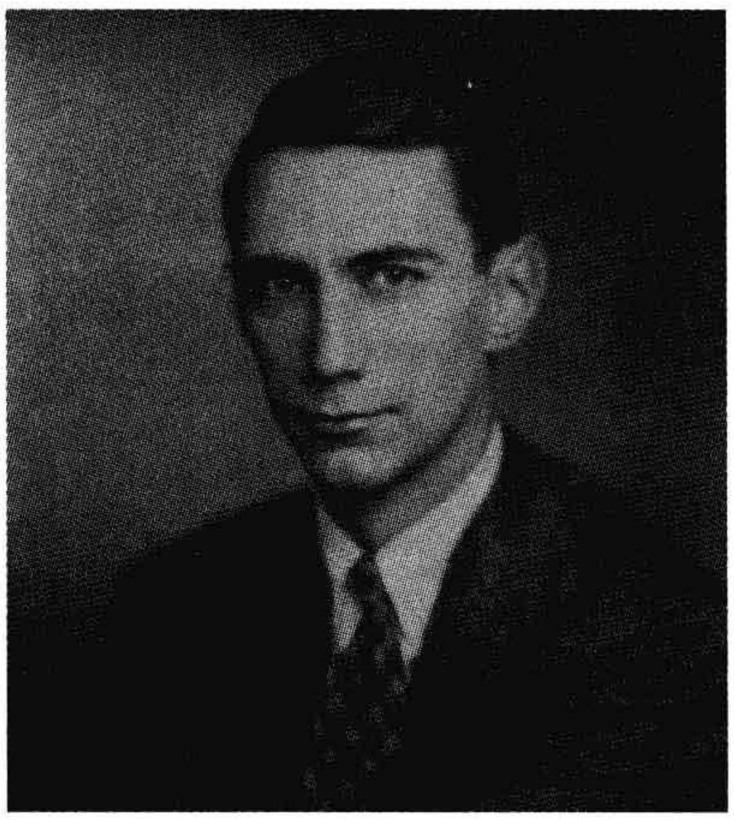
参考文献的标号在引文中出现的地点应以读之流利及位置贴切为准。例如，This bound was found [10] to be sharp 比 This bound was found to be sharp [10] 为佳。为了方便读者，有的时候更好的做法是把所引文献的作者也一道公布，如 This bound was found by Courant [10] to be sharp。若同时想增加读者对参考文献的历史感，可以再加上年份。这就相当于合并两种引用法，像 Simplicial fixed point methods have been developed by Scarf (1967) [14], Eaves (1970) [3], and Todd (1976) [16]。碰到作者多于一人的情形时，一般遵循以下惯例：两个作者时名字一起写出，如 see Jones and Zhang [5] 或 see Jones and Zhang (1994)。如有两人以上，第一次引用时列出所有作者名，以后的每次引用只列第一作者的名字再加上 et

al.（等人），如第一次引用时可写 see Kellog, Li and Yorke (1974)，然后每次引用写 see Kellog et al. (1974)。注意：et al. 不能写成 et al 或 et. al. 或 et. al。另外亦要注意，etc. 的意思是“等等、等事、等物”，即 and so on；如要表示“等人”则应用 et al.，与短语 and others 同义。顺带一提，i.e.（即，和 namely 或 that is 同义）和 e.g.（例如，即 for example）中的两个点号都不能省略。同样，a.k.a.（又名、也叫做，即 also known as）中的三个点号一个也不能少。

当正文中同时引用几篇文献时，应以标号的递增次序排列，而不是按文献的出版年份为序，如 Several proofs have been given by [4], [8], [12]。此外，比较好的方法是把它们在参考文献内的标号放在同一个方括号里，而不是分别写出。如写成 We refer the reader to [3, 5, 9]，而不是 We refer the reader to [3], [5], [9]。

假如你引用一本书或一篇长文中的某个重要结论并且希望读者能快速地了解它的细节，你在引用的同时最好也提供原始文献中所在的页码、小节号或定理号等。例如，by Banach's Lemma ([7]; Theorem 4.5.3)。

不同杂志的出版社在参考文献的书写规格上各有规定。在决定文章投向的期刊时，应该浏览那个杂志对稿件、特别对参考文献的格式要求，并根据这些具体要求重新审定文章中的参考文献。平时要养成经常收集与自己研究有关的最新文献出版信息的习惯，放在一个专用参考文献的文件内（可以取名为 Reference.bib），需要时加以选用。它纵使“不修边幅”，也无伤大雅，正式放进文章后再统一格式，重新加工成型。



Claude Shannon

下面列出信息论之父香农 (Claude Shannon, 1916—2001) 的同一篇开创性论文在不同出版社印刷的杂志内参考文献的书写格式：

- **AMS:** C. Shannon, *A mathematical theory of communication.* Bell Syst. Tech. J. **27** (1948), 379–423.
- **Elsevier:** C. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell Syst. Tech. J.* 27: 379–423 (1948).
- **IMA:** Shannon, C. 1948 A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. J.* **27**, 379–423.
- **SIAM:** C. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell Syst. Tech. J. 27 (1948), pp. 379–423.

- **Springer-Verlag:** Shannon, C. (1948) A mathematical theory of communication. Bell Syst. Tech. J. **27**, 379–423.
- **World Scientific:** C. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell Syst. Tech. J. **27** (1948), 379–423.

下列是一些需要另加注意的事项：

- 了解几种与你工作有关的学术团体、杂志及其出版社的出版物信息，如 SIAM, IMA, Elsevier, Springer-Verlag, World Scientific。
- 所有参考文献的写法要有一致性 (consistency)。比如，所有作者的姓和名的次序要一致。在英文中一个人的全名有两种写法，一是姓在后、名在前，另一是姓在前、名在后，但它们之间用逗号隔开，如 Mary Carpenter 或 Carpenter, Mary。
- 列出足够的、正确的信息，年份、卷数、作者名、杂志名、页数等，缺一不可。
- 参考文献最好是原始论文。如果原文不可得，或未读过，必须引用间接引文时，至少要读过它的 Abstract。如没见过原文，可参看至少两篇引用那篇文章的论文。这样做可避免引文并不包含要引用的信息。
- 有少数杂志的名字会随着时间的进程而改变，如 *SIAM J. Sci. Comput.* 在 1993 年前名字为 *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* (SISSC (1980—1992)；SISC (1993—))。
- 每个参考文献都应在正文中被引用。有些文章列出很多文献，但仅有部分在正文中被引用，这是错误的做法。未被引用的文章不能堂而皇之地列于参考文献之内，当中涉及学术品行的问题。部分杂志 (如 SIAM, AMS) 在接受并编排一篇文章时，会仔细检查当中的参考文献是否与正文引用部分一一对应，并让作者在正文中重新引用不对应的条目，或删去该条文献。
- 参考文献的多寡要恰当：不要漏掉重要和必要的文献，但也不要罗列多余的或与文章关系不大的文献。列出的文献应该包含文章所在的子领域内几篇关键性的论文，并在正文中加以提及，证明你对该领域的历史和现状了如指掌。
- 尽量不要引用难以找到的文献，因为读者不易读到它们。
- 数学文章的参考文献顺序按照第一作者的英文字母自上而下排

序；第一作者相同时，按第二作者，依次类推；作者相同时，按年份排序。但其它学科则不尽相同，比方说，物理文章的参考文献排序与正文中引用次序一致。此外，数学文章除列出杂志名及文章首页至末页的页数，同时也须列出文章题目，而物理、化学等其它学科文章一般不列文献题目。

- 如上所述，杂志名的主要词汇要用缩写，同一杂志的缩写方式应该前后一致。
- 如果用 TEX 或其变种 LATEX 及 AMS-LATEX 写作论文，在引用处使用命令 \cite{xx}，其中 xx 是参考文献文件中被引用文献的代号。例如，如要引用代号为 tang2010 的文章，在正文的源文件中引用处应输入 \cite{tang2010}。

1.8 附录

现在我们简短地讲一下附录的用途。附录对于研究性论文不是必须的。许多数学文章，尤其是纯粹数学方面的，通常都不包含附录。这是因为大部分数学定理的证明需要放在定理的内容下方一起阅读，而且几乎所有的数学工作者如果不读证明便难以承认定理的正确性。较短的文章一般也不包含附录，但是如果文章较长，且主要定理的证明需要某些额外的概念或知识鸣锣开道，则作者也可以考虑有选择地将这些前导部分放入附录之中。另一方面，很多数学教科书或专著都带有一个或多个附录（见本书第四章第四节对此所作的讨论），因为所有形式的附录之功能大同小异，我们这里仅仅笼统介绍一下论文中附录的作用。

数学文章的附录记载的主要是作者不想放在正文内的冗长复杂的定理证明。如果将这些证明放在正文中定理的叙述之下，可能让一些读者望而生畏，读不下去，既容易打断他们的阅读思路，甚至会消弭他们将论文读到底的勇气。尤其是一些应用学科的文章，只求结果，不问推导的读者大概对证明兴趣不浓，这时，附录就起了双重的作用：一方面满足了对定理推论过程也想全面了解的读者，他们会仔细弄懂附录里证明的方方面面；另一方面，那些暂时不看证明的人有朝一日也许会更上一层楼，而埋首于繁复的证明之中，说不定数学的灵感从中而出而有了新的发现。

另一种附录放置的却是正文定理证明中所需要的一些预备结果，

或一些标准引理，甚至一些有关概念的定义等。这些材料在其它文献中都能查到，但作者为了方便读者，就将它们放在文章的最末作为附录出现。此处附录的功能很像在文章主要结果之前冠名为“预备知识”的一节，所不同之处仅仅是所在位置的变化。为了更好地理解论文的结论和证明细节，这种类型的附录绝大部分的读者是要读的，因为它们可以被视为文章主体的一部分。

总之，附录这块田地可以收入任何作者不便或不拟放在文章主要部分、但又不想随意丢掉的东西。它绝不是曹操的“鸡肋”那么食之无味弃之可惜，而是服务于不同类型读者的一个阅览室。它给了作者足够的自由度来驾驭材料、构思文章、优化结构。它的存在既方便了读者，也方便了作者。这是一个双赢的设置。

正因如此，尽管刚开始只有一部分人读附录，作者也要将它写得和正文一样好。它不应因处于文章正文的后面而受到轻视。

1.9 其它

1.9.1 文章的署名

目前流行的文章署名有两种：

1. 按对文章贡献的大小排署名，贡献最大的排第一位，并依次类推；
2. 按作者的英文姓氏 (family name 或 last name) 字母顺序来排列。

一般来说，工程学科和实验科学采用第一种方式较多，而纯粹数学和应用数学方向的多采用第二种。作为第一作者会有一些好处，比如文章被引用时，经常只有第一作者的名字出现（例如，Liu et al. (1990)），更有些文献索引仅能查到第一作者。目前国内很多大学和研究机构会根据论文排名次序的先后予以奖励，虽不尽合理，但却是事实。

英文数学论文作者排名按姓氏字母为序，基本上已成惯例，如是反序，则表明有关作者的贡献微乎其微。举例来说，英文姓 An（安）的第一作者与姓 Zou （邹）的第二作者合写的数学研究论文，并不说明第一作者就是贡献第一，或者说第二作者在论文中的角色也是靠后。至少对数学论文而言，按作者排名决定贡献大小这样的想当

然就大错特错了。但如果作者 An 排在作者 Zou 之后，通常的解释是 Zuo 的贡献比 An 大得多，除非另有隐情。

还有一点需要注意，写平生第一篇英文文章时，一定要决定好你的名字和其缩写的英文形式，确定好以后就基本上不再改变，既保持一致，又便于查询。比如你的名字叫张伟刚，这将会有几种形式的英文写法：Zhang Weigang，Weigang Zhang，Wei-Gang Zhang，W. Zhang 或 W.-G. Zhang。我们的建议是：

1. 最好不用 Zhang Weigang，因为这样的话很多外国同行会以为你姓 Weigang。
2. 可用 Weigang Zhang 或 Wei-Gang Zhang，但缩写形式最好用 W.-G. Zhang。英文缩写是 W. Zhang 的作者可能有很多，但名字为 W.-G. Zhang 的一般来说会少很多。这会便利读者在查文献索引找到你，及让你的名字更具一些特殊性。
3. 在你的第一篇论文发表时，一旦确定你的名字的英文形式（比方说 W.-G. Zhang 或 Wei-Gang Zhang），以后写文章署名时应尽量保持一致。为了外国学术同行或朋友称呼你时发音方便起见，你未来可能会在中文名字之外，加上一个西方人名 (first name 或 given name)（比如，Steve Wei-Gang Zhang），但在之后的科技文章签名处，这个 Steve 或 S. 不要和你的固定英文名字放在一起，以免被误认为是另外一人。

文章完稿后，除了作者的署名外，还须写上所有作者的单位名称、通讯地址以及电邮地址，加上上面已经讨论过的摘要和致谢、下面将要进行讨论的最后完成日期、关键词、美国数学会数学学科分类号等。

一个技术性的注意事项是一篇文章经过审稿后，一般就不能随意再加上某个作者名字或减去某个共同作者。如非此不可，也要有充分的理由，及时向杂志编辑详细解释清楚并得到他（她）的许可。

最后我们想要强调的是，万万不可未经同意就把别人的大名（比如你的论文指导老师）加到你的文章的署名处拿出去投稿，尤其当此人对该文没有实质性的贡献时。要知道，文章作者一旦署名，署上去的也有责任二字。当论文被发表甚至获奖后，这给所有作者带来了荣誉；但当文章出了问题，比如说被批评有抄袭之嫌时，则作者们不能推卸责任，尤其是署名在上的导师不应该把责任通通推给学生，除非

这个学生真的是擅自挂上大名鼎鼎的导师大名，或谋求快速发表而后者一直蒙在鼓里。作者署名是严肃认真之举，我们要大力提倡实事求是的作风，坚决反对不求贡献但求署名的学术不端行为。

1.9.2 文章的日期

文章初稿写成的日期最好要注明，之后每次修改完成的日期也建议写明。这样做有几个好处：首先，令你对自己文章的写作过程和时间更为清楚，对不同时期的修改内容了如指掌。其次，你的文章寄给别人后，他人需要知道这篇文章是什么时候完成的，是第几稿。这样别人在引用这篇还没发表的文章时也可以注明写作时间 (... 2001, unpublished) 或 (... 2001，Private Communication)。

文章的日期一般可写在作者名字之后一行。

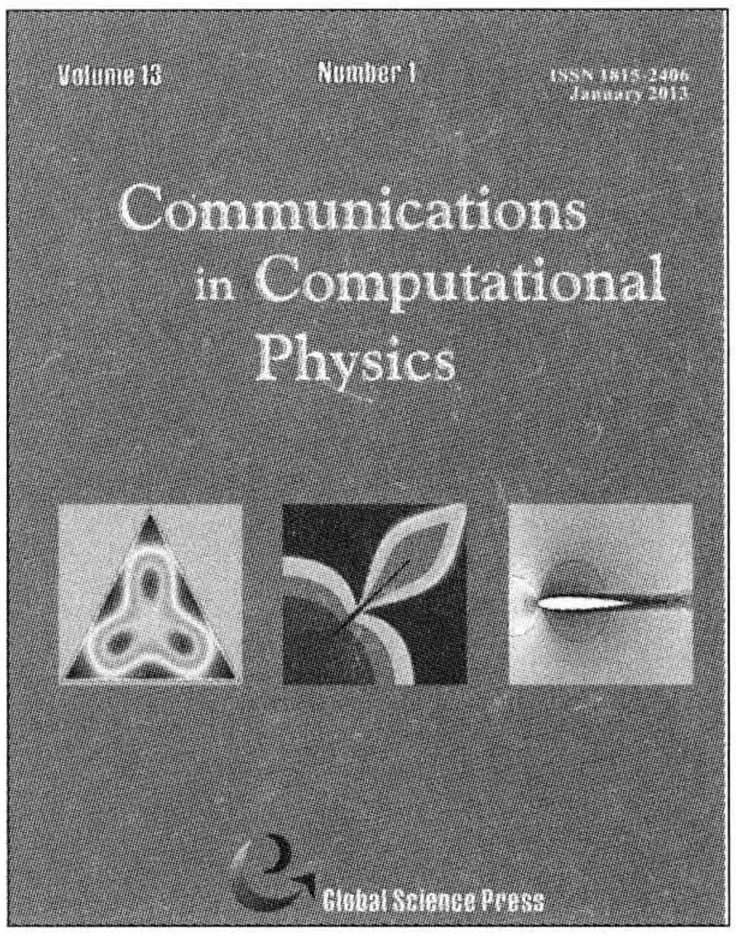
1.9.3 文章的关键词和学科分类

很多杂志需要作者提供关键词 (Keywords)。关键词顾名思义是文章的关键之词，因而不宜太多，多了就会失去“关键”的意义，就像太多的特等奖就让人不稀罕了一样。关键词一般要在十个以下（除非是一篇长文或用到的重要概念特别多，如下面的例 1.68），关键词的设置是为了让数学论著归档服务机构（如美国《数学评论》等）能把你的论文放到其分门别类的数据库中的正确位置。科学引用指标检索工具 SCI 利用关键词来给文章分门别类，而读者则根据关键词搜索与他研究或兴趣有关的文献。

在当今的计算机信息时代，关键词非常重要，因为很多读者可能通过关键词寻找他有兴趣的相关文章，所以选用关键词也不能马虎、草率。关键词的遗漏可能导致检索困难或引用不足，减少别人对这篇论文的关注程度，因而也可能会降低作者的工作影响力。

关键词不要过于笼统，像 computation, fluid mechanics, mathematics，也不要包含像 new, interesting, best 这样的形容词。最好放上一两个包含文章论题范围较大、笼统一点的词，另外加上几个比较贴切的，范围相对较窄的词，比如 numerical approximation, finite element method, mesh adaptation, local time stepping。

关键词不仅仅只是一个字词，有时会是一个短语，如上面说的 finite element method。所有的名词最好只写单数形式，如上面列



举的有限元法不必写 finite element methods。但是，写成复数也无伤大雅，全凭作者爱好，如下面的例 1.68。当然，有的词看上去像复数，其实是不可数的单数，例如 statistics 和 chaos，不要以为是复数，或以为是可数名词的单数而再写成复数。

有些杂志要求投稿文章提供数学学科分类号 (Mathematics Subject Classification Number，简记为 MSC；最新的分类系统是由 *Mathematical Reviews* 和 *Zentralblatt MATH* 2010 年制定的，也写成 MSC(2010))。这个权威的数学分类系统将所有数学分成九十七个主要学科 (primary classification areas)，每一学科又细分为若干子学科，这种树状分类法颇像动物学中的分类法。有了正确的分类号，不仅令你发表的论文出现在数学档案库的合适场所，而且潜在的相关读者很快会发现你的文章，这就等于替你的文章做了一个很好的广告。

除了 Mathematics Subject Classifications 关于数学的分类系统外，还有与计算科学有关的分类系统 The Computing Reviews Classification System 等。物理学的分类系统有美国物理研究所 (American Institute of Physics，简称 AIP) 设计的 Physics and Astronomy Classification Scheme (PACS)（例如可见登在《计算物理通讯》(*Communications in Computational Physics*) 上的文章中给出的分类号）。

例 1.67 (*Transactions of the American Mathematical Society*, **356**, 2004, p. 1691).

Title. Coordinates in two variables over a $\mathbb{Q}$-algebra

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 13B25, 14J70, 14R10.

Key words and phrases. Coordinates, locally nilpotent derivations, embeddings.

题目： $\mathbb{Q}$–代数上的双变量坐标

2000 数学学科分类号： 13B25、14J70、14R10。

关键词与短语： 坐标、局部幂零导子、嵌入。 ♦

例 1.68 (*Mathematics of Computation*, **75**, 2006, p. 1931).

Title. Iterated function systems, Ruelle operators, and invariant projective measures

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 28A80, 31C20, 37F20, 39B12, 41A63, 42C40, 47D07, 60G42, 60J45.

Key words and phrases. Measures, projective limits, transfer operator, martingale, fixed-point, wavelet, multiresolution, fractal, Hausdorff dimension, Perron-Frobenius, Julia set, subshift, orthogonal function, Fourier series, Hadamard matrix, tiling, lattice, harmonic function.

题目： 迭代函数系统、Ruelle 算子和不变投影测度

2000 数学学科分类号： 28A80、31C20、37F20、39B12、41A63、42C40、47D07、60G42、60J45。

关键词与短语： 测度、投影极限、转移算子、鞅、不动点、小波、多分辨率、分形、豪斯多夫维数、佩龙–弗罗贝尼乌斯、朱利亚集、子移位、正交函数、傅里叶级数、阿达玛矩阵、拼接、格、调和函数。 ♦

1.9.4 文章的章节标题

章节的标题是文章的骨骼。对读者来说，文章的结构或小标题

(1) 使读者更容易找到他们感兴趣的部分；
(2) 使读者更容易找到作者的主要贡献或文章的亮点；
(3) 使读者从逻辑上更易理解作者的写作意图。

而对作者来说，章节小标题

(1) 对相应的章节起到画龙点睛的作用；
(2) 为自己写作前提供好的提纲；
(3) 把文章划分成相对独立的部分使目的性强的读者直奔所需。

1.10 总结

我们已经对英文数学文章的结构与写法进行了基本的分析，这仅提供了怎样写数学的基本格式。要想把学术论文越写越好，就要在掌握写作基础知识的同时，大量阅读欧美数学家的英文作品，不断扩充英文数学词汇量，在头脑中反复练习一些常用短语和习惯用法（下

一章有详细介绍)。这样就能迅速提高专业英语写作能力，成为一个训练有素的英文数学写作者。

在结束本章之前，我们再提供一些好的句式及段落。

例 1.69. Title. Why is the discontinuous Galerkin method important?

The discontinuous Galerkin method is somewhere between a finite element and a finite volume method and has many good features of both. It provides a practical framework for the development of high-order accurate methods using unstructured grids. The method is well suited for large-scale time-dependent computations in which high accuracy is required. An important distinction between the DG method and the usual finite-element method is that in the DG method the resulting equations are local to the generating element. The solution within each element is not reconstructed by looking to neighboring elements. Its compact formulation can be applied near boundaries without special treatment, which greatly increases the robustness and accuracy of any boundary condition implementation.

题目： 为什么间断伽辽金方法重要?

间断伽辽金方法大约处于有限元法和有限体积法之间，并有着两者的许多好特色。它提供了利用非结构化网格发展高精度方法的一个实用框架。该法非常适用于大规模时间依赖的计算，在其中需要高精度。间断伽辽金方法和通常的有限元法的一个重要区别在于，前者导致的方程对生成的单元来说是局部的。在每个单元内的解不要通过其周围的单元来重建，其紧凑的公式表述能用到边界而无须特殊处理，这就大大提高了任何边界条件实施的鲁棒性和准确性。 ♦

例 1.70. 下面是一篇综述性文章中的一段，作者通过一些大家熟知的道理来叙述自适应计算方法的必要性。此段很多地方用词浅近，但都恰到好处。

(C. J. Budd, W. Huang and R. D. Russell, Adaptivity with moving grids, *Acta Numerica*, **18**, 2009, 111 – 241.)

Time-dependent systems of partial differential equations (PDEs) often have structures evolve significantly as the integration of the PDEs proceeds. These can be interfaces, shocks, singularities, changes of phase, high vorticity or regions of complexity. Associated with such

structures are the evolution of small length (and time) scales, rapid movement of the solution features and the possibility of finite time blow-up of a component of the solution. Frequently associated are also conservation laws, usually linked to underlying symmetries. Examples of these phenomena occur in many applications, such as gas and fluid dynamics, conservation laws, free boundary problems, combustion, detonation, meteorology, mathematical biology and nonlinear optics. To solve such PDEs numerically it is typical to impose some form of spatial mesh and then to discretize the solution on this mesh by using a finite element, finite volume, finite difference, or collocation method. However, this strategy may not be effective in the case of structures that involve small length scales, leading to large localized errors. In such cases it is often beneficial to use some form of non-uniform mesh, adapted to the solution, on which to perform all of the computations. The advantages of doing this can be a reduced overall error, better conditioning of the system, and better computational efficiency. Unfortunately, introducing the extra level of complexity to the system through adaptivity can also lead to additional computational cost and possible numerical instability. Mesh adaptation should thus be used with care and appropriate analysis where possible.

偏微分方程的时间依赖系统具有随着偏微分方程积分的行进而演变显著的一些结构。它们可以是界面、冲击、奇点、相变、高涡和复杂域。与这些结构相关的是小长度（和时间）尺度的演化、解特性的迅速移动以及某个解分量的有限时间爆破可能性。与此经常有关的也有通常与底层对称性连在一起的守恒律。这些现象的例子出现在众多应用中，比如气体或流体动力学、守恒律、自由边界问题、燃烧、爆炸、气象、数学生物学及非线性光学。为数值求解这样的偏微分方程，典型的做法是施加某些形式的空间网格，然后在这个网格上将解用有限元、有限体积、有限差分、或配点法来离散化。然而，这个策略在涉及小长度尺度结构的情形未必有效，导致大的局部化误差。在这些情况下，常常有效的是采用某些形式与解相适应的非一致网格，在其上执行所有的计算。这样做的优势是可以减少总的误差、系统有更好的条件和更佳的计算有效性。不幸的是，通过适应性来引进额外一级复杂性也会导致额外的计算成本和可能的数值不稳定性。网格适应性因此要小心用之，并且一有可能就要适当分析。 ♦

例 1.71. 下面的一篇文章研究空气动力学计算方法中的一类重要算法，叫迎风格式 (upwind scheme)。作者用比较清晰的叙述方法描述了这一方法的历史，以及它在多维计算中的挑战性问题（见最后一段）。

(B. van Leer, Upwind and high-resolution methods for compressible flow: From donor cell to residual-distribution schemes. *Communications in Computational Physics*, **1**, 2006, 192 – 206.)

Upwind differencing is a way of differencing the spatial-derivative terms in the advection equation, and is almost as old as CFD, starting with the work of Courant, Isaacson and Rees (1952 [12]). In their paper, the choice of an upwind-biased stencil follows rather naturally from the "backward" variant of the Method of Characteristics. In the course of the decades further evidence has been gathered in support of upwind discretizations.

- Godunov, 1959. The Russian mathematician S. K. Godunov [18] favored the first order-accurate upwind scheme among a family of simple discretizations, because it is the most accurate one that preserves the monotonicity of an initially monotone discrete solution.
- Fromm, 1968. IBM researcher Jacob Fromm [16] constructed higher-order advection schemes with low dispersive error, by combining schemes with predominantly negative and predominantly positive phase errors: "Zero Average Phase Error Method." The resulting schemes turn out to be upwind biased.
- Wesseling, 1973. Dutch aerospace engineer (turned numerical analyst) Pieter Wesseling [64] used Parseval's theorem to relate the numerical error committed by advection schemes to the Fourier transform of the initial-value distribution. For two different families of advection schemes he found it is an upwind scheme that minimizes the L^2-error made in one time step if the initial values contain a discontinuity. This would indicate upwind schemes may be the preferred choice for compressible flows, where shock discontinuities are common and arise even from the smoothest initial data.
- van Leer, 1986. Reversing Fromm's procedure, Dutch astrophysicist (turned aerospace engineer) Bram van Leer [35] developed an operational definition of upwind schemes.

– Jeltsch, 1987. Mathematicians including Swiss Rolf Jeltsch [30], searching for advection stencils with the greatest potential accuracy for a given number of grid-points, have proved that these stencils are upwind biased.

The price one has to pay for all this goodness is the computational effort in determining the advection direction. That is trivial for a linear 1-D advection equation, but a major effort for nonlinear advection operators hidden in nonlinear systems of multidimensional conservation laws.

迎风差分是差分平流方程中空间–导数项的一种方式，它几乎和计算流体力学一样久远，从 Courant, Isaacson 和 Rees 的研究（1952 [12]）开始。在他们的论文中，一个偏向迎风的模板选取相当自然的来自于特征线法的“向后”变种。过去的几十年间聚集了进一步的证据支持迎风离散。

– Godunov，1959。苏联数学家 S. K. Godunov [18] 在一族简单离散中青睐一阶精度迎风格式，因为它是保持初始单调离散解单调性最精确的方法。

– Fromm，1968。IBM 的研究者 Jacob Fromm [16] 通过合并相位误差以负为主和以正为主的格式而构造了低色散误差的高阶平流格式：“零平均相位误差方法”。由此产生的格式原来是偏向迎风的。

– Wesseling，1973。丹麦航空航天工程师（转为数值分析学家）Pieter Wesseling [64] 利用 Parseval 定理将平流格式导致的数值误差与初始值分布的傅里叶变换联系起来。对两族不同的平流格式他发现，当初始值包含不连续点时是一个偏向迎风格式将一个时间步产生的 L^2-误差极小化。这似乎表明迎风格式对可压缩流可能是首选，在那里冲击不连续性司空见惯，甚至出现于最光滑的初始数据。

– van Leer，1986。将 Fromm 的程序反过来，丹麦天体物理学家（转成航空航天工程师）Bram van Leer [35] 发展出迎风格式的一个操作性定义。

– Jeltsch，1987。包括 Rolf Jeltsch [30] 的数学家们，在寻找对于给定数目的网格点具有最大潜在精度的平流模板之时，已经证明这些模板是偏向迎风的。

对所有这些好处所付的代价是决定平流方向的计算努力。它对线性一维平流方程是平凡的，但对隐藏在多维守恒律的非线性系统的非线性平流算子却是主要的努力。 ♦

应当知道，不是所有在杂志上刊登的论文其语言部分都写得好。欲从阅读其它论文获得写作技巧，要在那些有名望的期刊上找，如美国数学会或美国工业与应用数学协会出版的数学杂志。如今世界各地的学术界出版物良莠不齐，某些新生的杂志要么以盈利为宗旨，要么以滥发文章为目的，不能指望在这类杂志中读到太多好的文章。

令人乐观的是，好文章无处不在，甚至有很多公认的佳作。我们建议经常浏览或精读优秀刊物上的好文章，不仅能及时了解研究前沿的状况，而且也能从这些作者的文章字句中学会写作的技巧。

下面对每一个范畴按字母顺序列出约五本知名数学期刊的名称：

- 综合读物：*The American Mathematical Monthly; The Mathematical Intelligencer; Notices of the American Mathematical Society; SIAM News; SIAM Review.*
- 数学：*American Journal of Mathematics; Annals of Mathematics; Inventiones Mathematicae; Journal of the American Mathematical Society; Transactions of the American Mathematical Society.*
- 数论与逻辑：*Algebra and Number Theory; International Journal of Number Theory; Journal of Mathematical Logic; Journal of Combinatorics and Number Theory; Journal of Number Theory.*
- 代数与几何：*Communications in Algebra; Journal of Algebra; Journal of Algebraic Geometry; Journal of Differential Geometry; Journal of Group Theory.*
- 分析与拓扑：*Geometric and Functional Analysis; Journal of Fourier Analysis and Applications; Journal of Functional Analysis; Journal of Operator Theory; Topology.*
- 微分方程与动力系统：*Differential Equations with Applications; Ergodic Theory and Dynamical Systems; Fractals; Journal of Differential Equations; Journal of Dynamics and Differential Equations.*

- 概率与统计：*Annals of Probability; Annals of Statistics; Journal of American Statistical Society; Biometrika.*
- 应用数学：*Communications on Pure and Applied Mathematics; Journal of Approximation Theory; Multiscale Modeling and Simulation; SIAM Journal on Applied Mathematics; SIAM Journal on Mathematical Analysis.*
- 计算数学：*Mathematics of Computation; Numerische Mathematik; SIAM Journal on Numerical Analysis; SIAM Journal on Scientific Computing; Journal of Scientific Computing.*
- 离散数学：*Annals of Combinatorics; Discrete Mathematics; Journal of Combinatorial Theory; Journal of Graph Theory; SIAM Journal on Discrete Mathematics.*
- 最优化与控制：*Journal of Global Optimization; Mathematics of Operations Research; Mathematical Programming; SIAM Journal on Control and Optimization; SIAM Journal on Optimization.*
- 计算物理：*Journal of Computational Physics; Journal of Mathematical Physics; Journal of Statistical Physics; Communications in Computational Physics.*

在欧美，有一些最佳论文的评选，下面列举奖项名称及其相关的网页供读者参考：

- 《美国数学月刊》(*The American Mathematical Monthly*) 的 Lester R. Ford 论文奖：

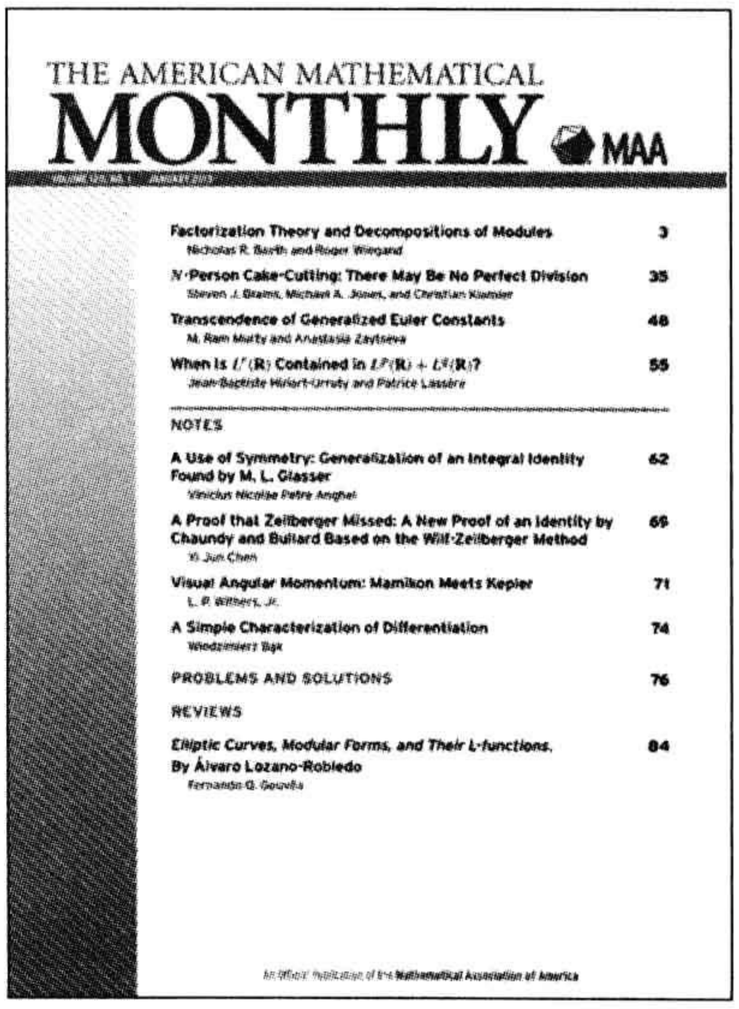
  `http://www.maa.org/Awards/ford.html`

  这一奖项自 1965 年开始，现已颁发近 40 年。
- 美国工业和应用数学协会优秀论文奖 (The SIAM Outstanding Paper Prizes)：

  `http://www.siam.org/prizes/outstanding.htm`

  这一奖项自 1999 年开始。
- 美国数学会的 Leroy P. Steele 数学综述写作奖 (The Leroy P. Steele Prize for Mathematical Exposition)：

  `http://www.ams.org/profession/prizes-awards/ams-prizes/steele-prize`


THE AMERICAN MATHEMATICAL
MONTHLY MAA

Factorization Theory and Decompositions of Modules 3
Nicholas R. Baeth and Roger Wiegand

N-Person Cake-Cutting: There May Be No Perfect Division 35
Steven J. Brams, Michael A. Jones, and Christian Klamler

Transcendence of Generalized Euler Constants 48
M. Ram Murty and Anastasia Zaytseva

When Is $L^r(\mathbf{R})$ Contained in $L^p(\mathbf{R}) + L^q(\mathbf{R})$? 55
Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Patrice Lassère

NOTES

A Use of Symmetry: Generalization of an Integral Identity Found by M. L. Glasser 62
Vinicius Nicolao Petre Anghel

A Proof that Zeilberger Missed: A New Proof of an Identity by Chaundy and Bullard Based on the Wilf-Zeilberger Method 66
Yi Jun Chen

Visual Angular Momentum: Mamikon Meets Kepler 71
L. P. Gibbers, Jr.

A Simple Characterization of Differentiation 74
Wlodzimierz Bak

PROBLEMS AND SOLUTIONS 76

REVIEWS

Elliptic Curves, Modular Forms, and Their L-functions. By Álvaro Lozano-Robledo 84
Fernando Q. Gouvêa

An Official Publication of the Mathematical Association of America

该奖是 1970 年开始颁发的 Leroy P. Steele 奖 1976 年一分为三后的奖项之一。

- 美国数学会的 Levi L. Conant 奖 (Levi L. Conant Prize):

  `http://www.ams.org/prizes/conant-prize.html`

  主要奖励在 *Notices of the American Mathematical Society* 或 *Bulletin of the American Mathematical Society* 发表的文章。这一奖项自 2001 年开始。

- 《复杂性杂志》优秀论文奖 (Best Paper Award for the *Journal of Complexity*):

  `http://www.ibc-research.org/prizes.html#BPA`

  这一奖项自 1996 年开始。

最后我们指出，本章的所有讨论对于撰写学位论文也是有帮助的。学位论文和学术论文的区别，就好像电视剧和电影的区别：前者大大长于后者。学位论文应能提出创见，如历史上最佳硕士论文之一是信息论之父香农于 1937 年在麻省理工学院撰写的硕士论文 *Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*（中继和开关电路的符号分析）。但一般而言，学位论文的大部分内容往往是本学科发展和现状的一个综述。在这个意义下，它更像一本书。我们在第五章将讨论怎样写书。

数学文章的词句

第二章



在第一章我们已经了解了一篇数学文章的基本结构和写作要领。在这一章我们着重引进基本英文数学词汇，介绍常用句法和短语的应用。

词汇是语言的基本单位。无论用什么语言写作，我们常有这样的感触：尽管我们的脑袋里装了不少的常用词，但写作时却无法保证用词的恰到好处。西方的大学人文通识教育的一般做法能给我们启发：无论学理、学工、学文或学其它科目，大学一、二年级学生的人文学科 (humanities) 都通过广泛阅读作为增强作文措词能力的训练。具体到数学写作中的正确用词，哈尔莫斯也告诫我们：

> Think about and use with care the small words of common sense and intuitive logic, and the specifically mathematical words (technical terms) that can have a profound effect on mathematical meaning.
>
> 多想想并小心使用常识和直觉逻辑的小词，特别是对数学含义有深远影响的数学词汇（技术术语）。

对慎用技术名词，他进而给出三个更加具体的忠告：

(1) Avoid technical terms, and especially the creation of new ones, whenever possible.

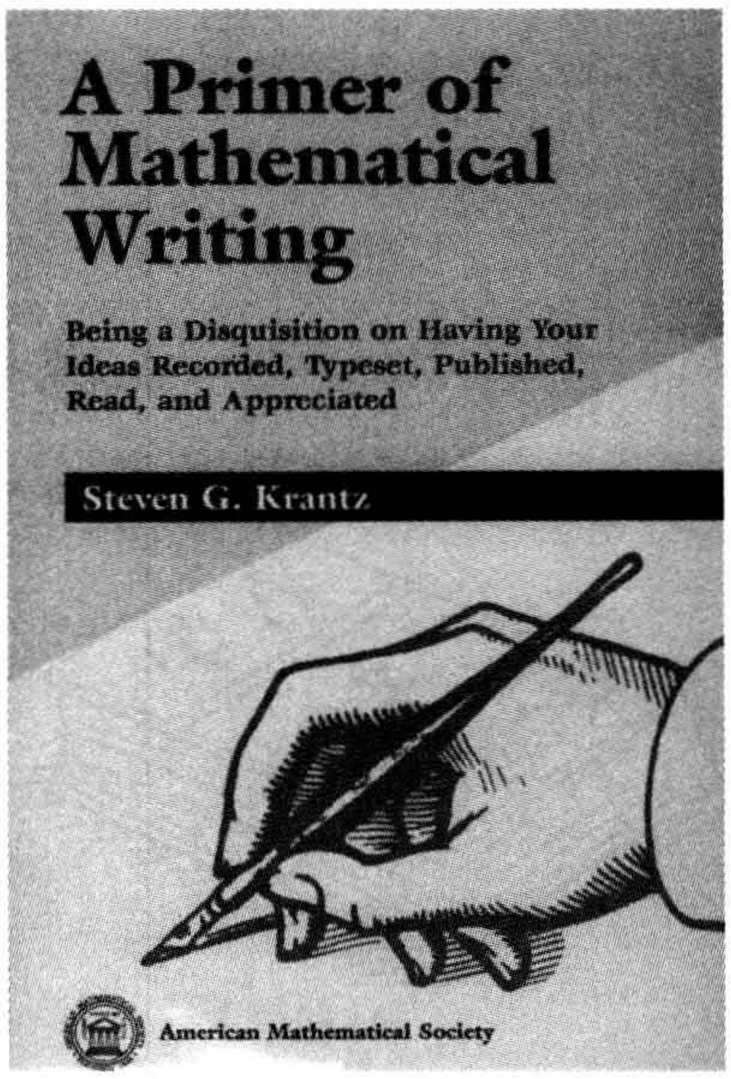
尽可能避免技术词汇，尤其是新造的。

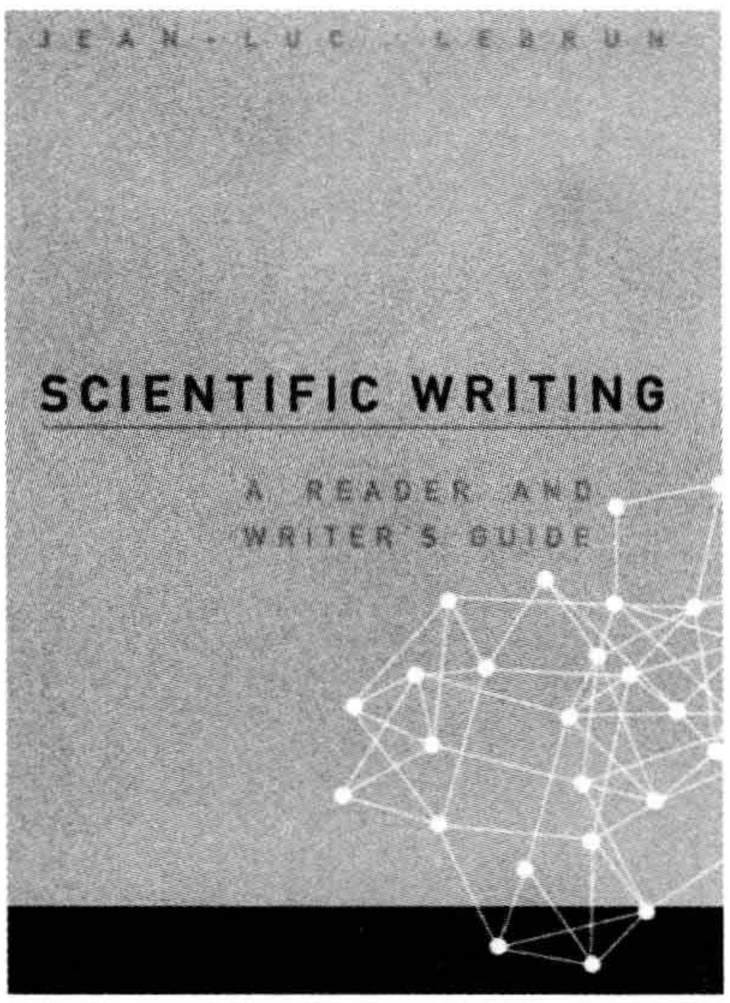
(2) Think hard about the new ones that you must create; consult Roget; and make them as appropriate as possible.

多思索你一定要创造的新词；翻查罗瑞词典；令它们尽可能适切。

(3) Use the old ones correctly and consistently, but with a minimum of obtrusive pedantry ...

正确并连贯使用旧词，但是尽量不突兀迂腐 ·····





在本章介绍数学词句之前我们先引述哈尔莫斯的忠告，就是希望年轻的读者能把它们视为数学写作中遣词造句的座右铭。

在运用英语写作科技文章时，经常涉及各种句型和语法的使用。这些问题在英语语法书中有比较详尽的介绍，但很少有中文书籍专门对数学论文的写作给予比较仔细的介绍。这方面的英文文章和书籍相对则比较多，比如英国曼彻斯特大学著名数值代数专家 Nicholas J. Higham 已再版的书 *Handbook of Writing for the Mathematical Sciences* [14] 和美国圣路易华盛顿大学调和分析学家 Steven G. Krantz 出版的 *A Primer of Mathematical Writing: Being a Disquisition on Having Your Ideas Recorded, Typeset, Published, Read, and Appreciated* [18] 均是关于数学写作的优秀读本。对更广泛的科技英文写作，我们推荐 Jean-Luc Lebrun 近年来出版的书 *Scientific Writing: A Reader and Writer's Guide* [21]。

科技英语不像普通英语那样具有感性形象思维，一般不具感情色彩，表达比较直截了当，其目的是使读者容易理解而不产生无关宏旨的太多想象。也不经常运用比喻、排比、夸张等修辞手段，而是要准确表达客观规律，按逻辑思维清晰地描述问题。科技英语的词汇意义比较专一、稳定，特别是大量的专业名词其词义很固定、专门。即使是像 do, take, make 这样的多词义普通动词，在科技英语中它们的意思亦比较确定，其表达方式也比较容易理解。科技英语主要是一种书面语言，它要求准确、严谨、简洁、流畅，并不要求在文中堆砌华丽的辞藻，也不要求便于朗读和吟诵的写作效果。

在科技英语中经常使用的语法结构相当多，如被动语态句便被广泛使用。这是因为科技文章的主要目的是讲述客观现象，介绍科技成果等，被动句比主动句在使用上的好处是可以使描述减少主观色彩，增强客观性，而且通过隐去人称主语而使句子尽可能简洁。因此在科技英语中，凡是在不需要或不可能指出行为主体的场合，或者在需要突出行为客体的场合都使用被动语态。然而，在这方面，数学写作与其它科技写作略有不同。相比其它学科，数学文章的主动语态用得更多一些，也更受写作名家的青睐。Steven G. Krantz [18] 观察到：

> Most authorities believe that writing in the passive voice is less effective than writing in the active voice.
>
> 大部分权威相信用被动语态写没有用主动语态有效。

Higham [14] 也建议：

> Prefer the active to the passive voice (prefer "X did Y" to "Y was done by X").
>
> 宁用主动语态而非被动式（"X 做 Y" 而不是 "Y 被 X 做"）。

在数学表述中，直接方式总比间接方式好。读者可以比较：

– The vector v is multiplied by the matrix A
  向量 v 被矩阵 A 乘

和

– The matrix A multiplies the vector v
  矩阵 A 乘以向量 v

这两种写法，哪一种更合你胃口？当然，如果你强调动作的执行者，用主动式。但是，如果上例中向量 v 的角色更受关注，就可以使用被动语态了。

就语言要素的词汇角度而言，科技英语反映的是日新月异的科学技术领域内的发展与创新。为了准确、科学地对这些新的发现、发明、理论与进展加以阐述，科技工作者们在遣词方面下了很大的功夫。但从另一个角度来看，由于数学的真理经得起时间的考验，就像两千年前古希腊人有关勾股定理的严格证明到现在依然有效那样，不以时间的意志为转移。其自然的结果是数学的词汇相对比较固定，绝大部分不需要与时俱进地改变意思，不像其它科技学科的一些专业词汇随着科学技术的进步与时俱进得比较明显，所以许多常用数学词汇应该牢记心中，以收一劳永逸之效。正因如此，我们在本章中介绍的基本数学词汇和常用短语在词义和语义上是基本不变的，易于初学者掌握。

本章先介绍一些用于不同学科的基本数学词汇。数学的英语词汇比起其它学科相对少了很多，也不像生物或医学词汇那样冗长而难于发音，所以记忆及拼写它们相对容易。然后我们会介绍一些常见的数学符号及其读法。在科技交流中（比如说作学术报告时），需要运用口语表达有关的数学符号，这就需要了解常用数学符号的文字表达。我们也提供一些数学表述中常见的短语和句型，并辅以足够的例子说明。命题证明是数学论文中最常见的部分，当引入一个引理、

定理或推论时，通常需要加以证明。证明部分的写作有一定的规格，并有一些习惯用语可以参考，本章对此也有一定的讨论。此外，我们还将通过举例说明和相互比较对数学写作中的常见连接词进行一番用法分析。

2.1 基本词汇

如把文章比作大厦，词汇就是建筑大厦的砖头。数学词汇虽然比较多，但相对其它学科来说拼写还是比较简单。只要掌握一定数量的数学词汇，写一些简单的文章就应该不会有多大困难了。在本节里，我们将列举一些常用的数学词汇和词组。列出这些词汇或词组的目的不是提供一个英汉数学词典，而是提供初学写作者掌握这些基本词汇和术语应用的一个练习场所和实践机会。写作或者阅读文章时，如有不明白的词汇，应该参考相关的双语词典（比如《英汉数学词汇》[1]；更普及的词汇可见《新英汉词典》[4])。数学写作的常用短语或句型将在后面几节陆续出现。

为了方便读者查阅，我们按照不同学科的分类按字母排序列出数学主要分支的一些基本词汇。众所周知，许多在初等数学里用到的基本词汇也出现在高等数学里。这些常用词就放在下面的前面几个表格当中。另外，有些数学词汇为几个相异分支所共享，我们就把它们收进最常用的那个学科里面。

表 2.1 一般术语

axiom	公理	claim, assert	断言
common sense	常识	conclusion, conclude	结论
conjecture	猜想	contradiction	矛盾
corollary	推论、系	counterexample	反例
deduction, deduce	推理、推演	definition	定义
demonstration, demonstrate	证实	direct proof	直接证明
equivalence	等价	example, e.g.	例子
exercise	习题	exhaustion method	穷举法
formula	公式	formulation of equation	列出方程
general reciprocity law	一般互反律	generality	普遍性
homework	作业	hypothesis, assumption	假设
implication, imply	隐含、蕴涵	indirect proof	间接证明

续表

induction	归纳	inductive definition	归纳定义
inductive hypothesis	归纳假设	inductive inference	归纳推理
inductive method	归纳法	infer	推断
inference	推理	is logical	合乎逻辑
lemma	引理	logic	逻辑
major (minor) premise	大（小）前提	mathematical construction	数学构造
mathematical induction	数学归纳法	namely, that is, i.e.	即、或言之
necessity	必要性	necessary condition	必要条件
notation, symbol	符号	note, remark	注释
postulate	公设	premise	前提
proposition	命题	question, problem	问题
reference	参考文献	sufficiency	充分性
theorem	定理	universal validity	普遍有效性
unsolvable	不可解的	well defined	定义合理

表 2.2 算术与代数的常用词汇

abacus	算盘	abscissa	横坐标
abscissa axis	横轴	absolute value	绝对值
add, plus	加	addition	加法
algebra	代数	algebraic formula	代数公式
arithmetic	算术	associative law	结合律
average number	平均数	axis	轴
axis of coordinates	坐标轴	binary number	二进制数
binomial theorem	二项式定理	coefficient	系数
combination	组合	common factor	公因子
common zeros	公共零点	commutative law	交换律
complex number	复数	complex conjugate	复共轭
composite function	复合函数	composition	复合
conditional equality	条件等式	conjugate complex numbers	共轭复数
constant	常数	count, enumerate	计数
cubic root	立方根	current value	目前值
decimal number	小数	decimal point	小数点
decreasing function	递减函数	decreasing sequence	递减序列
degree of a polynomial	多项式的次数	denary	十进制的
denominator	分母	dependent variable	因变量
Descartes coordinates	笛卡尔坐标	difference	差

续表

digit	数字	digital operation	数字运算
directly proportional	正比	discriminant	判别式
distributive law	分配律	distributivity	分配性
divide	除	dividend	被除数
divider	两脚规	divisibility	可除性
divisible	可除的	division	除法
division algorithm	辗转相除法	divisor	除数
domain	定义域	double root	二重根
equality	等式	equation	方程
even number	偶数	exponent	指数
exponential function	指数函数	expression	表达式
factor	因子	factorization	因式分解
fraction	分数	function	函数
function symbol	函数符号	fundamental theorem of algebra	代数基本定理
general term	通项	graph	图像
graphic example	图例	greatest common factor	最大公因数
half-life	半寿命	higher term	高次项
imaginary number	虚数	integer	整数
identical	恒等的	identity	恒等式
inequality	不等式	inequality sign	不等号
independent variable	自变量	index	指数、指标
integral part	整数部分	intercept	截距
interval	区间	inverse function	反函数
inverse image	逆象	inversely proportional	反比
irrational number	无理数	known	已知量
law of exponents	指数定律	leading coefficient	首项系数
least common multiple	最小公倍数	like terms	同类项
linear function	线性函数	logarithm	对数
logarithmic function	对数函数	long division	长除法
lower (upper) bound	下（上）界	minus sign	减号
mixed fraction	带分数	module	模
monomial	单项式	multiple	倍数
multiple root	重根	multiplication	乘法
multiplicity	重数	multiply	乘
natural number	自然数	negative number	负数

续表

numerator	分子	odd number	奇数
opposite number	相反数	ordinate	纵坐标
ordinate axis	纵轴	origin	原点
outer term	外项	parenthesis, bracket, brace	括号
percentage, percent	百分比	periodic decimal	循环小数
permutation	排列、置换	plot	作图
plus sign	正号	polar coordinates	极坐标
polar radius (angle)	极半径（角）	polynomial	多项式
positive number	正数	positive orthant	正象限
positive square root	正平方根	power	幂
power exponent	幂指数	prime number	素数、质数
product	乘积	proportion	比例
proportional divisor	比例因子	quadrant	象限
quadratic	二次的	quaternion	四元数
quotient	商	radical	根式
range	值域	rate of decay	衰变率
ratio	比、比率	rational function	有理函数
rational franction	有理分式	rational number	有理数
real number	实数	real (imaginary) part	实（虚）部
real root	实根	reciprocal	倒数
reduction	约化	redundant equation	多余方程
relation	关系	relative error	相对误差
root	根	root of unity	单位根
simple root	单根	single factor	单因子
slope	斜率	soluble	可解的
solution	解	solve	求解
square root	平方根	strictly increasing function	严格递增函数
strictly monotone function	严格单调函数	subtract, minus	减
subtraction	减法	sum	和
summation	求和	symmetric about an axis	轴对称
symmetric about the origin	中心对称	symmetric function	对称函数
symmetry	对称	synthetic division	综合除法
undetermined coefficients	待定系数	unknown	未知量
variable	变量	variation of sign	符号变化
zero of a function	函数零点	zero exponent	零指数

表 2.3 几何与三角的常用词汇

acute (obtuse) angle	锐（钝）角	adjacent	邻边
adjacent angle	邻角	affine geometry	仿射几何
alternate angle	内错角	alternate exterior angle	外错角
altitude	高	amplitude	振幅
angle	角、角度	arc length	弧长
area	面积	argument	幅角
ball	球体	bisector	平分线
center	中心	center distance	中心距
central angle	圆心角	centroid	形心、质心
chart	图	chord	弦
circle	圆	circular cone	圆锥
circular cylinder	圆柱体	circular cylindrical surface	圆柱面
circular ring	圆环	circular sector	圆扇形
circumferential angle	圆周角	circumference	周长
collinear	共线的	compass	圆规
complementary angle	余角	concentric circles	同心圆
concyclic	共圆的	congruence	全等
congruent triangle	全等三角形	conic curve	圆锥曲线
corresponding angle	同位角	cosecant	余割
cotangent	余切	curve	曲线
cyclic polygon	内接多边形	decagon	十边形
Descartes' folium	笛卡尔叶形线	descriptive geometry	画法几何
diagonal	对角线	diagram	图、图表
diameter	直径	dihedral angle	二面角
directrix	准线	disc	圆盘
distance	距离	dodecagon	十二边形
double angle formula	倍角公式	double oval	双卵线
eccentricity	离心率	ellipse	椭圆
elliptic orbit	椭圆轨道	ellipsoid	椭球
equilateral triangle	等边三角形	Euclidean axiom	欧几里得公理
exterior angle	外角	focal points	焦点
focus	焦点	frustum	圆台
frustum of pyramid	棱台	generatrix	母线
helix	螺旋线	hemisphere	半球
heptagon	七边形	hexagon	六边形

续表

horizontal line	水平线	hyperbola	双曲线
hyperbolic geometry	双曲几何	hyperbolic paraboloid	双曲抛物面
hyperboloid	双曲面	hypoteneuse	斜边
inclination angle	倾角	included angle	夹角
incommensurable	无公度的	inner center	内心
inscribed circle	内切圆	interior angle	内角
internal bisector	角平分线	intersection point	交点
isogonal	等角的	isosceles quadrilateral	等腰四边形
isosceles trapezoid	等腰梯形	isosceles triangle	等腰三角形
law of cosines	余弦定律	law of sines	正弦定律
line of symmetry	对称线	line segment	线段
lozenge, rhombus	菱形	major (minor) arc	大（小）弧
major (minor) axis	长（短）轴	median line	中线
median point	重心、中点	Möbius strip	默比乌斯带
n-gon	n-边形	nonagon	九边形
non-Euclidean geometry	非欧几何	non-intersecting lines	不相交线
normal line	法线	oblique line	斜线、斜边
octagon	八边形	opposite	对边
parabola	抛物线	paraboloid	抛物面
parallel lines	平行线	parallelogram	平行四边形
pentagon	五边形	perimeter	圆周长
period	周期	periodic function	周期函数
periodicity	周期性	perpendicular line	垂直线
plane	平面	plane geometry	平面几何
point	点	pointed cone	尖锥
polygon	多边形	polyhedron	多面体
prism	棱柱	projective geometry	射影几何
pyramid	棱锥	pyramid surface	棱锥面
Pythagorean theorem	勾股定理	quadrant angle	象限角
quadratics	割圆曲线	quadric cone	二次锥面
quadrilateral, quadrangle	四边形	quatrefoil	四叶形
radian	弧度	radius	半径
ratio of equality	等比	ray	射线
rectangle	长方形	rectangular coordinates	直角坐标
regular polygon	正多边形	regular pyramid	正棱锥
right circular cone	正圆锥	right triangle	直角三角形

续表

ruler	直尺	saddle point	鞍点
saddle region	鞍状区域	secant	正割
sector	扇形	similar figure	相似形
similarity, similar to	相似	solid geometry	立体几何
sphere	球面	spherical geometry	球面几何
spherical triangle	球面三角形	spiral	螺线
spiral of Archimedes	阿基米德螺线	square	正方形
star domain	星形域	straight line	直线
subscribed circle	外接圆	supplementary angle	补角
surface	曲面	tangent	正切
tangent line	切线	tangential equation	切线方程
terminal point	终点	tetrahedron	四面体
torus	环面	trapezoid	梯形
triangle	三角形	trigonometric function	三角函数
trigonometry	三角学	unit cube	单位立方体
vertex angle	顶角	vertical angles	对顶角
vertical line	垂直线	volume	体积

表 2.4 微积分的常用词汇

absolutely convergent	绝对收敛	alternating series	交错级数
analytic expression	解析表达式	analytic geometry	解析几何
antiderivative	原函数	asymptotic direction	渐近方向
average rate of change	平均变化率	average value	平均值
boundary	边界	boundary integral	边界积分
boundary point	边界点	bounded below	下有界的
calculus	微积分	cardinal number	基数
chain rule	链式法则	change of variable	变量替换
closed set	闭集	closure	闭包
cluster point	聚点	complement	补集
completable	可完备化	complete	完全的
complete set	完全集	concave upward (down)	向上（下）凹
concavity	凹性	conditionally convergent	条件收敛
continuity	连续性	continuous everywhere	处处连续
continuously differentiable	连续可微	convergence	收敛
convolution	卷积	countable set	可数集

续表

covering	覆盖	convex (concave) function	凸（凹）函数
convex hull	凸包	convex set	凸集
convexity	凸性	critical point	临界点
cross product	向量积	cross section	截面
cylindric coordinates	柱坐标	D'Alembert's criterion	达朗贝尔判别法
Darboux upper integral	达布上积分	decay	衰变
definite integral	定积分	deleted neighborhood	去心邻域
dense subset	稠密子集	denumerable	可数的
derivative	导数	directional cosine	方向余弦
differentiable everywhere	处处可微	differential	微分
directional derivative	方向导数	disconnected set	不连通集
discontinuous function	不连续函数	discontinuous point	间断点
divergence	发散、散度	divergent	发散的
dominant series	强级数	dot product	点积
double integral	二重积分	elementary function	初等函数
elliptic function	椭圆函数	elliptic integral	椭圆积分
empty set	空集	even function	偶函数
first derivative	一阶导数	Fourier series	傅里叶级数
Fourier transform	傅里叶变换	function of bounded variation	有界变差函数
function series	函数级数	fundamental theorem of calculus	微积分基本定理
generalized integral	广义积分	global extreme value	整体极值
gradient	梯度	gradient vector	梯度向量
greatest lower bound	最大下界	Green's formula	格林公式
harmonic series	调和级数	harmonics	调和函数
higher order derivative	高阶导数	horizontal asymptote	水平渐近线
identity function	恒等函数	implicit differentiation	隐式求导
implicit function	隐函数	improper integral	广义积分
increment	增量	induced set	导集
indefinite form	不定型	indefinite integral	不定积分
infimum value	下确界	infinitesimal	无穷小
infinity	无穷大	inflection point	拐点
instantaneous rate of change	瞬时变化率	integrability condition	可积性条件
integrable	可积的	integral, integration	积分
integral sign	积分号	integral test	积分检验法
integrand	被积函数	integration by parts	分部积分法
integration by substitution	变量替换法	integration constant	积分常数

续表

interior point	内点	intermediate value theorem	介值定理
intersection	交集	inverse mapping	逆映射
isolated point	孤立点	iterated integral	逐次积分
Jordan curve	若尔当曲线	jump discontinuity	跳跃间断性
least upper bound	最小上界	least value	最小值
left (right) continuous	左（右）连续	left (right) derivative	左（右）导数
limit	极限	limit point	极限点
L'Hospital's rule	洛必达法则	line integral	线积分
local extreme value	局部极值	local minimum (maximum)	局部极小（大）
logarithmic differentiation	对数求导法	lower (upper) Darboux sum	达布下（上）和
Maclaurin series	麦克劳林级数	majorant series	强级数
maximal value	极大值	mean value theorem	中值定理
minimum	极小	monotone function	单调函数
multiple integral	多重积分	multiple series	多重级数
multi-variable function	多元函数	multivariate	多变量、多元
natural exponential function	自然指数函数	natural logarithm	自然对数
neighborhood	邻域	nondifferentiable point	不可微点
nowhere dense	疏的	numerable	可数的
one-sided limit	单侧极限	one variable function	一元函数
open (closed) ball	开（闭）球	open domain	开域
open set	开集	ordinal number	序数
parameter	参数	parametric equation	参数方程
partial derivative	偏导数	partial differential	偏微分
partial fraction	部分分式	path connected	道路连通
perfect set	完美集	power series	幂级数
product rule	乘积法则	proper subset	真子集
properly include	真包含	quantify	量化
quantity	量	quotient rule	商法则
rate of change	变化率	rearrangement of series	级数的重排
remainder term	余项	repeated integral	累次积分
Riemann integral	黎曼积分	Riemann sum	黎曼和
second derivative	二阶导数	sequence	序列
series of functions	函数级数	series of positive terms	正项级数
set theory	集合论	several variables	多变量
simply connected region	单联通区域	singular point	奇异点

续表

smooth function	光滑函数	smoothness	光滑性
solid of revolution	旋转体	space curve	空间曲线
spherical coordinates	球坐标	Stokes' theorem	斯托克斯定理
subscript	下标	subset	子集
superscript	上标	supremum value	上确界
surface integral	面积分	surface of revolution	旋转曲面
Taylor's expansion	泰勒展开式	Taylor's series	泰勒级数
total differential	全微分	transcendental function	超越函数
triple integral	三重积分	unbounded function	无界函数
unbounded set	无界集	uncountable set	不可数集
uniformly bounded	一致有界	uniformly continuous	一致连续
uniformly convergent	一致收敛	union	并集
upper (lower) limit	上（下）极限	variation	变差

表 2.5 线性代数的常用词汇

algebraic cofactor	代数余子式	antitone	反序
array	数组	augmented matrix	增广矩阵
band matrix	带状矩阵	basis	基底
best approximation	最佳逼近	bilinear	双线性的
block diagonal matrix	块对角矩阵	block matrix	分块矩阵
canonical basis	典范基	canonical form	标准型
characteristic polynomial	特征多项式	characteristic root	特征根
circulant matrix	循环矩阵	coefficient matrix	系数矩阵
column	列	column rank	列秩
column (row) space	列（行）空间	column stochastic matrix	列随机矩阵
companion matrix	伴随矩阵	component	分量
condition number	条件数	conjugated transposed matrix	共轭转置矩阵
determinant	行列式	diagonal element	对角元素
diagonal matrix	对角矩阵	diagonalizable matrix	可对角化矩阵
diagonally dominant matrix	对角占优矩阵	dimension	维数
direct sum	直接和	doubly stochastic matrix	双随机矩阵
eigenspace	特征空间	eigenvalue	特征值
eigenvector	特征向量	finite dimensional	有穷维的
fundamental solution	基本解	generalized eigenspace	广义特征空间
generalized eigenvector	广义特征向量	generalized inverse matrix	广义逆矩阵

续表

generator	生成子	geometric multiplicity	几何重数
homogeneous equation	齐次方程	hyperplane	超平面
idempotent matrix	幂等矩阵	identity matrix	单位矩阵
ill conditioned problem	病态问题	indecomposable matrix	不可分解矩阵
indefinite matrix	不定矩阵	infinite dimensional	无穷维的
inhomogeneous equation	非齐次方程	invariant linear subspace	不变线性子空间
inverse matrix	逆矩阵	invertible matrix	可逆矩阵
irreducible matrix	不可约矩阵	isomorphism	同构
isotone	保序	Jordan block	若尔当块
Jordan canonical form	若尔当标准型	least square problem	最小二乘问题
linear combination	线性组合	linear dependence	线性相关
linear equation	线性方程	linear independence	线性无关
linear subspace	线性子空间	linear transformation	线性变换
lower triangular matrix	下三角矩阵	main diagonal	主对角线
matrix	矩阵	matroid	拟阵
maximal eigenvalue	最大特征值	minimal norm solution	极小范数解
minimal polynomial	最小多项式	multi dimensions	多维
negative definite matrix	负定矩阵	nilpotent	幂零的
nonnegative matrix	非负矩阵	nonsingular matrix	非奇异矩阵
normal equation	法方程	normal form	标准型
normal matrix	正则矩阵	orthogonal basis	正交基
orthogonal complement	正交补	orthogonal decomposition	正交分解
orthogonal matrix	正交矩阵	orthogonal projection	正交投影
orthogonal transformation	正交变换	partition of unity	单位分解
positive definite	正定的	positive matrix	正矩阵
positive semidefinite matrix	正半定矩阵	positivity	正性
primitive matrix	本原矩阵	primitive quadratic form	本原二次型
principal minor	主子式	projection matrix	投影矩阵
quadratic form	二次型	quasi stochastic matrix	拟随机矩阵
rank	秩	rectangular matrix	长方阵
row	行	row rank	行秩
row (column) vector	行（列）向量	scalar	标量
singular matrix	奇异矩阵	spanned by ...	由 …… 张成
spectral radius	谱半径	spectrum	谱
square matrix	方阵	symmetric matrix	对称矩阵

续表

trace	迹	transposed matrix	转置矩阵
unit vector	单位向量	unitary matrix	酉矩阵
vector	向量	vector space	向量空间
zero element	零元素	zero vector	零向量

表 2.6 数论的常用词汇

algebraic number theory	代数数论	analytic number theory	解析数论
arithmetic progression	等差数列	Chinese Remainder Theorem	中国剩余定理
Diophantine equation	丢番图方程	Euclidean algorithm	欧几里得算法
exponential sum	指数和	fundamental theorem of arithmetic	算术基本定理
Goldbach's conjecture	哥德巴赫猜想	mutually prime	互素的
over determined equation	超定方程	sieve method	筛法
transfinite	超限的	twin primes	孪生素数
unsolvable	不可解	whole number	整数

表 2.7 抽象代数、微分几何与拓扑的常用词汇

abstract algebra	抽象代数	affine connection	仿射联络
algebraic curve	代数曲线	algebraic geometry	代数几何
algebraic topology	代数拓扑	algebraic torus	代数环面
algebraic variety	代数簇	braid group	辫群
Cartan connection	嘉当联络	category	范畴
commutative algebra	交换代数	commutator	换位子
complex	复形	coset	陪集
covariant derivative	共变导数	curvature	曲率
cyclic semigroup	循环半群	degenerate	退化的
diffeomorphism	微分同胚	differential cohomology	微分上同调
differential form	微分形式	differential geometry	微分几何
differential manifold	微分流形	differential representation	微分表示
differentiable structure	微分结构	differential topology	微分拓扑
dimension theory	维数论	equivalent class	等价类
equivalent relation	等价关系	Euclidean connection	欧几里得联络
Eular's characteristic	欧拉示性数	exterior algebra	外代数
exterior differential	外微分	exterior normal	外法线
fibre bundle	纤维丛	fibre homeomorphism	纤维同胚
field	域	finite group	有限群

续表

functor	函子	fundamental differential form	基本微分形式
fundamental group	基本群	gauge field	规范场
generator	生成元	genus	亏格
geodesic	测地线	geometric analysis	几何分析
germ	芽、核	global differential geometry	整体微分几何
group	群	group of automorphisms	自同构群
homogeneous space	齐次空间	homology	同调
homomorphism	同态	homotopy	同伦
ideal	理想	imbedding theorem	嵌入定理
isomorphism	同构	isoperimetric	等周的
knot theory	纽结理论	K-theory	K 理论
Lie group (algebra)	李群（代数）	linking number	环绕数
manifold	流形	minimal surface	极小曲面
module of quotients	商模	moving frame	活动标架
multilinear algebra	多重线性代数	multi pole	多极
orientable manifold	可定向流形	orientation	定向
permutation group	置换群	point set topology	点集拓扑
primitive group	本原群	principal bundle	主丛
reference frame	参考标架	reflexive law	自反律
regular point	正则点	regular value	正则值
Riemannian geometry	黎曼几何	Riemannian manifold	黎曼流形
Riemannian metric	黎曼度量	ring	环
secondary torsion	重挠率	sectional curvature	截面曲率
semigroup	半群	simple group	单群
simplex	单形	stereographic projection	球极平面投影
string theory	弦理论	symplectic geometry	辛几何
symplectic space	辛空间	symplectic topology	辛拓扑
tangent bundle	切丛	tensor	张量
tensor product	张量积	topological algebra	拓扑代数
topological manifold	拓扑流形	topological space	拓扑空间
topologically equivalent	拓扑等价的	torsion	挠率
torsion free	非挠的	torsion group	挠群
torus	环面	transitive	传递的
unit	单位	unitary tangent bundle	酉切丛
variety	簇	wedge product	楔积

表 2.8 分析的常用词汇

absolutely continuous	绝对连续的	additivity	可加性
almost everywhere	几乎处处	analysis	分析
analytic continuation	解析延拓	analytic function	解析函数
annihilator	零化子	approximate point spectrum	近似点谱
automorphic function	自守函数	Baire measurable function	贝尔可测函数
Banach space	巴拿赫空间	Bessel's inequality	贝塞耳不等式
bijection, bijective	一一映上	bilinearity	双线性
Borel measure	博雷尔测度	boundary integral	边界积分
bounded linear functional	有界线性泛函	bounded linear operator	有界线性算子
Cauchy's integral formula	柯西积分公式	closed graph theorem	闭图像定理
compact operator	紧算子	compact separable space	紧可分空间
compact set	紧集	compact space	紧空间
compactification	紧化	complete metric space	完备距离空间
complete ordering	全序	conformal mapping	共形映射
continuous operator	连续算子	continuous spectrum	连续谱
contraction mapping theorem	压缩映像定理	convergence in norm	依范数收敛
countably additive	可列可加的	directed set	有向集
distribution theory	分布理论	dominated convergence theorem	控制收敛定理
dual space	对偶空间	eigenfunction	特征函数
entire function	整函数	equi-bounded	等度有界的
equi-continuous	等度连续的	equivalent measure	等价测度
extension of a mapping	映射扩张	extension theorem	扩张定理
essential singularity	本性奇点	fixed point theorem	不动点定理
function-theoretic	函数论的	function of one complex variable	单复变函数
functional	泛函	functional analysis	泛函分析
harmonic function	调和函数	Hilbert space	希尔伯特空间
holomorphic function	全纯函数	homeomorphism	同胚
identical mapping	恒等映射	implicit function theorem	隐函数定理
inclusion mapping	包含映射	incompleteness	不完全性
index set	指标集	induced mapping	诱导映射
injection, one-one	单射、一一映射	inner product	内积
inner product space	内积空间	integrable function	可积函数
inverse mapping theorem	逆映射定理	isometric operator	等距算子
isometry	等距	lattice	格
Lebesgue integral	勒贝格积分	Lebesgue measure	勒贝格测度
linear space	线性空间	locally compact	局部紧

续表

locally convex	局部凸的	many-valued	多值的
measurable function	可测函数	measurability	可测性
measurable set	可测集	measurable space	可测空间
measure	测度	measure space	测度空间
measure theory	测度论	measure zero	零测度
meromorphic function	亚纯函数	metric (distance) space	距离空间
monotone convergence theorem	单调收敛定理	monotone operator	单调算子
multi-valued function	多值函数	nonlinear transformation	非线性变换
norm	范数	norm equivalence theorem	范数等价定理
normed space	赋范空间	null space, kernel	零空间
one to one correspondence	一一对应	open mapping theorem	开映射定理
partially ordered	偏序的	peripheral spectrum	边缘谱
perturbation theory	摄动理论	perturbed problem	摄动问题
point-set mapping	点–集映射	pointwise convergence	逐点收敛
precompact	准紧的	pre-Hilbert space	准希尔伯特空间
product space	乘积空间	quotient space	商空间
reflexive space	自反空间	relatively compact	相对紧
residual spectrum	剩余谱	residual theorem	留数定理
resolvent	预解式	resolvent kernel	预解核
resolvent operator	预解算子	resolvent set	预解集
restriction of a mapping	映射限制	Riemann surface	黎曼曲面
Riesz representation theorem	里斯表示定理	self-adjoint operator	自共轭算子
separable space	可分空间	sequentially compact	列紧的
set function	集函数	simple function	简单函数
simple pole	一阶极点	singular integral	奇异积分
singular measure	奇异测度	Sobolev space	索伯列夫空间
space of distributions	广义函数空间	spectral decomposition	谱分解
spectrum point	谱点	square integrable function	平方可积函数
step function	阶梯函数	strictly self-adjoint	严格自伴的
strongly (weakly) convergent	强（弱）收敛	support	支集
surjection, surjective, onto	满射、映上	totally ordered set	全序集
trace theorem	迹定理	triangle inequality	三角不等式
uniform boundedness principle	一致有界性原则	uniformly convex normed space	一致凸赋范空间
weak solution	弱解	weak topology	弱拓扑
weakly compact	弱紧的	weakly differentiable	弱可微

表 2.9 动力系统与遍历理论的常用词汇

acceleration	加速度	angular momentum	角动量
aperiodic	非周期的	area preserving	保面积
asymptotically stable	渐近稳定	attracting fixed point	吸引不动点
attractor	吸引子	autonomous differential equation	自治微分方程
barycenter	重心	basin of attraction	吸引域
bifurcation theory	分歧理论	boundary value problem	边值问题
Cantor's ternary set	康托尔三分集	centripetal force	向心力
chaos	混沌	chaotic attractor	混沌吸引子
comparison principle	比较原理	complete integral	完全积分
conservation law	守恒律	conservative field	保守场
conservation of energy	能量守恒	constant state	定常态
continuity equation	连续性方程	continuous dynamical system	连续动力系统
contractive semigroup	收缩半群	control theory	控制论
convection	对流	damping	阻尼的
deterministic system	确定性系统	differentiable dynamical system	微分动力系统
diffusion equation	扩散方程	discrete dynamical system	离散动力系统
displacement	位移	dissipative part	耗散部分
dynamical system	动力系统	elliptical equation	椭圆型方程
ergodic invariant measure	遍历不变测度	ergodic theory	遍历理论
ergodicity	遍历性	Euler equation	欧拉方程
eventually fixed point	最终不动点	evolution equation	发展方程
exact differential equation	恰当微分方程	exactness	正合性
existence theorem	存在性定理	explicit solution	显式解
first integral	首次积分	fixed point	不动点
flow	流	force	力
fractal	分形	fractal dimension	分形维数
fractal geometry	分形几何	frequency histogram	频率直方图
fundamental solution	基本解	fundamental theorem	基本定理
general solution	通解	hyperbolic equation	双曲型方程
inertia	惯性	infinitesimal generator	无穷小生成元
information entropy	信息熵	inhomogeneous boundary condition	非齐次边界条件
initial value problem	初值问题	instability	不稳定性
integral curve	积分曲线	integral equation	积分方程
invariant measure	不变测度	invariant set	不变集
iterate, iteration	迭代点、迭代	kinetic energy	动能
kinetics	动力学	Lagrangian	拉格朗日算子

续表

limit cycle	极限环	maximum entropy	最大熵
maximum principle	最大值原理	mean ergodic	平均遍历的
metric entropy	度量熵	minimal action principle	最小作用原理
mixing	混合性	moment	矩量
momentum	动量	natural boundary condition	自然边界条件
nonsingular transformation	非奇异变换	non-steady flow	不稳定流
operator equation	算子方程	orbit, trajectory	轨道
oscillation	振动	parabolic equation	抛物型方程
partial differential equation	偏微分方程	particular solution	特解
period	周期	periodic motion	周期运动
periodic point	周期点	periodicity	周期性
Poincaré's map	庞加莱映射	pointwise ergodic theorem	逐点遍历定理
Poisson bracket	泊松括号	position	位置
potential energy	势能	quantum mechanics	量子力学
recurrence	循环、递归	regularity property	正则性
repelling fixed point	排斥不动点	restricted three body problem	限制三体问题
shock wave	激波	smoothness property	光滑性质
space average	空间平均	space-time	时空
stability	稳定性	stable	稳定的
statistical mechanics	统计力学	steady state solution	定态解
thermodynamics	热力学	time average	时间平均
time delay equation	时间延迟方程	time variable	时间变量
topological dynamical system	拓扑动力系统	topological entropy	拓扑熵
topological transitivity	拓扑传递	transfer operator	转移算子
unimodal function	单峰函数	unstable	不稳定的
variation of parameter	参数变易法	variational principle	变分原理
vector field	向量场	velocity, speed	速度
work	功	Wronskian	朗斯基行列式

表 2.10 优化与运筹的常用词汇

Brownian movement	布朗运动	calculus of variation	变分法
combinatorial optimization	组合优化	combinatorics	组合数学
complexity	复杂性	conjugate direction	共轭方向
conjugate gradient method	共轭梯度法	convex analysis	凸分析
convex closure	凸闭包	convex combination	凸组合

续表

convex cone	凸锥	convex polyhedron	凸多面体
convex programming	凸规划	convexification	凸化
decision theory	决策论	dual optimal solution	对偶最优解
dual problem	对偶问题	duality	对偶性
dynamic optimization	动态最优化	dynamic programming	动态规划
ellipsoidal algorithm	椭球算法	equality constraint	等式约束
equilibrium point	平稳点	feasible set	可行集
game theory	对策论	geometric programming	几何规划
Hessian, Hessian matrix	黑塞矩阵	inequality constraint	不等式约束
integer programming	整数规划	integral geometry	积分几何
interior point method	内点方法	Karmarkar's algorithm	卡马卡法
Lagrange multiplier	拉格朗日乘子	large scale system	大型系统
least square method	最小二乘法	least value	最小值
level set	水平集	line search	线搜索
linear complementarity	线性相补	linear programming	线性规划
mathematical programming	数学规划	minimax theorem	极小极大定理
multi-objective optimization	多目标规划	network optimization	网络最优化
Newton's method	牛顿法	nonsmooth analysis	非光滑分析
objective function	目标函数	one step method	单步法
operations research	运筹学	optimal control	最优控制
optimal solution	最优解	optimality condition	最优性条件
postman problem	邮递员问题	potential function	位势函数
predictor-corrector	预测–校正式	prevention of cycling	防止循环
primal-dual	原始–对偶	pseudoconvex function	伪凸函数
quadratic programming	二次规划	quasiconvex function	拟凸函数
quasi Newton method	拟牛顿法	queuing theory	排队论
reduced gradient	约化梯度	relative interior point	相对内点
Schur convex	舒尔凸	semidefinite programming	半定规划
slack variable	松弛变量	starting point	起点
steepest descent	最速下降	stochastic programming	随机规划
strictly convex function	严格凸函数	subgradient method	次梯度方法
trust region method	信赖域法	variational inequality	变分不等式

表 2.11 图论与组合的常用词汇

bigraph	双图	chain	链
circuit	回路	combinatorics	组合学
complete graph	完全图	connected graph	连通图
conjugate partition	共轭分拆	connection matrix	联络矩阵
count	计数	cycle	循环
directed graph	有向图	discrete mathematics	离散数学
edge	边	enumerative combinatorics	计数组合学
graph theory	图论	in-degree	入度
indicator matrix	指标矩阵	incidence coefficients	关联系数
incidence matrix	关联矩阵	incident	关联的
path	道路	tree	树
vertex	顶点	wreath product	圈积

表 2.12 数值分析的常用词汇

approximation	近似、逼近	B-spline	基本样条
bit	比特	boundary element	边界元
computational biology	计算生物学	computational geometry	计算几何
computational science	计算科学	computer-aided design	计算机辅助设计
conformal element	协调元	conservation law	守恒律
consistency	相容性	convergence order	收敛阶
convergence rate analysis	收敛速度分析	convergence region	收敛域
curve fitting	曲线拟合	data processing	数据处理
difference equation	差分方程	difference quotient	差商
Dirichlet problem	狄利克雷问题	discrete process	离散过程
discretization	离散化	domain decomposition method	区域分解法
error estimate	误差估计	extrapolation	外插（推）
figure	图形	finite difference	有限差分
finite element	有限元	finite volume method	有限体积法
floating point operation	浮点运算	flow diagram (chart)	框图
forward difference quotient	向前差商	Gaussian elimination	高斯消去法
Gauss quadrature	高斯求积公式	governing equation	控制方程
grid	网格	grid point	网格点
heuristic analysis	启发式分析	image processing	图像处理
interpolation	插值	Jacobian matrix	雅可比矩阵

续表

meshless method	无网格法	mixed element	混合元
modification	修正	multi-grid method	多重网格法
numerical analysis	数值分析	numerical differentiation	数值微分
numerical integration	数值积分	numerical scheme	数值格式
optimality	最优性	piecewise linear function	分段线性函数
projection method	投影方法	properly posed problem	适定的问题
radial basis function	径向基底函数	refinement	加细
rigorous analysis	严格分析	round-off error	舍入误差
running time	执行时间	signal processing	信号处理
simulation	模拟	simultaneous approximation	同时逼近
sparse matrix	稀疏矩阵	spectral method	谱方法
spline function	样条函数	step size	步长
structure preserving method	保结构方法	symplectic algorithm	辛算法
table	表格	wavelet theory	小波理论

表 2.13 概率与统计的常用词汇

almost sure convergence	殆必收敛性	Bernoulli process	伯努利过程
conditional expectation	条件期望	conditional probability	条件概率
conditional variance	条件方差	convergence in mean	平均收敛
convergence in measure	依测度收敛	correlation coefficient	关联系数
covariance	协方差	covariance matrix	协方差矩阵
expectation	期望	experiment	试验
experimental design	试验设计	frequency	频率
frequency histogram	频率直方图	independent random variables	独立随机变量
joint density	联合密度	joint distribution function	联合分布函数
linear regression	线性回归	Markov chain	马尔可夫链
Markov process	马尔可夫过程	martingale	鞅
mathematical expectation	数学期望	maximum likelihood	最大似然
mean	平均值	median	中间值
Monte Carlo method	蒙特卡罗方法	multiple coefficient of correlation	多重相关系数
multiple correlation	多重相关	multivariate statistical analysis	多元统计分析
normal distribution	正态分布	probabilistic method	概率方法
probability space	概率空间	probability theory	概率论
random distribution	随机分布	random event	随机事件
random number	随机数	random number generator	随机数产生器

续表

random process	随机过程	random variable	随机变量
random walk	随机游动	randomness	随机性
sample space	样本空间	semi-martingale	半鞅
standard deviation	标准差	statistical error	统计误差
statistical hypothesis	统计假设	stochastic process	随机过程
stochastic convergence	随机收敛	stochastic differential	随机微分
stochastic variable	随机变量	stochastic sampling	随机取样
uniform distribution	均匀分布	variance	方差
white noise	白噪声	Wiener's process	维纳过程

一篇中文文章包括字、词、句、段，这些组成部分构成了文章的血和肉。同样，英文文章中也是由词、短语、句子、段落组成。所以在写英语文章时必须重视单词和句型的运用。我们应该有意识地扩大自己的词汇量、短语量，通过实践可以品尝到积累词汇的乐趣。常言道，厚积薄发。随着时间的推移，就会发觉自己越来越少出现以前常有的“言穷词拙”的毛病了。熟练地运用常用的数学词汇、词组和短语，会使写作流畅；审稿人和一般读者读起来也会比较舒服。

2.2 符号概观

数学语言是世界通用语言。我国文献中现用的数学符号与国外使用的没有什么不同。在运用英语写作科技文章时，有时要对某个数学符号下定义，或者在科技交流中，要用英语口语表达某个符号，这就需要了解常用数学符号的英语文字表达。这一节将介绍这方面的有关用语 [2]。下面三个表格中的左边一列为常用的数学符号，而右列则是其对应的英语表述。

表 2.14 初等数学里的符号

$a+b$	a plus b
$a-b$	a minus b
$a \pm b$	a plus or minus b
$a \times b$	a times b, a multiplied by b
$a \div b$	a divided by b
$\frac{a}{b}$ 或 a/b	a over b

续表

$a = b$	a equals b, a is equal to b
$a \neq b$	a does not equal b, a is not equal to b
$a \equiv b$	a identically equals b, a is identical with b
$a > b$	a is greater than b
$a \gg b$	a is much greater than b
$a \ngtr b$	a is not greater than b
$a < b$	a is less than b
$a \ll b$	a is much less than b
$a \nless b$	a is not less than b
$a \geq b$	a is greater than or equal to b
$a \leq b$	a is less than or equal to b
$a \approx b$	a is approximately equal to b
$a \propto b$	a is proportional to b
$a \propto 1/b$	a is inversely proportional to b
$a \to +\infty$	a approaches the positive infinity
$a \to -\infty$	a approaches the negative infinity
$a \to \infty$	a approaches the infinity
$a : b$	the ratio of a to b
$\max\{a, b\}$	the maximum of a and b
$m \mid n$	m divides n, n is divisible by m
$\frac{ab}{cd}, ab/(cd)$	a times b divided by c times d
$\sqrt{a}$	the square root of a
$\sqrt[3]{a}$	the cubic root of a
$\sqrt[n]{a}$	the nth root of a
$\sqrt{a+b}$	the square root of a plus b
$a^{m/n}$	a to the power of m over n
$\pm, \mp$	plus or minus, minus or plus
(a)	a in parentheses
$n!$	factorial n, n factorial
$\binom{n}{k}, C(n, k)$	number of k-combinations of n elements
a^2	a squared, the square of a
a_b^2	the square of a sub b
a^3	a cubed, a to the third power
a^n	a to the nth power
a^{-n}	a to the minus nth power

续表

$\log_{10} x$	the logarithm of x to the base 10
$\log x$	the natural logarithm of x
$\log_b x$	the logarithm of x with base b
$\sin x$	sine x
$\cos x$	cosine x
$\tan x$	tangent x
$\cot x$	cotangent x
$\sec x$	secant x
$\csc x$	cosecant x
$\arcsin x, \sin^{-1} x$	arc sine x, the inverse function of sine x
$\sinh x$	hyperbolic sine x
$\cosh x$	hyperbolic cosine x
$\tanh x$	hyperbolic tangent x
$e^x, \exp x$	the exponential function of x, e to the power x
$e^{j\theta}$	e to the power $j\theta$
$f(x)$	f of x, function of x
$f^{-1}(x)$	f inverse of x, the inverse function of x
$\angle\alpha$	angle alpha
a_b	a sub b, a subscript b
a^b	a super b, a superscript b
$a \perp b$	a is perpendicular to b
$a \parallel b$	a is parallel to b
$[x]$	the integral part of x
$\sum c_i$	the summation of c_i's
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	the summation of x sub i with i from 1 to n
$\sum\sum a_{ij}$	the double summation of a_{ij}'s
$\prod \lambda_k$	the product of λ_k's
$\prod_{i=1}^{n} x_i$	the product of x sub i with i from 1 to n
$\triangle ABC$	triangle ABC
$\triangle ABC \sim \triangle EFG$	triangle ABC is similar to triangle EFG
$\triangle ABC \cong \triangle EFG$	triangle ABC is congruent with triangle EFG

下表的这些符号和术语经常在高等数学的书和文章中出现，其准确的口语表达也很重要。

表 2.15 高等数学里的符号

$x \in A$	x is a member of A, x belongs to A
$x \notin X$	x is not in X, x does not belong to X
$A \subset X, A \subseteq X$	set A is contained in set X
$A \not\subset X, A \not\subseteq X$	A is not contained in X
$A \subset\neq X$	A is a proper subset of X
$X \cup Y$	the union of sets X and Y
$X \cap Y$	the intersection of X and Y
$f(A)$	the image of A under f
$f^{-1}(A)$	the inverse image of A under f
$\varnothing$	the null set, the empty set
X^c	the complement of X
$[a, b]$	the closed interval from a to b
$[a, b)$	half-open interval (open at the right)
(a, b)	the open interval from a to b
$N(t) \triangleq \cdots$	$N(t)$ equals by definition ...
$\bigcup X_i$	the union of all the sets X_i
$\bigcap X_i$	the intersection of all the sets X_i
$\chi_A, 1_A$	the characteristic (indicator) function of A
$O(h^n)$	order of h to the nth power
$o(\Delta t)$	little oh delta t
$f = \phi(x, y)$	f is some function ϕ of x and y
$\mathbf{N}, \mathbb{N}$	the set of all natural numbers
$\mathbf{Z}, \mathbb{Z}$	the set of all integers
$\mathbf{Q}, \mathbb{Q}$	the set of all rational numbers
$(-\infty, \infty), \mathbf{R}, \mathbb{R}$	the set of all real numbers
$\mathbf{C}, \mathbb{C}$	the set of all complex numbers
$\forall$	for all, for every, for each
$\exists$	there is, there exists
$b = \sup A, b = \text{l. u. b. } A$	b is the least upper bound of A
$a = \inf A, a = \text{g. l. b. } A$	a is the greatest lower bound of A
$\partial\Omega$	the boundary of set Ω
$\mathring{\Omega}$	the interior of set Ω
$\text{cl}\,\Omega, \overline{\Omega}$	the closure of set Ω
$A \setminus B$	the complement of set B relative to set A
$M + N$	the sum of vector spaces M and N
$M \oplus N$	the direct sum of vector spaces M and N

续表

$B(x,\epsilon)$	the open ball centered at x of radius ϵ
$f(n) \sim \log n$ as $n \to \infty$	$f(n)/\log n$ approaches 1 as n goes to infinity
$f(n) = O(\log n)$ as $n \to \infty$	$f(n)/\log n$ is bounded as n goes to infinity
$f(n) = o(\log n)$	$f(n)/\log n$ approaches zero
$f(x) \nearrow b, f(x) \uparrow b$	$f(x)$ increases, approaching the limit b
$f(x) \downarrow b, f(x) \searrow b$	$f(x)$ decreases, approaching the limit b
supp f	the support of function f
supp μ	the support of measure μ
$d\mu/d\nu$	the derivative of μ with respect to ν
$\nu \ll \mu$	measure ν is absolutely continuous with respect to measure μ
$\nu \perp \mu$	measure ν is perpendicular to measure μ
$\nu \cong \mu$	measure ν is equivalent to measure μ
$x \prec y; x \succ y$	x precedes y; x succeeds y
$\sigma(A)$	the spectrum of matrix A
$\sigma_p(T)$	the point spectrum of operator T
$\sigma_a(T)$	the approximate point spectrum of T
$\rho(T)$	the resolvent set of operator T
$R(\lambda, T)$	the resolvent of T
$C^k, C^k[a,b]$	the class of functions having continuous kth derivative (on the interval $[a,b]$)
$C^0, C[a,b]$	the space of continuous functions (on interval $[a,b]$)
$C_0^1(\Omega)$	the space of continuously differentiable functions with compact support in Ω
$C^k(\overline{\Omega})$	the space of continuously differentiable functions on $\overline{\Omega}$ up to order k
$C^\infty(\Omega)$	the space of infinitely differentiable functions in the open region Ω
$BV(0,1)$	the space of all functions of bounded variation over $[0,1]$
$BV_0(0,1)$	the space of all functions $f \in BV(0,1)$ with $\int_0^1 f(x)dx = 0$
$\bigvee_0^1 f$	the variation of f over interval $[0,1]$
$V(f;\Omega)$	the variation of f over region Ω
$\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$	subsequence x_{n_k} of sequence x_n
$x_n \to a$	the sequence x_n approaches a
$\limsup_{n\to\infty} x_n = a$	the upper limit of sequence x_n is a
$\liminf_{n\to\infty} x_n = a$	the lower limit of sequence x_n is a
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$	the limit of sequence x_n is a

续表

$\lim_{x\to a} f(x) = b$	b is the limit of f as x approaches a
$f(x) \to b$ as $x \to a$	b is the limit of f as x approaches a
$\lim_{x\to a-} f(x)$, $f(a-)$	the limit of f as x approaches a from the left
$B(X, Y)$	the space of all bounded linear operators from X into Y
$L(X, Y)$	the space of all linear operators from X into Y
Δx	delta x, increment of x
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	delta y over delta x (average rate of change)
$f(x+h) - f(x)$	increment of f with respect to increment h in x
(X, Σ, μ)	a measure space X with σ-algebra and measure μ
$L^p(X)$, L^p	the L^p space
dx	the differential of x
$f'(x)$	f prime of x, the derivative of function f at x
$\frac{dy}{dx}$, y'	the derivative of y with respect to x
$\frac{\partial y}{\partial x}$, y_x	the partial derivative of y with respect to x
$\frac{d^2y}{dx^2}$, y''	the second derivative of y with respect to x
$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, y_{xx}	the second partial derivative of y with respect to x
$\frac{d^n y}{dx^n}$, $y^{(n)}$	the n-th derivative of y with respect to x
∇f, grad$f$	the gradient of f
$\nabla \cdot v$, div v	the divergence of v
$\nabla \times v$, curl$v$, rot v	the curl of v
$\max_{x\in X} f(x)$	the maximum value of $f(x)$ when x is in the set X
$\min_{x\in X} f(x)$	the minimum value of $f(x)$ when x is in the set X
x'	x prime, the derivative of x
x''	x double primes, second derivative of x
x'''	x triple primes, third derivative of x
$\underline{x}$	x a bar beneath
$\overline{x}$	x a bar above
$\dot{x}$	x dot
$\ddot{x}$	x double dots
$\int$	the integral of
$\int f(x)dx$	the integral of f of x

续表

$\int_a^b f(x)dx$	the integral of f of x between the limits a and b
$\iint$	the double integral of
$\iiint$	the triple integral of
$\underbrace{\int \cdots \int}_{n\text{-fold}}$	the n-fold integral of
$\oint$	the line integral around a closed path
$\int_E f(x)d\mu(x)$	integral of function f over set E with respect to measure μ
$\nabla^2 u, \Delta u$	the Laplacian of u
$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$	the Jacobian of the functions u and v

数学有很多分支，包括纯数学、应用数学、计算数学、概率统计、金融数学等等。每一个分支又衍生了许多专业名词及约定记号，不可能用一两页纸将其全部列举出来。这里我们选择性地罗列一些文献中较常用到的数学符号和相关数学词汇，但读者应该根据自己的专业需要另行添加。

表 2.16 其它的一些数学符号

$\delta(x)$	the Dirac delta function
$\boldsymbol{x}$	vector x
$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}, (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	inner product, scalar product, dot product
$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}, [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$	outer product, vector product, cross product
(x,y)	ordered pair (or inner product) of x and y
$\langle x,y\rangle$	the inner product of vectors x and y
$\langle x,f\rangle$	the value of functional f at vector x
$\|x\|, \|x\|_p$	the norm of the vector x, the p-norm of x
δ_{ij}	the Kronecker delta
A', A^{T}	the transpose of the matrix A
$A^{\perp}$	the orthogonal complement of A
$A^{\dagger}, A^{+}$	the generalized inverse of A
$\overline{A}$	the closure of set A
$A \geqq 0$, A is a matrix	the matrix A is positive semidefinite
$A > 0$,	the matrix A is positive definite

续表

$A \geq (>)0$	A is a nonnegative (positive) matrix
$A^*, \tilde{A}$, A is a matrix	the adjoint, Hermitian conjugate of A
$\mathrm{tr}(A)$	the trace of the matrix A
$\dim(X)$	the dimension of X
$\mathrm{rank}(A)$	the rank of A
$N(A)$	the null space of A
$R(A)$	the range of A
$T : X \to Y$	the transformation T from X into Y
$\ker T$	the kernel of T
$\|T\|$	the norm of operator T
$\det(A)$, $\|A\|$	the determinant of the matrix A
$\oplus, \dot{+}$	the direct sum
$\otimes$	the tensor product, Kronecker product
$\wedge$	the exterior product, Grassmann product
$\bar{z}, z^*$	the complex conjugate of z
$x \equiv y \bmod p$	x congruent of y modulo p
$x \succ 0$	x is lexicographically positive
$x \succeq 0$	x is lexicographically nonnegative
$\mathcal{L}[f(t)]$	the Laplace transform of f of t
$\mathcal{F}[f(t)]$	the Fourier transform of f of t
σ^2, Var, var	variance
$p \vee q$	disjunction, read as p or q
$p \wedge q$	conjunction, read as p and q
$p \to q$	implication, read as p implies q
$p \equiv q$	equivalence, read as p is equivalent to q
$\{x\|P(x)\}$ $\{x : P(x)\}$	the set of all x with the property P
$\Gamma(x)$	the Gamma function
$J_v(x)$	the Bessel function
$P(X \leqq 2)$	the probability that $X \leqq 2$
$P(X \leqq 2\|Y \geqq 1)$	conditional probability
$E[\ ]$	expectation of the quantity within brackets
$E(X)$	the expectation of X
$E(X\|Y \geqq 1)$	the conditional expectation
$x \sim y$	x is equivalent to y
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \{a_i\}_{i=1}^n$	the set whose members are a_i, where i is any whole number from 1 to n

续表

$\{a_i, a_2, \dots\}, \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$	the set whose members are a_i, where i is any positive whole number
$\{a_i\}_{i\in I}$	the set whose elements are a_i, where $i \in I$
$X \times Y$	the Cartesian product of sets X and Y
$f : X \to Y$	f is a mapping from set X to set Y
$g \circ f$	the composition of g and f
f^n	f super n, n-fold composition of f
E^n	the Euclidean n space
S^n	the n sphere
$\rho(p,q), d(p,q)$	the distance between points p and q
$d(x,A)$	the distance between point x and set A
$d(A,B)$	the distance between sets A and B
X/A	the quotient space of X with respect to A
2^X	the set of all subsets of set X
$\mathcal{T}_h$	a triangulation with mesh size h
V_h	a finite element space with mesh size h
μ_f	the measure with density f
$\omega(f,\delta)$	the modulus of continuity of f
$\mathbb{R}^n$	the Euclidean space of all real n-vectors
$\mathbb{C}^n$	the unitary space of all complex n-vectors
$\mathbb{R}^{m\times n}$	the space of all m by n real matrices
$\mathbb{R}_+^{m\times n}$	the space of all nonnegative m by n matrices
$\mathcal{B}(K), \mathcal{M}(K)$	the set of all Borel measures on compact set K
$A^{1/2}$	the square root of positive semidefinite matrix A

应当指出，相同的符号在不同的数学领域里可能有不一样的意思。在上表就可看到，在一般矩阵理论里，$A > 0$ 意指方阵 A 是正定的，即二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 对所有非零向量 x 都取正数；而在非负矩阵理论里，$A > 0$ 表达的意思却是：矩阵 A（不一定是方阵）是正的，即 A 的每一个元素都是正数。因此，符号的意思有时要根据它出现的上下文而定。

很多数学符号都有记录在案的诞生史以及发明者的名单，比如像 $\pi, n!$ 等等。下表罗列了部分数学符号最初引进的年代以及发明人的姓氏。

表 2.17 一些数学符号的历史

记号	名字	第一次在文献中出现
$=$	等号	1557 (Recorde)
$\times$	乘号	1618 (Oughtred)
$>, <$	不等号	1631 (Harriot)
$\sqrt{a}$	根号	1637 (Descartes)
∞	无穷大 (infinity)	1655 (Wallis)
d	微分	1675 (Leibniz)
$\int$	积分	1675 (Leibniz)
π	圆周率 (pi, $3.14159\cdots$)	1706 (Jones)
$/$	斜除号	1718 (Twining)
e	自然指数 ($2.71828\cdots$)	1736 (Euler)
$f(x)$	函数	1748 (Euler)
$\sum$	求和号	1755 (Euler)
∂	偏微分	1770 (de Condorset)
i	单位虚数 (imaginary unit, $\sqrt{-1}$)	1794 (Euler)
$\equiv$	恒等、同余 (congruence)	1801 (Gauss)
$n!$	阶乘 (factorial)	1808 (Kramp)
$\prod$	乘积 (product)	1812 (Gauss)
$\sum$	求和 (summation)	1820 (Fourier)
$\binom{n}{k}$	二项式系数 (binomial coefficient)	1826 (von Ettinghausen)
$\lvert\ \rvert$	绝对值 (absolute value)	1841 (Weierstrass)
$\lvert\ \rvert$	行列式	1841 (Cayley)
∇	梯度记号 (nabla)	1853 (Hamilton)
δ_{ij}	克罗内克函数 (Kronecker delta)	1868 (Kronecker)
$\cap$	交集	1888 (Peano)
$\cup$	并集	1888 (Peano)
$\in$	属于	1894 (Peano)
$\exists$	存在	1897 (Peano)
$O(f(n))$	大 O (big oh)	1894 (Bachmann)
$\varnothing$	空集	1939 (Weil)
$\to$	映射	1940 (Hurewicz)
$\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$	取整函数	1962 (Iverson)
■	证毕	未知 (Halmos)

2.3 常用短语

一些常见的数学短语也非常实用，这些短语大都常见于大学的专业英文教科书里，亦常常运用于理论性强的论文写作中。所以适当地收集和整理这些短语，并能熟练掌握其应用对写作非常有益。

表 2.18 一些数学短语

充分大（小）	sufficiently large (small)
尽可能的大（小）	as large (small) as possible
不适定的问题	ill posed problem
合理定义的	well defined
矩阵条件数很差	ill-conditioned matrix
方程固有的不稳定性	the equation is intrinsically unstable
把整个系统分解	to decouple the system
把 …… 简化，得到	simplifying ... gives
在繁琐的计算以后	after a tedious computation (manipulation)
不带自由参数的函数	parameter-free function
积分号下对 s 求导	take derivative under the integral sign with respect to s
交换积分次序	exchange the order of integration
假设结论不对	suppose the conclusion is not true
一方面 …… 另一方面	on the one hand ... and on the other hand
下面的叙述等价	the following statements are equivalent
只要证明 …… 就够	it is enough (sufficient) to show that
与 …… 矛盾	it contradicts ...
由 …… 可以得到	it follows from ... that
是 …… 的结果	it is a consequence of ... that
剩下证明	it remains to show that
最后必须证明	finally, we have (need) to show that
简单（容易，直接）可证	it is simple (easy, straightforward) to show that
几乎不证自明	it is trivial to show (see) that
无论是否	whether or not; no matter whether
与 …… 类似的理由可证	an argument similar to the one used in ... shows that
第一个目的是证明	our first goal is to show that
证明的关键点是	the key idea of the proof is
现在可以	it is time to, we are now in a position to
分片光滑函数	piecewise continuous function
充分并且必要	sufficient and necessary

续表

充分但不必要	sufficient but not necessary
解的唯一性	the uniqueness of the solution
解的存在性	the existence of the solution
解几乎处处连续	the solution is continuous almost everywhere
初值问题	the initial value problem
边值问题	the boundary value problem
初边值问题	the initial-boundary value problem
最优的收敛结果	the optimal convergence result
经过原点	pass through the origin
经过两点的直线	the line passing through the two points
由三点决定的平面	the plane determined by the three points
任意阶（维）方阵	square matrix of arbitrary dimensions
上界，下界	upper bound, lower bound
函数 $g(x)$ 的第 n 阶导数	the nth derivative of function $g(x)$
等式两边求导	take derivative to the both sides of the equality
方程两边积分	integrating the both sides of the equation
左（右）端	the left (right)-hand side
最上（下）边一行	top (bottom) row
方程 (1) 右端的前两项	the first two terms on the right-hand side of equation (1)
方程 (1) 左端的全部四项	all four terms on the left-hand side of equation (1)
括号内的所有项	all the terms within the parentheses (brackets, braces)
去括号	get rid of the parentheses (brackets, braces)
用这项取代那项	substitute this term for that (the other) term
把这些式子代入到方程 (7)	substitute these expressions into formula (7)
括号中的数	the number in the parenthesis
结合式子 (1) 到 (5)	combining formulas (1) through (5)
忽略高阶项	ignoring the higher order terms
第一项支配其它项	the first term dominates the other terms
合并同类项	collect the like terms
各（多）项抵消导致	the cancelation of the terms leads to
等式两边逐项比较	compare the both sides of the equality term by term
比例因子	factor of proportionality
变换的逆	the inverse of the transformation
去掉多余的数字	chop off the extra digits
单调增（减）函数	monotonically increasing (decreasing) function
与 …… 成正（反）比	be directly (inversely) proportional to ...

续表

与 …… 对应的	corresponding to ...
与 …… 相关	associated with ...
关于 ……	with respect to ...
系统的渐近分析	a systematic asymptotic analysis
必要条件不满足	the necessary condition is violated (not satisfied)
沿 x 轴正方向	along the positive x axis
另一个证明的方法是	an alternative method of proof is
通过反证法证明	the proof is by contradiction (negation)
这与 …… 相矛盾	this is a contradiction to ...
比较两边系数	comparing the coefficients of the both sides
借助于 …… 技术	by means of the technique of ...
繁琐计算给出 ……	a tedious calculation gives ...
由直觉可猜测 ……	one can guess ... from the intuition

下面两表列出的短语和短句也经常在数学写作中采用，熟练地掌握它们的用法对于初学者来说是一项相当重要的基本功。

表 2.19 一些常用短语 (I)

作为一个例子，考虑 ……	as an example, consider ...
首先	to begin with, to begin
来结尾	to conclude, to close this section (chapter ...)
因此	it follows that
另一个证明的方法是	an alternative method of proof is
通过反证法证明	the proof is by contradiction
这一结果和其它结果相差很远	this result significantly differs from other results
这一定理的明显推论是	an immediate consequence of this theorem is
我们用 C 代表一个一般的常数	we use C to denote a generic constant
选择一个好初值是较微妙的	choosing a right initial data is a rather subtle issue
求解 …… 非常繁琐	it is tedious to solve ...
证明相当繁琐	a proof is quite involved
利用 …… 可以证明	using ... we can show that
我们只考虑二维情形	we will restrict ourselves to two dimensions
第一个存在性结果由 Smith 证明	the first existence result was proved by Smith
下面我们更详细地解释这些结果	below we explain these results in more detail
很容易证明	it is easy to show that
可直截了当地证明	it is straightforward to show that
如我们所预计的那样	as what we have anticipated

续表

很需要用 ……	it is desirable to use ...
我们将再回到这个问题	we shall return to this problem later
…… 不令人惊讶	it is not surprising that ...
这需要仔细检查	this needs a careful examination
让我们用一个例子来说明它	let us illustrate it with an example
我们论证的主要点是	the main point of our argument is
结果是	it turns out that
看起来好像是	it seems that
剩下来的是	it remains that
从图 1 可以观察到	it is observed (seen) from Fig. 1 that
像我们在前章所说的	as we have stated in the previous chapter
像前节所述	as stated in the previous section
如上所述	as mentioned above
如图 1 所示	as shown in Fig. 1
如第 5 节所要显示的	as will be shown in Section 5
如表 1 所显示的	as indicated in Table 1
如前面所演示的	as demonstrated before
如上（下）	as above (follows)
引理 2 的证明和引理 1 相似	the proof of Lemma 2 is similar to that of Lemma 1
A 和 B 之间有一些相似之处	there is a well-known analogy between A and B
我们的观点和 Smith (1998) 相平行	our view somewhat parallels that of Smith (1998)
这是最著名的问题之一	this is one of the most outstanding problems
不清楚这一结果是不是最优的	it is not clear whether the result is sharp
更详细的结果我们推荐引文 [1，2]	we refer to [1, 2] for details on these results
本文是一系列文章的第一篇	this is the first of a series of papers

表 2.20 一些常用短语 (II)

不失一般性	without loss of generality	使符号更简单	for ease of notations
数据支持	the data are in support of	为表达简单起见	for simplicity of presentation
当且仅当	if and only if, iff	由此得到	It follows that ...
简略说来	briefly speaking	大概如此	roughly the same
如上	as above	如下	as follows
整体而言	as a whole	结果是	as a result, consequently
事实上	as a matter of fact, in fact	除 …… 以外	in addition to ...
在这种情况下	in such a case	和 …… 情况一样	as in the case of

续表

在广义上	in a broad sense	在狭义上	in a narrow sense
严格地说	strictly speaking	粗略地说	roughly speaking
大致说来	roughly speaking	详细的分析	a detailed analysis
在某种程度上	to some extent	与其相反	in contrast to
定性的结果	qualitative result	定量的结果	quantitative result
作为一个推论	as a consequence	如法炮制	by the same token
作为前提	as a premise	显然	it is obvious (apparent) that
相反地	on the contrary	直觉上	intuitively
与直觉不一致	against intuition	如我们所希望的	as what we have hoped
与 …… 相比	as compared with (to)	基于 …… 观察	based on the observation that
由 …… 组成	consist of, be composed of	构成、组成	constitute
总结如下	to conclude, to summarize	概括之、总之	in conclusion, in summary
用另一种说法	to say it in another way	众所周知	It is well known that
用 …… 表示	expressed in terms of ...	借助于	by means of
当然	of course, it is sure that	不证自明	it is trivial to see that
然而	however, nevertheless	尽管	despite, in spite of
而不是	instead of, rather than	换言之、即	in other words, that is
如果	provided (providing) that	为了 …… 起见	for the sake of ...
去掉	get rid of	与 …… 相容	compatible (consistent) with
与 …… 矛盾	a contradiction to ...	无论是否	whether or not
由于	thanks (owing, due) to	因为	because of
考虑到	in view of, on account of		

2.4 语言结构

数学写作在语言结构与风格上有一定的规律和格式。无论在中文或是英文的数学文章中，有很多较固定的叙述模式。把这些模式列成表格，经常参考，对写作会很有帮助。

2.4.1 一些常见的句型

为了引出一些实用的句型，我们先造一个例子。

例 2.1. Simplifying the above equations gives a simple system for x_1 and x_2:

简化上述方程给出 x_1 和 x_2 的一个方程组：

$$x_1^2 + x_2 = 1, \tag{1}$$

$$x_1^2 + x_1 + 3x_2 = 2. \tag{2}$$

接着上面的例子写下去，便会出现一些经常在写作中见到的实用句型。因为相应的中文翻译非常直截了当，我们在此将其省略。

- Solving the above system of equations, we have (或 obtain) $x_1 = 1$ or $-1/2$ and $x_2 = 0$ or $3/4$.
- Solving equations (2.1) and (2.2) gives (或 yields) $(x_1, x_2) = (1, 0)$ and $(x_1, x_2) = (-1/2, 3/4)$.
- A simple manipulation (或 calculation) leads to the solutions $(x_1, x_2) = (1, 0)$ and $(x_1, x_2) = (-1/2, 3/4)$.
- Solving for x_1, in terms of x_2, we have $x_1 = 1 - 2x_2$.
- Rearranging the above system of equations, we obtain $x_1 + 2x_2 = 1$.
- Eliminating x_2 from Eq. (2.2) gives $x_1^2 + x_1 + 3(1 - x_1^2) = 2$. Consequently, by solving the above equation, we obtain $x_1 = 1$ or $-1/2$.
- Using the second equation, we get $x_2 = (2 - x_1^2 - x_1)/3$. Substituting it into the fivst equation gives rise to the two solutions $(x_1, x_2) = (1, 0)$ and $(-1/2, 3/4)$.
- The solutions can be easily obtained via an elementary method, which are $(x_1, x_2) = (1, 0)$ and $(x_1, x_2) = (-1/2, 3/4)$. ♦

下面的表 2.21 给出句型的一些常见的固定用法（这些表远远不够详细，有兴趣的读者应该根据自己的情况列一个更详细的表）。

表 2.21 一些有用的句型及例子

句型	例子
Let ... be	Let f be a continuous function.
令 …… 为	令 f 为一连续函数。
according to (as) ...	According to formula (4), the equation is solvable.
根据 ……	根据公式 (4)，该方程是可解的。
because of ...	Because of the fact that ...
因为 ……	因为 …… 的事实
thanks (due, owing) to ...	Thanks to the identity, (3) is proved.
由于 ……	由于这个等式，(3) 式得证。

续表

句型	例子
If ... then	If $\alpha > -1$, then the integral exists.
若 …… 则	若 $\alpha > -1$, 则积分存在。
Suppose ...	Suppose g is differentiable.
假设 ……	假设 g 是可微的。
Suppose that ...	Suppose that A is a positive matrix.
假设 ……	假设 A 是一个正矩阵。
We define ... to be	We define a problem to be stable if ...
我们把 …… 定义为	我们定义一个问题是稳定的，如果 ……
It is easy to see/show that ...	It is easy to show that B is primitive.
容易证明 ……	容易证明 B 是本原的。
From ... we have	From (5.2) we have the inequality for ...
从 …… 有	从式 (5.2) 我们有对 …… 而言的不等式。
By substituting ... into ...,	By substituting (1.9) into (7.3), we obtain ...
将 …… 代入到 ……	将 (1.9) 代入到 (7.3) 就得到 ……
Substitute ... for ...	Substitute ... for x in formula (3.2)
用 …… 取代 ……	在公式 (3.2) 中令 x 为 ……
Using ..., we obtain (find, have)	Using Eq. (1.1), we obtain ...
利用 …… 我们得到（发现、有）	利用方程 (1.1)，我们得到 ……
Using the fact that ...	Using the fact that $a > 0$, we have ...
利用 …… 的事实	利用 $a > 0$ 的事实，我们有 ……
A lower bound for ...	A lower bound for h can be obtained.
…… 的一个下界	h 的一个下界能被得到。
Without loss of generality	Without loss of generality we assume that $x > 0$.
不失一般性	不失一般性我们假定 $x > 0$。
It follows that ...	It follows that solutions of (1) are unique.
由此可得 ……	由此可得 (1) 的解唯一。
It follows from ... that	It follows from the above equation that $u = v$.
由 …… 可得	有上面方程可得 $u = v$。
Inserting ... into ...	Inserting the expressions (3) into (4) gives ...
将 …… 插入 ……	将表达式 (3) 插入 (4) 给出 ……
If we plug ... back into ...,	If we plug (6) back into (1), we obtain ...
如果我们将 …… 代入 ……	若将 (6) 式代入 (1) 式，我们得到 ……
Taking ... into consideration, we	Taking equality (12) into consideration, we get (9).
将 …… 考虑在内，我们	将式 (12) 考虑在内，我们得到式 (9)。

续表

句型	例子
It is apparent from ... that	It is apparent from the triangle inequality that ...
从 ····· 明显看出	从三角不等式明显看出 ·····
A routine computation gives rise to	A routine computation gives rise to the formula.
常规计算给出 ·····	常规计算给出这个公式。
Rather than ... we	Rather than give a detailed proof we outline it.
不 ·····，我们	不给出仔细证明，我们把它概括一下。
We would rather ... than ...	We would rather prove it here than refer to [3].
我们宁可 ····· 不	我们在这里宁可证明它而不是只参考文献 [3]。
is referred to as ...	the defined quantity is referred to as the entropy.
被称为 ·····	被定义的量称为熵。
Our goal (purpose) is	Our goal is to show the uniqueness of the solution.
我们的目的是	我们的目的是证明解的唯一性。
An alternative way to ...	An alternative way to view it is to use formula (3).
····· 的另一方式	另一种查看它的方式是利用公式 (3)
due to ...	We omit the proof due to its tediousness.
由于 ·····	由于证明繁琐，我们略去它。
No matter what	No matter what x is, y is always nonzero.
无论什么	无论 x 是什么，y 总是非零。
even though (if)	g' will decrease, even if g increases.
即使	即使 g 递增，g' 将递减。

2.4.2 修饰性词汇

有些具有修饰性功能的形容词、副词以及对应的抽象名词在数学文章中使用的频率较大。为此，我们在表 2.22 列出数学写作中常常出现的一些修饰性名词与对应的形容词和副词。

表 2.22 一些修饰性词汇

	名词	形容词	副词
精确	accuracy, exactness	accurate, exact, precise	accurately, exactly
严格	strictness	strict	strictly
稳定	stability	stable	stably
不稳定	instability	unstable	unstably
错误	mistake, error	mistaken, wrong	mistakenly, wrongly

续表

	名词	形容词	副词
正确	correctness, soundness	correct, sound	correctly, soundly
确信	confidence	confident	confidently
定性、性质	quality, property	qualitative	qualitatively
定量、量	quantity, amount	quantitative	quantitatively
基本、基础	basics, foundation	basic, fundamental	basically, fundamentally
认真	seriousness	serious	seriously
小心、谨慎	caution, care	cautious, careful	cautiously, carefully
完全	completeness, entireness	complete, entire	completely, entirely
满意	satisfaction	satisfactory	satisfactorily
证据	evidence	evident	evidently
显然	apparentness	apparent	apparently
幸运	fortune, luck	fortunate, lucky	fortunately, luckily
确定	determination	deterministic	deterministically
逐次	succession	successive	successively
完美	perfection	perfect	perfectly
依次	subsequence	subsequent	subsequently
优先、之前	priority	prior	
可得到、可行	availability	available	
合适	appropriation	appropriate	appropriately
相应、对应	correspondence	corresponding	correspondingly
初始	initiation	initial	initially
同等	identification	identical	identically
为真	truth	true	truly
等价	equivalence	equivalent	equivalently
清楚	explicitness	explicit	explicitly
隐含	implicitness	implicit	implicitly
相重	coincidence	coincident	coincidentally

我们给出如下例子来展示这些修饰性词汇在数学文章中的应用。

– The *exact* definition of the variation for an L^1-function is as follows.

以下给出 L^1-函数变差的精确定义。

– *Apparently* the required inequality comes from the above fact.

显然所需不等式由上述事实得出。

– Although the *explicit* expression of f is not available, fortunately we can obtain its derivative via the method of *implicit* differentiation.

虽然我们得不到 f 的显式表达式，幸运的是通过隐式求导我们可得到它的导数。

– The *correctness* of these calculations needs to be verified with a caution.

这些计算的正确性需要小心证实。

– Based on the above argument, we are *confident* that the next claim can be proved.

基于以上理由，我们确信如下断言能被证明。

– *Strictly* speaking, formula (2) is not satisfied everywhere.

严格地说，公式 (2) 不是处处成立的。

– We thank Dr. Lee for *carefully* reading an earlier version of this paper.

我们感谢李博士仔细阅读本文初稿。

– Taking derivative three times in *succession* leads to the required conclusion.

逐次求三阶导数就得到所需结论。

2.4.3 数学运算的动词

数学运算中有许多动词，像 combine, differentiate, integrate, equate, compare, apply 等等。我们将其中的一部分列在表 2.23 中，并将对应的名词和动词放在同一行进行比对。

表 2.23 一些数学运算词汇

	名词	动词
加、加法、和	addition, summation	add, sum up
减、减法、差	subtraction, difference	subtract, minus
乘、乘法、积	multiplication, product	multiply, times
除、除法、商	division, quotient	divide
运算	operation	operate
画图、图像	picture, graph, figure	sketch, plot, graph, draw
计算	computation, evaluation	calculate, evaluate, compute

续表

	名词	动词
逼近	approximation	approximate
构造	construction, structure	construct, make, set up
比较	comparison	compare
结合	combination	combine
牵涉	involvement	involve
微分	differentiation, derivative	differentiate, taking derivative
积分	integration, integral	integrate, taking integral
替换	substitution	substitute
消去	elimination	eliminate
变换	transform, transformation	transform
相等	equality	equate
展开	expansion	expand
应用	application	apply
分解	decomposition	decompose
分开	separation	separate
分类	classification	classify
改变	change	change
变形	deformation	deform
执行	performance	perform
三角剖分	triangulation	triangulate
量化	quantification	quantify
把 …… 当做	treatment	treat . . . as
考虑	consideration	consider
引入	introduction	introduce
注意、记号	note, notion	notice
表示	denotation	denote
定义	definition	define
因式分解	factorization	factorize, fact
平均	average, mean	average over (out)
抽出、提出	extraction	extract
保留	reservation, preservation	reserve, preserve, retain
利用	use	use
继续	continuation	continue
存在	existence	exist
初始化	initiation	initiate

下面我们用如下例子来示范如何适当运用这些数学运算的动词。

– *Combining* Lemma 1.1 and Theorem 2.1, we see that if x is finite then $f(x)$ is also finite.
结合引理 1.1 和定理 2.1，可知若 x 是有限值则 $f(x)$ 也有限。

– *Equating* the corresponding coefficients of Eqs. (1) and (2) gives ...
令式 (1) 和式 (2) 中对应的系数相等，得出 ·····

– *Differentiating* both sides of Eq. (1) with respect to x gives the desired estimate (2).
对方程 (1) 的两端对 x 求导, 就能得到所需要的估计式 (2)。

– Taking two successive *operations* gives ...
连续两次运算给出 ·····

– The *performance* of the algorithm is consistent with the theoretical analysis.
算法的性能与理论分析相符。

– *Separating* the variables and integrating, we have ...
分离变量并积分，得到 ·····

– *Integrating* the first term of the left-hand part of Eq. (1) by parts, we have ...
对方程 (1) 左边第一项分部积分，得到 ·····

– *Changing* the order of integration and integrating with respect to x, we obtain ...
改变积分顺序并对 x 积分，得到 ·····

– *Decomposing* the above matrix into the product of ... leads to the conclusion.
将上述矩阵分解成 ····· 的积就导出结论。

– *Expanding* the right side of Eq. (4) into power series, we have ...
将方程 (4) 的右端展开成幂级数，有 ·····

– *Treating* U as a new variable, we have ...
把 U 当做新变量，就有 ·····

– *Changing* the variable of integration by letting ..., we get ...
通过令 ····· 来改变积分变量，得到 ·····

– *Introducing* the change of variable ... we have ...
引入变量代换 ·····，可得 ·····

– *Denoting* the determinant of matrix A by D and using Eq. (1), one has ...
用 D 表示矩阵 A 的行列式并注意到式 (1)，得到 ……
– *Defining* $a_1/a_2 = \alpha$ and setting the coefficient of x^3 of the above to zero, we have ...
定义 $a_1/a_2 = \alpha$ 并令上式中 x^3 的系数为 0，便知 ……
– *Summing* over m, we have ...
对所有的 m 值求和，导致 ……
– *Performing* the same procedure for j from 1 to m, we have ...
对 $j = 1, \ldots, m$ 按同样的程序做，得到 ……
– Taking out a factor a_{11} from all the terms *involving* X_1, we have ...
从所有含 X_1 的项中提取因子 a_{11}，得到 ……
– *Applying* an orthogonal transformation $X = pY$ to Eq. (1), we have ...
对式 (1) 用正交变换 $X = pY$，得到 ……
– Taking the Fourier *transform* of both sides, we have ...
两端取傅里叶变换，得到 ……
– *Interchanging* the operations of taking the limit and integrating, we have ...
交换极限与积分运算顺序，得到 ……
– *Noting* that the average values of $x(t)$ and $y(t)$ are zero by definition, we have ...
注意到 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的均值依定义为零，得到 ……
– *Separating* real and imaginary parts of Eq. (1) gives rise to ...
将式 (1) 的实部虚部分开，就给出 ……
– *Equating* real and imaginary parts of this equation, we obtain ...
令这个方程的实部虚部相等，得到 ……
– *Averaging* over X_i, we see ...
对 X_i 求均值，得到 ……
– *Extracting* the coefficient of S^n from both sides of the above equation, we can show ...
将上式两端 S^n 的系数提出来，就能证明 ……

- *Multiplying* both sides by -1, adding A to both sides and dividing by k, we get ...
  两端同乘 -1, 再加 A，并同除 k，得到 ……
- *Retaining* the first two terms in the power series for nonlinearity, we find ...
  保留非线性幂级数的前两项，得到 ……
- *Using* Eq. (3) in Eq. (2), we have, in light of Eq. (1) ...
  将式 (3) 用于式 (2)，再借助式 (1)，有 ……
- *Continuing* by induction, we finally have ...
  继续使用归纳法，最后得到 ……
- *Assuming* that Eq. (1) holds (is valid), we have $u = v$.
  假设式 (1) 成立，我们得到 $u = v$。
- *Applying* Theorem 1 to Eq. (2), we obtain ...
  或 An *application* of Theorem 1 to Eq. (2) gives ...
  将定理 1 用于方程 (2)，有 ……
- By *comparing* (或 a *comparison* of) (1) with (2), we obtain $u = v$.
  通过比较 (1) 式和 (2) 式，我们得到 $u = v$。

2.4.4 常见动词

英语数学文章中最常用的动词可能是 give, obtain, have, get, yield 等简单词汇，而数学句子中还有一些常见的动词，像 establish, develop, carry out, derive 等等。熟练掌握它们的应用，对写文章来说会很有帮助。在表 2.24 中，我们列出部分数学写作中的常见动词。

表 2.24 一些有用的动词

	动词 (名词)	简单的例子
假定	assume (assumption)	Assume that x is great than 5
建立	establish (establishment)	establish a new theory
发展	develop (development)	new theories will be developed
安排	arrange (arrangement)	Arranging the terms in a natural order gives
执行	carry out (execution)	By carrying out the necessary computation
推导	derive (derivation)	derive the equations

续表

	动词（名词）	简单的例子
得到	acquire (acquisition), arrive at,	From the above analysis we obtain
	obtain, get, give, yield, lead to	This leads to the following conjecture
合并	collect (collection), regroup	Collecting the two equalities gives the result
证明	show that, prove (proof)	prove the inequalities
断言	assert (assertion), claim (claim)	We assert that x^* is the minimal solution
推广	generalize, extend (extension)	it can be extended to more general cases
演示	illustrate, demonstrate	the efficiency will be demonstrated by ...
研究	investigate (investigation)	This question needs a further investigation
检验	verify	the theoretical prediction will be verified ...
画图	sketch, plot, draw	the velocity field is plotted in Fig. 1
分解	split, decompose (decomposition)	the proof will be split into three parts ...
预测	expect, predict (prediction)	it is expected that ...
资格	qualify (qualification)	the quantity is qualified to be called
总结	summarize (summary), review	in the final section we summarize the main results ...
发现、观察	find, see, observe (observation)	it is observed from the above theorem that ...
隐含、建议	imply, suggest, indicate	the results suggest that the scheme is robust.
评论、指出	remark, comment, point out	it should be pointed out that ...
解决、求解	solve (solution), resolve	We first solve equation (3)
让、令	let, suppose (hypothesis)	Let f be a continuous function
用到	employ (employment)	By employing the merit function
产生	produce (production)	This produces an alternative proof
证实、确定	confirm (confirmation)	the validity of formula (1) is thus confirmed
验证	verify (verification)	The above analysis verifies formula (7)
显示、表示	indicate (indication)	Table 5 indicates that the errors are ...
接受	accept (acceptance)	The hypothesis is accepted by most researchers
结合	incorporate (incorporation)	incorporated with Lemma 1, formula (3) gives
改正	correct (correction)	We thank an anonymous referee for correcting
修改	revise (revision)	The revised paper should be more readable
意图	intend (intension)	We intend to solve the conjecture in the paper
意指	mean (meaning)	This means that the equation is unsolvable

下面我们将再举一些例子来说明这些动词的应用。如上，我们把较有代表性的词语用斜体表示出来以突出其重要性。

– Using Lemma 1, we can now *derive* the following error estimates.

利用引理 1，我们现在能得到下列误差估计。

– For a general phase function ϕ, we will *employ* the following result to change variables and thereby convert locally to the one of the earlier cases.

对一般的相函数，我们将用下列结果改变变量，因此局部转到先前几个情形之一。

– The methods of Section 3 can be *extended* to treat other boundary value problems.

第三节的方法可以推广以便处理其它边值问题。

– It is not difficult to *verify* that the estimates of Section 2 are satisfied by the solutions of equation (5).

不难证实方程 (5) 的解满足第二节的估计。

– We prove the theorem by first *investigating* the smoothness of the solution.

我们通过首先探讨解的光滑性来证明定理。

– The validity of estimate (5) can be *demonstrated* by Example 1.

估计 (5) 的有效性可由例 1 显示。

2.4.5 过渡语句

文章的段与段的内容之间有时相互联系，有时则可能会完全无关。如何自然地把不同关系的段落连接起来，也是需要注意的。下面的例子一般是新的一段的开始。

– We now turn to the mathematical formulation of the problem.

现在我们转到问题的数学形式。

– The crucial result in our development of local properties of weak solutions will be the following weak Harnack inequality.

我们推导弱解局部性质的关键结果是下列的弱哈纳克不等式。

– With the help of the preceding two lemmas we can now prove the following extension of Theorem 2 to the equation $Lu = f$.

由于前两个引理之助，我们现在能证明定理 2 对方程 $Lu = f$ 的推广。

– However, another question arises: Is the velocity field generated by $\omega \in L_\infty$ regular enough? To answer this question, we need the following lemma.

然而另一问题出现：由 $\omega \in L_\infty$ 产生的速度场足够规则吗？为回答这个问题，我们需要下述引理。

– Before approaching Problem 1, we first pose the problem of finding what is the natural space in which it lives.

在处理问题 1 前，我们首先提问：问题所在的自然空间为何？

– Up to now we have studied incompressible homogeneous fluids, that is, fluids in which the density does not depend on space and time. However ...

直到现在我们已研究了不可压缩均匀流体，即其密度不依赖于空间和时间的流体。然而 ·····

– The next theorem, also due to Smith, deals with the case in which the ratio λ is negative.

下一也属于史密斯的定理处理比值 λ 是负数的情形。

– We conclude this section with the proof of maximum principle in bounded domains.

我们以证明有界区域的最大值原理来结束本节。

– We conclude this section by pointing out that ...

我们以指出 ····· 来结束本节。

– Before proceeding further, let us remark on the numerical setting of our approach.

在更进一步之前，让我们就这个方法的数值设置做一点注记。

– We finally remark that ...

我们最后指出 ·····

– Next we ask the following question ...

其次，我们提出下列问题 ·····

– In conclusion, if (1) holds, then $\|u\|$ stays bounded in the time interval $[0, T]$.

结论是：若 (1) 成立，则 $\|u\|$ 在时间区间 $[0, T]$ 保持有界。

– In conclusion, we have proved the following theorem ...

总之，我们已证如下定理 ·····

2.5 证明用语

数学的证明，尤其是纯数学的证明，在写作中是相对容易表达的。套用你比较喜欢的语句模式，也就可以交代证明的表达。但一段好的证明还要求整体表达的清晰、简练，不能拖泥带水，在遣词造句上亦应力求精练，不能过分沉闷或含糊不清。要熟练地表达数学证明，则需要一定的训练。

2.5.1 证明开始时的用语

关于定理、推论等开始证明时的用语，有各种句型可以使用，下面列举数例供读者参考：

- The aim (或 idea) is to ...
  我们的目的（或主意）是 ·····
- Our first goal (purpose, destination) is to show that ...
  我们的第一个目标是证明 ·····
- The trick of the proof is to find ...
  证明的技巧在于找到 ·····
- To obtain ... a little manipulation is needed.
  如取得 ····· 一些操作是需要的。
- It suffices to establish the estimate (1) for $x = 0$.
  证明估计式 (1) 在 $x = 0$ 时成立就足够了。
- By definition ...
  根据定义 ·····
- From the proof of Theorem 1 ...
  根据定理 1 的证明 ·····
- Suppose (或 Given) ...
  假定（或已知）·····
- Let us assume initially that Q is elliptic with respect to u.
  让我们先假设 Q 关于 u 是椭圆的。
- Let Q be elliptic in the bounded domain Ω.
  假定 Q 在有限区域 Ω 是椭圆的。

- Consider Eq. (1) with $n = 2$.
  考虑 $n = 2$ 时的方程 (1)。
- We first show that ...
  我们首先证明 ·····
- We proceed to prove this theorem.
  我们来证明这个定理。
- A proof of this theorem will follow Example 1.
  这个定理的证明按例 1 进行。
- This result will follow from Theorem 1, if we can show that ...
  如果证明 ····· 这一结果将按定理 1 那样证明。
- By suitable modification to the proof of Theorem 1, we can show that ...
  通过对定理 1 的证明作适当的修改，我们可以证明 ·····
- Proceeding as in the proof of Theorem 1, we have ...
  按照证明定理 1 时一样的过程，得到 ·····
- We are now turning to the proof of Theorem 1.
  我们现在回到定理 1 的证明。

2.5.2 证明结束时的用语

在用文字把定理等的证明表达完毕后，传统上常用字母缩写 Q.E.D. 来标记证明的最后完成处 [Q.E.D. 为拉丁语 quod erat demonstrandum (英文翻译是 which was to be demonstrated) 之缩写，意即证明完毕，也可以写成 QED，但不要写成 Q.E.D]。现在更常用的是由哈尔莫斯引进数学证明的墓碑符号 ■（又称为 halmos）或其方框变种 □。下面略举数例：

- The proof is completed. ■
  证明到此完成。
- This completes the proof of Lemma 1. Q.E.D.
  引理 1 的证明到此完成。
- ···, which completes the proof of Theorem 1. QED
  ·····，这就完成了定理 1 的证明。

– Hence the statements in Section 1 are proved. □
因此第 1 节中的论述得到证明。

– ··· asserted. (或 as claimed.) QED
正像前面所断言的那样。

– ... and Eq. (1) follows. □
..... 于是就得到方程 (1)。

– This leads to a contradiction. Q.E.D.
这给出了矛盾。

2.5.3 有关不予证明的用语

当你决定省去部分或者全部证明时，你需要提供一些简单的说明，来解释为什么要这样做，省去的部分有多长等。下面提供一些常见的句型：

– It is easy (或 simple, 或 straightforward) to show that ...
非常简单地可以得到 .....

– Some tedious manipulation yields ...
一些烦琐的推导可以给出 .....

– An easy (或 obvious) induction gives ...
一个简单的归纳可以给出 .....

– An argument similar to the one used in Section 2 shows that ...
和第二节中的一个方法类似可以证明 .....

– The remainder of the argument is analogous to that in Theorem 1 and is left to the reader.
证明的余下部分和定理 1 的手法相似，所以将留给读者。

– No proof will be given for Theorem 1.
在此将不证明定理 1。

– The proof of equality (1) will not be included here.
在此不对等式 (1) 加以证明。

– Most of the materials in this chapter are stated without proof.
本章的大多数内容均不加以证明。

– The proof will be omitted.
证明略去。

– The proof of this theorem is too complicated to be given here.
这个定理的证明过于复杂，不便在此列出。

– The proof of this theorem is not particularly difficult but will not be reproduced here.
这个定理的证明不特别困难，但是在此不重复它。

– The proof is not difficult but is too long to give here.
证明过程虽不困难，但是太长，不便在此列出。

– The proof of this result is quite similar to that given earlier for the absolute convergence and so is omitted.
这一结果的证明方法与前面列出的绝对收敛的证明方法很相似，因此不再重复。

– A similar heuristic argument, the details of which we omit, suggests that ...
一个相似的启发式分析，其详细的步骤将不予列出，建议 ……

– This is a very powerful and important theorem, but we shall omit the proof.
这是一个十分有用而且重要的定理，不过在此我们不证明它。

– This is a standard result which can be found in textbooks on probability and no proof will be given here.
这是一个标准的结果，在有关概率的教科书上都可以找到，因而在此不予证明。

– For a rigorous proof of this theorem the reader is referred to [12].
这个定理的严格证明读者可参阅文献 [12]。

– The proof of this statement is postponed until Chapter 8.
这一论述的证明将留到第八章里。

– The proof of this theorem is left as an exercise.
这一定理的证明将留给读者作为练习。[1)]

[1)] 不过这一句话一般不用在研究文章里，常见在讲义或书里面。

– The proof is left to the reader.
证明将留给读者。

– The verification that Ω is convex is left to the reader.
验证 Ω 的凸性将留给读者。

– The rigorous proof of this result is beyond the scope of this paper (book).
这个结论的严格证明超出本文（书）的范围。

– Since it is intended solely as a brief review and not as a rigorous development, the pertinent results are stated without proof.
在此我们旨在作简要的概括而不作严格的推导，列出的有关的结果将不加以证明。

2.5.4 常见的证明用语

– The proof is trivial (或 easy, simple, evident, obvious).
证明是简单的。

– Although the proof is trivial, the consequences of this result are of major importance.
尽管证明很平凡，但这些结果却十分重要。

– The proof is straightforward.
证明是直截了当的。

– A proof of the Harley-Shannon Theorem is not easy and is quite involved. [2)]
Harley-Shannon 定理的证明不容易，而且很繁琐。

– A proof of this theorem will be given in Appendix 1.
这一定理的证明在附录 1 中给出。

– The proof of the main theorem will be given at the end of this section.
这个主要的定理将在本节最后证明。

[2)] involved 这个词常见并很有用。

– The proof of this theorem may be found in standard PDE textbooks, see, e.g., [11].
这个定理的证明可在很多偏微分方程的标准教科书中找到，例如可参见文献 [11]。

– The proofs given here depend on a geometric intuition.
这里列出的证明依赖于一个几何直观。

– The proof of the second part of this theorem follows in a similar manner.
本定理第二部分的证明可按类似方法得到。

– The "only if" implication follows immediately from Theorem 1, while the "if" implication follows when x_p is finite by Theorem 2.
"仅当"的含义可由定理 1 直接得到，而"当"的含义当 x_p 是有限时由定理 2 得到。

– The theorem was first proved by Aspen for a particular kind of source and, in full generality, by Bishop in 1960.
本定理先由 Aspen 对一类特定源项加以证明，其后 Bishop 于 1960 年证明了一般情形下结论也能成立。

– The proofs are almost identical, the major change being the substitution of ... for ...
这些证明过程几乎完全一样，主要改动在于对 …… 的部分进行了替换。

– The converse implications are also true.
反过来的结论也正确。

– If not, there would exist sequences $\{f_k\}$ such that ... However, (1) implies that $\|u\| = 1$, a contradiction.
如果不是这样，则存在序列 $\{f_k\}$ 使得 …… 但是，(1) 式意味着 $\|u\| = 1$，矛盾。（注意，因为是反证法，这里需要用虚拟语气 there would。）

如果一个证明较长，为了使读者跟上作者的思路，证明过程中应经常提醒读者下一步将要证明什么。一般的做法是使用下面的一些连接词。

例 2.2. 一篇较长的证明里可以用下面的句子作为不同段落或小节的开始语句：

- An outline of the proof of Theorem 1 is as follows.
  定理 1 的证明大纲如下。
- First, we establish that ...
  首先我们建立 ·····
- Our task now is to ...
  现在我们的任务是 ·····
- Our problem reduces to ...
  我们的问题简化为 ·····
- We have established the existence of a solution, and now we further show its uniqueness.
  我们已经建立解的存在性，现在进一步证明它的唯一性。 ♦

例 2.3. 如果证明需要几步完成，可以采用与下面类似的句型：

- We divide our proof in four steps.
  我们将证明分为四步完成。
- First, we need to verify the following property of the solutions (step 1)
  首先我们需要证实解的下述性质（第一步）。
- The next thing to do in the proof is ... (step 2)
  证明中下一步要做的是 ·····（第二步）
- Another step in the proof is ... (step 3)
  证明的下一步是 ·····（第三步）
- Finally, we have to show that ... (step 4)
  最后，我们必须证明 ·····（第四步） ♦

例 2.4. 其它几个常见的证明用语是：

- We are almost ready to invoke ...
  我们几乎可以调用 ····· 了
- To prove the theorem, we need several lemmas.
  为证明定理，我们需要几个引理。

– We are now in a position to ...
现在我们可以 ·····

– It remains to show that ...
还要证明 ·····

– To summarize what we have proved, ...
总结一下已证的东西，····· ♦

2.5.5 证明中常用的短语句子

有一些习惯用法在数学证明中常见，我们把它们归成如下几类：

1. 下面的句型可用来表达“根据什么即可得到什么”的意思：

– According to the definition (或 hypothesis, assumption) of ..., it follows that ...
根据 ····· 的定义（或假设），因此有 ·····

– According to Theorem (或 Lemma, Corollary, Definition, Remark) N, it follows that ...
根据定理（或引理、推论、定义、注记）N，因此有 ·····

– According to (或 By, From) the fact that ..., it follows that ...
根据（或由、从）····· 的事实，因此有 ·····

– Since (或 Because, Now that, Due to, Thanks to) ..., it follows that ...
因为（或既然、由于、归功于）·····，因此有 ·····

2. 如果一个论断可以通过一些简单运算或简单推理而获得，由于这些运算或推理并不困难，读者可以自行推算，故只需直接写出论断来，这时可用下列的句型：

– It is easy to see (或 show, prove, verify, check) that ...
易见（或证、验证、校验）·····

– It can easily be seen (或 shown, proved, verified, checked) that ...
易被看到（或证明、验证、校验）·····

3. 如果所要提及的结论比较显浅，或众所周知，无须作进一步证明，这时可用下面句型：

– It is clear (或 obvious, evident, well known) that ...
显然 ·····

– Clearly (Obviously, Evidently) ...
显然地，·····

4. 当证明定理时需要引进辅助函数，可用下列的句型：

– Let us first define (或 introduce, consider, investigate) ...
让我们首先定义（或引进、考虑、探讨）·····

– Let (或 Set, Put, Denote) ...
令（或记）·····

5. 一个定理中有几个结论，当中部分比较明显，可不用证明，仅需证明余下结论即可，这时可用下面句型：

– Since (A) and (B) are obvious (trivial, clear), we need only (或 it suffices to) prove (C).
因为 (A) 及 (B) 是显然的，我们只需证明 (C)（或证明（C）就足够了）。

– Since (A) and (B) are easy (或 trivial, clear) to see (或 prove, understand), it is enough (或 sufficient) to prove (C).
因为 (A) 及 (B) 的显而易见（或证、理解），证明（C）就足够了。

6. 有时证明一个定理并不是直接去证明，而是证明一个新的论断，一旦新的论断得到证明，已给定理不难由此而得证，这时可用下列的句型：

• 以下各句用于新的论断被证明之前：

– The theorem (或 result) will be proved if we can show ...
如能证明 ·····，则定理（或结果）将被证明。

– The theorem will be proved by showing that ...
定理将通过证明 ····· 而得证。

– If we can prove ... then the theorem follows immediately.
我们如能证明 ……，定理则立刻可得。

• 以下各句用于新的论断被证明之后：

– The theorem is now a direct consequence of what we have proved.
定理是我们刚才所证结果的直接结论。

– The theorem follows immediately from what we have proved.
定理由我们刚证的东西立刻可得。

– The theorem is now evident from what we have proved.
定理从我们刚证的来看是显然的。

– It is evident to see that the theorem holds.
显然可见定理为真。

7. 证明过程中有时要用到一些早已学过的知识或技巧，这时可用下列的句型来提醒读者：

– Recall (或 Notice, Note, Observe) that ...
回忆起（或注意到、观察到）……

– In order to prove the theorem, we need the knowledge of ...
为了证明定理，我们需要 …… 的知识。

– In order to obtain the following equation, we need ...
为了得到如下的方程，我们需要 ……

8. 如果定理的假设是一般条件，但只要定理在特殊条件下成立，就不难推出定理在一般条件下也成立，这时仅需要在特殊情况下去证明定理就够了，为此可用下列的句型：

– Without loss of generality, we may consider (或 assume) ...
不失一般性，我们可考虑（或假定）……

– Without loss of generality, we may prove the theorem in the case that ...
不失一般性，我们可在 …… 的情形证明定理。

– It suffices to prove the theorem in the case that ...
只需在 …… 的情形证明定理。

– We need only consider the case ...
我们仅仅需要考虑 …… 的情形。

– For simplicity, we may take ...
为简单起见，我们可以取 ……

9. 如果待证的论断可用以前用过的相似方法或步骤进行证明，则可用下列的句型：

– This theorem (或 statement) can be proved in the same (a similar) way as shown before.
这个定理（或叙述）能如以前证明相同（或相似）的方式证明。

– This theorem can be proved by the same method as employed in the last section.
这个定理能如上一节所用的相同方法证明。

– The proof of this theorem can be completed by the method analogous to that used above.
这个定理的证明能以与上面类似的方法来完成。

– Using the same argument as in the proof of Theorem N, we can easily carry out the proof of this theorem.
利用定理 N 证明中的同样理由，我们能容易地给出这个定理的证明。

– We now proceed as in the proof of Theorem N.
我们如定理 N 的证明那样继续。

– We shall adopt the same procedure as in the proof of Theorem N.
我们将采用定理 N 证明中的同样程序。

10. 如果我们用的是反证法，则其开头及结尾可用下列的句型：

– If the statement (或 assertion, conclusion) was false (或 not true, not right) then ...
若叙述（或断言、结论）为假（或不真、不对），则 ……

– If the assertion would not hold, then ...
若断言不成立，则 ……

– This is contrary to ...
这与 …… 相对立。

– This contradicts the fact that ...
这与 …… 的事实相矛盾。

– This leads to a contradiction.
这导致矛盾。

11. 表示定理已证毕或者把前面所证的总结为一结论，这时可用下面句型：

– We have thus proved the theorem.
这样我们就证明了定理。

– This completes the proof.
这完成了证明。

– The proof of the theorem is now complete.
定理证明现已完成。

– It is now obvious that the theorem holds.
现在显而易见定理成立。

– Thus we conclude (have derived) that ...
因此我们有结论（或得到）……

– Consequently, we infer that ...
因此，我们推导出 ……

– Thus we are led to the conclusion that ...
因而我们被引向 …… 的结论。

– Thus we arrive at the conclusion that ...
这样我们就得出 …… 的结论。

– Thus we can summarize what we have proved as the following theorem.
因此我们能把已证的一切总结成下列定理。

12. 其它：

– There exist(s) ... such that ...
存在 …… 使得 ……

- We claim ... In fact ...
  我们断言 ……。事实上 ……
- We are now in a position to ...
  现在我们可以 ……
- If otherwise, then ...
  否则的话，则 ……
- Provided that ...
  在 …… 的条件下

2.6 重要连词

在这一节我们提供一些常用的连接词组、短语及相邻句子的连接词在数学文章中的用法。这些表达特殊意义的语言成分可以是单词，也可以是短语。我们将举例说明它们的用法，并在大部分例子之后列其关于连接词强调性方面的一点评论。读者应该注意的是，由于这些连接词的含义或语气在不同的场合下可能会有些许变化，它们的强调性也依照上下文而定，故在应用这些例子时要心存谨慎。精通这些连接词的意思与异同之处是学会科技英文写作的重要部分。本节撰构例子时参考了 [14] 的第 5.2 节，后者基本采纳了 [11] 中第 191 页到第 194 页的叙述内容。

组合（Combinations）

叙述 1: Newton's method is used to solve nonlinear equations.
牛顿法用来求解非线性方程。

叙述 2: The secant method is used to solve nonlinear equations.
割线法用来求解非线性方程。

and Newton's method *and* the secant method are used to solve nonlinear equations.
（不强调其中任一方法。）牛顿法和割线法用来求解非线性方程。

both *Both* Newton's method and the secant method are used to solve nonlinear equations.
（和 *and* 相似。）

also Newton's method, and *also* the secant method, are used to solve nonlinear equations.

Newton's method is used to solve nonlinear equations, as *also* is the secant method.

(稍微强调牛顿法。) 牛顿法以及割线法用来求解非线性方程。

as well as Newton's method, *as well as* the secant method, is used to solve nonlinear equations.

(和 *also* 相似。)

not only ··· but also Nonlinear equations can be solved *not only* by Newton's method *but also* by the secant method.

(强调有多于一个可能性。) 非线性方程不光可用牛顿法解，而且也可用割线法解。

apart from/in addition to *Apart from* (*in addition to*) Newton's method, the secant method is used to solve nonlinear equations.

(强调多于一种方法；比用 *also* 稍微更强调牛顿法，但比用 *not only ... but also* 强调弱些。) 除了牛顿法外，割线法也用来求解非线性方程。

moreover/furthermore The name of Newton is attached to the most well-known method for solving nonlinear equations, Newton's method. *Moreover* (*Furthermore*), a popular interpolation technique also takes his name: Newton's interpolation formula.

(着重在 *moreover/furthermore* 后面的叙述。) 牛顿的名字与解非线性方程的最有名方法牛顿法连在一起。更进一步，一种流行的插值技术也以他命名：牛顿插值公式。

隐含或解释 (Implications or Explanations)

叙述 1: The Jacobian matrix has a large condition number.

这个雅可比矩阵有大条件数。

叙述 2: The solution from Newton's method is sensitive to errors in the data.

牛顿法的解对数据误差有敏感性。

as/because/since *As* (*because, since*) the Jacobian matrix has a large condition number, the solution from Newton's method is sensitive to errors in the data.

The solution from Newton's method is sensitive to errors in the data, *as* (*because, since*) the Jacobian matrix has a large condition number.

因为这个雅可比矩阵有大条件数，牛顿法的解对数据误差有敏感性。

due to The sensitivity of the solution from Newton's method to errors in the data is *due to* the ill condition of the Jacobian matrix.
（比用 *as* 更强调。）牛顿法的解对数据误差的敏感性是由于这个雅可比矩阵的坏条件。

in view of/owing to/on account of *In view of* (*owing to, on account of*)[3] the ill condition of the Jacobian matrix, the solution from Newton's method is sensitive to perturbations in the data.
（比用 *as* 更强调。）由于这个雅可比矩阵的坏条件，牛顿法的解对数据摄动有敏感性。

given *Given* the ill condition of the Jacobian matrix, the solution from Newton's method is necessarily sensitive to errors in the data.
（所述条件不可避免的结果。）鉴于这个雅可比矩阵的坏条件，牛顿法的解对数据误差必定有敏感性。

it follows that The Jacobian matrix has a large condition number. *It follows that* the solution from Newton's method is sensitive to errors in the data.
（对第一个叙述给出比用 *as* 更多的强调。）这个雅可比矩阵有大条件数，因此牛顿法的解对数据误差有敏感性。

---

[3] 此处不可用 *Due to*。

consequently/therefore/thus The Jacobian matrix has a large condition number and *consequently* (*therefore*, *thus*) the solution from Newton's method is sensitive to errors in the data.
(强调性居于 *as* 和 *it follows that* 之间。*Consequently* 和 *therefore* 在句子开头比 *thus* 更合适。) 这个雅可比矩阵有大条件数，结果是牛顿法的解对数据误差有敏感性。

注意： 很多初学者常用 because 和 since，但当一页纸里有过多的 because，便会使文章读起来非常生硬，所以我们要学会合理地应用 as, due to, it follows that 等连接词或短语。同样的情况也出现在 therefore 和 hence 的运用中。我们也可使用不同的说法，如 consequently 和 it follows from ... that，以免重复。另外，because 后面跟的是从句，若只跟名词或动名词，则用 because of，如下面两句意思一样：

The function series converges uniformly on $[0, 1]$ because Weierstrass' M-test is applicable here.

The function series converges uniformly on $[0, 1]$ because of Weierstrass' M-test.

由于魏尔斯特拉斯的 M-判别法，这个函数级数在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

修正和限制 (Modifications and Restrictions)

叙述 1: Direct methods are widely used for solving non large-scaled linear algebraic equations.

直接法广泛用于求解非大型线性代数方程组。

叙述 2: For large-scaled linear algebraic equations, iterative methods are preferred.

对大型线性代数方程组，应优先使用迭代法。

alternatively If linear algebraic equations are non large-scaled, direct methods can be used; *alternatively*, if linear algebraic equations are large-scaled, iterative methods are preferred.

如果线性代数方程组不是大型的，可用直接法；此外，若线性代数方程组是大型的，则应优先运用迭代法。

although *Although* direct methods are widely used for non large-scaled linear algebraic equations, iterative methods are preferred when the equations are large-scaled.
（比 *alternatively* 更强调迭代法。）虽然直接法广泛用于求解非大型线性代数方程组，但对大型方程组应优先使用迭代法。

though Direct methods are widely used for non large-scaled linear algebraic equations, *though* iterative methods are preferred when the equations are large-scaled.
（*Though* 比 *although* 弱，且多用于句中而不是句首。此例中 *though* 可被 *although* 替代，以更强调迭代法。）直接法广泛用于求解非大型线性代数方程组，尽管对大型方程组优先使用迭代法。

but If linear algebraic equations are non large-scaled, direct methods can be used, *but* if the equations are large-scaled, iterative methods are preferred.
（与 *though* 类似。）如果线性代数方程组不是大型的，直接法可用，但是若方程组是大型的，迭代法应优先。

whereas Iterative methods are used for large-scaled linear algebraic equations, *whereas* direct methods are used for non large-scaled equations.

迭代法用于大型线性代数方程组，而直接法用于非大型方程组。

by contrast Direct methods are widely used for non large-scaled linear algebraic equations. *By contrast*, for large-scaled equations, iterative methods are the methods of choice.

直接法广泛用于求解非大型线性代数方程组。相比之下，对大型方程组而言，迭代法是首选之法。

except *Except* for large-scaled linear algebraic equations, for which iterative methods are preferred, direct methods are widely used.
（明显给予的局限或限制。）除了大型线性代数方程组优先使用迭代法求解以外，直接法广泛用于各方面。

however[4]/on the other hand Direct methods are widely used for solving non large-scaled linear algebraic equations. *However* (*on the other hand*), for large-scaled equations iterative methods are preferred. （注意 *however* 和 *on the other hand* 不总是可以互换。*On the other hand* 仅当有两种可能性时可用，就像我们有两只手一样。这个例子与 *although* 和 *though* 相似，但它仅仅连接两个叙述。）直接法广泛用于求解非大型线性代数方程组。然而，对大型方程组则优先使用迭代法。

nevertheless Iterative methods are much less well known than direct methods. *Nevertheless*, there is great demand for the codes of iterative methods.
（即使第一句为真，第二句也为真。前一例如用 *nevertheless* 取代 *however* 则不对，虽然这两个词有时可互换。）迭代法远不及直接法广为人知。即便如此，迭代法程序亦有很大需求。

despite/in spite of *Despite* (*in spite of*) the large-scale nature of the linear algebraic equations that arise in his structure optimization problems, Professor Xie prefers to use his favorite direct method code.

尽管知道在结构优化问题中差生的线性代数方程组是大型的，谢教授还是用自己偏爱的直接法程序。

instead of/rather than For large-scaled linear algebraic equations we use iterative methods *instead of* (*rather than*) direct methods. *Instead of* using (*rather than* use) our usual direct method code we turned to an iterative method code because we thought the equations might be large-scaled.
(*Rather than* 和 *instead of* 一般而言可互换，但它们意思不同：*rather than* 隐含了一个清晰之选，而 *instead of* 仅仅叙述一个选择。）对于大型线性代数方程组我们用迭代法，而不用直接法。

注意：不要常用 but，换用其它同义词、近义词或意思接近的词组以令表达多样化。

---

[4] *However* 还有另一意思：However direct methods are used 意指“无论直接法怎样用”。

2.7 优劣比较

数学文章的内容离不开英文句子与数学符号的组合。如果它们配合得水乳交融，便让人赏心悦目；但若配搭不当，就会缺少美感。

在书写包括数学符号的句子时，应记住一个简单的原则：尽量少用数学符号，除非迫不得已；如有好几个数学符号在一起时，尽可能用标点符号或英文词将它们分开。关于数学符号，哈尔莫斯有一句富有哲理的名言：

> The best notation is no notation.
>
> **最好的符号是没有符号。**

这就是上述原则的理想境界。其实一体验就会知道，无论是中文还是英文的句子，如果没有夹入符号，读起来就会朗朗上口，看起来也会意思通畅。当然数学文章里，句子里包含数学符号甚至公式是平常之事，但是写作的基本原则依然是：**尽量少用符号**。

在这样的原则下，句子

- All the eigenvalues of a real symmetric positive definite matrix A are positive numbers

应当改成

- All the eigenvalues of a real symmetric positive definite matrix are positive numbers

  一个实对称正定矩阵的所有特征值均为正数。

因为这里没有必要给这个矩阵取名为 A，除非在下一句中需要这个名字。读者可以试着分别朗读上面的两句话，对照一下哪一句读得更加一气呵成。

应尽量避免在句子一开头就写上数学表达式，尤其当前一句以数学符号结尾时。这时，一个补救的好办法是重新组织句子的结构，使得这个数学符号的前面出现一两个英文词。例如，句子 f is a smooth function 可改成 The function f is smooth；这相当于将原句中的最后一个名词搬到句子的最前面而意思不改。下面这句更需改动：

- From the above formula we have $\int_0^1 f(t)dt = e$. $f(s) \geq e$ for at least one $s \in [0,1]$ since f is not a constant function

可以改写成

– We have $\int_0^1 f(t)dt = e$ from the above formula. The inequality $f(s) \geq e$ is valid for at least one $s \in [0,1]$ since f is not a constant function.

  由上式我们有 $\int_0^1 f(t)dt = e$。因为 f 不是一个常数函数，不等式 $f(s) \geq e$ 对至少一个 $s \in [0,1]$ 成立。

在下面的几个小节里，我们用对比法来说明一些词句用法的合理或欠缺，看看哪些表达方式写得好、差或马马虎虎。

2.7.1 句子比较

我们对下面列举的表达同一内容的各种写法作出评判，其中评价“中”意指“说得过去，但不甚美观”。希望读者通过比较来增加数学写作的审美观。

差： If $x > \pi$ $f(x) < 0$.

中： If $x > \pi, f(x) < 0$.

好： If $x > \pi$ then $f(x) < 0$.

好： If $x > \pi$, then $f(x) < 0$.

中： $f(x) < 0$ if $x > \pi$.

若 $x > \pi$，则 $f(x) < 0$。

差： Let $x \neq 0, y \geq 1$. $f(x,y) \leq -1$.

差： Let $x \neq 0, y \geq 1$. Then $f(x,y) \leq -1$.

好： Let $x \neq 0$ and $y \geq 1$. Then $f(x,y) \leq -1$.

中： $x \neq 0$ and $y \geq 1$ imply $f(x,y) \leq -1$.

好： If $x \neq 0$ and $y \geq 1$, then $f(x,y) \leq -1$.

若 $x \neq 0$ 且 $y \geq 1$，则 $f(x,y) \leq -1$。

差： Since $p^{-1} + q^{-1} = 1, \|\cdot\|_p$ and $\|\cdot\|_q$ are dual norms.

差： Since $p^{-1} + q^{-1} = 1, \|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$ are dual norms.

好： Since $p^{-1} + q^{-1} = 1$, the norms $\|\cdot\|_p$ and $\|\cdot\|_q$ are dual.

中 $\|\cdot\|_p$ and $\|\cdot\|_q$ are dual norms since $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

好： The norms $\|\cdot\|_p$ and $\|\cdot\|_q$ are dual since $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

因为 $p^{-1} + q^{-1} = 1$，范数 $\|\cdot\|_p$ 和 $\|\cdot\|_q$ 对偶。

差： It suffices to show that $\|H\|_p = n^{1/p}, 1 \le p \le 2$.

差： It suffices to show that for $1 \le p \le 2, \|H\|_p = n^{1/p}$.

好： It suffices to show that $\|H\|_p = n^{1/p}$ for $1 \le p \le 2$.

中： It suffices to show that $\|H\|_p = n^{1/p}(1 \le p \le 2)$.

好： It suffices to show that if $1 \le p \le 2$, then $\|H\|_p = n^{1/p}$.

只要证若 $1 \le p \le 2$，则 $\|H\|_p = n^{1/p}$ 就足够。

差： For $n = r$ (1.2) holds with $\delta_r = 0$.

好： For $n = r$, (1.2) holds with $\delta_r = 0$.

好： Inequality (1.2) holds with $\delta_r = 0$ for $n = r$.

中： (1.2) holds for $n = r$ with $\delta_r = 0$.

好： For $n = r$, inequality (1.2) holds with $\delta_r = 0$.

对 $n = r$，不等式 (1.2) 在 $\delta_r = 0$ 时成立。

2.7.2 定冠词和不定冠词

母语非英文的作者经常搞错定冠词 the 和不定冠词 a 或 an 的用法。一般而言，当一个普通名词以复数形式第一次出现时，它的前面不加 the，除非它带有一限定性形容词，比如 writing for sciences 和 writing for the mathematical sciences。但当它以单数形式出现时，除了一些抽象名词以外或某些特殊情形，前面要加 a 或 the。例如：

– Let a be a constant. Without lose of generality we may take the constant to be (这个 be 不能没有) nonzero.

令 a 为一常数。不失一般性我们可把该常数取成非零。

– We denote by $\mathbf{R}$ the set of all real numbers. Let $x \in \mathbf{R}$ be between zero and one. Then the number can be written as $0.a_1a_2a_3 \cdots$

我们用 $\mathbf{R}$ 标记所有实数之集。令 $x \in \mathbf{R}$ 在 0 和 1 之间，则这个数能写成 $0.a_1a_2a_3\cdots$

– There is great variation in the length of theses among different subjects and even within a subject. The thesis advisor can offer advice about the suitable length.

不同学科甚至同一学科内学位论文的长度相差很大。论文导师

能对合理长度提供意见。

在数学文章中，当一个对象不是唯一存在时或根本不存在时，用 the 有时是不合适的。在很多情况下将 the 换成 a 就能解决问题。下面几个相互比较的例子说明了这点。

差： The stationary densities are the fixed points of the Markov operators.

好： Stationary densities are fixed points of Markov operators.

好： A stationary density is a fixed point of Markov operators.

一个平稳密度是马尔可夫算子的一个不动点。

差： Let the Schur decomposition of A be QTQ^*.

好： Let a Schur decomposition of A be QTQ^*.

好： Let A have the Schur decomposition QTQ^*.

令 A 有舒尔分解 QTQ^*。

差： Under what conditions does the iteration converge to the solution of $f(x) = 0$?

差： Under what conditions does the iteration converge to solutions of $f(x) = 0$?

好： Under what conditions does the iteration converge to a solution of $f(x) = 0$?

在什么条件下这个迭代收敛到 $f(x) = 0$ 的一个解?

差： Let A be the square matrix with full rank and let A^{-1} be an inverse of A.

差： Let A be square matrix with full rank and let A^{-1} be inverse of A.

好： Let A be a square matrix with full rank and let A^{-1} be the inverse of A.

令 A 为一满秩方阵并记 A^{-1} 为 A 的逆。

2.7.3 容易混淆的英语单词

在学习英语单词的过程中, 我们经常发现有很多单词拼法相似，在英语写作过程中我们有时无法确定这些单词用得是否正确。虽然现在有英文拼写检查软件，但这些近似词很难被区分出来。典型的中国学者容易出错的词包括 quite（相当），quiet（安静的）；adapt（适应），adopt（采用）；principal（主要的），principle（原则）；process（过程），possess（占有）；efficient（有效的），sufficient（足够的）；rational（有理的），rationale（理由）；notation（记号），rotation（旋

转）；simplicity（简单），symplectic（辛）；等等。

下面我们列出一些常见的数学写作中可能遇到的容易混淆的单词。

表 2.25 常见易错词（带星号表示拼写正确但非想表达的）

想表达的	错的或不想表达的	想表达的	错的或不想表达的
analogous，类似的	analagous	analyze，分析	analize
content，内容	containt	criterion，标准	criteria*，标准（复数）
dependent，依赖的	dependant*，依赖者	discrete，离散的	discreet*，慎重的
forty，四十	fourty	in practice，在实践中	in practise
led，导致（过去式）	leaded, lead*，铅	lose，失去	loose*，松的
loss，损失	lost，失去（过去式）	people，人们	peoples*，民族（复数）
phenomenon，现象	phenomena*，现象（复数）	preceding，先前的	preceeding
principle，原则	principal*，主要的	proceedings，论文集	preceedings
propagation，传播	propogation	referring，参考	refering
Riccati	Ricatti	separate，分开	seperate
supersede，取代	supercede	suspicion，疑心	suspision
truly，真的	truely	zeros，零（复数）	zeroes

表 2.26 容易混淆的英语单词

accept，接受	except，除外
adapt，适应	adopt，采用
advice，建议、忠告（名词）	advise，建议、忠告（动词）
affect，影响（动词）	effect，影响、效果（名词）
assume，假定	resume，恢复
attain，达到	obtain，获得；abstain，放弃、避免
buy，买	bye，再见
capitol，国会大厦	capital，首都、资本、大写
casual，随便的	causal，表原因的、因果；cause，原因
complement，补充、相补	compliment，称赞
confidant，知己	confident，有信心的
confirm，确认	conform，使顺从、符合
contact，接触	contract，合同；contrast，对照
decline，下降	recline，放置、横卧；incline，倾斜
delicate，微妙的、精美的	dedicate，献身、献给
device，器具	devise，设计
dime，一角钱	dim，暗淡的

续表

eminent，杰出的	imminent，逼近的、紧迫的
extend，延长、扩展	extent，范围、程度；extant，现存的
extensive，广泛的	intensive，深刻的、强烈的
former，从前的	formal，正式的
forward，向前	foreword，序言
induce，促使	deduce，推理、推测；reduce，减少、化约
inspiration，灵感	aspiration，渴望、意愿
later，后来的、以后的	latter，后者
means，方法（单数）	mean，中间的、卑鄙的
median，中间的、中位数	medium，媒体
patent，专利	potent，有力的
phrase，短语	phase，阶段、相位
physicist，物理学家	physician，医生
precede，先于	proceed，进行
preceeding，先前的	proceeding，程序、行动
protest，抗议	protect，保护
purpose，目的	suppose，假设；propose，建议
recent，目前的、最近的	resent，生气、怨恨
resource，资源	recourse，求援
sign，符号、签署	sine，正弦
specie，硬币	species，物种、种群
stationery，文具	stationary，静止的、平稳的
story，故事	storey，楼层
strike，打击	strict，严格的
valueless，无价值的	invaluable，无价的
vision，视觉、眼光	version，版本、译本

第三章 怎样修改文章



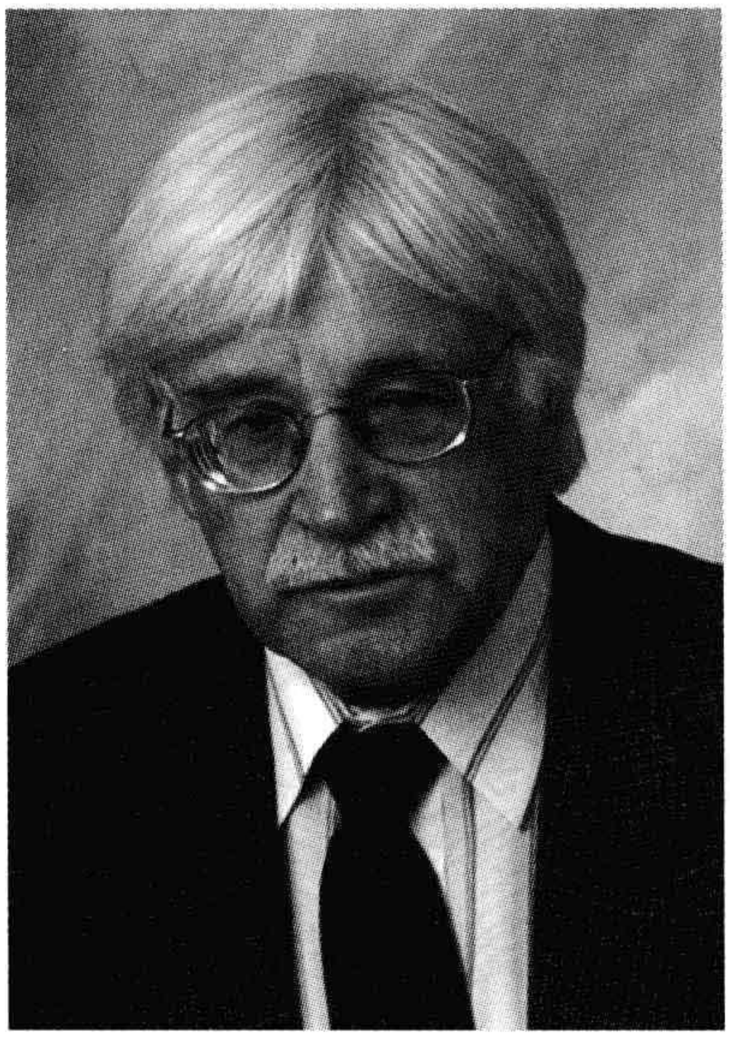
修改是文章写作的一个重要环节。Higham 在 [14] 中第 7.1 节的第一句说得好：

> All writing benefits from revision.
>
> 写作得益于修改。

你的一篇数学大作写好后，要学会用挑剔的眼光去检查、去修改。历史上关于修改字句最有名的例子当属“推敲”这个词来历的典故：唐代诗人贾岛几经斟酌，仍难以定夺其诗句“僧推月下门”和“僧敲月下门”哪个更好。他最终接受韩愈的建议采用后者，因“敲门”比“推门”更能表现环境的幽静，更使读者身临其境。唐代另一诗人白居易的改诗故事更是广为流传。据说白居易每写好一首诗后，总先读给家中老妇人听看效果如何。一旦有对方听不太懂的地方他就修改，直到老太太能听明白为止。这就不难理解为何他的“长恨歌”、“琵琶行”等伟大诗篇读起来那么朗朗上口、通俗易懂，千百年来拥有广大的读者。

鲁迅先生的写作态度是“写完后至少看两遍，竭力将可有可无的字、句、段删去，毫不可惜”。在写作经验之谈《我怎样写起小说来》这篇文章中，他说道：“我做完之后，总要看两遍，自己觉得拗口的，就增删几个字，一定要它读得顺口。”大凡认真的作者，对自己的作品都是严肃对待，修改起来，大刀阔斧，毫不留情。极端者如俄国作家果戈理甚至将心血之果的长篇小说付之一炬，绝不让自己认为的平庸之作留存人间。

科技文章虽然不必像文学作品那样在遣词造句、语法修辞上力求达到至善至美的境地，但也要做到主题突出、结构合理、表达准确、用词恰当、语言简洁、逻辑严密、避免重复等。显而易见，一蹴而就的文章初稿很难满足上述的这些基本要求，难免顾此失彼、挂一



Walter Gautschi

漏万。这时，让文章锦上添花的重任就落在了“修改”的肩上。

文章初稿写好后不必马上急于修改。将它束之高阁几天冷却一下后再捡起它，你脑海里可能会涌出一股新鲜之流。这时，你会从不同的途径来分析手稿，你会把自己放在读者的位置，以局外人的眼光审视它、理解它、改进它。

文章修改的基本方法无论对于什么文体大都一样，这就是先朗读，后推敲，再修改。朗读中找感觉，推敲后寻问题，修改里求完善。作者之一在北京大学读书时，曾和同学合撰一篇文章投寄到美国数学会的《计算数学》(*Mathematics of Computation*) 刊物上；1986 年 7 月投稿，1987 年 9 月第一次修改；1988 年 3 月第二次修改；1988 年 10 月第三次修改。1990 年 1 月发表。除了文章中注明的三次修改，出版前的一年多里还做过两次文字上的整理。其中三四次都是当时的主编 Walter Gautschi 教授亲自操笔修改，让一个刚刚从事英文写作的研究生受益匪浅。实际上，经过多次修改，通过主编用铅笔标注的密密麻麻的改正，作者学会了不少修改的技巧，增强了写作科技论文的信心。这个故事或许可以告诉初学写作的朋友，如果能找到一位有丰富写作经验的师长帮忙，修改时自然事半功倍；平生的第一篇学术作品要多修改，这不止能够增加文章内容的科研分量，还可以增强文章的英文表达能力，而后者对作者而言是终生受益的。

在这一章我们提供关于数学文章修改的一些基本原则与要点，着重讨论怎样删改细节，怎样突出重点，怎样修辞润色。与前面两章略为不同的是，在本章我们将更多地列举一些需要修改的字句段落作为案例分析，同时给出修改意见，让读者能通过来回阅读和反复比较理解修改的理由。需要修改的地方包括松散的结构、病态的句子、不规范的用法、啰唆的表达等，它们大都是国人在科技英文写作中常犯的毛病。我们希望通过对这些有毛病的句子或段落作近距离的观察与分析，来帮助读者进一步了解英文数学写作的一些规范性要求，使他们在往后的实践中逐步减少病句出现的频率。

3.1 删减字句

文章修改做得最多的事大概是删减。裁缝需要懂得量体裁衣，多余的布匹弃之不用，不会感到心痛，更不会画蛇添足地缝上不伦不类之物。做衣服如此，写文章难道不是这样？文章修改的指导方针之一

就是学会删减：删去一切无用字句，对可有可无之处忍痛割爱，甚至做到弃之如敝屣！创作态度严肃的诗人白居易一方面“新篇日日成”，另一方面又“旧句时时改”。他的一部诗稿上面满是涂改的痕迹，有的诗歌几乎改得不剩初稿一字。他不但自己改，又恐怕“私于自是，不忍割截”，就写信与其他诗人讨论，痛快删削，留下的多是质量上乘的精品。

但是对一般人而言，“删”字说起来容易做起来难。作者们，尤其是初学者，常常难以割舍已经见诸笔尖之物，辛辛苦苦写出的东西就像血肉至亲不忍舍弃。其实，往往作者认为写得美的地方有时却是最应该删的，因为它“美”得不是时候，没有必要。如果站在读者的立场想一想，他们就会懂得删减的意义和好处。比如说，如果下笔千言离题万里，尽管语句金光闪闪，何用之有？如果同样的意思短句子就能表达清楚，何必用长句子？如果一条假设在文章开始处已经明确列出，何必在其它章节再说一遍？如果一条定理已经概括了文章的主要结果，何必节外生枝地列出来两三个、甚至更多？

怎样修改？Bernad Dixon 在其 1973 年的三页短文 Sciwrite [10] 中直言不讳地建议：

> Simply go through what you have written and try to curb the length of sentences, question every passive verb and if possible make it active, prune redundant words, and look for nouns used instead of verbs.
>
> 干脆对你写的东西再过过目，把句子的长度缩短，问问每一个被动语态动词是否可以改为主动，删去多余的词，寻找名词的使用而不是动词。

这句话的实质就是删减：将长句变短，将被动语态转为主动语态，划去多余的词，并多在名词上下功夫。例如，句子：

- Thus there arises the question of whether the range of the operator is closed or not in the target space

  这样出现了算子的值域在目标空间里是否为闭这一问题

中的 Thus there arises the question 可用较短并更直接的 The question arises 来代替:

- The question arises whether the range of the operator is closed

or not in the target space.

算子的值域在目标空间里是否为闭这一问题出现了。

而句子：

– As a matter of fact the solution of equation (9) is an optimal solution

事实上，方程 (9) 的解是一个最优解

中的短语 As a matter of fact 可以缩短为 In fact 或 Actually，且第二个 solution 显得重复，可以代之以代词 one:

– The solution of equation (9) is actually an optimal one.

方程 (9) 的解实际上是最优的。

文章的摘要与引言是读者的引领人，相当于电影院里的观众领座员。领座员应当快速无误地直接将观众送到座位，切忌拖拉绕圈子。另一方面，领座员也只能带领观众规矩地走到座位，而不能飞到那里。摘要、引言既有如此要求，进行修改时就要注意：摘要、引言是否太长（领座员拖拉绕圈子）或太短（领座员只能走不能飞)? 如果有可有可无的词或短语，如果有重复、啰唆的句子，就应毫不留情地删去它们；但如果缺乏足够的信息量，让人感到写作动机不充分，那就有添砖加瓦的必要了。如果摘要仅是把引言或结论中的语句照搬过来，那就非得删改不可了。兹举一例：

– **Abstract.** This paper discusses the development of a new method for classifying topological groups and in this context discusses its merits and weakness compared with other methods in the subject of topological groups.

摘要： 这篇文章讨论拓扑群分类一个新方法的来龙去脉，并在此背景下讨论它与其它方法相比较的优缺点。

这里，短语 in this context 和 in the subject of topological groups 没有实质上的用意，可以删去。此外，discuss 连用两次也不漂亮。还有，一般不提倡以 This paper 作为一个摘要的起首句。因而，上述摘要可以改为第一人称的句子：

– **Abstract.** We discuss the development of a new method for classifying topological groups and its merits and weakness compared with other methods.

摘要： 我们讨论拓扑群分类一个新方法的来龙去脉以及相比其它方法的优缺点。

上一句或可写成被动语态，意思不变：

– **Abstract.** The development of a new method for classifying topological groups is discussed, together with its merits and weakness compared with other methods.

摘要： 拓扑群分类一个新方法的来龙去脉在此讨论，以及它与其它方法相比较的优缺点。

但由于数学文章中用主动语态优于被动语态，上面的第一个修改更为可取。

关于删减文章，我们还要强调如下几点：

- 重复使用的句子是文章删减的一个重点。例如，假设一篇文章讨论的是一类矩阵的特征值摄动问题，作者在证明主要定理前需要叙述几个引理。如果在它们的证明中第一句话都是 According to the definition of matrix eigenvalues, we have the characteristic equation of ...（根据矩阵特征值的定义，我们有 ····· 的特征方程）就显得啰唆。这时，作者可以只保留第一次出现时的句子，而将后面几处的 According to the definition of matrix eigenvalues 删去。这样原句就大大地缩短了，并且绝不影响读者的理解。倘若下半句的 we have the characteristic equation of ... 在不同的地方以不同的方式表达，那就更好，因为一成不变的写法让读者乏味。
- 有些关于研究问题的背景，以前的相关文章中多次出现的句子，尤其是自己写的相关文章中已经详细叙述的介绍性文字，在你的新篇章中要尽量避免重复。这些情况下只需简单地叙述目前为止的已知结果，并指出在文献中的某些文章里有详细的介绍。
- 有些推导，尤其是较为初等的推导，大可不必细表。文章可以用一些易于理解的文字加以说明 (比如 Using the Cauchy-Schwarz inequality, Using the standard energy method, Using the Grönwall inequality, we can obtain the following result)，这样就可以避免冗长，保证重点突出。
- 避免证明过程中出现五行甚至更长的连在一起的等式或不等式。有些人的文章一页纸里几乎全是方程式、等式或不等式，而文字

几乎没有。这样的文章看起来很容易使人犯困。要学会“喘气”，把十行的公式分两次或三次写出来，在间断处添加议论和解释，这样较能使读者甘之如饴。

- 如果感觉到单靠文字叙述无法清楚表达文义，则可适当加插高质量的示意图以帮助读者理解，这样自能事半功倍。

我们再举一些例子：

– The eigenvalues of importance are those ones with negative real part.

重要的特征值是具有负实部的那些。

上句中，ones 纯属多余，应该删掉。再看下一句：

– As far as a uniform bound of the norm of the inverse matrices is concerned it can be estimated by the variation technique.

就逆矩阵范数的一致上界而言，它可用变分技术来估计。

句中用到的短语 As far as ... is/are concerned 更适于口语中表述，书面语则少用为佳。故这句话可以大大缩短为：

– A uniform bound of the norm of the inverse matrices can be estimated by the variation technique.

逆矩阵范数的一致上界可用变分技术来估计。

试看另一句子：

– The program was found to be a suitable tool by means of which the computational experiments were performed.

这个程序被发现是适用的，计算实验就是用它做的。

句子有太多的被动语态，且太啰唆。缩短成下句丝毫未影响效果，只会更简洁、贴切：

– We performed the computational experiments with the program.

我们用这个程序做了计算实验。

如果删掉多余的 In order 并将 essential to be able to 缩短为 necessary to，下面的句子

– In order to explore the topological properties of the manifold, it is essential to be able to find its fundamental group

为了探索这个流形的拓扑性质，关键的是能找出它的基本群

就更精练：

– To explore the topological properties of the manifold, it is necessary to find its fundamental group.

为了探索这个流形的拓扑性质，有必要找出它的基本群。

当语句中出现数学符号或术语时，要注意用词精练。修改时常常可以删去不必要的词甚至短语句子，如下例所示：

– Let $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ be an m by n complex matrix, and let $A = U\Sigma V^*$ be a singular value decomposition of A.

令 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 为一 $m \times n$ 的复矩阵，且 $A = U\Sigma V^*$ 为 A 的奇异值分解。

这里，$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 已经清楚地表明 A 是一个 $m \times n$ 的复矩阵，故第一分句的后一段同义重复。更好的写法是将删减后的两分句合成一个主句：

– Let $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ have the singular value decomposition $A = U\Sigma V^*$.

令 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 有奇异值分解 $A = U\Sigma V^*$。

如果两个词一长一短但意义一样或基本一样，最好用短的。Higham 曾将他一篇论文初稿的前两句

– Summation of floating point numbers is a ubiquitous and fundamental operation in scientific computing. It is required when evaluating inner products, means, variances, norms, and all kinds of functions in nonlinear problems

浮点数求和是一种科学计算中无处不在并十分重要的运算。当给内积、平均、方差、范数及非线性问题里所有类型的函数赋值中需要

修改为

– Sums of floating point numbers are ubiquitous in scientific computing. They occur when evaluating inner products, means, variances, norms, and all kinds of nonlinear functions.

浮点数求和在科学计算中普遍存在。它们在内积、平均、方差、范数以及所有类型的非线性函数的赋值中出现。

作为本节的最后一个例子，我们叙述并证明如下的一个初等不

等式。它是 Yorke 在遍历理论中关于一类区间映射绝对连续不变测度存在性的研究中发现的，现称为 Yorke 不等式 [9, 20]。

例 3.1. Proposition. Suppose that f is a function which is defined on a closed interval $[0,1]$ and let it be a function of bounded variation on a subinterval $[a,b] \subset [0,1]$. Then the function $f\chi_{[a,b]}$ which is the product of the function f and the characteristic function $\chi_{[a,b]}$ of $[a,b]$ is also a function of bounded variation on $[0,1]$. Furthermore, this product function satisfies the following inequality:

$$\bigvee_0^1 f\chi_{[a,b]} \leq 2\bigvee_a^b f + \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx \tag{3}$$

with respect to its variation and the variation of the function f.

Proof. Since the integral $\int_a^b |f(x)|dx$ of the function $|f(x)|$ over the interval $[a,b]$ divided by the length $b-a$ of $[a,b]$ is the average value of $|f|$ over $[a,b]$, we can find a number $c \in [a,b]$ such that the value $|f(c)|$ is less than or equal to the average value, that is,

$$|f(c)| \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx.$$

Then, from the definition of the variation of functions, we have

$$\bigvee_0^1 f\chi_{[a,b]} \leq |f(a)-f(0)| + \bigvee_a^b f + |f(1)-f(b)| = \bigvee_a^b f + |f(a)| + |f(b)|$$

since $f(0) = 0$ and $f(1) = 0$. By the triangle inequality,

$$|f(a)| + |f(b)| \leq |f(a)-f(c)| + |f(c)-f(b)| + 2|f(c)|.$$

It follows that

$$\begin{aligned}\bigvee_0^1 f\chi_{[a,b]} &\leq \bigvee_a^b f + |f(a)| + |f(b)| \\ &\leq \bigvee_a^b f + |f(a)-f(c)| + |f(c)-f(b)| + 2|f(c)| \\ &\leq 2\bigvee_a^b f + \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx. \quad \square\end{aligned}$$

命题： 令 f 为定义在闭区间 $[0,1]$ 上的一个函数，且令它在一个子区间 $[a,b] \subset [0,1]$ 上是一个有界变差函数，则函数 f 与 $[a,b]$ 的特征函数 $\chi_{[a,b]}$ 的积函数 $f\chi_{[a,b]}$ 在 $[0,1]$ 上也是一个有界变差函数。更进一步，这个乘积函数关于它的变差和函数 f 的变差满足下列不等式:

$$\bigvee_0^1 f\chi_{[a,b]} \leq 2\bigvee_a^b f + \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx. \tag{3}$$

证明： 因为函数 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 除以 $[a,b]$ 的长度 $b-a$ 是 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上的平均值，我们可找到一个数 $c \in [a,b]$ 使得值 $|f(c)|$ 小于或等于这个平均值，即

$$|f(c)| \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx.$$

然后，因为 $f(0)=0$ 及 $f(1)=0$，由函数变差的定义我们有

$$\bigvee_0^1 f\chi_{[a,b]} \leq |f(a)-f(0)|+\bigvee_a^b f+|f(1)-f(b)| = \bigvee_a^b f+|f(a)|+|f(b)|.$$

由三角不等式，

$$|f(a)|+|f(b)| \leq |f(a)-f(c)|+|f(c)-f(b)|+2|f(c)|.$$

由此得出

$$\begin{aligned}\bigvee_0^1 f\chi_{[a,b]} &\leq \bigvee_a^b f + |f(a)| + |f(b)| \\ &\leq \bigvee_a^b f + |f(a)-f(c)| + |f(c)-f(b)| + 2|f(c)| \\ &\leq 2\bigvee_a^b f + \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx. \quad \square\end{aligned}$$

不难发现，上述命题的叙述和证明都可压缩，尤其那些众所周知的事实应该省略，比如关于平均数的基本性质和绝对值的三角不等式。另外，Yorke 不等式的标号在证明中未用到，可以去掉。修改后的命题及证明简短多了：

Proposition. Let f be a function defined on $[0,1]$ and of bounded variation on $[a,b] \subset [0,1]$. Then the product $f\chi_{[a,b]}$ of f and the characteristic function $\chi_{[a,b]}$ is of bounded variation on $[0,1]$ and satisfies

$$\bigvee_0^1 f\chi_{[a,b]} \leq 2\bigvee_a^b f + \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx.$$

Proof. Choose $c \in [a,b]$ such that

$$|f(c)| \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx.$$

Then

$$\begin{aligned}\bigvee_0^1 f\chi_{[a,b]} &\leq \bigvee_a^b f + |f(a)| + |f(b)| \\ &\leq \bigvee_a^b f + |f(a)-f(c)| + |f(c)-f(b)| + 2|f(c)| \\ &\leq 2\bigvee_a^b f + \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx. \quad \square\end{aligned}$$

命题： 令 f 为一函数，定义在 $[0,1]$ 上且在 $[a,b] \subset [0,1]$ 上有有界变差, 则 f 与特征函数 $\chi_{[a,b]}$ 的积 $f\chi_{[a,b]}$ 在 $[0,1]$ 上有有界变差，并满足

$$\bigvee_0^1 f\chi_{[a,b]} \leq 2\bigvee_a^b f + \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx.$$

证明： 选取 $c \in [a,b]$ 使得

$$|f(c)| \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx.$$

然后，

$$\begin{aligned}\bigvee_0^1 f\chi_{[a,b]} &\leq \bigvee_a^b f + |f(a)| + |f(b)| \\ &\leq \bigvee_a^b f + |f(a)-f(c)| + |f(c)-f(b)| + 2|f(c)| \\ &\leq 2\bigvee_a^b f + \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx. \quad \square \quad \blacklozenge\end{aligned}$$

3.2 突出重点

中学作文训练时，语文老师评语中常有“主题突出”的褒奖话。是的，一篇文章只应有一个主题，并且要突出主题，一切都要“星星围着太阳转”。数学文章也不例外，它或开辟一个新的研究方向, 或证明一个关键的定理, 或推翻一个有意义的猜想，或分析一个有用的数学模型，或提出一个行之有效的算法。无论内容如何，作者头脑中的思维线索只系于一根红线。多中心论只是分裂主义者的借口，而不是写文章的思路。

文章的主题确定以后，它的一切结构考虑和分段分节均要围绕这个主题公转，不要下笔千言，离题万里。该说的要说，不该说的就不说。譬如说，一篇用到代数几何的知识求解多元多项式方程组的所有孤立解，其引言部分就不必大谈代数几何从古典的 Bezout 定理到现代交换代数的发展历程，而只需寥寥几笔概述一下目前对于本文研究课题最有用的那些代数几何工具。一篇关于希尔伯特空间某类自共轭算子的文章，也不必从赋范空间的定义写起。关于椭圆曲线或不定方程的论文不必和中国古代的勾股定理发生太多的联系，除非写的是综述文章或数学科普。

文章重点不突出的一个原因是作者想面面俱到，通常犯的毛病是像写教科书一样写文章。面面俱到的论述在一篇研究性论文里既做不到，也不应该做到。研究性文章只应写上与该研究有关的那些内容，它基本只属于一个小的领域，而对更大领域的基本知识可以引用有关书籍，不必细谈。因此，在文章的引言不要着力奢谈与己无关的东西。

另一类导致重点不突出的问题是将所研究问题的应用前景说得太多，喧宾夺主，冲淡了文章中作者研究结果这一重点。作者所研究问题实际用途的叙述当然重要，尤其对应用数学而言，但是文章的主要目的不是谈论其应用前景——这也许是读者或别的文章所考虑的事，而是直接报告自己对这一问题的最新研究成果。

文章修改时还要考虑文章的结构：分节是否合理？每节长度是否平衡？相邻两节内容是否不甚衔接、跳跃太大？常见的问题是分节太多。一篇十页文章分成五六节 (sections)，有的小节只有半页纸，这就使文章显得太破碎。修改时可以考虑把这些小节作出整合。另一极端情形是文章几乎没有分节，一个引言 (Introduction)，一个结

果 (Result) 就完了。这样读者（特别是审稿人）不知道这篇文章（尤其是超过十页的文章）的重点在哪里，有创新或有难度的部分在哪里。这时就要看看是否把需要突出的部分分成一节，甚至在一大节里分几个小节 (subsections)。

有的文章没有结论及讨论的小节 (Conclusions)。学术性文章，尤其是那些长篇大论，一定要有些结论性的讨论，把文章中的重要方法，独特之处，和沿着这个方向对进一步研究的展望，用简洁明了、浓缩精练的笔法写出来。试想，如果只给你三分钟向一个同行推销你的文章，你如何做到？

重点是否突出的另一检测法为：文章中是不是有太多的结论，比如六个定理、八个引理？定理太多了也就没有定理了。如何删掉一些可有可无的定理，只留下你最喜欢的一两个或最多三四个定理？那些预备知识性的引理，可以在文中一两行叙述的就不要单列出一个引理。如果是可以合并的（特别是已知的结论），尽量合并。建议采用一些概括性手法合并那些文中需要的预备知识，这样可以减少过多的正式引理。一般来说，只有在文章中多处引用的一些结论可以单列为引理。

断言一些结论或推导一些方程，是否有可能更简洁、更不拖泥带水？例如，有的结论的推导过程相对简单，其难度无异于学生作业的，则不必浪费笔墨详细写出，只需用 It can be verified ... 或 The details will be omitted here 这样的句型就可一笔带过。但是，如果作者自己并不能百分之百确信证明的确简单，请不要滥用 It is easy to see 或 It can be easily proved。事实上，不少审稿人看到这样的句子，却不能明白为何“不证自明”，因为他们也无法证实作者宣称的“易见”结论。

有些作者也许觉得引言写长些会引起读者足够的重视，或担心文章的内容不够多而通过加长引言来弥补，叙述一些与本文主题关系不大的历史概述、基本事实或他人研究。这些综述甚至占据了引言的好几个段落，在阐述性文章里可能没有关系，但在研究性论文里往往是多余的。要知道，学术论文以结果的重要性或突破性取胜，与篇幅的长短无关。美国数学家纳什 (John Nash, 1928—) 关于对策论的十几页博士论文导致他获得诺贝尔经济奖。后面第七章第五节内提到的陈省身 (1911—2004) 关于高斯–博内公式内蕴证明的那篇伟大论文，只有六页，却成了整体微分几何这一现代数学重要学科的开山

之作。

我们用下面的一个例子来结束本节的讨论，所引的这段文字来源于泛函分析领域内一篇研究论文的初稿。文章的中心论题是关于巴拿赫空间上闭线性算子的摄动分析。虽然引言部分中的这段话英文写作方面基本没有毛病，但它的多数甚至所有句子都可以删去，因为与文章的主题关系不大，并且讲的都是众所周知的事实。

例 3.2. As everyone knows, a large number of the operators which arise naturally in applications (e.g., mathematical physics, quantum mechanics and partial differential equations) are unbounded [18]. However, many of these unbounded operators have bounded inverses or bounded generalized inverses. To solve problems involving such unbounded operators, it is necessary to extend the results of bounded operators to the unbounded case. We always deal with a class of important ones, i.e., closed linear operators. It is worthy to point out that the differential operators or partial differential operators are always closed linear operators.

正如人所共知的，应用中自然出现的大量算子（例如，数学物理、量子力学和偏微分方程）都是无界的 [18]。然而，这些无界算子中的许多存在有界逆或有界广义逆。为了求解牵涉这样的无界算子的问题，有必要把有界算子的结果推广到无界情形。我们总是处理一类重要的无界算子，即闭线性算子。值得指出的是，微分算子或偏微分算子总是闭线性算子。 ♦

3.3 美容结构

文章的修改过程也起了美容师的角色。爱美之心，人皆有之。一篇数学文章是文字和数学公式的混合物，它的外观也是吸引读者眼球的一个不可忽略的重要因素。《诗经》上有“窈窕淑女，君子好逑”，若有一部“数学写作经”，当中也应加上“美轮美奂，读者趋之”的教条。

怎样才称得上美轮美奂的数学文章长相？这就像评鉴一个人一样，要从头到脚看得舒服。文章的“头”就是题目。它是否长得像懒婆娘的裹脚布？是否包含可有可无甚至完全多余的词？下面的题目：

– A weakly and strongly convergent numerical algorithm for solving ...

一个求解 …… 的弱收敛和强收敛数值方法

就可以缩短为:

– A strongly convergent numerical algorithm for solving ...

一个求解 …… 的强收敛数值方法

或干脆削成更精练的:

– A convergent algorithm for solving ...

一个求解 …… 的收敛算法

在这个例子中，因为强收敛推出弱收敛，尽管在文章中也许先证明了算法的弱收敛，然后在此基础上又证明了它的强收敛（例如，这在与矩量问题有关的最大熵方法收敛性理论中可见），然而在题目上也不应当将这两种收敛并列，以避免产生逻辑问题。

如果英文文章经常出现单词拼写错误、句子语法不通、表述词不达意等文病，阅读能产生的美感肯定荡然无存。国人写英文的一个常见毛病是把汉语的表达习惯挪用到英语上，一个典型的例子是 Although I have worked hard, but I still cannot prove the theorem.（我虽努力了，但还证不了这个定理）虽然在汉语里“虽然 …… 但是 ……”是正确的用法，但是在英文里 although 和 but 不能同时使用。因此我们只能说 Although I have worked hard, I still cannot prove the theorem 或 I have worked hard, but I still cannot prove the theorem.

数学文章如果不消除这样的英文缺陷，就会降低读者的阅读快感。作者绞尽脑汁获得的漂亮的数学结论就得不到美的传播，这就像战国时学富五车才高八斗的韩非因口吃而无法游说韩王采纳他的学说，实在令人惋惜。下面再举出几个例子比较原文及其修改稿，它们来自于国内学者的英文期刊投稿和编辑的加工处理。下文把修改后版本列于原稿下方以便比较。我们不必对修改理由作出说明，应让读者从相互比较中看出所以然来。由于修改前的段落有各式各样的英文毛病，故我们不作对应的中文翻译。

例 3.3. 【原文】**Abstract.** In this paper we consider the approximate eigenvalues and approximate eigenspaces for generalized Rayleigh quotient, and present some residual bounds. Our bounds will improve the corresponding ones.

【修改稿】**Abstract.** We consider approximate eigenvalues and eigenspaces for generalized Rayleigh quotients and present some residual bounds which improve the existing ones.

摘要： 我们考虑广义 Rayleigh 商的近似特征值与特征空间并给出一些残量界。它们改进了目前的结果。 ♦

例 3.4. 【原文】**Abstract.** We propose and analyze a spectral Jacobi-collocation approximation for Abel-Volterra integral equations (AVIEs) of the second kind. In this work, we considered the case when the underlying solutions of the AVIEs are nonsmooth. We take some variable transformations to change the equation into a new Volterra integral equation which possesses a smooth solution. The error analysis for this approach is carried out as our previous work. We obtain error estimates for the solution of the original equations with singularity. The spectral rate of convergence for the proposed method is established in the L^∞-norm and weighted L^2-norm.

【修改稿】**Abstract.** This work is to analyze a spectral Jacobi-collocation approximation for Volterra integral equations with singular kernel $\phi(t,s) = (t-s)^{-\mu}$. In an earlier work of Chen and Tang [*J. Comput. Appl. Math.*, 2009, 233: 938–950], the error analysis for this approach is carried out for $0 < \mu < 1/2$ under the assumption that the underlying solution is smooth. It is noted that there is a technical problem to extend the result to the case of Abel-type, i.e., $\mu = 1/2$. In this work, we will not only extend the convergence analysis by Chen and Tang to the Abel-type but also establish the error estimates under a more general regularity assumption on the exact solution.

摘要： 这项工作是分析一个用于带有奇异核 $\phi(t,s) = (t-s)^{-\mu}$ 的 Volterra 积分方程的谱雅可比配点法。Chen 和 Tang 的前期工作 [*J. Comput. Appl. Math.*, 2009, 233: 938–950] 对 $0 < \mu < 1/2$ 的情形在解为光滑的假设下为这个方法进行了误差分析。已经注意到，把结果推广到阿贝尔型，即 $\mu = 1/2$，有一个技术问题。这里，我们不仅把 Chen 和 Tang 的收敛分析推广到阿贝尔型，而且在关于精确解的正规性更一般的假设下建立误差估计。 ♦

例 3.5. 【原文】Before we give our main results in this section, we need the following Halanay inequality.

【修改稿】Before stating our main results in this section, we need the following Halanay inequality.

在叙述本节的主要结论前，我们需要下列 Halanay 不等式。 ♦

例 3.6. 【原文】So we have $\|\tilde{Q}_1^* X_2\|_2 = \|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_2$ and $\sigma_{\min}^2(Y_1^* Q_1) = \sigma_{\min}^2(\tilde{Q}_1^* X_1) = 1 - \|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_2^2$. Then the bound (2.5) may reduce to a simple form:

$$\sum_{i=1}^{m} |\lambda_{\tau(i)} - \tilde{\lambda}_i|^2 \leq \frac{\|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_2^2}{1 - \|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_2^2} \|R\|_F^2,$$

which is the Sun's bound (1.6).

Noting that the function $f(x) = \frac{x}{1-x}$ is an increasing function for $x \in (0, 1)$ and

$$\|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_2 \leq \|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_F \leq \frac{\|R\|_F}{\delta_2} = \rho_F,$$

from which one may deduce

$$\sum_{i=1}^{m} |\lambda_{\tau(i)} - \tilde{\lambda}_i|^2 \leq \frac{1}{1 - \rho_F^2} \frac{\|R\|_F^2}{\delta_2^2}$$

from (1.6) provided $\rho_F = \frac{\|R\|_F}{\delta_2} < 1$ (see e.g., [15]).

【修改稿】So we have

$$\|\tilde{Q}_1^* X_2\|_2 = \|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_2,$$

$$\sigma_{\min}^2(Y_1^* Q_1) = \sigma_{\min}^2(\tilde{Q}_1^* X_1) = 1 - \|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_2^2.$$

Then the bound (2.5) is reduced to Sun's bound (1.6). Moreover, note that the function $f(x) = x/(1-x)$ is increasing for $x \in (0, 1)$ and

$$\|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_2 \leq \|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_F \leq \frac{\|R\|_F}{\delta_2} = \rho_F.$$

It follows from (1.6) that

$$\sum_{i=1}^{m} |\lambda_{\tau(i)} - \tilde{\lambda}_i|^2 \leq \frac{\rho_F^2}{1 - \rho_F^2}$$

if $\rho_F < 1$ (see, e.g., [15]).

因此我们有

$$\|\tilde{Q}_1^* X_2\|_2 = \|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_2,$$

$$\sigma_{\min}^2(Y_1^* Q_1) = \sigma_{\min}^2(\tilde{Q}_1^* X_1) = 1 - \|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_2^2.$$

这时上界 (2.5) 简化成孙的上界 (1.6)。另外，注意到函数 $f(x) = x/(1-x)$ 对 $x \in (0,1)$ 是递增的，并且

$$\|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_2 \le \|\sin\Theta(Q_1, X_1)\|_F \le \frac{\|R\|_F}{\delta_2} = \rho_F.$$

若 $\rho_F < 1$，则由 (1.6) 可知（例如，可参考 [15]）

$$\sum_{i=1}^{m} |\lambda_{\tau(i)} - \tilde{\lambda}_i|^2 \le \frac{\rho_F^2}{1-\rho_F^2}. \quad \blacklozenge$$

例 3.7. 【原文】We found that the linear interpolation, as an important operator in CMG, brings a serious shortcoming, i.e. not only the original nodal errors remain on the refined grids, but reproduces the larger errors at mit-points, which cannot be cancelled by several iterations and will be bright to the refined grids.

【修改稿】We found that the linear interpolation, as an important operator in the CMG, yields a serious problem, i.e., not only the original nodal errors remain on the refined grids, but also it reproduces larger errors at mid-points, which cannot be canceled by several iterations so will be brought to the refined grids.

我们发现线性插值作为 CMG 中的重要算子产生一个严重的问题，即不仅原先的节点误差在加细网格上依旧存在，而且插值在中间点上又产生出更大的误差。这些误差不能在几次迭代后消除，因而将被带到加细网格上。 ♦

例 3.8. 【原文】Extensive simulations are performed, as a result, the finite difference WENO schemes with multilevel time discretization have higher accuracy maintain nonoscillatory properties and more cost effective than WENO scheme with Runge-Kutta time discretization.

【修改稿】Extensive simulations are performed, which indicates that the finite difference WENO schemes with the multilevel time discretization can achieve a higher accuracy and are more cost effective than the WENO scheme with the Runge-Kutta time discretization, while still maintaining nonoscillatory properties.

进行的大量模拟表明这些带有多级时间离散的有限差分 WENO 格式比带有 Runge-Kutta 时间离散的 WENO 格式能获得更高的精确度，并更具成本效益，同时还保持非振荡性质。 ♦

例 3.9. 【原文】Consider one-dimensional problem

$-u''+u=1,\ 0<x<1,\ u(0)=u'(1)=0,\ u=1-\cosh(1-x)/\cosh 1.$

【修改稿】Consider a one-dimensional problem

$$\begin{aligned} &-u''+u=1, \qquad 0<x<1,\\ &u(0)=u'(1)=0, \end{aligned}$$

the solution of which is $u=1-\cosh(1-x)/\cosh 1$.

考虑一维问题

$$\begin{aligned} &-u''+u=1, \qquad 0<x<1,\\ &u(0)=u'(1)=0, \end{aligned}$$

其解为 $u=1-\cosh(1-x)/\cosh 1$。 ♦

例 3.10. 【原文】For this test, we also simulated flows with WENO5 and the fourth order explicit Milne formula, the results of orders of accuracy see in Tables 3 and 4, the numerical errors and the cost CPU time see the Fig. 2.

【修改稿】For this test, we also simulated flows with the WENO5 and the fourth order explicit Milne formula. The convergence orders are given in Tables 3 and 4, and the numerical errors and the CPU time used are displayed in Fig. 2.

这个实验中我们也用了 WENO5 和 Milne 四阶显式公式模拟流动。其收敛阶的结果在表 3 和表 4 中列出，而数值误差及所用的 CPU 时间由图 2 展示。 ♦

例 3.11. 【原文】**Acknowledgments.** Supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 88886666) and Key Laboratory of Education Ministry.

【修改稿】**Acknowledgments.** The research was supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 88886666) and the Key Laboratory of the Ministry of Education.

致谢： 这项研究由中国国家自然科学基金委员会（基金号 88886666）和教育部重点实验室资助。 ♦

在数学文章里，不同句子或不同段落的先后次序也有讲究。它们之间应满足推理过程的逻辑性、顺序性和平滑性，而跳跃式的思维表达则会妨碍读者的理解。Higham ([14], 112–113 页) 提供了一例：

例 3.12. 【原文】In terms of fractals, a straight line has a dimension of one, an irregular line has a dimension of between one and two, and a line that is so convoluted as to completely fill a plane has a dimension approaching the dimension of the plane, namely a dimension of two. Fractal dimensions assign numbers to the degree of convolution of planar curves.

就分形而论，一条直线有维数 1，一条不规则线有 1 和 2 之间取值的维数，而一条如此错综复杂以至于填满某部分平面的曲线有趋于平面维数即维数 2 的一个维数。分形维数对平面曲线的错综复杂度指定数值对应。

这两句话之前的两句也提到分形，因此不必再说 In terms of fractals。它们的次序也应颠倒过来，以具体的例子作为第二句来说明第一句的一般概念。短语 a dimension of one 不及 dimension one 简单直接。另外，Fractal dimensions 只是数，而不指定 (assign) 数。短语 namely a dimension of two 从语法上看也不清楚是否指 the convolution line 或 the plane。最后，副词居中的不定式 to completely fill 可代之以 to fill 而不失原意。读者可以自行判断 Higham 如下建议的修改文本是否更有逻辑性和说服力：

【修改稿】Fractal dimensions are numbers that measure the degree of convolution of planar curves. A straight line has dimension one, an irregular line has a dimension of between one and two, and a line that is so convoluted as to fill a plane has a dimension approaching two, which is the dimension of the plane.

分数维是测量平面曲线褶合度的数。一条直线有维数 1，一条不规则线有 1 到 2 之间取值的维数，而一条如此错综复杂以至于填满某部分平面的曲线有趋于 2 这个平面维数的一个维数。 ♦

数学文章的美观度很大程度上依赖于数学符号和表达式的格式和外形给人留下的第一印象，以及它们出现的合理性和相容性。需要检查的项目有：数学公式的表达是否标准？读者是否容易理解？表达方式是否有混淆不清之嫌？遇到需要单列成一行的数学公式就应该单列，这样读者看起来才会赏心悦目，便于消化。我们看看下面一个引言的开首几句：

例 3.13.【原文】Introduction. Throughout this paper $\|A\|_2$ stands for the Euclidean norm of a real-valued matrix A and $A^\dagger$ denotes the Moore-Penrose generalized inverse of A. We define the set $M_k = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \text{rank}B = k\}$ for each $k = 1, \ldots, n$. Given $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ of full rank and a positive integer $k < n$ we are interested in the best approximation problem

$$\min\{\|A - B\|_2 : B \in M_k\}.$$

引言： 纵观本文 $\|A\|_2$ 表示实数矩阵 A 的欧几里得范数，且 $A^\dagger$ 代表 A 的 Moore-Penrose 广义逆。对每一个 $k = 1, \ldots, n$ 我们定义集合 $M_k = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \text{rank}B = k\}$。给定具有满秩的 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 以及一个正整数 $k < n$，我们对最佳逼近问题

$$\min\{\|A - B\|_2 : B \in M_k\}$$

感兴趣。

先介绍符号再叙述问题作为文章的开场白，往往不及开门见山地提出问题来得吸引，故此文开始最好先引入最佳逼近问题，有关的符号和定义则可在需要时引进。比如，Moore-Penrose 广义逆矩阵 $A^\dagger$ 可以待用到它时再定义不迟。在数学上，real-valued 和 real 同义，用后者就足够明了。Given 一词跟后面的 we are interested in 没什么相关性，可以省略。stand for 和 denote 都可用更短的词 is 代替。此外，集合 M_k 的定义应单列一行，这样更加美观、更加醒目。修改后只用了一句就完全表达了原文的意思，逻辑性更强，并且语感更好：

【修改稿】Introduction. We are interested in the best approximation problem

$$\min\{\|A - B\|_2 : B \in M_k\}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ has rank n and $k < n$,

$$M_k = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \text{rank}B = k\},$$

and $\|A\|_2$ is the Euclidean norm.

引言： 我们对最佳逼近问题

$$\min\{\|A - B\|_2 : B \in M_k\}$$

感兴趣，其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有秩 n 且 $k < n$,

$$M_k = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \text{rank}B = k\},$$

以及 $\|A\|_2$ 是欧几里得范数。 ♦

一个人走路时总喜欢轻装上阵，数学文章也不喜欢拖泥带水地加上无用的标识符。检查数学公式时也要看看方程标号是否过多？当然也不能太少，全凭需要而定。有的作者事无巨细地给每个方程都编号，而有的文章整节整节几乎没有编号，这两种极端都不好。比如，上述例 3.5 引文所属的打印 25 页的文章初稿中足足有 98 个公式标号，令人目不暇接，甚至为写成两行的一个公式也用上了两个标号：

For example, consider the system

$$y'(t) = L(t)y(t) + M(t)y(t-\tau) \tag{2.32}$$

$$+ N(t)\left[\int_{t-\tau}^{t} (A(\theta)y(\theta) + B(\theta)y'(\theta))d\theta\right],\ t \geq 0, \tag{2.33}$$

$$y(t) = \phi(t),\ t \leq 0. \tag{2.34}$$

从头看到尾，文章中绝大多数的标号一次都没有用到，故应把它们删去。

但是，为了在证明中不必重复书写复杂的公式而节省空间，下面一段定理叙述 [8] 中的公式标号 (9.6) 就是必需的了：

Theorem 6.7. Let $\sigma_0 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ be a set of poles of T with respective orders $\nu_1, \ldots, \nu_k$. Then, for any $f \in \mathcal{H}(T)$,

$$f(T)E(\sigma_0) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{\nu_j-1} \frac{f^{(r)}(\lambda_j)}{r!}(T - \lambda_j I)^r E(\lambda_j). \tag{9.6}$$

Proof. Let

$$g(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=0}^{\nu_j - 1} \frac{f^{(r)}(\lambda_j)}{r!} (\lambda - \lambda_j)^r.$$

Then the right-hand side of (9.6) is the expression of $g(E)E(\sigma_0)$. Since $g^{(r)}(\lambda_j) = f^{(r)}(\lambda_j)$ for $0 \leq r < \nu_j$ and $1 \leq j \leq k$, by Theorem 6.4, $f(T)E(\sigma_0) = g(E)E(\sigma_0)$. □

定理 6.7： 令 $\sigma_0 = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ 为 T 的极点集，其对应的阶为 $\nu_1, \ldots, \nu_k$, 则对任一 $f \in \mathcal{H}(T)$ 有

$$f(T)E(\sigma_0) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=0}^{\nu_j - 1} \frac{f^{(r)}(\lambda_j)}{r!} (T - \lambda_j I)^r E(\lambda_j). \tag{9.6}$$

证明： 令

$$g(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=0}^{\nu_j - 1} \frac{f^{(r)}(\lambda_j)}{r!} (\lambda - \lambda_j)^r,$$

则式 (9.6) 的右端是 $g(E)E(\sigma_0)$ 的表达式。因为对 $0 \leq r < \nu_j$ 和 $1 \leq j \leq k$ 都有 $g^{(r)}(\lambda_j) = f^{(r)}(\lambda_j)$，根据定理 6.4，$f(T)E(\sigma_0) = g(E)E(\sigma_0)$。 □

一般来说，重要的方程因为文章后面要用到而一定要编号；定理、引理中的数学公式结论部分也一定要编号；而证明细节中的一些再也不用的公式则不一定要编号。有些作者在文章中把一个方程或公式重复写上多遍，这就显得多余，绝对应该避免。我们只需要把第一次出现的表达式编上号，以后用到它时提这个编号就可以了。关于公式的编号，简单的规则是：如果该公式文中要引用，则给它编号以节省空间，否则就不编号；如果一个公式是文中的重要结论（比如定理或引理中的结论），则也应该编号。

作为文章的“脚”，参考文献的整体也须作美容。它们的格式是否统一？所列文章、杂志、作者的信息等是否全面、准确？要删去在文中并无引用但出现在参考文献中的论文或书籍，同时要把与本文内容直接相关的文章列出，并在引言或其它相关处加以说明。我们见过某些投稿的文章，几乎是作者在其它杂志上已发表或投稿的另一篇论文的翻版，或是采用的工具一模一样，或是分析过程完全雷同，但作者为了能让审稿过程顺利过关，便把讨论的问题改头换面，在文章中亦故意不提原来的文章，也不把它放在参考文献当中。这种做法有失诚信，是不可取的。

3.4 善用图表

在数学领域，应用数学和计算数学的文章经常包含计算的结果。几乎所有工程学科的研究论文都带有与计算结果有关的图表。这些计算结果往往放在文章主体的稍后部分，常常在结论前的最后一节。这些图表能发挥下列几个作用：第一是通过实际算例证实文中的数学模型或新的算法分析的正确性；第二是和现有的流行计算方法进行比较——以事实说明新算法的鲁棒性和合理性，比较的范畴有收敛速度、运算复杂性、数值稳定性等方面；第三是通过图表的视觉效果让读者对数值结果和新算法应用前景有身临其境之感。

尽管图表很有直观意义，但在以数值方法理论分析为主体的文章里还只能担纲配角，因此它不必占据文章太多的篇幅。修改文章时就要考虑可不可以去掉部分图表，免得拖泥带水、分散重心。特别是显示的内容有雷同或相似的那些图表，只要展现一两个有代表性的就可以，其它的可改用叙述的手法，把结论描述一下就可以了。图很直观，但只有最具代表性的，特别是让别人看了出乎意料的，才值得显示出来。

对于读者来说，好的图表可以：

(1) 更好地理解文章的结论；
(2) 节省时间，让读者在极短的时间里判断文章结论的创新性和重要性；
(3) 使读者长期记忆。

对于作者来说，好的图表可以：

(1) 节省大量的文字描述；
(2) 引导读者直奔重要的结论部分；
(3) 提供令人信服的结论；
(4) 让读者更容易记住或欣赏文章的结果。

作为例子，下面的两个图表取自于 2011 年在《数学分析及其应用》(*Journal of Mathematical Analysis and Applications*) 上刊登的

一篇论文，它记录的是计算区间 $[0,1]$ 上的一个混沌映射

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-x^2}, 0\le x\le\sqrt{2}-1,\\ \dfrac{1-x^2}{2x}, \sqrt{2}-1\le x\le 1\end{cases}$$

所对应的弗罗贝尼乌斯–佩龙算子不变密度 $f^*(x)=4/[\pi(1+x^2)]$ 的三种数值方法的 L^1 范数和 BV-范数误差比较；表左列是数值方法选取一致划分后得到的子区间个数。这三种算法分别为经典的逐片常数乌拉姆方法、作者之一提出过的逐片线性马尔可夫方法和论文的作者在这篇文章中提出的最小二乘法，在表中第一行分别用 Ulam, Markov 和 LSM 代表。这样的列表让读者一下子看出三种方法在误差方面的优劣。

表 3.1 L^1-norm errors comparison for S

number of subintervals	Ulam	Markov	LSM
4	5.3×10^{-2}	1.1×10^{-2}	2.7×10^{-3}
8	2.4×10^{-2}	4.3×10^{-3}	6.5×10^{-4}
16	1.2×10^{-2}	1.6×10^{-3}	1.7×10^{-4}
32	5.5×10^{-3}	5.3×10^{-4}	4.3×10^{-5}
64	2.7×10^{-3}	1.7×10^{-4}	1.1×10^{-5}
128	1.3×10^{-3}	5.0×10^{-5}	2.7×10^{-6}
256	6.6×10^{-4}	1.5×10^{-5}	6.4×10^{-7}

表 3.2 BV-norm errors comparison for S

number of subintervals	Ulam	Markov	LSM
4	1.2	1.1×10^{-1}	7.0×10^{-2}
8	1.2	6.1×10^{-2}	3.4×10^{-2}
16	1.3	3.3×10^{-2}	1.7×10^{-2}
32	1.3	1.8×10^{-2}	8.4×10^{-3}
64	1.3	9.1×10^{-3}	4.2×10^{-3}
128	1.3	4.7×10^{-3}	2.1×10^{-3}
256	1.3	2.4×10^{-3}	1.0×10^{-3}

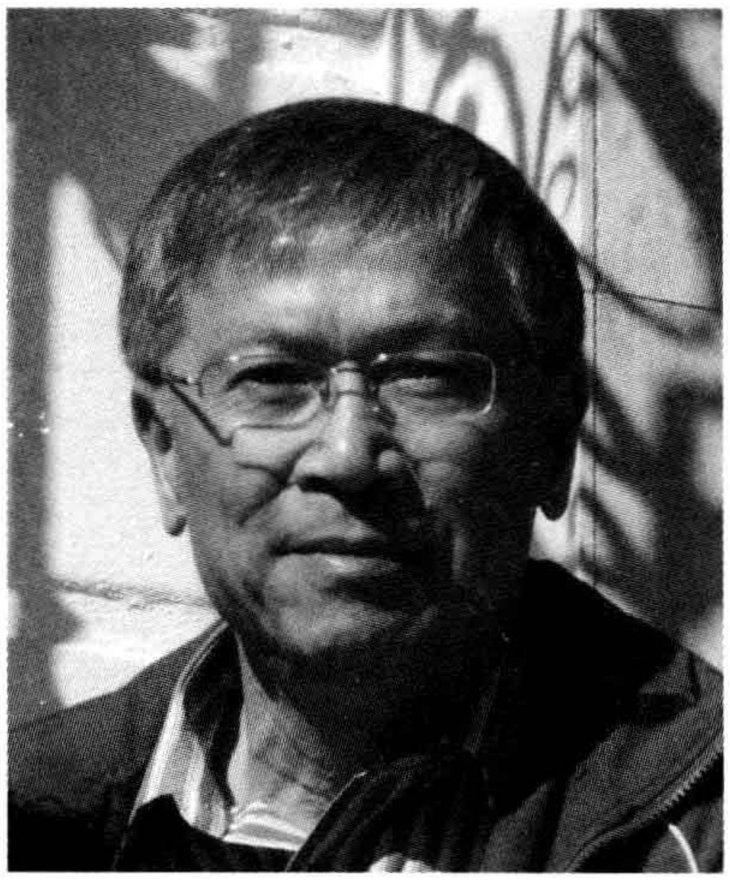
作为本节的结尾，我们列出图表部分的注意事项：

(1) 图表不宜过多。如果一篇文章中有二十张或以上的图（或表），要考虑是否可以删掉一半？可否再删？仅保留有代表性的。同一现象或同一结论有一两张代表性的图或表就够了；

(2) 图表的说明要符合标准。不宜太长，也不要过于间断或含糊。要把图或表的主要信息简练地表达出来；

(3) 一定要（此点最重要）对列出的图和表加以讨论或说明，阐述提供这个图或表的原因；它们给出的信息为什么重要以至你要用文章中的宝贵空间放这幅图或这张表？

(4) 选出的图一定要在颜色、曲线、标示等方面够专业；很多劣质的图会使审稿人或读者反感。



陈关荣

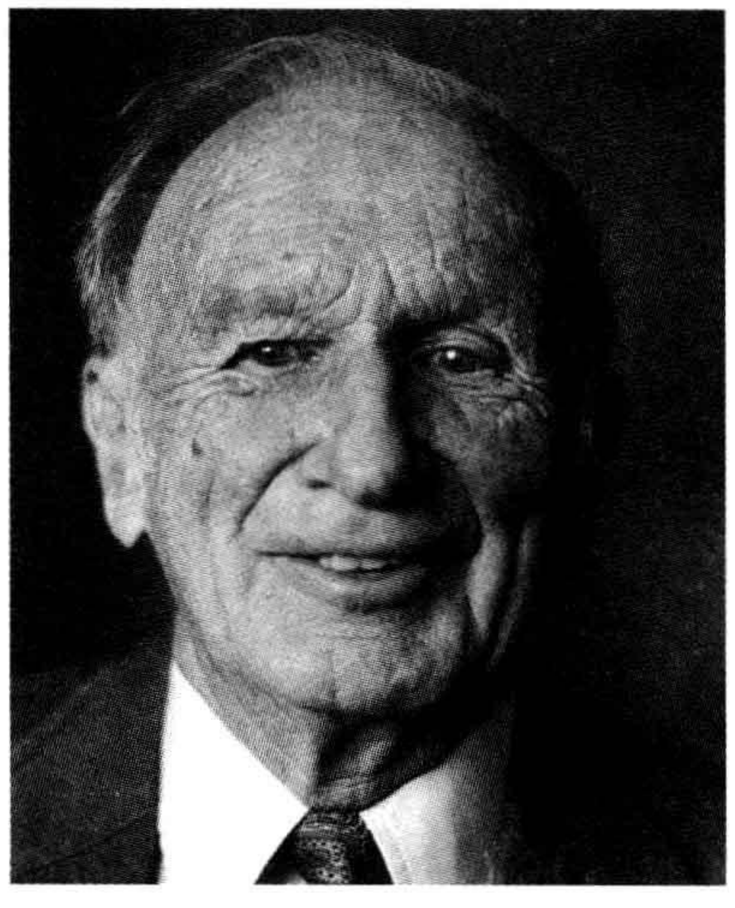
3.5 修改范例

在本章前面几节的基础上，这一节我们用一个实际例子来总结投稿前如何对文章作最后的整体修改。这个例子来自香港城市大学电子工程系讲座教授陈关荣 2011 年所作的演讲“漫谈如何写好一篇英文科技论文”[7]，本书已经得到他的授权在此转述其部分内容。首先我们需要说明的是，例子分析中的一些修改过程是虚构的，而并非完全是作者在文章投稿前的真实修改情形。

我们要讨论的例子是陈教授与他当时的学生吕金虎博士撰写的一篇有关混沌现象的数学文章。首先让我们提供写作这篇文章的简略背景：混沌之父、麻省理工学院的气象学教授洛伦茨 (Edward Norton Lorenz, 1917—2008) 在他发表于 1963 年的开创性论文 Deterministic nonperiodic flow 里，研究了后来被称为洛伦茨系统的非线性常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10(y-x), \\ \dfrac{dy}{dt} = 28x - xz - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - \dfrac{8}{3}z, \end{cases}$$

并发现了现在被通俗地描述成天气预报蝴蝶效应的混沌现象。迄今为止，这篇在科学界广为人知的论文已被引用了将近一万次。



Edward Norton Lorenz

1999 年陈关荣引进了现已叫做陈系统的非线性常微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 35(y-x), \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - xz + 28y, \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - 3z. \end{cases}$$

它是洛伦茨系统的对偶系统，其在《国际分支与混沌杂志》(*International Journal of Bifurcation and Chaos*) 上发表的论文 Yet another chaotic attractor 已被引用超过 1100 次。后来，他的学生和他找到现称为过渡系统的一个非线性常微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 36(y-x), \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz + 20y, \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - 3z. \end{cases}$$

这三类系统的命名理由有点类似于椭圆型、双曲型和抛物型偏微分方程的分类法，依赖一个行列式的值是否为正、负或零。

有了这样的一个好结果，他们便开始撰写文章。万事开头难。首要是决定一个精练并富吸引力的文章题目。下面这个候选题目:

– A new chaotic attractor connecting the Lorenz attractor and the Chen attractor

一个新的连接洛伦茨吸引子和陈吸引子的混沌吸引子

按照陈教授自己的评价:“准确，但是不够精练，而且一点也不醒目。”不难发现，这么一个简单的题目里数学名词 attractor 就出现了三次，完全没有必要。几经推敲，最后他们把文章的题目定名为

– A new chaotic attractor coined

捕捉到一个新的混沌吸引子

这个题目就比较别致，令人好奇，会引起阅读的兴趣。

接下来就要写文章的摘要了。一个可以改进的文章摘要为:

– **Abstract**. In this letter, we report the finding of a new chaotic attractor in a simple three-dimensional autonomous system, expressed

by system (1). This new attractor is shown to be a transition between the Lorenz attractor [1] and the Chen attractor [2]. Also, we demonstrate the connection of the Lorenz system and the Chen system by simulations.

摘要： 在这篇通讯里我们报告一个由系统 (1) 表达的简单三维自治系统中新的混沌吸引子。这个新吸引子被证明是洛伦茨吸引子 [1] 和陈吸引子 [2] 之间的一个转移。此外，我们通过模拟来说明洛伦茨系统和陈系统的关系。

这个短短的摘要有哪些问题呢？首先，它的第一个句子和最后一个句子用的是第一人称的主动语态，而中间那个句子用的却是第三人称的被动语态。这种在同一段落里混用人称的方式不及只用一种人称为佳，而诚如部分国际杂志所特别强调的，在摘要里，最好运用第三人称。其次，这个摘要提到文章内的公式（1）以及参考文献中的论文 [1] 和论文 [2]。这是不可取的做法，因为这使得该摘要失却自封闭的性质。论文摘要是供出版社、图书馆、信息库、会议论文摘要集等等作为检索依据，并为研究者快速查询而撰作的，如美国数学会出版的《美国数学会会议论文摘要》收集它每年召开的若干次全国或地区性数学会议报告的所有摘要。既然摘要经常要单独出版，它们的内容必须自我完备，尽量不要使用数学符号、数学公式、公式编号、参考文献中的引文序号、图表等。上面的公式和文献编号并不为读者提供任何有用的信息，反而可能会引起各种猜测或查找，因而是不可取的。

由于上述的考虑，这个摘要最后修改成如下最后发表的形式：

– **Abstract**. This letter reports the finding of a new chaotic attractor in a simple three-dimensional autonomous system, which connects the Lorenz attractor and the Chen attractor and represents the transition from one to the other.

摘要： 这篇通讯报告了一个简单三维自治系统中的新的混沌吸引子。它把洛伦茨吸引子和陈吸引子联系起来，并展示出从一个到另一个的转移。

关键词的选取也要细心查证。试看下面的关键词列举：

– **Keywords**: differential equations; chaos; Lorenz attractors; Chen's attractors; duality; transition systems; canonical forms.

关键词： 微分方程、混沌、洛伦茨吸引子、陈吸引子、对偶性、转移

系统、标准型。

当中有两个不足：一是列了不关键的词，如第一个根本就不需要，最后三个也可去掉。另一是此处的名词都不必用复数。修改后的关键词部分只列出了最关键的三个：

– **Keywords**: Chaos; Lorenz attractor; Chen's attractor.

关键词： 混沌、洛伦茨吸引子、陈吸引子。

引言的准确性和简洁性自不待言。假如文章初稿中的引言内有一句：

– The new system is very important since it bridges the famous Lorenz system and the Chen system

这个新系统因为拟合了著名的洛伦茨系统和陈系统之间的过渡而非常重要

我们就要删去那些不必要的形容词了。下面的句子当然好得多：

– The new system plays the role of bridging the Lorenz system and the Chen system.

这个新系统起到拟合洛伦茨系统和陈系统之间过渡的作用。

现在我们来检查文章各小节的标题是否格式一致并符合规范。例如，初稿中前两节的各个标题和小标题及编号如下所示：

- Section 1 The New Chaotic System（第 1 节：新的混沌系统）
- Subsection 1.1 Background And Motivation（第 1.1 小节：背景和动因）
- Section 2. Analysis of the new system (1.1)（第 2 节：新系统的分析）
- Subsection 2.1 Theoretical Analysis on the system（第 2.1 小节：系统的理论分析）
- Subsection 2.2 Simulation Results（第 2.2 小节：模拟结果）

仔细检查后很快就发现了好几个问题：第一，第一节只有一个小节，完全没有必要单独列出——没有 1.2 的话列出 1.1 有什么意义？顺带一提，该小节标题中的 And 第一个字母应是小写。第二，第二节标题的最后两个词的第一个字母均需大写，且方程序号 (1.1) 在这里多余，可以省略。第三，第二节的第一个小节标题的最后一个词的

第一个字母要大写；其实，这里的 on the system 也显得累赘多余，因 System 一词已在第二节标题上出现而不必重复。最后，为保证格式的一致性，Section 2 后的那个点号 "." 也要删去，因其它相应的地方没有这样的点号。纠正了这些小毛病，这些标题格式就改善成

- Section 1 The New Chaotic System（第 1 节：新的混沌系统）
- Section 2 Analysis of the New System（第 2 节：新系统的分析）
- Subsection 2.1 Theoretical Analysis（第 2.1 小节：理论分析）
- Subsection 2.2 Simulation Results（第 2.2 小节：模拟结果）

它们明确、简洁、对称，较之原来的确实美观多了。

我们进一步看看文章主体里的字句有哪些可斟酌之处。假如第一节的开头是这样写的：

– In this section a new three-dimensional autonomous nonlinear dynamical system with only two quadratic terms but can generate a chaotic attractor bridging the gap between the Lorenz system and the Chen system which can be described by a system of ordinary differential equations is introduced, as follows.

在这一节一个仅有两个二次项但能产生拟合洛伦茨系统和陈系统之间过渡的一个混沌吸引子的并能由一个常微分方程系统来描述的新的三维自治非线性动力系统如下引入。

读者看得舒服吗？在这句话里，主语 system 和被动式谓语 is introduced 像吵了一次大架以后的两位物理学家反目成仇，离得远远的。读者得耐着性子读到最后才对作者想要表达的东西恍然大悟。其实，这个长句的实质是 A new system is introduced。只要坚持长句短写的原则，就可以把它分割成三个较短的简单句子，读者也就不必憋着一大口气来读了：

– In this section a new three-dimensional autonomous nonlinear dynamical system is introduced. This system has only two quadratic terms but can generate a chaotic attractor bridging the gap between the Lorenz system and the Chen system. The system can be described by a system of ordinary differential equations, as follows.

这一节引进一个新的三维自治非线性动力系统。这个系统仅有两个二次项，但能产生拟合洛伦茨系统和陈系统之间过渡的一

个混沌吸引子。该系统可由下面的常微分方程系统来描述。

再看下面的一段，它包含了太多的缩写：

– The new Chen system (CS) is a dual system (DS) to the Lorenz system (LS). In the following, the CS will be studied in more detail, against the LS, showing that the CS is more complex than the LS, therefore may be more useful in engineering applications, such as secure communications (SC) and information encryption (IE).

这个新的陈系统 (CS) 是洛伦茨系统 (LS) 的对偶系统 (DS)。下面将与 LS 相对照更详细地研究 CS，证明 CS 比 LS 更复杂，因而在安全通信 (SC) 和信息加密 (IE) 诸如此类的工程应用中可能更有用。

这里，缩写节约空间的优点远远小于读之令人眼花缭乱的缺点，因为缩写过于泛滥，读之就像读到电报一样难以消化。由于缩写不是单词，看到它大脑里不一定马上能反映出它的意思。更有甚者，有些缩写看上去倒像一些常见词的通用缩写，如这里的 CS 往往代表 computer science（计算机科学），作者之一的一位同事也常被叫为 CS；缩写 DS 可被解读为 dynamical systems（动力系统）；LS 容易理解成 least squares（最小二乘）；SC 难与 scientific computing（科学计算）分开；而 IE 看上去简直就像是 information engineering（信息工程）。干脆将缩写去掉，留下来的读起来反而更加流利：

– The new Chen system is a dual system to the Lorenz system. In the following, the Chen system will be studied in more detail, against the Lorenz system, showing that the Chen system is more complex than the Lorenz system, therefore may be more useful in engineering applications, such as secure communications and information encryption.

这个新的陈系统是洛伦茨系统的对偶系统。下面将与洛伦茨系统相对照更详细地研究陈系统，证明它比洛伦茨系统更复杂，因而在安全通信和信息加密诸如此类的工程应用中可能更有用。

在继续修改的过程中，作者尽量减少不必要的符号或定义。例如，假若参数 c 和术语 strange function 下文不再用到，或仅仅偶尔提一下，下面的写法

– A new function y is defined to be

$$y = cf(x),$$

where $c = 2.8$ and f is called a *strange function*

一个新函数 y 定义为

$$y = cf(x),$$

其中 $c = 2.8$ 且 f 称为一个奇怪函数

就显得太过郑重其事，让读者一下子紧张起来，以为这个奇怪函数马上要派上大用场。阅读数学文章远非阅读爱情小说那样可以漫不经心，它需要全神贯注，集中心思尽可能记住文中数学概念的定义、符号的意义以帮助理解推理的过程和证明的步骤。如果作者不必要地添加几乎不用的符号或定义，只会加剧分散读者的注意力，导致阅读过程疲惫不堪，加重理解的负担，结果是真正重要的东西反而记不住。

在文章修改时也要顺便核查是否所有的方程标号都合理，其指导原则其实很简单：只给后面用到的公式或方程编号。其它没用的标号应该删去。

最后我们把注意力集中在参考文献上。文章初稿的参考文献是这样列的：

References

C Sparrow [1982] "The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors", Springer-Verlag.

Chen, G. and Ueta T. [1999] "Yet another chaotic attractor," Int. J. of Bifurcation and Chaos, 9, 1465-1466.

Ueta, T. & Chen, G. [2000] "Bifurcation analysis of Chen's attractor," International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 10, pp. 1917 – 1931.

Guanrong Chen et al. From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications (World Scientific, Singapore), 1998.

Venecek, A. and Celikovsky, S. [1996] Control Systems: From Linear Analysis to Synthesis of Chaos. London: Prentice-Hall.

S. Celikovsky and G. Chen [2001] "On a Generalized Lorenz Canonical Form of Chaotic Systems," preprint.

不难看出，这个参考文献最大的缺点是格式不统一。更详细地说，书名一般不带双引号，但第一项的书名加上了引号；第一项的作者名的首个字母 C 后未加缩写点号，不合规范；第二项的第二作者姓 Ueta 后未加逗号，容易让人以为这是名，不是姓；另外，作者的姓名有时姓在名前，有时姓在名后，又同一作者 Guanrong Chen 则写成了三种形式，缺乏一致性；杂志名有的用简写形式，但有的却用了全称；第二、三项的 and 和 & 不统一；第三项论文页码前的英文简写 pp. 与第二项不一致；第三项的杂志后加了 vol. 而与其它项的相应地方不一样；第四项书的出版社和出版年份也与众不同；三本书中，第一本未提供出版城市；第四项只给了一个作者的名字；最后一项是文章预印本，其标题除第一个词外每个词的第一个字母应该小写。

修改后的参考文献如下所示：

References

Sparrow, C. [1982] The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors (Springer-Verlag, New York).

Chen, G. & Ueta, T. [1999] "Yet another chaotic attractor," Int. J. of Bifurcation and Chaos, 9, 1465-1466.

Ueta, T. & Chen, G. [2000] "Bifurcation analysis of Chen's attractor," Int. J. of Bifurcation and Chaos, 10, 1917-1931.

Chen, G. & Dong, X. [1998] From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications (World Scientific, Singapore).

Venecek, A. & Celikovsky, S. [1996] Control Systems: From Linear Analysis to Synthesis of Chaos (Prentice-Hall, London).

Celikovsky, S. & Chen, G. [2001] "On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems," preprint.

对于几乎所有数学杂志而言，上面改正过的参考文献仍有一点值得商榷：它们没有按照第一作者姓 (family name) 的第一个字母排序，而是按它们在文章中被引用的先后次序排列，这是由于刊登这篇论文的杂志 *International Journal of Bifurcation and Chaos* 更偏向于采用物理学杂志的做法。

参考文献格式不一致的原因之一是作者直接从不同杂志上将所

需论文复制过来堆放在一起，而忘记了不同期刊对参考文献有不同格式要求这一事实。这样简单堆砌而不加修正的参考文献就成了各自为政的组合体。正确的做法是：采用所投稿杂志要求的格式来统一处理参考文献的式样。

虽然附录经常出现在专著中，但它偶尔也会在研究论文的最后部分露面，特别在应用学科，如工程类论文中颇为常见。纯数学论文中定理与它的证明基本上放在一起，除了在证明极长或技术性很强的情形下，为了不打乱读者的思路可以将证明放到附录中。应用学科则相反，因为部分读者对长长的或难懂的定理或引理的数学证明兴趣不浓，为了方便他们顺利读完全文，作者多把这些证明部分移到附录处供读者必要时去检查这些证明的细节。虽然许多读者不会读论文中只起参考作用的附录部分，作者依然要小心地修改数学证明的全过程，确保推理的严密性、公式的正确性、书写的规范性、语言的简洁性等等。

经过一番认真仔细的修改和删减，吕金虎与陈关荣的论文 A new chaotic attractor coined 最后的定稿只有三页纸，但内容和格式相当不错，投稿后审稿人又建议了一些使之更完美的小改动，从投稿到被《国际分支与混沌杂志》接受发表只用了一个月，审稿人评论该文是 very well written。该文一年之内刊登在 2002 年的第二卷第三期上 [22]。截止到 2012 年 7 月，这篇文章在面世十年内，已被引用了 830 次，在 2001—2005 和 2002—2006 年度数学领域研究论文中被评为引用次数最多的中国学者论文。

作为总结，在本章的最后我们给出一个文章修改的**检查清单 (Check List)**:

检 查 清 单

- 是否用手工或电脑软件检查过文章中英文单词有无拼写错误？是否存在语法问题？
- 文章题目是否准确、简洁？表达是否恰如其分？
- 摘要是否概括得当、简明扼要？有无像 In this paper 诸如此类的多余字句或短语？
- 引言是否叙述严格、客观全面？历史线索是否清晰可见？提出的问题是否合情合理？结果描述是否符合事实？

- 各节标题是否描述贴切？所含内容是否彼此平衡？各节衔接是否平稳光滑？
- 定理证明是否步步为营？定理条件是否互相独立？定理叙述是否符合逻辑？定理是否太多而失去重心？
- 数学公式展示是否充满美感？有否数学表达式不应放在句中而应单占一行？每一个方程式的标号是否必须？是否多余？是否遗漏？
- 数学符号是否上下一致？它们能被简化而不会误导吗？
- 结论节是否与摘要重复？是否既总结过去，又展望未来？
- 参考文献是否数量适中？是否容易获得？是否与文章内容密切相关？格式是否一致？是否满足投稿杂志要求？有无文中没有引用但出现在参考文献中的论文或专著？
- 是否感谢与论文撰作相关的研究基金的支持？是否感谢对文章有建设性意见的学界同人？是否感谢负责而有实质性建议的匿名审稿人？
- 图表是否与理论分析相得益彰？数据是否真实可靠？图示是否引人注目？计算结果是否支持未来发展？
- 是否有字词、短语或句子可被删去而并不改变原意？
- 是否有繁琐不堪的特长句子？有无句子重复使用？
- 能否用字母少的短词代替具有同样意思的多字母长词？
- 能否将一句话从被动语态转成主动语态？
- 文章中的句子和段落之间的次序是否最佳？是否需要调整？
- 被引用的句子、参考文献及数值结果是否正确复制？
- 引用别人文章的字句是否给对方足够的承认？被引用的原始文献是否已列于文章最后？
- 有没有遗漏交代其他作者的工作？是否给予了他们足够的承认？



3.6 避免抄袭

自古说“天下文章一大抄”。这个说法表明抄袭现象历来存在，尤其对人文学科可能更有普遍性。“文化大革命”中为“小报抄大报，大报抄梁效”一言以蔽之。当今，学术打假揭露的抄袭、剽窃实例大都属于文科领域，在理科，尤其在数学领域，相对较少。数学文章，白纸黑字，比文科作品容易发现抄袭现象，故伸手者容易被捉。我们在本章最后再加一节，目的在于重申：对科技写作来说，剽窃或抄袭

是绝不允许的。在西方，对学术抄袭的惩处是零容忍，被发现后丢工作或拿不到学位是自然的结果。

3.6.1 什么叫抄袭?

什么是抄袭? 最基本的现象就是偷偷照搬别人的句子或段落而不给出明确出处 (someone else's words are found in your paper without proper quotes and references)。这是最普遍的现象，但这是不允许的。用到别人的说话和句子，一定要指明出处，把功劳归与原作者。

抄袭的定义是比较广义的。有人认为，添字去词，或重新组织句子的顺序就可以避免抄袭的嫌疑 (by changing a word here and there, one gets rid of plagiarism)，这是不对的。反抄袭包括保护原作者在相似句子中的原始观点。比如说，把法文文章的部分翻译成中文发表而不加以适当说明和引用，那也是典型的剽窃。

抄袭自己已经发表的文章（原封不动抄几行以上）也算抄袭。第一，抄袭的定义同样适用于自己公开发表的任何作品。第二，你已发表的文章可能也有其他合作者，他们有可能不是你这篇文章的作者，原封不动抄录原文可能抄袭了他们的成果。第三，发表的文章版权属于出版商，原封不动照搬，版权持有者是有权抗议的。

有的人长篇累牍地抄袭网上公共资源或现成书籍中的定义叙述、定理证明或其它对己有用的材料，但为了遮人耳目仅仅换了非关键的几个形容词副词或个别专业术语符号，本质内容换汤不换药。这也是一种变相的抄袭行为，应该反对。有的抄袭者因为知识贫乏，分不清对错，往往囫囵吞枣地抄下去，有时闹出笑话，自出洋相。有这么一位申请去美国念书的大学毕业生在网上抄了现成的英文个人履历，当别人指出他把中华人民共和国的英语缩写 PRC 中的一个字母写错时，该生居然不认错，反而振振有词地反驳：网上就是这么写的！不久，这位申请者的个人履历表又给了也想出国念书的一位同胞，后者依葫芦画瓢地制作了适用于自己的申请材料，又被人发现，原先网上标准格式上的其它错误还在那里耀武扬威地昂着头、挺着胸。

别人的图，即使是说明性的，在没有得到允许的情况下，也绝不可以随意出现在自己的文章中，否则会是严重剽窃。对于没发表的图，只需原作者允许；已经发表的图，则一定要得到出版社的许可（一般情况下，出版社会免费允许采用；但申请是必需的）。在这两种

情况下，在文章中或图的说明中要感谢授权人的支持。在上面几种情况下，在文献里不列出相关的出处是不容许的！

东方一些国家和地区对抄袭的严重性认识不及西方国家。虽然学校里也经常强调抄袭不对，但缺乏技术性的指导和教育，很少告诉学生什么是抄袭。另一方面，社会文化和风俗习惯对抄袭现象容易听之任之、习以为常，结果是有的学生犯了抄袭的错误却未意识到，或明知故犯。几年前，有一位在美国读文科研究生学位的中国台湾学生，在一次作业中抄了一段教科书的内容来论证某个观点，因为她以为抄本门课的教科书不算抄，在中国背诵课本还被老师大声表扬呢。但当美国任课教授认定她抄袭，不光给她零分，而且劝其退学，该学生这才慌了手脚。尽管最后系方考虑到东方学生在这方面的特殊背景而刀下留人，但记录在案的零分科目成绩足以让这位已经认识错误的研究生终生难忘。

3.6.2 如何避免抄袭?

我们知道，剽窃别人的学术成果是严重的学术腐败，它损害的是被剽窃作品作者的著作权和名誉。因此，我们一定要避免有意或无意的抄袭，在文章的最后修改中睁大眼睛，一丝不苟地仔细检查文章中对别人成果的引用。避免抄袭的思想基础是坚持实事求是，杜绝投机取巧。避免抄袭的学术保证是认真学习、刻苦钻研。君不见学富五车者很少会去抄袭别人的东西，你很难想象像钱钟书那样的真正学者会进行抄袭。

一个作者最好的做法就是在写作时时刻用自己的句子、用自己的思想，而不是把别人的文章放在旁边抄来抄去；特别是你要有自己的观点，要有与别人不同的观点和看法。没有后面这一条，写不写你这篇文章意义都不大。

引用别人的工作是一个好的做法。但如果必须引用原文，一定要添加引号，而不是有意或无意地误导读者以为这是作者的话语。给先行者恰如其分的承认，是一个科学工作者应有的品德，而且你也不会损失什么。

现在反抄袭的软件很多，它们可以用搜索引擎对文章中的句子进行检索，分析文章中每个句子的原创性。对疑似非原创部分，会给出抄袭到何等程度的判断。

第四章 文章投稿

优秀的文章是给别人看的。文章完稿后，作者应考虑向杂志投稿以求发表。

但在考虑投稿之前，读一读哈尔莫斯 1975 年在《美国数学月刊》上的文章 Four panel talks on publishing 中所引用的普林斯顿大学数学教授康威 (John Conway, 1937—) 的“劝告法”也许会有启发：



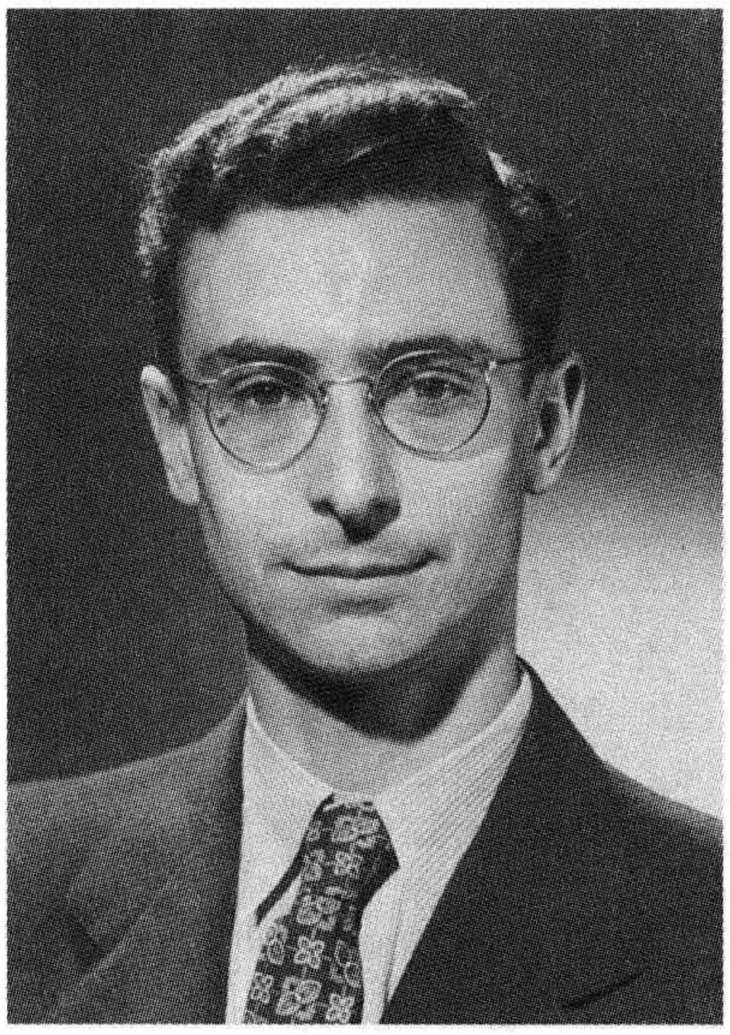
John Conway

> Suppose that you have just finished typing a paper. Suppose now that I come to you . . . and ask: if I gave you $1,000, would you tear the paper up and forget it? If you hesitate, your paper is lost—do not publish it. That's part of a more general rule: when in doubt, let the answer be no.
>
> 设想你刚刚完成一篇文章。设想我来问你：假如我给你一千美金，你会把你文章撕掉并忘记它吗？你若踌躇不决，你的文章就完了——不要发表它。这是更一般规则的一部分：倘有疑虑，回答为否。

他们的建议一言以蔽之：不要发表不值得发表之物。

有一个流传很久的说法：许多在杂志上发表的文章，世界上只有三个人看过，一个是作者，另外两个是审稿者，之后就再也没人看了。如果只有一个审稿人，那全天下只有两个人看过这篇论文。虽然这不免是带有调侃之味的夸大之词，但无可否认，许多滥竽充数的论文正以雨后春笋之势充塞很多国家的学术市场。

2010 年菲尔兹奖获得者之一、越南裔数学家吴宝珠断言，一篇好论文，超过一百篇烂文章。斯梅尔 (Stephen Smale, 1930—) 的学生、康奈尔大学教授 James Renegar 迄今仅发表了不到三十篇的数学论文，但都是高质量的。在美国《数学评论》(*Mathematical Reviews*) 电子版的网页上他名下的论文只列出二十四篇，但被引用次数却达到 458 次。他早在 20 世纪 90 年代就在国际数学家大会上做了四十五分钟报告。反观另外的一些作者，文章的发表数量可以是



Herbert Federer

三位数，但被引用的总次数只是发表数的几分之一，其中多数还是自引或其学生所引。

处于当今的学术界，许多人或许身不由己地被要求发表大量文章，“不发表则灭亡”似乎是天经地义的大学游戏规则。举例来说，国内一些大学的研究生院目前规定博士后出站时至少要有两篇文章发表，并且要是“第一作者”，而不幸成为“第二作者”发表的论文都不算数。美国的研究型大学数学系博士生的培养注重基础知识的深度和广度，其严格的博士资格考试覆盖面很广，不易通过，但从不硬性规定博士生以发表论文为毕业的必要条件，对博士后研究人员也“听之任之”。

2012 年 5 月期的《美国数学会会刊》上刊登了一组怀念生于奥地利维也纳的美国著名几何分析学家、布朗大学教授费德雷尔 (Herbert Federer, 1920—2010) 的文章。其中，他的关门弟子 Robert Hardt 写道：

> Herbert Federer had a strong sense of scholarship, as is evident in all of his writings. He was extremely careful and not too quick to publish. He once advised that after completing a paper, one should put it in the desk drawer for one month and then bring it out and reread it to find mistakes “as if you were the author’s worst enemy”.
>
> 费德雷尔具有强烈的学问意识，这从他所有的写作中显而易见。他极度小心，不快速发表。他曾经忠告，完成一篇文章后要放在抽屉里一个月，然后拿出来再读以发现错误，“好像你是作者最凶恶的敌人”。



Hans Heilbronn

这种绝不粗制滥造的学者风范，是否得益于他生于斯长于斯的音乐之都对真善美的追求? Hardt 于 1971 年在 Federer 门下获得博士学位，成绩骄人。他自己最杰出的学生是毕业于浙江大学的林芳华，后者已经是国际知名的数学家。

作为对自己的作品精益求精的另一个典型例子，Krantz 在他的书 *A Primer of Mathematical Writing: Being a Disquisition on Having Your Ideas Recorded, Typeset, Published, Read, and Appreciated* 的序言里引述了数学家 Hans Heilbronn (1908—1975) 的讣告中提到的逝世者轶事：每当他写了一篇文章，都要放在书架上一年之久（这比 Federer 的一个月长了十多倍），然后拿出来以批评的眼光

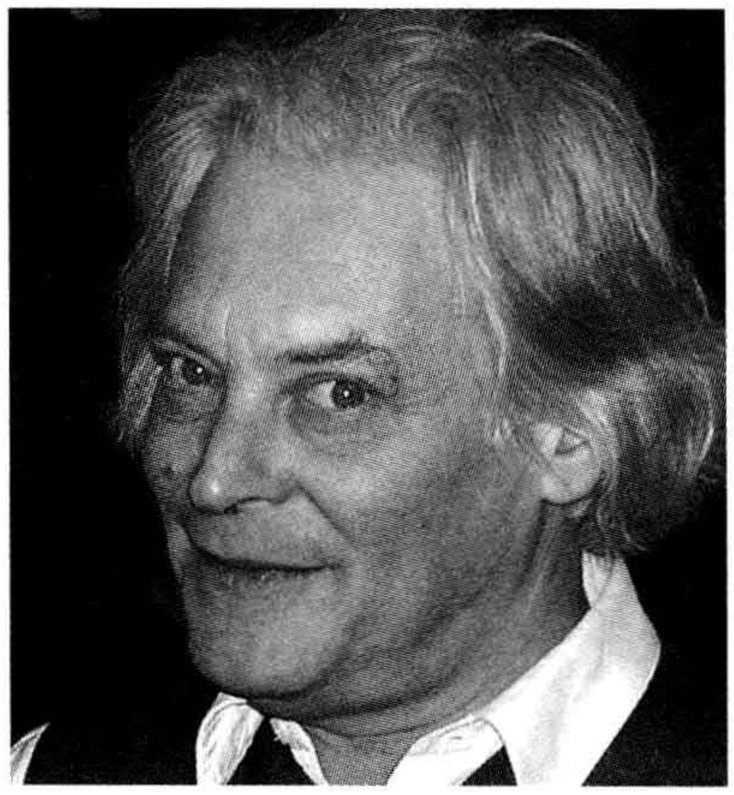
再读之，重新改写一番，就好像以前从未接触过一样要读懂它。其工作态度能与他们相媲美的是中国文人的杰出代表傅雷 (1908—1966)。他 1951 年重新翻译巴尔扎克的小说《高老头》，因对自己 1944 年的初译（1946 年出版）不甚满意。

关于文章发表，因发现普适常数而名闻天下的美国物理学家费根鲍姆 (Mitchell Feigenbaum, 1944—) 的经历可以启发我们。费根鲍姆 1974 年到美国原子弹发源地洛斯阿拉莫斯国家实验室工作时，已戴了麻省理工学院四年博士帽并分别在康奈尔大学和弗吉尼亚理工学院工作过，他当时已发表的论文虽然只有一篇，但他精通粒子物理，懂得量子场论，已经积累了不同领域丰富的知识，并掌握了最新出现的计算技术，厚积薄发、潜力无穷。对看似简单的逻辑斯蒂模型 $S_r(x) = rx(1-x)$ 的强烈好奇心驱使他不厌其烦地计算，最终在《统计物理杂志》(*Journal of Statistical Physics*) 上发表的论文震撼了学术界。



傅雷

几十年前的中国高校，只有为数不多的有才华、有能力的教授坚持做研究，他们发表的论文大多经得起岁月的考验。其余绝大多数的教授虽不以研究为主，但以教书为荣，培养了众多高质量的大学毕业生。中国传统的学者，追求学富五车，但习惯于述而不作，著作不多。他们奉行的可能是一句古语：板凳要坐十年冷，文章不写一句空。但现在的情形颇为相反，许多基础不扎实、专业不精通者却可以著作等身。我们应该提倡知识积累与探索未知的有机结合，让发表的论文货真价实。



Mitchell Feigenbaum

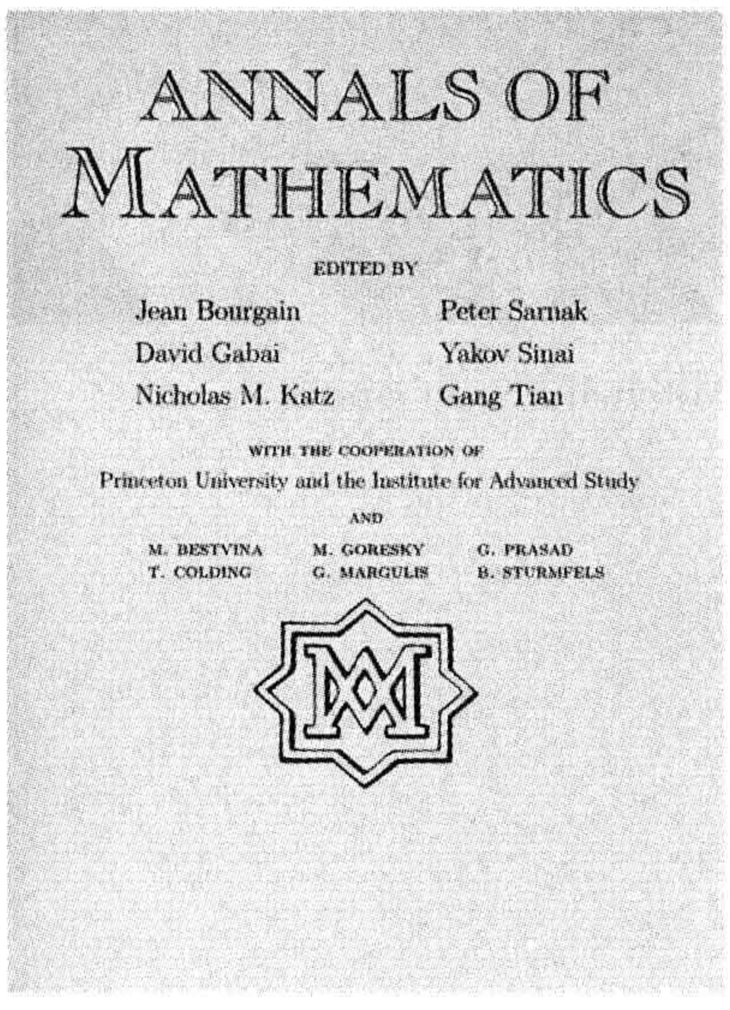
假设你的文章有发表之价值，即你不为康威的一千美金所动，则本章讨论的投稿须知将提供你一些技术性的注意事项。

4.1 投稿准备

投稿是文章写好并反复修改完毕后的下一步，当中最重要的问题是决定投到哪个杂志发表。选取杂志依赖的因素有多项，一方面作者希望自己的文章发表在档次高的期刊上，但高质量的杂志自然拒稿率也高。文章审稿时间的长短以及论文从接受到发表的区间长度对一些作者来说也是需要考虑的因素，尤其对那些面临职称提升重要关头的讲师或副教授，因为他们须将数量足够的已发表论文作为申报材料提交。

少部分作者，在投稿前不认真检查自己文章的英文拼写、语法和句法等方面的问题，而把这项工作交给审稿人去做。这是极不负责任的做法。须知，文章审稿人不是文章校对员，他们的主要职责只是检查被审稿件是否达到可以或应该发表的标准。其实，这种做法虽然省了作者的一点时间，但更可能因英文错误太多而被审稿人简单枪毙。

按照张奠宙的著作《20 世纪数学经纬》[5] 第六章第 65 节“数学杂志和数学文摘”所说，全世界能够发表数学论文的杂志在 19 世纪大约为 950 种，但到了本世纪这个数目已无法精确统计，仅仅美国的《数学评论》覆盖的数学杂志数目就已超过 4000。在这些质量参差不齐的庞大杂志群中，有一小部分年代经久的老牌杂志在淘沙的大浪中依然钻石般地光彩夺目。它们包括德国数学家克雷尔 (August Leopold Crelle, 1780—1855) 于 1826 年创立的《纯粹数学与应用数学杂志》(*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*)（作为伯乐，他在第一卷中发表了挪威天才数学家阿贝尔 (Niels Henrik Abel, 1802—1829) 的七篇论文）、法国著名数学家刘维尔 (Joseph Liouville, 1809—1882) 1836 年创办的《纯粹与应用数学杂志》(*Journal de Mathematiques Pures et Appliques*)、瑞典领头数学家米塔–列夫勒 (Magnus Gosta Mittag-Leffler, 1846—1927) 1882 年创办的《数学学报》(*Acta Mathematica*) 以及 1865 年创刊的《伦敦数学会杂志》(*The Journal of London Mathematical Society*) 等等。



纯粹数学家们都把能在普林斯顿大学数学系编辑的《数学年刊》(*Annals of Mathematics*) 上刊登一篇论文看成一生中无上的荣誉，原因就是它发表的都是质量上乘的创造性成果，是数学界最有分量的杂志之一，相当于英国的《自然》或美国的《科学》在自然科学领域的影响力。有人曾戏称，《数学年刊》上发表的一篇文章就可能成为著名大学数学系终身教职的敲门砖。中国的代数学家王湘浩 (1915—1993) 20 世纪 40 年代末在美国普林斯顿大学跟随代数大师阿廷 (E. Artin, 1898—1962) 读博士时，发现已经用了近二十年的 Grunwald 定理不对，并举出了反例，连专门讲授这个定理的导师都未能发现。王湘浩以这项结果写成了或许是历史上最短的数学博士论文。不久后他又找到了 Grunwald 定理的正确叙述和证明，其主要结果后来被称为 Grunwald-Wang 定理。他的这两项结果分别发表在 1948 年和 1950 年的《数学年刊》上。1955 年，四十岁的王湘浩

就成为中国科学院的院士（当时称为学部委员）。

其它公认的国际最高级数学杂志包括 *Inventions of Mathematics* 和西尔维斯特 (James Joseph Sylvester, 1814—1897) 创办的《美国数学杂志》(*American Journal of Mathematics*) 等。中国大陆最好的综合性英文数学杂志有 *Acta Mathematica Sinica* (English Series), *Chinese Annals of Mathematics* (Series B), *Frontiers of Mathematics in China*, *Science in China Series A: Mathematics*。

在每个数学的分支学科里都有公认的英文好杂志。比如《微分几何杂志》(*Journal of Differential Geometry*) 是微分几何领域最有名望的杂志之一。《数学规划》(*Mathematical Programming*) 无可非议地属于那个领域最受尊敬的杂志群。美国的工业与应用数学协会的所有杂志在各自的学科里都具有威望。对于计算数学工作者，在美国数学会的《计算数学》(*Mathematics of Computation*) 上发表论文令人刮目相看。有一些综合性杂志刊登数学所有领域的文章，如《杜克数学杂志》(*Duke Mathematical Journal*)。

作者应该根据文章的内容以及主观愿望合理地选择投稿的杂志，结合杂志学术档次、年度出版周期、平均审稿时间、论文出版时间、发行流通量等考虑因素，从中找到自己感到满意的一个平衡点。杂志的威望度除了公认的评判之外，还可以从某些数量化的因子综合计算，比如影响因子，即它在固定时间长度内单篇论文的平均被引用次数。当然“影响因子”这个短语由于被某些学术不端分子利用或滥用而对公众的“影响力”逐年减弱（见《数学文化》杂志 2010 年创刊号上转载的工业与应用数学协会会长 Douglas N. Arnold 的文章）。出版周期越短，该杂志每年出版的论文数就越多，当然这也和杂志每期的平均页数有关。审稿时间长短考验着你的耐心程度。如果你是急性子，可以选择那些出版短平快文章的杂志。《美国数学会会刊》每年会统计一次主要数学杂志的论文从接受到出版之间的平均时间。

如果你想把文章投到排名最高的杂志之一，事前应该先了解下面几点：审稿过程会格外长，包括你和匿名审稿人以编辑为中间媒介来回几次的修改通讯；拒稿率特别高，且文章被拒的理由可能是五花八门；出版日期似乎遥遥无期，让你坐立不安地等待。假如你运气好的话，虽然文章最终被接受了，等到论文在杂志中露脸可能从头到尾花了两年或更长时间。如果你碰巧忙着申请提升副教授或终身教职，需要增加已发表的论文数目支撑履历，这可能不是你乐见的现实。


许宝騄

投稿时不必一味追求杂志的名气。好杂志中优秀论文比例是较高，但很多历史上留名的好文章也并非登载于国际顶尖杂志。反之，在名气大的杂志上发表的论文也不一定都是好文章。享有国际声望的我国统计学家许宝騄 (1910—1970) 说过：“一篇文章的价值不是在它发表的时候得到了承认，而是在后来不断被人引用的时候才得到证实。”他还说过：“我不希望自己的文章因登在有名的杂志而出名。我希望一本杂志因为刊登了我的文章而出名。”这好比奥斯卡金像奖，获奖的都是好片子，但一些伟大的电影从未获奖，如卓别林思想深刻、艺术高超的《摩登时代》(*Modern Times*)。要知道，金子总不会永远被埋没。真正好的文章，无论刊登在何种档次的严肃杂志上，只要杂志能流通，就能得到同行的重视。

在这个连纯数学家也要面对的不太纯净的学术社会，是否能固守自己的灵魂阵地是对每一个作者的心灵挑战。我们希望越来越多的人眼光放远，不被近利所动，远离“不求质量、但求发表”的泥坑，更不要成为那些学术市场上冒出的个别新杂志“一手交钱、一手交货”的俘虏。我们应该努力写出真正优美的学术文章，让自己的科研成果具有强大的生命力。

我们列出一些期刊中希望审稿人注意的事项，以此来考察所投文章的质量；这也是我们在写作时或投稿前应该注意的。下面提供有代表性的两个杂志的做法，第二种比第一种更为详细。

- **杂志一：**

1. Does the paper contain new contribution?

2. Is the paper:

_____ Of Major Importance

_____ Important

_____ Of minor significance

_____ Of no significance

3. Are the clarity and grammar acceptable?

_____ Yes

_____ No. Please be specific about how the manuscript can be corrected

- **杂志二：**

EVALUATION

A. Suitability of topic

1. Would the topic appeal to a knowledgeable individual outside the topic field?

[ ] Yes

[ ] Perhaps

[ ] Probably not

2. Is the topic important to researchers within the topic field?

[ ] Yes

[ ] Moderately so

[ ] Not really

3. Would it be timely to publish a paper now on this topic?

[ ] Yes

[ ] Somewhat premature

[ ] Probably too late

B. Content

1. Is the paper technically sound?

[ ] Yes

[ ] No

2. Is the coverage of the topic sufficiently comprehensive and balanced?

[ ] Yes

[ ] Important parts of the topic are missing or treated superficially

[ ] Somewhat unbalanced treatment, but not seriously so

[ ] Certain parts greatly overstressed

3. How would you describe the technical depth of the paper?

[ ] Superficial

[ ] Suitable for the nonspecialist (knowledgeable individual outside the topic field)

[ ] Appropriate for a worker in the topic field

[ ] At an expert level

4. Do you consider the paper to be authoritative?

[ ] Yes

[ ] No

[ ] Perhaps

5. Do you consider the content of the paper of high quality and originality?

[ ] Yes

[ ] Open to some question

[ ] Not really

C. Presentation

1. Do the title and abstract provide a clear, accurate indication of the material presented?

[ ] Yes

[ ] No

2. Is there sufficient introductory material for the nonspecialist?

[ ] Yes

[ ] Probably not

[ ] No

3. Is the paper better suited for an expert in the field than for the nonspecialist?

[ ] Yes

[ ] Maybe

[ ] No

4. Are symbols, terms, and concepts defined to the extent necessary for a reader not familiar with the topic?

[ ] Yes

[ ] Not always

[ ] Frequently not

5. Are the discussions in the paper clear and well-founded?

[ ] Yes

[ ] Not always

[ ] Poor

6. How would you rate the overall organization of the paper?

[ ] Satisfactory

[ ] Could be improved

[ ] Poor

7. Are the references complete and accurate?

[ ] Yes

[ ] No

8. How do you rate the English?

[ ] Satisfactory

[ ] Could be improved

[ ] Poor

D. Summary

1. How would you rate the literary style of the paper?

[ ] Excellent

[ ] Good

[ ] Fair

[ ] Poor

2. How would you rate the quality and originality of the paper?

[ ] Excellent

[ ] Good

[ ] Fair

[ ] Poor

3. How accessible is the paper to the nonspecialist?

[ ] Completely

[ ] Mostly

[ ] Partially

[ ] Not at all

4. How would you rate the tutorial value of the paper to the nonspecialist?

[ ] High

[ ] Average

[ ] Low

5. How would the paper be perceived by specialists in the topic field?

[ ] Excellent

[ ] Good

[ ] Fair

[ ] Poor

6. Overall, how would you rate this paper?

[ ] Excellent

[ ] Good

[ ] Fair

[ ] Poor

CONFIDENTIAL COMMENTS FOR THE EDITOR:

_____

_____

_____

4.2 投稿过程

当你选定文章 (article) 投稿的杂志之后，就步入投稿的进程。严格地说，你的文章在被杂志接受之前，只应称为手稿 (manuscript)，接受之后方可改称为论文 (paper)。投稿的全过程有以下步骤：了解该杂志的作者须知 (Instructions for Authors)；写好投稿信 (cover letter)；向杂志寄送投稿信及稿件。以下我们就每一步作更详细的介绍。

1. 阅读杂志的作者须知。这些关于作者的技术性要求和规定一般刊登在该杂志的首页或末页上，在杂志的网页上也能读到。请注意杂志的有用信息会不时更新，最好查询最新的一期的相关信息。一般而言，发表在专业英语期刊上的科技论文，在文章结构和文字表达上都有其特定的格式和规定，只有严格遵循同行标准和相应刊物的规定，才能提高所投稿件的录用率。不同的杂志有不同的投稿要求，但都有一些共同点以及人尽皆知的普世原则。比方说，每个杂志都要求它收到的研究性文章必须是原创性的 (original)，它的部分或全部从未在杂志上公开发表过或正在投稿其它杂志。最好用笔记下与你投稿有关的如下信息：

a. 文章手稿投给谁？杂志会列出其编辑委员会 (editorial board) 的成员名单。通常，稿件应寄给杂志主编 (editor-in-chief) 或常务编辑 (managing editor)，但不少杂志容许作者将手稿直接寄往编辑委员会的任何成员 (associate editor)，这样的好处是省却主编与某一编委联系的时间，加快录用速度。但这样做也有缺点，如果你选取的那个编委对你文章的领域知之不多，他（或她）在寻找审稿人方面可能费时较多，因为审稿人最好是你领域的专家，并且和你没有什么个人关系以求客观评价你的文章。好在一些范围较广的杂志往往列出每个编委的研究领域，甚至将可以处理不同领域的编委们分门别类，如《数学分析及其应用》。也有一些杂志让作者把作品寄到编辑部 (editorial office)，由工作人员转寄给一个合适的编委处理来稿。

b. 文章要一式几份寄去？有些杂志只要一份即可，它会自行复印分送审稿人。也有杂志让作者提供审稿需要的复印件，例如 SIAM 的杂志要求非电子投稿须寄五份复印件。注意，文章只能复印在纸的一面 (single-sided)，而不是双面 (double-sided)，行距不要太窄，边缘要宽，这些都是为了方便审稿人阅读及写眉批之用。当然，越来越多

的杂志容许作者电子投稿或网络投稿，这种情况，通常只要在电子信中或投稿网页上附上手稿的电子版本即可。

c. 文章是否要摆上关键词和学科分类号？大部分杂志有如此要求，所以养成在文章题目页 (title page) 加上这些东西的习惯于你有益无害。即使有的杂志没有这项规定，它们亦不会拒收提供了关键词和学科分类号的手稿。参考第 1.9 节关于文章的关键词和学科分类的那一小节。在题目下面再放一个不超过五十个字符的栏外标题 (running head) 也不错，但即便未有提供，文章发表时编辑者也会制造一个，因为这不难。稿件上放上完成日期也是一个好做法，这个日期有时会提醒编辑或审稿人加快进度。

d. 杂志是否要求提供可能的审稿人名单？绝大多数杂志不会这样做，但也有例外，有些还颇具口碑，其目的是尽快物色到内行专家为它审稿。这些杂志相信作者的诚信，仅仅从学术角度来帮助杂志编辑选择审稿人。作者不应该将这一做法视为审稿容易过关的机会而寻找关系户帮忙。有的杂志在收到稿件后会建议作者提供一批可能的审稿人选，有的则让作者自行决定是否这样做。不过，严肃的期刊为了审稿过程的公正性和客观性，会让作者说明提供的可行审稿人都和作者没有个人或学术关系，如合作者、师生、同事等等。作者应该以诚实为荣，按照杂志的要求行事。须知，经受过严格审阅过程而通过的文章，如同 SIAM 杂志发表的那些，不光能让读者受益，也增加作者问心无愧的荣誉感。

2. 写投稿信。投稿信要简单，并且措辞要得当。在投稿信里必须说明你的稿件要投到哪个杂志。有的主编肩负几个杂志的重任，如美国圣路易华盛顿大学的 Rodin 教授。光写信给这类编辑投稿而忘记说明所投杂志便会造成困扰。有的编辑部也同时负责几个杂志，故投稿的杂志名要交代清楚。如果文章作者数目大于一，信中也要说出共同作者的名字，并且告知谁是处理稿件投稿事务的通讯作者及其完整地址。如果没有明确说明，杂志编辑部会假定投稿信签名者就是通讯作者。谁充当通讯作者完全由所有作者集体决定，通讯作者将负责投稿通讯的全过程，并在论文发表前后收到校对稿和预印本。这里转引 Krantz 在 [18] 中给出的一个简单明了但也俏皮幽默的模拟投稿信：

> I wish to submit the paper "On the Cohomology of Proofs" by C. Gauss, D. Hilbert, and H. Poincaré, to *The Utopian Journal of Hemi-Semi-Demi Theorems*. Enclosed please find three copies. Thank you for your attention.
>
> 我想提交一篇文章"关于证明的上同调"给《半半黛咪定理乌托邦杂志》，它的作者为高斯、希尔伯特和庞加莱。附上三份文章复印件。谢谢您的关注！

记住不光要在投稿信中写清楚你的通讯地址，也要给出你的电邮地址，以便编辑与你电邮联系。也应注意，不要在投稿信上溢美自己的稿件，因为这样做对审稿过程不仅毫无用处，反而会引起编辑的反感。

3. 寄稿件。在寄稿件前，请仔细校对你的手稿、发现拼写和语法错误并改正之。现在几乎是百分之百的电子投稿，所以几天之内就能收到编辑部的回信给你稿件收据 (Acknowledgement of Receipt)，并启动审稿程序。杂志会同时为你的稿子指定一个稿件号 (manuscript number)，今后你所有和该杂志关于该稿件的通信都必须使用它。这个号码非常有用，因为稿件太多，有的在编辑手里，有的在审稿人办公室，查询它们的审核现状时光靠文章或作者名等信息不一定能快速地知道结果，而利用稿件号则能方便地找到你文章现状的有关信息。

4. 稿件评审。大部分杂志要求两个互相独立的审稿人，少数高标准的杂志需要三个或更多，也有的杂志只送给一人审稿。编辑经常请求审稿人在某个规定的时间内完成此项工作（比如两个月），但一般需要更长的时间等待审稿意见 (referee report)，时间长短依赖于稿件长短、阅读理解困难程度以及审稿人的时间分配。这样的情形是常见的：候选的审稿人答应审稿，但过后由于某种原因全然忘记这项学术性服务工作，等到编辑已失去耐心催问时才想起此事。如果投稿人六个月后还未被告知审稿结果，应该有礼貌地给编辑去函或发电邮以询问之，提醒对方一下。这时，编辑大都会加快行动，力求以最快的速度让你得知审稿的结果。

或许，等了几个月的结果是一封拒绝信。这不等价于断言你的文章没有发表价值，可能的原因有很多。也许你的文章内容不合该杂志的领域，这种情形许多时候是刚收到投稿时编辑通知你的，因为编辑在寄出审稿前多会大致看一看文章的摘要，一旦发现内容不符，就会迅速决定不再考虑你的文章；或者，杂志有太多的积压稿件，因而

对一些来稿不看就退回；另一种遭遇是审稿人根本没看懂你的文章，乱批一通，随意枪毙；还有一种现象是两个审稿人意见相左，一正一负，而编辑倾向于负面的意见。

5. 如何对待拒稿信。收到拒稿信总是不愉快的事，有时会让你一整天心情沮丧。但只要想到诺贝尔奖获得者的文章也会被拒绝，你就会心平气和地坦然处之。如果拒稿原因完全不是因为你的定理证明大错特错或不幸早被别人捷足先登，而是你的文章不属杂志范畴，那只是你选的杂志不对，耽误了一些时间和精力，但没什么大不了的。

不论什么原因收到拒绝信，都应该客观地对待它。这时，你有三种选择：

(1) 原封不动地将稿子投向另一家杂志；这最省事，尤其是你的稿子未被发现毛病；
(2) 根据审稿意见加以修改，再投向其它杂志；无论审稿意见是否有缺陷，修改目的总是要更上一层楼；
(3) 给编辑写反驳信，证明为何审稿人错了；如果审稿报告错得离奇，这不失为双方交流的一个好机会。

由于文章在审稿报告的基础上认真修改是投稿过程中的重要一环，我们将在下一节重点讨论。最后我们提供一个投稿信的样本，供读者参考。

例 4.1. Dear Editors:

Please find the attached our manuscript entitled "On the Importance of the Stokes-Brinkman Equations for Computing Effective Permeability in Carbonate Karst Reservoirs". The manuscript has not been submitted to any other journals for publication.

We hope that you find our manuscript suitable for publication in the *Communications in Computational Physics*. As potential referees, we could suggest Peter Pan of Open University and Tom Chaplin of Fair Research Institute; both are experts in the field, whose works are cited in the paper.

If you need any more information please contact with me as the corresponding author.

Best Regards,

Youli Chang

尊敬的编辑:

随信附上的是我们题目为“关于 Stokes-Brinkman 方程在计算碳酸盐石灰岩地形水库有效渗透性中的重要性”的一篇稿件。这份手稿从未投向任何其它杂志以求发表。

我们希望你们发现该文章适合在《计算物理通讯》上发表，并建议公开大学的彼得 · 潘和公平研究所的汤姆 · 卓别林作为潜在的审稿人。他们的研究在我们的文章中被引用。

若你们还需更多的信息，请与作为通讯作者的我联系。

致以最好的问候。

常有里 ♦

4.3 审稿意见

接受一篇学术文章的最重要准则是它的创新性和正确性，写作风格倒是其次。那些面向大量读者的普及性杂志，如美国数学协会的《美国数学月刊》，对文章学术内容和写作方式同等重视。审稿人提出接受或拒绝所审稿件的建议基于如下考虑:

(1) 文章内容是否属于杂志所覆盖的领域? 能否引起该杂志读者足够的兴趣?
(2) 结论是否具有原创性? 证明是否正确? 它们和当前的文献有何关系?
(3) 文章是否表达清晰? 材料是否组织恰当? 定义、符号是否前后一致?
(4) 参考文献是否完全、贴切、相关和准确? 是否和文中引用一一对应?
(5) 题目是否抓住文章的内容本质? 是否太长或太短? 摘要是否总结得当?
(6) 引言部分是否清楚解释本文目的? 是否联系或评述当前的研究概况?
(7) 如果英文不是作者母语，英文写作是否达意? 是否需要再度润色?

在所审文章的内容与杂志的覆盖面相容的前提下，上述标准的第二项最为关键，也是审稿人作出最终评审决定的主要考虑因素。如果这项得到通过，审稿人就会对文章的其它方面提出评论和建议。

即便你的稿子被杂志接受了，这也并不意味着你的文章完美无缺，审稿意见在赞美你文章的同时也会指出文章形式和内容两个方面的改善空间。很少有文章能在初审时被全盘接受，多数被接受的文章贴上的是条件接受的标签，即文章可以发表，但需要修改。如果编辑同意审稿人的推荐，就会给作者寄去匿名审稿人的审稿报告，并发出“如同意之则按其修改”的指令。有时编辑并不即时接受文章，而是先让作者重新修稿，并让审稿人再一次审阅，根据修改满意程度后才决定是否正式录用。还有些杂志会让作者决定是否接受修改并继续投稿程序，因为作者有权撤回稿件另作打算。

审稿报告长短不一，有的仅仅三言两语，有的可以是几页纸的长篇大论。认真仔细的审稿人会根据上述评价标准在报告中提出评述与改进建议。假设文章的主要结论具有创造性，并且数学证明无大误，建议便会以针对如何改进全文结构为主，它们可以五花八门，全凭审稿者的数学品味和感受、写作风格和好恶决定。最重要的修改建议是纠正数学推理中的某些缺点部分，如证明中某一步推出下一步的间歇 (gap) 太大，读者不易领会，需要增加字句。作者易犯的毛病之一是在理由并不显然的地方写上 It is obvious that ... 而省略证明，其实在很多时候读者并不觉得如此，可能连作者也不知道显然的理由何在。因此，文章中应慎用“显然”二字，除非论据的确一目了然。作为该领域的专家，审稿人是把自己放在一个读者的位置来评审文章的，如果他们在理解上存在困难，一般读者就更不言而喻了。这也是文章为何要作评审的道理之一。

其它审稿意见可以是某个定理的叙述方式、某个公式的不同表达、某些定义的排列组合、某个表格的内容增删，等等。它们也许建议作者补充一些被忽略的但与该文结果密切相关的文献，甚至提供文中个别命题的另一证明，可能比原证明漂亮或精简。对遣词造句认真讲究的审稿人可能会帮助作者修改字句，尤其对文章语言非母语者。对于这样提供额外帮助的敬业者，作者在文章修改稿最后部分的致谢处最好加上诚挚的谢意，例如 The author thanks the referee for ...。

我们以一篇 2011 年投到《统计物理杂志》(*Journal of Statistical Physics*) 的文章的两份审稿报告作为范例。这篇投稿文章虽然提出了将最大熵方法和有限元思想结合的想法并发表了一个计算上有效的新算法，但它的初稿存在着一些需要改进的地方。下面的第二个审稿报告就此详细说明。

例 4.2. Referee Report 1. It is an interesting manuscript. My understanding is using piecewise linear function as a base to reconstruct the function by maxent is more accurate than the power moment method. Also, compared with other methods, this method has more advantage to approximate a function efficiently. If your scope is beyond what I am saying here, you may want to include more insight in this manuscript. But my opinion is that this is good enough to be accepted.

审稿报告 1： 这是篇有趣的文章。我的理解是在最大熵方法中用逐片线性函数作为基底来重建函数比幂函数矩量法更精确。与其它方法相比，此法也有更有效逼近函数的优势。如果你们的范围超过我这里所说的，可以在该文中收入更深刻的理解。但我的看法是这篇文章已好得可被接受了。

Referee Report 2. The authors of the manuscript proposed a piecewise linear function based approach to the entropy optimization problem. This work is related to and is an extension of the earlier work of one of the authors. The moment-based approach to entropy optimization in its classical form is notoriously ill-conditioned. Although quite a number of algorithms have appeared in the literature in recent years, the problem continues to be interesting owing to its very unique nature.

The present work provides another example of algorithms where the basis functions are chosen with the intension to minimize the ill-condition nature of the problem.

While the authors' approach and the formulation are interesting, I have several questions. First of all it is my impression that the authors have not sufficiently demonstrated the efficacy of their approach by applying to a number of different cases. The three examples discussed in the manuscript are rather simple. The density function in all the cases are smooth, and free from any structure in the interval. It goes without saying that reconstruction of such densities

are not particularly problematic, and was achieved several decades ago. To me what is more interesting is to see how this piecewise linear algorithm performs for more complicated functions (such as a function with finite discontinuity, finite structure etc). Unfortunately the present manuscript does not address this issue, which is a major drawback of the manuscript.

Secondly, the authors have listed only the L^1-norm of the error. While this is certainly useful, often we need to know the density near a given point in the interval. Therefore, it would be more useful to the readers if the authors plot the function(s) in the interval as well. This is particularly important for more complicated density.

Finally, the authors should comment on the rate of convergence w.r.t. moments and number of points in the interval. If I correctly understood the authors have used the same number n for this purpose (from Eq. 5 and the number of subintervals). In that case, the question is how the algorithm performs for small number of moments?

Some of the minor points are:

1) Ref 2 should be properly cited from the *J. of Physics A*. I believe JSP does not permit citing a preprint. Similarly, submitted papers should be avoided as well.

2) In my opinion, tables 4 and 6 provide too much information and a part of it is unnecessary. The authors may consider showing results for a single but large N only.

In summary, while the work is interesting, the choice of the numerical examples does not provide sufficient evidence that the method is capable of dealing with complicated densities or even simple densities such as a tent map or constant function. I suggest the authors to apply their methods to a number of challenging densities, and to resubmit the paper along with the new results showing the reconstructed density functions explicitly. There exists plenty of room to improve the quality of the paper at this point, and as such the manuscript should not be published in the present form.

审稿报告 2： 文章作者对熵优化问题提出一个以逐片线性函数为基底的处理方式。这与作者之一的现行研究有关，并对此作出延伸。熵优化基于矩量的处理在其古典形式上是出了名的病态。近年来虽然文献中出现了许多算法，但因问题的性质非常独特而仍然富有趣味。

目前这项工作是这些算法中为了尽量减少问题病态特性而选取基函数的另一例子。

虽然作者的方法和构想很有趣，但我仍有几个问题。首先，我的感觉是作者还没有把他们的方法用于一系列不同的情形而充分显示出其功效。文章中讨论的三个例子都相当简单。这些例子中的密度函数都光滑，不具有区间上的结构问题。不用说这些密度的重建没有尤其严重的问题，几十年前就已实现。对我而言更有趣的是这个逐片线性函数算法对于更复杂的函数干得怎样（例如有有限个不连续点或有限结构的函数等等）。不幸的是，目前的稿件未解决这个问题。这是这篇文章的主要缺点。

第二，作者仅给出 L^1-范数误差。这固然有用，因我们常需要知道密度在区间内某点附近的性态。正因如此，如果作者能同时在区间上作出函数的图像，则对读者可能更有用处。这对更复杂的函数特别重要。

最后，作者应该对相应于矩量与区间内点的收敛速率作出评述。如果我的理解正确，为此目的作者用了同样的数目 n（由式 5 及子区间的个数）。在此情形，问题是对小数目的矩量算法效果如何?

一些小问题如下：

1. 参考文献 2 应从《物理杂志 A》适当引用。我相信《统计物理杂志》不允许引用预印本。同样，投稿文章也应避免引用。

2. 在我看来，表 4 和 6 提供了太多信息，其中部分并不必要。作者可以考虑仅用单独的一个大数 N 来显示数值结果。

总之，虽然这项研究有趣，但数值例子的选取并没有提供此法能够处理复杂密度或甚至像帐篷映射或常数函数这样的简单密度的足够证据。我建议作者将他们的方法用于一些具有挑战性的密度，然后放进明确显示重建密度函数的新结果后重新投稿。在这一点上，该文还存在很大的改善空间。正因为如此，这篇稿件不宜以目前的形式发表。 ♦

当作者收到审稿报告后，应该非常仔细地阅读这份报告，弄懂其中每一句话的真实含义，搞清每一条建议的理由，反复思索它们是否合理。如果你决定按照审稿人的主要意见行事并打算和该杂志合作

到底，就要逐条逐条地回应报告中列出的所有问题项目。对于自己认同的建议，就毫不犹豫地修改原处；对于那些你不敢苟同的评判，你可以在写给编辑的修改稿提交信上提出你的理由，也许真理站在你的一边。关于这点，你的信中可以写上 the referee is mistaken and here is why 诸如此类的话。如果你真是对的，审稿人将尊重你的执著。

上述例子中文章的作者基本上认同第二个审稿人的评述和建议，故增加了复杂的计算实例，给出了算法收敛速率的理论分析，大大提高了文章的质量和数值结果的信服度。修改后的文章很快被接纳（见下一节的开头；在那里作者真实名字已隐去）。

文章修改完毕后就要重复首次投稿的同样程序，在首页列出最后的修改日期，注上 Revised 的字样，附上新的投稿信，寄回给负责稿件的杂志编辑。信中要明确表示这篇文章是根据审稿报告而完成的最后修改稿，你已回应了审稿人的每一项意见。有些杂志要求文章修改后，作者要在信中说明文章所作的改动以及每项改动的页码位置，这可以帮助编辑和审稿人更容易地检查你的修改是否合乎要求。注意，有的编辑并不把修改过的文章寄给原先那个审稿人，而是送交另一位细察，故此当你收到新的修改建议时不必惊讶。即便送回同一个审稿人，这种情况也常发生。编辑将再一次寄你文章收据，并叫你等待通知或新的审稿报告。

当最终收到杂志决定录用你稿件的来信后，备尝苦辛的你终可松一口气了。有耕耘就会有收获，投稿过程也进入最后的阶段。文章升格为论文，固然值得祝贺，但事情还没有结束，下一节讨论的就是从现在开始到论文出版你要做的事。

最后我们提供两封文章修改后作者给编辑部的回信。

例 4.3. 这封回信对审稿人提出的问题给予了整体回应，总结了审稿人关心的问题，并一并给予回答。

Dear Referee,

We thank you for your positive report. We have followed your suggestions and modified our manuscript as follows.

a) In regards to the initial conditions for the memory variables (in equation (8)), we have added a brief discussion in the top paragraph on page 9.

b) We agree it would be of interest to rerun the LOH.3 calculation

on a finer grid. However, we believe the grid needs to be significantly finer to see the benefit of using 4 instead of 3 SLS mechanisms. Reducing the grid size by a factor of two would result in a computation mesh with about 10^9 grid points, and we do currently not have enough allocation on the large machines to perform that calculation. We have added some comments along these lines on page 29 of the revised manuscript.

c) Additionally, we have added a reference to the work by Boyd et al. in the introduction, about 2/3 down on page 2.

Thanks again for your kind remarks on our manuscript.

Sincerely,

Peter Jones

尊敬的审稿人：

感谢您正面的报告。我们已经根据您的建议如下修改了稿子：

1. 关于内存变量（在方程 (8) 中）的初始条件，我们已在第九页的第一段内加了一个简短的讨论。

2. 我们同意再次运行一个加细网格上的 LOH.3 计算是有趣的。然而，我们相信要看到使用四次而不是三次 SLS 机制的得益，网格需要显著地更精细。将网格尺寸减小一半将导致具有 10^9 个网格点的计算网格，但目前在大型机器上没有足够的分配来执行那个计算。在修改后稿件的第 29 页上我们加上了按照这些线索给予的一些评述。

3. 此外，我们在第二页从顶起约 2/3 处引言部分里加上了对 Boyd 等人工作的提及。

再次感谢您对我们所投稿件的客气话。

您真诚的，

彼得 · 琼斯 ♦

例 4.4. 这个回信基本对审稿人提出的问题逐点回答。一般来说，编辑部或责任编委会把审稿人的报告同时寄给审稿人的；所以逐点回答会使审稿人易于判断你的回应是否使他满意。

Dear Reviewer,

Thank you very much for your encouragement and valuable suggestions. The manuscript has been fully revised by following your suggestions. Below is our reply to your specific comments:

1. The formula is corrected.

2. Thanks for pointing out this. The double integral is now added.

3. Corrected.

4. All index have been modified.

5. The formula for evaluating the heat flux at the cell interface is added.

6. Eq. (16) is now removed.

7. At the solid boundary, the Maxwell boundary condition is used. The incoming time-dependent distribution function towards the wall is evaluated through one-sided interpolation of both macroscopic and microscopic variables and the use of integral solution. The incoming distribution is fully reflected by a Maxwellian with wall's temperature. Open boundary condition for the cylinder case is based on the extrapolation of the distribution function.

8. The typos are corrected.

9. The reference of DSMC calculation is now added and the repeated argon parameters have been removed.

10. The typo in the reference is corrected.

Thank you again for your helpful suggestions.

Sincerely,

Alice Strang

尊敬的审稿人：

对您的鼓励和有价值的建议深表谢意。该稿件已按照您的建议整个修改。下面我们回答您的每条具体意见。

1. 所指公式已改正。

2. 谢谢指出这点。重积分现已加上。

3. 已订正。

4. 各项指标已被修改。

5. 已加细胞界面处的热通量赋值公式。

6. 方程式 (16) 已去掉。

7. 在实在的边界，用了麦克斯韦边界条件。朝墙传入的依赖时间的分布函数通过宏观、微观变量单边插值和使用积分解来赋值。传入分布被带有墙温度的一个麦克斯韦充分反映。圆柱体情形的开边界条件是基于分布函数的外插。

8. 错别字已纠正。

9. 关于 DSMC 计算的参考文献现已加上。重复的氩参数已去掉。

10. 参考文献中的错别字已改正。

再次感谢您有益的建议。

您真诚的，

爱丽丝 · 斯特朗 ♦

4.4 文章发表

假如你收到像下面一样的信件（现在一般是电邮通知），你的文章将被发表。

From: On Behalf of the Editor in Chief
Sent: Wednesday, September 07, 2011 8:53 AM
To: Right, Noah
Subject: JOSS-11-16R1 will be accepted for publication

Dear Dr. Right,

I am very pleased to inform you that your manuscript entitled: "A maximum entropy method based on piecewise linear functions for the recovery of a stationary density of interval mappings" has been accepted for publication in the *Journal of Statistical Physics.*

Please look over your article and if the editor has requested some minor changes, please do so and upload your final revised paper within 7 days after receipt of this letter. If you need more time, please let us know.

If there are no comments from the editor asking for changes, please upload your final version within 10 days of receipt of this letter. If you are happy with the version you submitted earlier, you simply go to 'attach files' and then check the box that says 'include this submission in revised version'. If we do not hear from you within 10 days we will automatically forward your paper to the printer to be typeset.

We would like to request for an editable source file (i.e. Word or LaTex) of your manuscript because our Production Department will be unable to use a PDF or Postscript file format. The system supports the following file formats:

for manuscripts – Word, WordPerfect, RTF, TXT, and LaTex; for figures – TIFF, GIF, JPEG, EPS, and PPT.

The Editorial Manager site can be found online at:
https://www.editorialmanager.com/joss

Your username is: rright
Your password is: rright555

Your submission can be found in your main menu under 'submissions needing revision'.

Please note (if you have colored figures) that there is a charge for colored figures in the printed form; no charge for the web. If there is only going to be color on the web, the figure caption should note it by saying: color online.

When your galleys are ready, they will be sent by e-mail in the form of a pdf file to the same address used for this message. Please print this file with Acrobat Reader, make your corrections on the printed hard copy, and return the marked copy either by e-mail or by Federal express or other courier service or fax within 48 hours. Instructions for mailing the hard copy will be sent with the galleys. Information about reprints (you will get 25 free copies) will be included with your galley proofs.

The full text of your article will first appear online, in its final form, under "Online First" at the top of the Journal of Statistical Physics table of contents.

The article will be removed from Online First once it is placed in a full online issue. Online First and current online issues are available to all of those with subscriptions or access to institutional subscriptions.

Please acknowledge receipt of this message as soon as possible and let us know if you anticipate any problems with this procedure.

Thank you very much for publishing in the *Journal of Statistical Physics*.

Sincerely yours,

(Signature)

Editor in Chief
Journal of Statistical Physics

尊敬的好好博士：

我愉快地通知阁下，贵文“基于逐片线性函数恢复区间映射平稳密度的一种最大熵方法”已被鄙《统计物理杂志》接受发表。

请再细查阁下的文章。若编辑请求一些小改动，请照做并在收到这封信后的七天内将最后的修改稿上传。如需更长时间，请告之。

若编辑没有改动要求，请在收到这封信后的十天内将文章最后的版本上传。如果阁下对之前提交的修改稿满意，请直接到‘附上文件’去并在‘包括这次以修改版本提交’的方框处打钩。如果十天内听不到阁下的回音，贵稿将自动送到印刷厂排版。

因为我们的制作部门不能采用 PDF 或 Postscript 格式，我们请求得到阁下手稿的一个可编辑源文件（即 Word 或 LaTeX）。我们的系统对文章支持 Word, WordPerfect, RTF, TXT 和 LaTeX 的文件格式，对图形支持 TIFF, GIF, JPEG, EPS 和 PPT 的文件格式。

编辑管理网站可在 https://www.editorialmanager.com/joss 上找到。

阁下的用户名：rright

阁下的密码：rright555

阁下的投稿可在“需修改的投稿”名下的主菜单内找到。

请注意（如有彩色插图）刊印形式的文章彩色制图要收费，但网页形式是免费的。如仅在网页形式彩色制图，请在图题处标明“网上彩图”。

当校对稿准备好时将以 pdf 文件形式电邮到与这里所用的同一地址。请用 Acrobat Reader 将它打印出，在上面标示出修改部分，在 48 个小时内将改正稿以电邮、传真、联邦快递或其它快递服务等方式送回原处。邮寄印刷本的说明与校对稿及订购重印本（阁下将享有 25 本免费）的信息一并寄来。

阁下论文的整个部分以提交的最后形式将先在网上出现在《统计物理杂志》目录上方的“网上优先”条目之下。一旦被放入完整的网上一期，它将从“网上优先”处删去。“网上优先”与最新网上一期提供给所有订阅者或通过订阅机构的访问者阅读。

请尽快告诉我们阁下已收此信。如预计对所述程序有任何问题，请让我们知悉。

十分感谢阁下在《统计物理杂志》上发表大作。

您真诚的，

（签名）

《统计物理杂志》主编

Reviewer #1: The answers to the questions are addressed in the manuscript.

审稿人 #1：文章回答了所提的问题。

Reviewer #2: Following my questions and concerns for the above manuscript, the authors have addressed most of the questions. Although, there is still some room for improving the manuscript, I would recommend the paper to be accepted for publication in the journal.

审稿人 #2：作者领会了我对上述稿件所提的问题和担忧，解答了它们中的大多数。虽然文章仍有一些需要改进的空间，但我建议杂志接受该文发表。

投稿文章被接受表明你论文的质量达到了那本杂志的出版标准，符合它的发表要求。你的论文进入了排队印刷的阶段。

如果你的文章是用 TEX 或 LATEX 排版软件打字的，为了加快排版进度，编辑办公室通常会请你把文章的源文件寄给他们。有的杂志采用其标准化或自行设计的 LATEX 变种，例如美国数学会旗下的杂志采用的是 AMS-LATEX，SIAM 的杂志也有它们的宏指令 (macro)，可在杂志的网站上下载使用。如果作者一开始就采用这些格式打印文章，审稿时就会给编辑和审稿人留下良好的第一印象。

被接受的论文首先会被送到专门负责文字事宜的编辑 (copy editor) 桌上。该编辑的主要职责有两个：其一是改正可能的语法、句法错误，保证前后文的一致性；其二是在有限范围内做一些文字上的改动，以让文章读起来更加通顺。同时，他也做一些与杂志版面格式相关的技术性处理。这些工作的前提是保持作者的写作风格，这与中学语文老师修改学生的作文有点相似。

在文章发表之前，作者必须对有关版权方面的法律责任有清楚的认识。Higham 在其书 [14] 中专列一节 Copyright Issues 论及这个重要问题。他说：

> If you want to quote more than about 250 words from a copyrighted source, you need to obtain permission.
>
> 如果对受版权保护的作品引用 250 个词以上的内容，需要得到版权拥有者的允许。

同时，必须在文中注明被引用的原始材料出处，并在参考文献中详细列出。

在等待论文发表的这一段时间内，作者会收到一张“版权转让表”(copyright transfer form)，填好及签署后寄回杂志。如果作者多于一人，通讯作者可以代表所有作者签署。签这张表的意思是作者将版权转移给杂志，这是个不可或缺的例行公事。作者可能同时也会收到“预印本订购单”(reprints order form)。无论你是否打算购买 25 到 100 本免费之外的论文预印本，都应该填好它寄到规定的地址。

终于，你论文的校对稿 (galley proof) 在翘首以盼中姗姗来迟。一般你只会有 48 个小时的时间完成校对程序并把它寄回。这是你的论文在出版前的最后一次校对，但你只被容许改正错别字或漏

字多余字，而不能大手笔改动它，否则要付额外的费用。这时，你必须小心翼翼、全神贯注地阅读你的作品，对数学符号、英文单词一丝不苟地逐字检查，一行一行地拿校对稿与原稿比较。相对而言，数学符号的印刷错误多于英文文字错误，故对此要特别入神。举例说，如果你看见 $c = (a + b/2$，就要加上一个右括号，式子 $e\|A\hat{x} - b\|$ 是 $e = \|A\hat{x} - b\|$ 之误。英文的错误往往集中在字母拼写或单词重复，如 writen as 或 Substitute the last expression for ... 。有的错误如不从上下文来看，不易被发现，如 a special point λ 看上去不错，但作者的原意却是 a spectral point。

编辑如对原文中某个地方有疑问，校对稿的那个地方旁的边缘处会有一个 Author Query 标记让你注意并回答之。你应使用红色圆珠笔在它旁边写下改正好的东西。校对稿编辑通常使用一些排版印刷行业的专业性符号来代表一些特殊含义，如某某符号表示“删去”，某某符号意指“向右移”。这个符号表会随校对稿一同寄来供你校正时参考。Higham 的书 [14] 在第 139 页上也有列出。他在书的第 138 页上举了一些他见过的已发表著作的笔误例子。如某篇论文的第一句是 One of the best unknown methods ... was developed by Jocobi。在一本书的序言中，作者感谢其同事帮助他完成比他单独做精确得多的 final product；这个有逻辑意义的笔误可以和罗素的“逻辑悖论”相媲美。我们在本书写作过程中的某日也偶然发现，很少有印刷错误的《美国数学月刊》1990 年 10 月期的“几何特刊”中将集合包含关系 $E \subset K \subset \lambda E$ 印成了 $E \subset K \subset \lambda K$。由此可见，认真的校对是多么的重要，否则可能会遗留几个令人遗憾的瑕疵，甚至闹出一些笑话。

你应该在规定的时间内用快递寄回校对稿，否则可能会耽误论文出版时间。现在，更多的杂志以 pdf 文件的方式电邮校对稿，极大地提高了这一过程的速度。

最终，当你看到新一期的杂志中出现了你的论文，应该是满怀高兴的。这是你的心血，是你心智的创造物，是你为人类的知识殿堂奉献的一道佳肴。

Again, congratulations!

怎样写书

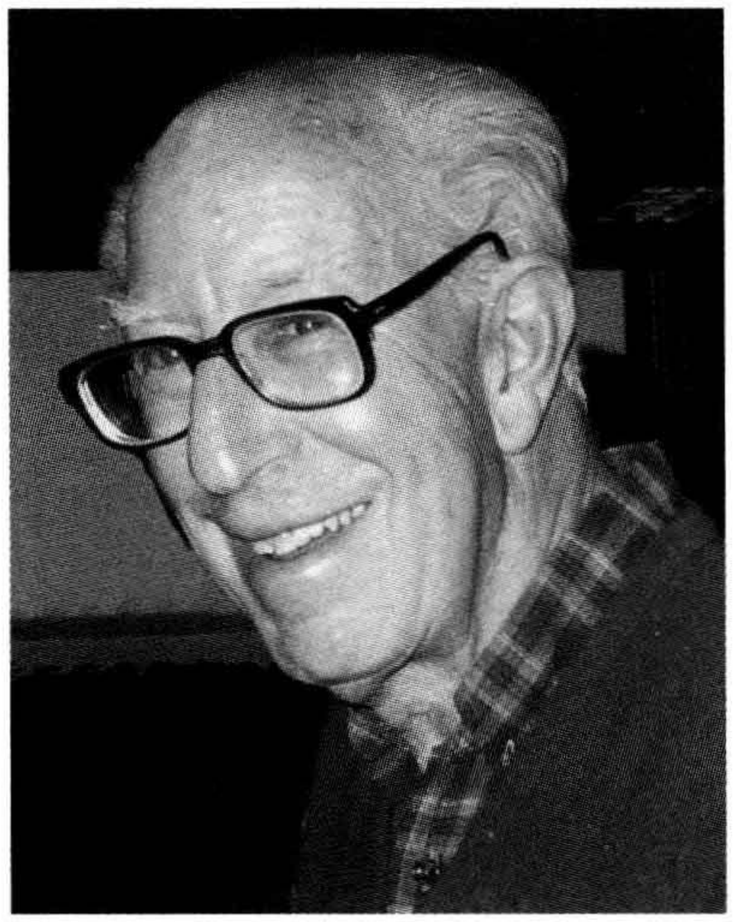
第五章

20 世纪的俄国文豪高尔基有一句脍炙人口的名言：“书籍是人类进步的阶梯。”17 世纪的英国哲人培根说过：

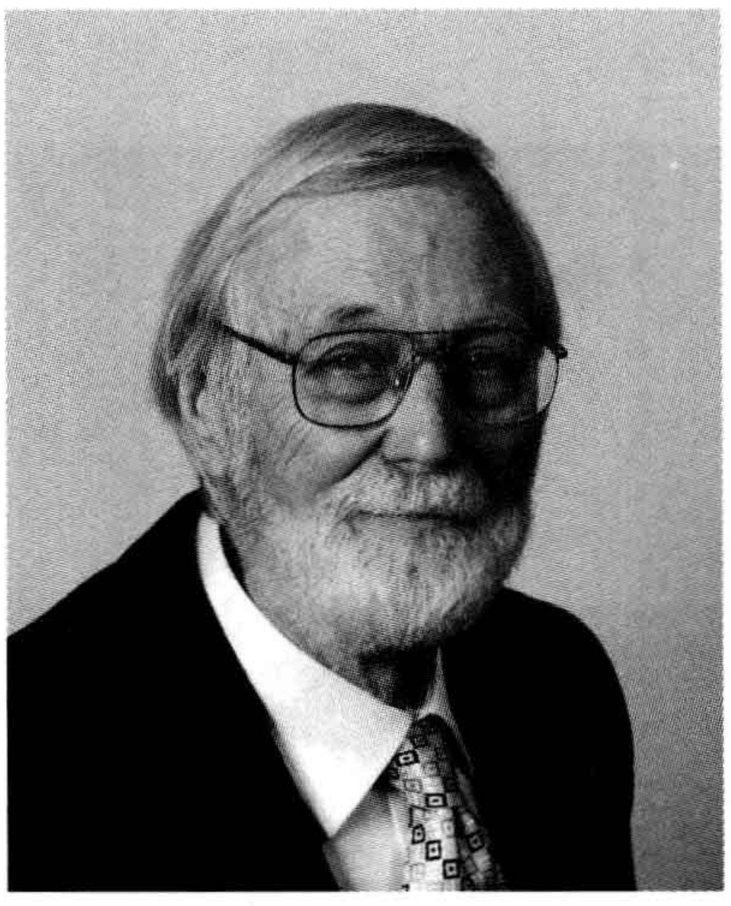
> Some books are to be tasted, others to be swallowed, and some few to be chewed and digested.
>
> 书可以品味、可以吞噬，少数可以咀嚼和消化。

好评如潮的文学读物可以是前者，但精工细作的科技书籍大都属于后者。

话虽如此，但写出一本真正的好书谈何容易！当然，一本上乘之作的教科书或专著会让成千上万的读者受益。正如广受数学系大学生和研究生欢迎的美国数学家卢丁 (Walter Rudin, 1921—2010) 所著分析教科书《数学分析原理》(*Principles of Mathematical Analysis*) 和《实分析与复分析》(*Real and Complex Analysis*)，是两部再版多次的经典之作，恰为好书能让人一辈子受益无穷的上佳例子。1962 年的菲尔兹奖获得者之一及将近半个世纪后的阿贝尔奖 2011 年得主米尔诺 (John Milnor, 1931—) 写的数学书本本优美。无论是关于微分拓扑，还是莫尔斯理论，或是代数 K-理论，他的作品行文精确、清澈、易懂，读起来令人享受。本书作者之一当年从他的小书《从微分观点看拓扑》(*Topology from the Differentiable Viewpoint*) 读到了代数基本定理的简短漂亮证明，也学到了微分拓扑中萨德 (Sard) 引理的真谛。



Walter Rudin



John Milnor

写书要比写论文花费远远多得多的时间和精力，写一本好的数学书更需要真知灼见和专业技巧。研究论文主要以创造性思维取胜，以刚出炉成果引人。但是无论多好的科学论文的读者群都只局限于该领域中的小部分人；而好书则被捧在众多读者手中，因为它的科学内容更为基本、更为通俗、更为连贯、更为系统，故更具有群体性的教育意义。我们都有这样的体会：个人书架上放置的本专业的经典著



Abraham Pais

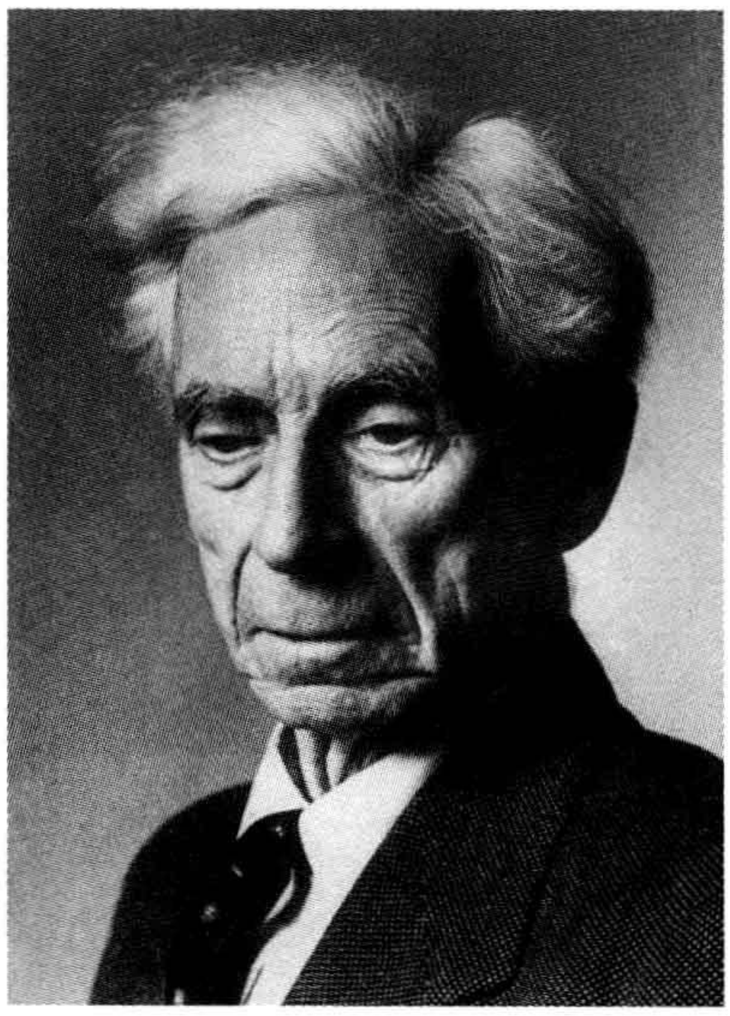
作一直是自己学习和工作中的钟情之物。

写作优秀书籍的作者须拥有极高的知识水平。丹麦裔美国物理学家和科学传记作家派斯 (Abraham Pais, 1918—2000) 在其自传《双大陆记：动荡世界的一个物理学家之旅》(*A Tale of Two Continents: A Physicist's Life in a Turbulent World*, Princeton University Press, 1997) 中，比较了写研究论文和写书的不同之处。他说，它们的主要不同点之一是，对于后者而言的“冰山原则”的必要性。这个所谓的冰山原则，用他的英文原话，就是

> ... just show the tip of the iceberg, yet convey—and this is a subtle task—that you are aware of much more that lies beneath the surface.
>
> 仅仅显示冰山一角，然而传递了如下的信息——这是一项不可思议的任务——你知道得远比表面上的东西多得多。

这种对著作者的严格要求，令中国从古到今几千年的学者们对写书的念头始终怀有敬畏之心，迟迟不敢动笔。然而，一旦动了笔，就可能催生了一部流芳百世的作品。每一个计划写书者，都应该在心中掂量一下自己的书在未来的命运。

科学著作一般不及优秀文学作品那样具有经久不衰的魅力，莎士比亚的悲喜剧几百年来远比牛顿的杰作《自然哲学的数学原理》拥有更为广泛的读者。即便写过伟大作品的数学家，如英国哲人罗素 (Bertrand Russell, 1872—1970)，也不敢相信自己的著作几十年甚至几百年后还被人问津，因此他对自己的大作《数学原理》——与其老师怀特海合著——在图书馆书架上的未来命运有过幽默的自嘲。Federer 对他的学生 Hardt 说过：他的书尽管花了 10 年心血写成，但在未来的 20 年内注定要陈腐过时 (despite more than a decade of his work, the book was destined to become obsolete in the next twenty years)。但是，Hardt 写道：



Bertrand Russell

> He was wrong. This book was just like his car, a Plymouth Fury wagon, purchased in the early 1970s that he somehow managed to keep going for almost the rest of his life. Today, the book *Geometric Measure Theory* is still running fine and continues to provide thrilling rides for the youngest generation of geometric measure theorists.

他错了。这本书恰恰像他 20 世纪 70 年代初购买的 Plymouth Fury 车，他的后半生一直在用。今天，《几何测度论》一书依然魅力无穷，继续为年轻一代的几何测度理论家们提供乘胜前进的轻骑。

虽然我们不必与少数大家相比，但应向他们看齐，树立远大理想，让自己的学术著作成为别人科学餐桌上色、香、味俱全并且营养丰富的一道佳肴。

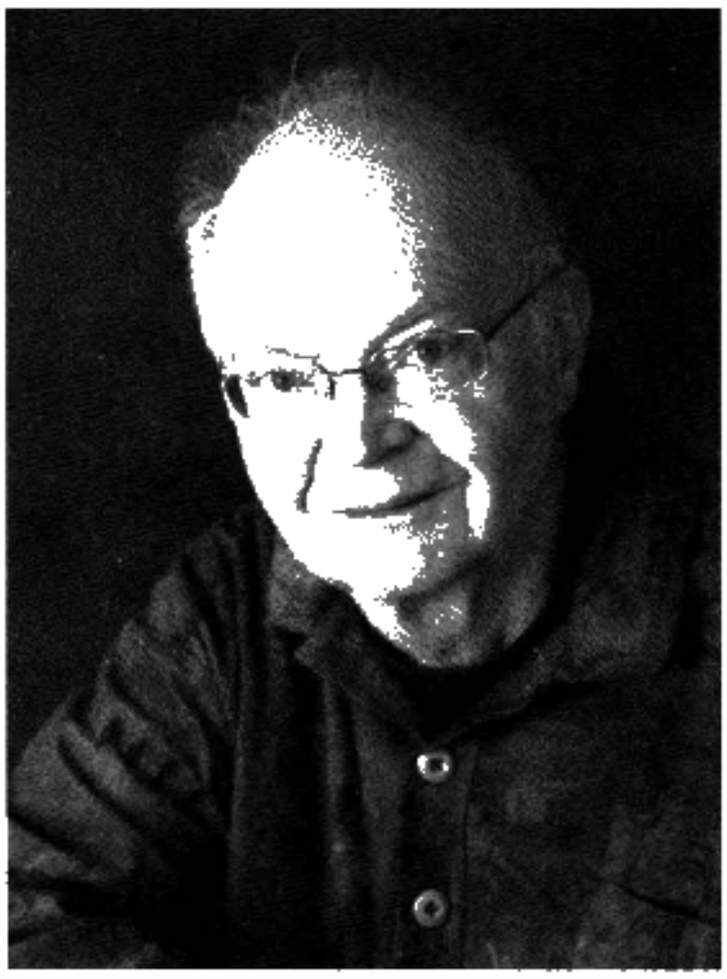
写书像谈恋爱一样需要激情，而且写作热情要贯彻在整个过程之中。一本好书完成之时，作者回眸自己的作品心中之喜悦荡漾，犹如十月怀胎一朝分娩的母亲初见新生儿的时刻。但是，许多作者刚开始写书时热情似火、干劲冲天，但热情、创造力与所花精力与日俱减，最后成形的书稿容易变为虎头蛇尾之作。这种对读者欠缺负责态度的作者，到头来也成为受害人，除非你甘心自己的书成为书商打折贱卖的对象而无人问津。

写出一本经典之作，除了激情之外还需具有呕心沥血的献身精神。Federer 曾经对写过《弱可微函数》(*Weakly Differentiable Functions*) 的美国印第安纳大学的数学家 William Ziemer 吐露过：他写《几何测度论》之时，就是“将墓志铭雕写于自己的墓碑之刻”(Herb told me that while he was writing his book, he "was inscribing his epitaph on his tombstone".) 正如 Hardt 所评述的那样，Federer 的这本几乎 700 页的杰作，

Forty years after the book's publication, the richness of its ideas continue to make it both a profound and indispensable work.

在出版 40 年后，其丰富的思想继续使它成为深刻而必不可少的著作。

既然写书是个吃力且经常是并不讨好的复杂工程，通常的建议是：除非你已拿到终身教职 (tenure) 并已在所属的研究领域内至少薄有名气，否则在当助教或讲师（等同于美国的助理教授）甚至副教授的阶段，最安全的做法是一心一意做研究写论文，全心全意做好本职工作。当你在学术界已站稳脚跟，你可以腾出一部分时间从事其它事业，包括写书。顺便提一下，在美国助理教授是一个刚刚新鲜出炉



Donald Knuth

的博士，或做了一到二年或更长时间的博士后研究者被大学正式聘用时一般所给的职称；从通往终身聘用之路 (tenure track) 的助理教授到提升为终身聘用的副教授大约需要五到七年，如果被满意地永久聘用的话.

当然，上述建议只是对绝大多数人而言，特殊人物则另当别论. 前面提到的中下写他的名著《数学分析原理》时不过初当助理教授，原因正是当时他准备教这方面课程，却因缺乏合适的教材而亲自动笔. 虽然他somewhat晚立名著，但这依然没有影响他在数学研究上的成就. 根据计算机科学家姚期智对清华大学学子的报告所述，美国斯坦福大学计算机科学系荣休教授克努特 (Donald Knuth, 1938—；他的中文名叫高德纳) 二十多岁时就已写出计划出版全数七卷皇皇巨著《计算机程序设计艺术》(*The Art of Computer Programming*) 的三千页手稿并出版了第一卷. 1974 年他获得了国际计算机科学界的最高荣誉"图灵奖"，后来又发明了数学家最受益的电子排版系统 TEX.

在这一章我们提供关于英文数学书写作的一些注意事项. 首先说明，上两章关于数学文章以及英文写作知识的内容在这里同样生效. 我们仅结合自己的经验针对写书的某些特殊方面提出部分建议. 另外我们指出，除了那些与英文写作有直接关系的部分，本章 (其实，何止本章，整本书中亦然) 的基本思想和方法也同样适用于中文数学书的写作.

5.1 准备工作

我们先从一个最基本而又最重要的出发点讲起，那就是：你为什么要写这本书？你的书架上、你所在大学的图书馆里已有一本或数本同一学科甚至同一子学科的教科书或专著，你为什么要加上一本新的？一方面，如果你的书仅仅重复别人已说的话，人云亦云、老调重弹，那你完全没有必要写它，因为你没有创见，没有新的贡献. 另一方面，如果你想写的论题早已不是研究热点或很快就会过时，你花上两年心血换来学术界的冷遇或出版社的拒绝，的确也是伤心透顶之事. 因此，计划写书前，三思而行不光是必要的，也是值得的.

《中国现代数学家传》第五卷刊登的北京师范大学刘绍学教授自传中记载了一段小插曲："我对 Fred (Fred Van Oystaeyen) 谈起，1984 年以来我讲了挠理论 (Torsion Theory) 的课，已编了四章的讲

义。Fred 对我说，搞理论没有什么前程，不值得写这方面的书。这促使我放弃了这块鸡肋似的工作。”

如果你确信有足够的理由要写出一本书，这等于是说：我有与众不同的新东西要说，我的书有其它书所缺乏的某些特色。这些特色可以体现独有的视野、全新的角度；可以包含新结果的妙用、跨学科的渗透；可以反映老学科的新观点、新学科的老联系；也可以验证教育法的新尝试、新体系的开创物。某个伟大的文学家说过：风格即人。同样，学术著作也要自成风格，才能吸引读者。创造性思维不光是科学研究的最佳方式，也是著书立传的不二法门。

遵循学术职业道德应该是一切写作的指导思想。在欧美许多大学，教授与研究生被要求学习关于学术道德方面的有关规定，并要通过考核。在研究或写作时，切忌抄袭、剽窃其他人的成果。大段复制别人作品中的内容占为己有是学术不端行为。

在你决定写书之后，接下来就是计划怎样写它了。写作经验丰富、已著有超过六十本书的美国数学家 Krantz 教授说 [18]，

> The best method for writing a book is to immerse yourself thoroughly in the subject.
>
> **写一本书的最好方法是把自己完全沉浸在该学科之中。**

这样的好处是：几年下来，你感觉到你仿佛生活在此书创造的精神世界之中。写书的过程常常是漫长而寂寞的，尤其是想写出一部呕心沥血之作。这时的你只需牢记诸葛亮在《诫子书》中说的一句名言：“非淡泊无以明志，非宁静无以致远。”

茅盾先生当年写作长篇巨著《子夜》之前，写下了极为详细的作品基本梗概。为了写好小说主人公上海民族资本家的性格特点，他甚至亲身体验上海证券交易的方方面面。写科技书也是一样，先列出一个较为详细的写作大纲可以帮助你初步建立书稿章节的基本框架，这个提纲主要由目录组成，并加上每一节覆盖的主要内容。开始时写作大纲无须非常完备，因为写书是个动态过程，写作期间某些章节必须调整次序，或增减个别章节，或将某个部分放到附录去，都是常见的情形。在写作的过程中，目录会越来越完善。

许多教科书脱胎于作者已使用多次的课程讲义 (Lecture Notes)。如果作者重复教授这门课，或其他教授也用过他的教案教课，则该课

堂笔记可能会被不断地修正增减，逐步完善，以适应教、学两方面的需要。作者在教学第一手资料的实践中更能充分了解学生对这门学科的求学过程，更能知道哪些内容容易处理，哪些需要强调，哪些需要对推理过程的简繁程度作出调整。这样的书写出来大都经得起读者的检验，因为作者的学生们已经充当了第一批读者，并提供了有价值的反馈意见。

既然由备课笔记转变而来的教科书有如上所述的好处，下述建议就显得合情合理：作为写书的前奏，首先教一门相关学科的课，最好一口气教上几遍。在这期间，写出详细的备课笔记，并不时润色。请你的同事和修你课的学生阅读你的手稿，从不同角度吸纳建设性意见。几经反复、几度春秋，你的授课讲义就会逐步趋向炉火纯青之态，这时正是动手撰写正式教科书的时机。

这就顺带提出了关于写教科书的一个新问题：不要想到写书马上就动笔，仓促上阵，而要有几年的准备时间，就像参加奥运会比赛前参加几次热身赛一样。千锤百炼的作品总是经久不衰的。本书作者之一于年出版的一本英文专著 *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*（《谱方法：算法、分析及应用》）[24] 和合作者之一的沈捷教授策划于 20 世纪的 90 年代中，部分材料双方以及另一合作者王立连博士在美国、中国大陆和香港、新加坡的多所大学或研究所作过教材，中间不断修改，最后在构思 15 年后才正式出版。其中一个主要教训是写书比写文章需要投入的时间要更集中，特别需要一些大块的时间。

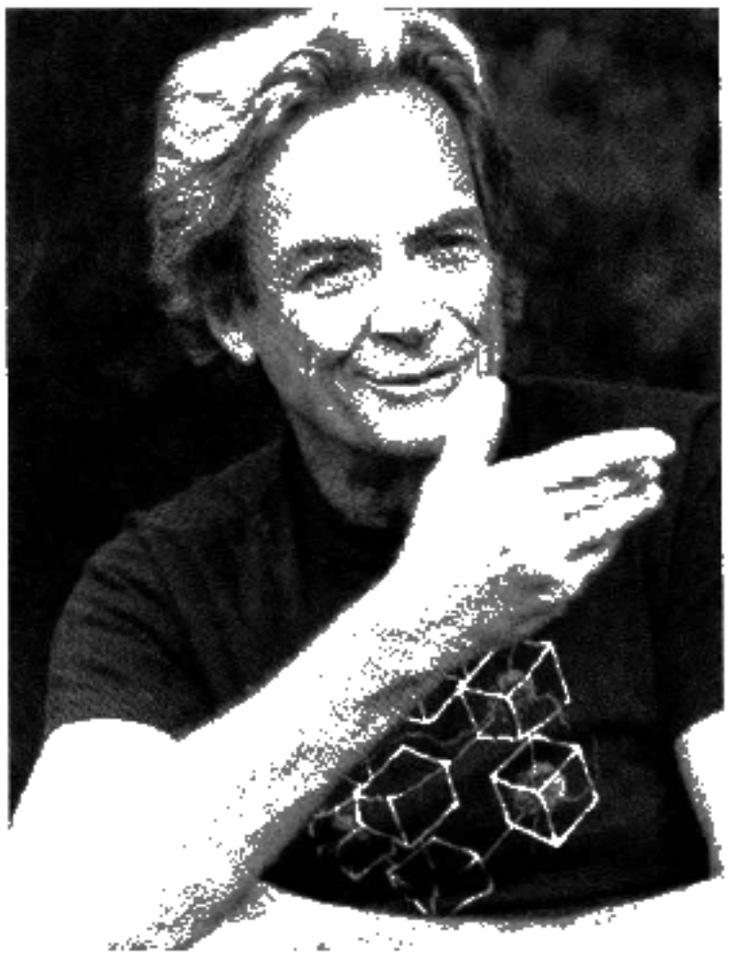
研究专著与教科书在写作理念、完成方式、作品时效等方面有所不同。首先，由高和寡，研究专著面向的人群基本上是所在领域的专家和登堂入室者，故读者数量一般较小，除非这本专著同时亦可用作教科书。这就给写作计划增加了“精练”的额外要求。大部分专著的内容不是自封闭的，这指的是非本门行家欲读懂它，需要某些更专业的知识积累。

5.2 写作过程

当你有了写书的详细计划，并具有万事俱备只欠东风之态，你便可以动笔了。这时的你，胸中自有雄兵百万，下笔如有神。当然，这只是美妙前景，要实现它，还需自己的不懈坚持。

就像博士论文答辩委员会的成员通常以最简单问题开始向答辩人提问，以免对方紧张过度答非所问，写书时应先处理最简单的章节。这样做的好处是显然的：你可以从容不迫地进入写作状态，不一定从第一章第一节开始写，而第一章往往是书的导论 (Introduction)，或许是最难下笔的部分，此部分甚至可以留到最后再写。在当今可以用电脑输入作品电子文本的时代，写作是异常方便的：任何时候都可以在手稿的任何部位增加或删减内容。

当然，写书的方式或章节写作次序因人而异，全凭习惯，就像法国伟大作家巴尔扎克站着才能写书。写小说大概要按自然顺序从头写到尾，也许有例外，因为有人倒着走路，反而身体更好。写数学书则大可不必这样做。我们介绍哈尔莫斯推荐的他所喜爱的一种方法，称之为螺旋式写作法。它的基本思想是：首先写第一章，接着写第二章。当你写完第二章后，意识到第一章必须重新写。这样你又回到第一章，然后自然而然地检查第二章。做完后你开始写第三章，写完后发现第一、二章又要重写。这样一来，你又回到前两章。如此这般，继续下去。这说明写书是一个不断修改的螺旋式推进过程，犹如革命家所说的人类社会的发展过程。这种写作方式也颇像美国物理学家费恩曼 (Richard Feynman, 1918—1988) 当年教他妹妹读书的方式：你从头读，尽量往下读直到你一窍不通时，再从头开始。这样坚持往下读直到你全能读懂为止。



Richard Feynman

你写进书中的内容，应该已充分吸收消化，成了你知识宝库的精华部分。只有融会贯通，才能得心应手、畅通无阻地自笔尖流到面出。如果你对某些论题还不甚精通，最好不要自己下笔。读书，往往真正搞懂的东西不可能借助文字能让别人完全理解，除非抄现成的。只有对学科有精深、透彻的理解，才能写出深入浅出、通俗易懂的书来。

每次当你定下心坐下写书时，应该安排好足够长的时间（比如，白天没有课时的两、三小时或晚饭后的时间）集中精力只做此事，远离其它事情的干扰，全神贯注地沉浸在写作之中。写作中最好不要在几章之间来回跳跃，这样容易令思绪分散。初学者适宜将注意力集中在一章之中，采用像一位军事战略家曾经提倡的“集中兵力，各个击破，打歼灭战”那种战术策略。

数学书充满概念和符号，经常定义满篇，尤其是纯粹数学方面的书。即便如此，数学写作的基本原则却是：如无必要，尽量少引进

新术语、新符号，并尽量不在句子当中包含太多的数学符号。除了不证自明的公理型概念和术语之外，任何新概念第一次引入时必须有它的定义，否则读者会不知所云，如坠云雾之中。新概念术语第一次被定义时建议用斜体字，例如：A measurable function is said to be *integrable* if .... 新概念定义中出现的其它概念也必须已有定义，比如上面的可积 (integrable) 的定义中用到可测函数 (measurable function) 的概念，它必须已被定义。定义叙述必须严格、简洁，而又易被理解。尽量使用简单短句，因为长句子理解起来容易顾此失彼。不要急于把许多概念放在一起组成一个长定义，或放在同一节，而应如一缕观景，逐步展开。基本原则是：当需要某个新概念时才开始定义它。否则定义放在那里长期不用就好像面包买来后放着不吃，只会慢慢发霉。举个例子，如你写一本关于复分析的书，你从某处开始定义什么是复变函数，然后在某一节你再定义连续的复变函数，当然接下来你会引进连续函数的种种性质。过了一段时间你开始定义什么是解析函数。随着学习的深入，越来越特殊、越来越深入的函数定义接踵而至。这当然比把所有这些函数的定义放在一个段落好上百倍。

作者假定读者已经知道的数学概念、名词或符号，可以不必再定义，但要确信它们在书中的意思是明确的，不会造成读者的歧义或误解。对于一些已经经久不衰的标准定义，我们可以让读者参见有名望的教科书。如果一个数学符号在不同的学科有不同的定义，就要特别小心，应当在第一次用到它时便告诉读者它意指何物。最明显的一个例子是不等式符号 $\geq$，它在泛函分析中的不同场合可能代表不同的意思。如果见到 $T \geq S$，其中 T 和 S 均为某类线性算子，它也许表示算子 $T - S$ 是正半定算子 (positive semidefinite operator)，也许是说 $T - S$ 是正算子 (positive operator)。这两个数学概念的定义完全不同。

使用好的数学符号对书而言是锦上添花，它们的重要性绝不亚于定理。尽可能采用已被广泛使用的标准符号，如 $\mathbb{N}$ 表示自然数全体，$\mathbb{R}$ 标记的是所有实数之集，而 δ_{ij} 则为 Kronecker 记号。如果你的书中经常出现圆周率 π，就不要用它代表其它东西，比如部分书籍以此表示的置换变换或投影算子。如果符号 i 作为虚数单位已用于书中经常出现的复数之中，就尽量不用它代表求和符号 $\sum$ 下的标号。此外，用于同一个概念的记号除了必须自始至终保持不变之外，甚至它的字形都要统一。譬如，当你用 $\mathbb{Z}$ 来记所有整数全体时，就

不要用记号 Z 或 $\mathbf{Z}$ 表示同一集合。一个符号，比方说 T，如果已经表示一个数学对象，例如线性算子，它就不应在书中的接近位置代表另一对象，理想的情况是在全书中保持符号意义的一致性。建议作者在写作的同时制作一个符号表，一旦引入新符号就在表中记下，以后需要用到该符号时就可保持一致。

哈尔莫斯认为，数学应当写成这样：它读起来就像两位在林中散步的朋友在交谈一样。他的原话是：

> **A good attitude to the preparation of written mathematical exposition is to pretend that it is spoken. Pretend that you are explaining the subject to a friend on a long walk in the woods, with no paper available; fall back on symbolism only when it is really necessary.**
>
> **准备书面数学材料的良好态度是假装它从嘴里倒出。假装你在林中远足时对你朋友解释这个学科，没有纸可用；仅当真正必须时才诉诸符号。**

交谈者是不大喜欢让符号代替语言说话的。同样，读者读书时本质上是和作者交流，故潜意识里他们更喜爱语言的交谈，而不是玩符号的游戏。试比较：

– A function f on an open interval I is said to be *continuous* at $c \in I$ if for every $\epsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ such that $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ for all $x \subset I$ satisfying $|x - c| < \delta$.

  开区间 I 上的函数 f 被称为在点 $c \in I$ 处连续，若对每一个 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对所有满足 $|x - c| < \delta$ 的 $x \in I$ 都有 $|f(x) - f(c)| < \epsilon$。

和

– A function f on an open interval I is said to be *continuous* at $c \in I$ if $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ such that

$$x \in I \text{ and } |x - c| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

  开区间 I 上的函数 f 被称为在点 $c \in I$ 处连续，若 $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ 使得

$$x \in I \text{ 和 } |x - c| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$



Alston Householder

当然，第一种写法较为口语化，读者会比较喜欢。上述第一种写法还可写得完全口语化：

> – A function f on an open interval is said to be *continuous* at c in the interval if for every positive number ϵ there is a positive number δ such that the distance of $f(x)$ and $f(c)$ is less than ϵ for all x in the interval with distance to c less than δ.
>
> 开区间上的函数 f 被称为在该区间内的点 c 处连续，如果对每一个正数 ϵ，存在正数 δ 使得对区间上所有和 c 的距离小于 δ 的那些点 x，$f(x)$ 和 $f(c)$ 之间的距离小于 ϵ。

这就更像作者和你娓娓动听地交谈了。许多数学大家写的书就具有这样的风格，如以 Householder 变换著称于世的计算数学家 Alston Householder (1904 — 1993) 的纯数学书《数值分析中的矩阵论》(*The Theory of Matrices in Numerical Analysis*)，写过《矩阵迭代分析》(*Matrix Iterative Analysis*) 经典著作的 Richard Varga (1928 —) 对 Householder 这本书的评论是：

> Without question, this book represents one of the real highs in scholarly attainment in numerical analysis, and as such, it belongs on the shelves of students and researchers alike in this field. The author has succeeded in bringing all the related contributions of various authors in the field of matrix theory under a single unified point of view.
>
> 无疑，这本书代表了数值分析中学术成就的真正高点之一。正因如此，它应摆在这个领域学生和研究者的书架上。作者成功地将矩阵理论领域中众多研究者的相关贡献置于一个独特的统一观点下展开。

读起来朗朗上口的书绝不是刻板复杂地把“定义、定理、推论；定义、定理、推论……”机械罗列法的方式写出来的。可惜的是，许多教科书或研究专著的写作风格就是以这样的“标准格式”定义来定义去、定理前定理后，读起来枯燥干涩，味如嚼蜡。这就为许多人在办公室的书架上排满了专业书，但大都只读了前几页这一事实提供了一个合情合理的解释。如果我们翻开 N. Dunford 和 J. Schwartz 被人称为“泛函分析的圣经”的巨著《线性算子，第一篇：一般理论》(*Linear Operators, Part I: General Theory*)，就可以注意到书中众多的数学名词并非都是按照标号方式定义的，而是在行

文中直接引出它们的意义.

有时，一个定义或符号用过几次以后可能很久以后才再次用到，此时读者大概已经忘记了该定义或该符号的意义，甚至作者也是如此. 让读者翻回某页寻找那个定义，不光颇费功夫，读者也可能不太情愿. 这个时候最好的办法是复习定义，让读者温故而知新. 可以用的句型包括 We (Let us) recall the definition of .... In Section 1.3 we defined ... as ..., As we have defined (known, studied), the notation ... means (represents) .... 记住，如同 Krantz 所言："一般来说，重复提醒是好事 (In general, redundancy is a good thing)" 因为这样可以为读者的阅读理解过程提供方便.

数学书的主要部分是根据公理、定义，经过逻辑推理演绎过程得到的数学结果. 这些结果可以用不同的方式来表达. 它们有定理、命题、推论（系）或引理. 命题，按照汉语词典的定义，是为真的叙述，故理论上而言，所有的数学结果都可叫做命题. 然而，在数学中有一些约定俗成的做法：一般而言，最重要的结果冠以定理之名，而一般的结果可以称为命题或推论，后者一般是那些可由某个定理或命题直接推得的特殊结果. 其证明往往寥寥几句即可. 引理也是一种命题，但它的效用是为证明定理或命题服务的. 经常的情形是，某个重要定理的证明太长、要分许多步才能完成. 证明过长对读者而言的确是一种折磨. 为了让他们有喘息的机会，作者可以考虑将证明过程中依次得到的中间结果写成一系列引理形式. 这样，定理的证明既不显冗长，又让读者感到证明过程条理清晰，一步一个脚印.

有些引理，虽然在文中的作用只是辅助性质，但其实它本身就是一个美轮美奂的绝妙定理. 更有些定理，因为有众多应用，或为历史因由，也称引理. 如实变函数论中著名的赫利引理、复变函数论中的许瓦茨引理或偏微分方程数值解中的 Lax-Milgram 引理. 如果一个好结果，不光本身有资格名列定理之林，更在用来证明书中其它结果构成关键一步，这样的定理也能以引理形式出现. 总之，定理、命题、推论等的归类，全凭作者统筹酌定. 原则上，定理不要太多，所有结果全写成定理就会抓不住重点，有平铺直叙之嫌. 美国计算数学家 James Wilkinson (1919—1986) 的名著《代数特征值问题》(*The Algebraic Eigenvalue Problem*) 虽有 662 页之多，却只列出四个有标号的定理！科技书籍虽然应以严谨为重，但也要写得掷地有声、张弛有致，包括不同等级的命题以不同的面貌呈现，否则书的吸引力就会



James Wilkinson

减弱。

很多教科书中的一些定理是用标准方法证明的。有些标准证明已经载入史册，难以超越，例如遍历理论中的极大遍历定理 (maximal ergodic theorem)。但是你的书中如果有一两个具有更多的定理证明独树一帜、想法新颖，对你而言固然酣畅淋漓，对读者而言难道不像品尝了一道新鲜菜肴？本书作者之一在他一部关于非负矩阵及正算子理论与应用的英文教科书 [8] 中，用了他不久前发表的一个关于矩阵特征值摄动结果，证明了关于正矩阵最大特征值的一个经典结果：它的代数重数与几何重数都为 1。到那时为止其它书中给出的该定理证明虽不尽相同，但都很繁琐。这个新证明不光精简，也是相当新鲜的。

5.3 序言目录

序言 (Preface 或 Foreword) 是一本书的门面，是作者写作目的宣言书，或许是一本学术著作中最应下功夫写的部分。序言写得好不好对书的销路前景至关重要，影响到它的前途和命运。因此，每一个作者都要在序言上花点功夫，在已写出好书的基础上努力把序言写成锦上添花之物。

本质而言，序言对于书的功能类似于摘要对于文章的作用。但由于书的写作论题和读者范围远大于论文，序言里交代的东西也比文章的摘要广泛得多。在序言里，作者告诉读者写作本书的初衷何在，潜在的读者群在哪里、预期得到哪些效果。序言里有作者关于本书的假设、设想、规划，当然也包括内容的勾勒。当然，在序言里没有必要列出本书覆盖的所有内容大纲，更不应该一字一句地复制目录中的所有章节。事实上，书内各章各节的标题列举是目录要做的事，注意，英文目录 (Contents) 一词总用复数形式。

序言里不应省去一些不能失却的细节，例如，该作品如何弥补目前的书籍的不足以满足读者的需要。如有任何诸如此类的断言，最好提供有说服力的证据，而非唤不醒他人信服的泛泛而谈甚至是有误导嫌疑的夸夸其谈。任何叙述必须具有科学的根据，口吹自擂是序言写作的大忌。在真实可信的基础上，作者可以指出为什么此书比起其它同类书籍更适用于某个读者群（比如说，未学过微分几何的机械工程系研究生或有测度论基础的计算科学研究者），也可以阐明为何本

书处理问题的全新角度会让一些经典理论的讨论更为简洁。如果作者确信他的著作在该领域中关于某个特定论题的分析将是开天辟地之作，在序言中便应明确地告诉读者。

正如在本章开始时所述，写书的最初阶段是列出写作提纲，包括目录的安排。想象一下，第一章的题目若没有事先写好，怎能开始动手写作？第一节的名字如果还没有想好，怎有心思写这一节？因此，一定要先把章节目录写好，越详细越有用。越对每章每节的论题心中有数，写作时就越有自信心，头脑里的书稿轮廓就越加清晰。不要担心目录过早成形，因为随着时间的推移，目录会随内容或章节次序的变动而随时调整。

其实，如用目前最好的电子排版软件 LaTeX 写书，目录不必单独制成一个文件。在编译后，这个电子排版系统会根据书中的实际章节自动地生成目录。当在电脑屏幕上显示出书稿时，它的目录页便一目了然地出现在那里。

当出版社考虑一本书稿出版时，一般会先向该领域内的一个或几个专家征询该书是否值得出版的建议。当一名审核者收到出版社编辑寄去的全部书稿或代表性章节后，其首要举动便是审阅该书稿的序言或计划书 (Prospectus；如果序言还未写出)，以及目录。这两项信息马上向审核人提供关于这本计划出版的书的一个快速概观，使之一目了然地得知：这本书覆盖了哪些内容？适合本科生还是研究生？哪些专业的人构成读者群体？他们需要哪些预备知识？市面上有哪些内容类似的书？著者关心的是什么？该书能达到什么目的？这样审核者会更容易地了解作者的意图，也会继续有兴趣地阅读作者提供的书稿章节。

当一本数学书确认出版后，为了市场推销的需要，出版社往往要事先做新书的宣传，或在普及性数学杂志以及数学学会等专业组织的出版物上刊登广告。广告的内容一般是该书的目录以及序言中的部分句子或段落，或许再加上一、两个专家书评的“溢美之言”。潜在的购书者也是通过广告词中包含的目录或序言估计该书能给他们提供的学术价值来决定是否要掏腰包。在书店里盘桓的顾客主要也是通过翻看最初几页上的序言、目录部分，顶多细看一下第一章第一节第一页，然后开始思忖，是否值得花上几十元或上百元的钞票买它回去仔细阅读？如此可见，序言和目录对于一本书的命运是何等的重要。



Godfrey Harold Hardy



Isaac Asimov

有时，序言并非作者的专利，作者也可邀请一名具资格者代为撰写。如果一本经典名著的作者已逝世，再版时可能会请一位专家学者另加序言，这样的新序言本身很可能就是一篇极佳的散文及导读。如下面第 6.3 节提到的英国数学家哈代 (Godfrey Harold Hardy, 1877—1947) 的名著《一个数学家的辩白》(*A Mathematician's Apology*) 再版时，斯诺 (C. P. Snow, 1905—1980) 通过长篇序言栩栩如生地讲述了哈代的学术和生活故事。

我们在这里转录著作等身的美国伟大科普作家阿西莫夫 (Isaac Asimov, 1920—1992) 为 Carl B. Boyer 和 Uta C. Merzbach 1968 年初版的里思旧著《数学史》(*A History of Mathematics*) 第二版所作的序言吧：

Foreword. Mathematics is a unique aspect of human thought, and its history differs in essence from all other histories.

As time goes on, nearly every field of human endeavor is marked by changes which can be considered as correction and/or extension. Thus, the changes in the evolving history of political and military events are always chaotic; there is no way to predict the rise of a Genghis Khan, for example, or the consequences of the short-lived Mongol Empire. Other changes are a matter of fashion and subjective opinion. The cave-paintings of 25,000 years ago are generally considered great art, and while art has continuously—even chaotically—changed in the subsequent millennia, there are elements of greatness in all the fashions. Similarly, each society considers its own ways natural and rational, and finds the ways of other societies to be odd, laughable, and repulsive.

But only among the sciences is there true progress: only there is the record one of continuous advance toward ever great heights.

And yet, among most branches of science, the process of progress is one of both correction and extension. Aristotle, one of the greatest minds ever to contemplate physical laws, was quite wrong in his views on falling bodies and had to be corrected by Galileo in the 1590s. Galen, the greatest ancient physicians, was not allowed to study human cadavers and was quite wrong in his anatomical and physiological conclusions. He had to be corrected by Vesalius in 1543 and Harvey in 1628. Even Newton, the greatest of all scientists, was

wrong in his view of the nature of light, of the achromaticity of lenses, and missed the existence of spectral lines. His masterpiece, the laws of motion and the theory of universal gravitation, had to be modified by Einstein in 1916.

Now we can see what make mathematics unique. Only in mathematics is there no significant correction—only existence. Once the Greeks had developed the deductive method, they were correct in what they did, correct for all time. Euclid was incomplete and his work has been extended enormously, but it has not had to be corrected. His theorems are, everyone of them, valid to this day.

Ptolemy may have developed an erroneous picture of the planetary system, but the system of trigonometry he worked out to help him with his calculations remains correct forever.

Each great mathematician adds to what came previously, but nothing needs to be uprooted. Consequently, when we read a book like *A History of Mathematics*, we get a picture of mounting structure, ever taller and broader and more beautiful and magnificent and with a foundation, moreover, that is as untainted and as functional now as it was when Thales worked out the first geometrical theorems nearly 26 centuries ago.

Nothing pertaining to humanity becomes us so well as mathematics. There, and only there, do we touch the human mind at its peak.

序言： 数学在人类思想上独当一面，它的历史也与其它历史本质不同。

在历史的进程中，人类活动的几乎所有领域都以变化为标志，这种变化可以视为改正和/或延伸。这样，政治与军事事件的演化史中的变化总是混乱不堪的。例如，无法预测成吉思汗的崛起或短命的蒙古帝国的后果。其它的变化取决于时尚和主观意愿。25000 年前的岩洞画一般被认为是伟大的艺术。虽然艺术在下一个千年中连续地——甚或混乱地——变化，在所有的时尚里含有不朽的元素。同理，每个社会都视自己的方式为自然并合理，而把其它的社会看作奇怪、可笑、丑恶。

但是，真正的进步只存在于科学之中。仅仅在那里记录着迈向更高水平的持续进步。

然而，在科学的大多数分支里，进步的过程就是改正和延伸的过程。亚里士多德，这位思考物理定律的最伟大思想家之一，关于落体的观点完全错了，需要伽利略在 16 世纪 90 年代加以纠正。最伟大的古代医生盖伦因不被允许研究人类尸体，所给出的解剖与生理的许多结论非常错误，必须由维萨留斯在 1543 年和哈维在 1628 年来改正。甚至最伟大的科学家牛顿关于光本性和透镜消色的见解也是错的，让他失去发现光谱线存在的机会。他的运动定律和万有引力的杰作，必须由爱因斯坦于 1916 年来修正。

现在我们能看到什么使数学独特。仅仅在数学里面才没有大的改正——只有存在。一旦希腊人发展了推理法，他们所做的一切都是对的，永远是对的。欧几里得的工作不完备，已被极大地扩展，但从没被改正。他的每一个定理直到现在仍然成立。

托勒密也许对天体系统给出了错误的描绘，但他为了计算而发展出的三角系统永远保持正确。

每个伟大的数学家为已建大厦添砖加瓦，但没东西需要连根拔起。因此当我们读到像《数学史》这样的书时，我们获得一幅有支座结构的图画，其基础越来越高、越来越宽广、越来越漂亮壮观。并且，这幅图画现在和几乎 26 个世纪前泰利斯发现第一批几何定理时一样地清白有用。

没有哪个人类涉及的东西能像数学那样与我们共舞。在数学那里，也仅仅在它那里，我们能摸到人类心智的最高峰。

读完这样短小精悍而又意味深长的优美序言，我们有什么理由不为数学而赞叹，有什么理由不为游弋于数学之海而骄傲？未来的学术著作者们，请写好你们大作的序言吧！

5.4 辅助材料

书的辅助部分包括参考文献、索引和附录。它们虽然列于书的正文之后，却是整本书不可或缺的有机部分。写好书既离不开作者的知识结构、聪明才智、写作技巧，也离不开作者从其它书籍文献中吸取的养分。同时，书中许多结果与思想来自于许多先驱者的工作，这些之前的成果或散落在原始论文之中，或总结在各种专著之内。而某些

需要更进一步探讨的论题，在书中也许因篇幅的限制、表达的复杂性以及读者程度的假定而未能提及，这时作者应该告诉想进一步学习的读者从哪些文献中可以找到与它们密切相关的材料。这些与所写的书息息相关的参考部分，需要在书末的参考文献 (Bibliography) 中列出。

我们在第一章第七节已经讨论过英文数学文章中参考文献的写法，它们同样适用于写书，故我们不再重复那里已说的话，只进一步指出如下几点：

1. 大部分研究专著列出的参考文献与书中的引用一一对应，这与对文章的参考文献要求一致。但对于写书，这不一定是必需的，尤其对于基础性的教科书而言。与研究性文章相比，书在提供某个学科的基础知识与研究现状方面更具有对读者的教育意义，因而可以充分列出更多的文献，以便读者查阅。例如，Householder 的书《数值分析中的矩阵论》有五分之一的篇幅列出了约 900 条参考文献，达 44 页长。

2. 好的学者不光要有精深而广博的专业知识，也应对所在学科甚至邻近专业的进化史有较为透彻的了解。因此，理工科教科书甚至专著应当在传授知识的同时增加文化的氛围，注入学科发展简史以让学生知道每一个科学概念从何而来，怎样由婴儿走向成熟，这也提高了读者阅读的乐趣。为了让读者知道书中重要数学论题的历史发展，作者可以在每章的最后一节以历史梗概 (Historical Remarks) 或相仿的标题列出这一章主要概念的历史发展线索，并引用参考文献中列出的相应论文或书籍。

3. 为了照顾求知欲更强或基础更雄厚的读者，作者也可以在每章的末尾提供扩大视野和知识层次的后续读物 (Further Readings)，列出有关书籍和论文，指出它们的主要内容和特点，以便指引高程度读者进一步深化知识，提高独立研究的能力。

现在，排版软件 TEX 或其变种 LATEX 广泛用于数学写作，其中 BIBTEX 用来生成格式漂亮、一清二楚的参考文献。BIBTEX 的前三个字母就是从英文单词 Bibliography 移植而来。假如一本书稿主体文件名是 mybook.tex，便可以把所有参考文献按照规定的格式输入到一个名叫 mybook.bib 的文件。具体操作过程请参见 TEX 或 LATEX 的使用手册。

索引 (Index) 也应是一本专业书的有机部分之一。它的功用是便于读者查询专业术语和符号等有用词组在书中出现的位置。传统上国内几乎所有的学术著作都缺乏索引部分，这对读者来说非常不便。许多人常有这样的体验：想在曾经读过的一本书中找某个术语的定义，但搜寻起来花去不少时间，甚至翻来覆去也遍寻不着。我们都在欧美大学读过博士，做过研究，深深感到阅读西方专业书籍在这方面的便利之处，因为再薄的书也附有索引。

索引有两类。一类将所有的信息放在一起，包括术语、符号和人名，大部分书采用这种一刀切的方式，如 Krantz 的书 *A Primer of Mathematical Writing: Being a Disquisition on Having Your Ideas Recorded, Typeset, Published, Read, and Appreciated*。另一类则分门别类地提供索引：学科索引 (Subject Index) 和作者（人名）索引 (Author 或 Name Index)。换言之，所有的专业术语和所有书中出现的人名分列两处，Higham 的书 *Handbook of Writing for the Mathematical Sciences* 属于此类。

还有一些内容翔实的专业书，由于数学符号甚多，作者或将它们放进索引便于查阅，或将它们单列一处，做成符号表 (Table of Notations)，放在书前书末都可。建议放在书前，好处是读者在全书阅读前就能一览无余地知道这些符号及其意义，并能熟悉它们的用途。

由于功能强大的计算机排版系统的广泛应用，索引的准备已经不太麻烦了。如果你想把书中某一页上刚定义的数学名词 Banach space 收录在索引中，并列出它所在的页码数，只要在该词组旁打进 \index{Banach space} 即可。在编译 (compile) 书稿源程序 (tex file) 时，产生索引的执行命令是 \makeindex。

最后我们谈一谈附录 (Appendix) 的用途。一般而论，除了号称自封闭 (self-contained) 的书，大部分数学书假定读者已经具备阅读本书所需要的预备知识。比如说初等微积分教科书都假设读者已学过初等代数、平面几何和三角。实分析的教材也面向已读过数学分析或高等微积分的学生。那些写法高超的书，如卢丁的《实分析与复分析》，内容虽然深湛，却未假设读者具有多少预备知识，只从分析中最重要常数 e 的定义开始讲述，所有定理的推导都只依赖书中内容之前章节的已证结果和定义。当然此书对读者的逻辑思维能力及其理解力甚为倚重。

在第一章列出复习本书需要的一些基础知识的做法在某些专业性较强的教科书或专著中较为常见。例如，对于一本讨论偏微分方程数值解现代方法的著作，如果需要泛函分析的一些理论工具，这些部分可以单列一章作为服务全书的准备工作。Lasota 和 Mackey 合写的专著《混沌、分形及噪音：动力学的随机方面》(*Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics*) [19] 讲的是用概率方法研究确定性动力系统。书中讨论所需的测度论数学基础放在了引论后的第一章。

然而，关于这样的预备知识还有另外一种更为常见的处理方式。作为作者，当你觉得书的正文中不应包含太多的预备部分，但又不忍让读者去翻阅其它基础读物，可以将这些更基本的标准结果放在书末的附录中，便于读者复习之用，并在读书过程中随时回到此处查阅有关结果。此外，如果书的正文中某些引理或某个结论的证明太过于技术性或太繁复冗长，放在正文中可能会干扰或中断作者及读者的思路流动，解决的方法之一就是将它放到附录中去，让读者掌握阅读的主动权。这样，你写作的主要思路未被打断，便能继续朝前走。

附录不一定只有一个，数量多寡完全取决于需要。本书作者之一的那本合著 *Nonnegative Matrices, Positive Operators, and Applications*（《非负矩阵、正算子及应用》）[8] 讨论的对象属于矩阵理论和泛函分析这两个学科中较为特殊的子领域，但用到一般矩阵论和算子理论的基本知识。如果把这些最基本的预备知识放在正文，势必增加篇幅，且突出不了主题。然而，这些初等结果又是理解正文不可或缺的。为了方便读者的参考需要，作者最后决定在书末放上两个简洁的附录，一为矩阵理论基础，一为泛函分析初步，附录内几乎一切书中要用到的基本定理只叙述、不证明。

附录还有一个妙用。它可以将另一作者做出贡献或亲笔撰写的与本书的内容有密切联系的东西“收入囊中”作为补充读物。这些额外的知识或新结果因为不属本著作的主题，因而不足以构成本书的主体部分。这时，附录就成了它的理想居所。1963 年，华罗庚的名著《多复变函数论中的典型域的调和分析》要出英文版，他请他的得意门生龚升 (1930—2011) 将其在典型群上的调和分析创造性工作写成一篇综述性文章作为该书的附录 III，并在书末的参考文献中引用了龚升的研究。

总之，附录是一个随时供作者使用的写作避风港，亦可充当食品添加剂，简单而重要，建议学会有效地利用它。

5.5 书的出版

当你花了几年工夫写成的书，经过同行的鉴定、课堂的检验、学生的赞扬，并根据他们的建议修改、润色，到了几乎完美无缺的地步时，这时你的目光应转向到出版社了。

众所周知，研究性文章不能一稿多投，即每次投稿时只能投到一个杂志，而不能同时投到两个或以上的杂志。籍一稿多投增加录用概率的做法是违反学术道德的。当然，当已投稿的杂志明确拒绝刊登时，可以投向下一个杂志，同样也只能是一个杂志。

上述的文章投稿规则对书稿并不适用。你可将书稿同时寄给不同的出版社，以获得最大期望的结果。有几个名声响亮的学术出版社供你选择。它们是美国数学会 (AMS)、施普林格出版社 (Springer-Verlag)、Birkhäuser、世界科技出版社 (The World Scientific)。他们也出版系列丛书，如施普林格出版社的黄皮书 *Lecture Notes in Mathematics*。一些著名的大学出版社，如普林斯顿大学出版社、剑桥大学出版社和牛津大学出版社 (Princeton University Press, Cambridge University Press, Oxford University Press) 都是严肃认真的高质量学术出版机构。中国有些出版社也出版英文专业书，如科学出版社，高等教育出版社等。有的和国外著名出版社联合出版，如高等教育出版社与清华大学出版社均与施普林格出版社有合作出版计划。

在考虑出版社时，应先在它们的网页上浏览已经出版的书籍明细表，了解它们出书的计划、出版物及其作者的质量和名气、出版的学科所属。了解这些行情之后可以对不同的出版社相互比较一番，再根据自己书稿的特点决定与哪些出版商联系。

为了缩短出书时间，可以在写书的同时与出版社接触。常见的做法是，先写好书的前几章，包括已经完成的序言、目录部分和写作计划书，然后给出版商写信，同时寄上这些材料。信上要包括对该书的详细描述。在与出版社商谈出版事项时，作者须对与计划完成的书稿有关的如下信息了如指掌：

(1) 书稿所属学科以及书名；
(2) 对于读者的难易程度；是否适合本科生、研究生、或职业训练的水准；
(3) 什么类型的课程可以采用该书；
(4) 市场上与该书竞争的其它图书；
(5) 作者估计需要多长时间完成写作，何时可以交稿。

出版商需要以上的信息，他们据此以及对市场的初步调查决定是否对这个出书计划感兴趣。如果有兴趣，他们就会进一步寻找专业行家的审稿意见。有的出版社为了省事，让书稿作者提供几个可行的审稿人名单，但严格把关的出版社会谨慎地单独行事，获取内行并与作者无直接学术或个人关系的学者的审核意见。这样的独立审核人大约为二到四名，可能要花费几个月的时间完成审核过程。

审稿人对书稿的内容可能会提出尖锐的批评意见，作者应做仔细的阅读。这些意见书的忠言逆耳是十分宝贵的，因为负责任的审稿人常从潜在读者的角度审视作者提议的书稿计划，他们在审稿报告里表达的是阅读书稿全部或部分内容后获得的总体印象。作者不要像对待研究性文章的审稿报告那样提出反驳意见，即使你认为真理站在你的这方。正确的做法是：忘记为自己辩护，不必回答审稿人的评论，更不要对批评过分反应，因为即使你不理解审稿人在想什么，他所说的却是读书后的真实感受，往往是真知灼见。你可以从这些有价值的报告中学到怎样改进想要出版的这本书。

如果审稿人对书稿的意见以肯定为主，出版社基本会决定出版它。这时候编辑大概首先会建议你充分考虑审稿报告中的那些改进建议。他可能会和你一起讨论，提出修改的一些原则性意见，但这不等同于遵循审稿意见中的每一条。作者应该记住的是，审稿人一般仅仅着眼于统观大局，而不拘泥于细枝末节。他不大可能一字一句地检查定理证明的对错，这是太花时间的脑力劳动。一般也不会替你修改英文。如果你的书在出版后被发现有学术性、技术性、文字性错误，这不是审稿人的过错，而是你的问题。理由很简单：你是作者。这点对文章发表亦然。因此，即使审稿人对你的作品贴上了“通过”的标签，这不等于打了“处处正确”的包票。你必须仔细地检查自己的工作，字斟句酌，像德国人那样力求做出精品来。

其实，你有足够的时间将书稿完美化。书稿审查期一般已给了你几个月时间进行这件事。在出书合同规定的交稿期限内你都应该花足时间校对、校对、再校对。商界有一句口号：顾客是我们的上帝。对写书而言，我们应有这样的口号：读者是作者的上帝。然而，许多即便是大型出版社出版的中文大学通用教材，我们常常发现不少令人啼笑皆非的错误。我们有熟悉的数学朋友，承蒙惠赠英文大作，却不忍卒读。书中文字错误百出，令人欲读不能，只好将它长期供奉在书架一角之处。有些书籍的编者、作者大概自己平时太忙，或者师道尊严的思想过多，让打字、校对等费时费力的工作一概交与他们的研究生干。不在作者处签名的学生可能觉得这是“无偿劳动”，我们也难以责怪他们马虎了事，因为他们不是作者，只是廉价的劳工。

固然，一本书校对 10 次说不定还有不少错误未被发现，尤其是校对自己的书稿时，一个明显的笔误在眼皮下溜过去不是一个罕有的体会。三十多年前，美国加州大学伯克利分校的数学教授项武义曾经戏谑，一本教科书“一页一小错，五页一大错”。Higham 在他的书中讲过下面的这个有趣故事。Abramowitz 和 Stegun 的名著 *Handbook of Mathematical Functions* 1964 年第一次出版后重印多次，每次都订正了一些错误。迟至 1991 年，还有一个新的错误被人发现：方程 (26.3.16) 的右端应是 $Q(h) - P(k)$，而不该是 $P(h) - Q(k)$。发现这个笔误并非再次校对之功，而是因为根据书中上述错误公式编制的某个程序计算出奇怪的概率分布而发现的。两名发现者在翌年于美国数学会《计算数学》杂志上也因此以 Table Errata 为题发表一篇只有一页的论文。

无论如何，尽管学术著作中笔误或多或少都是存在的，我们的态度应当始终如一：对读者负责，提高主观能动性，尽量把可能的写作之误在出版前扼杀在摇篮之中。

哈尔莫斯在他的自传《我想成为数学家》(*I Want to be a Mathematician*) 中说：Mathematicians love books（数学家爱书）。所以，我们为读者列出几本写法别致、读得畅快的优秀数学书：

1. W. Rudin 的“分析三部曲” *Principles of Mathematical Analysis. Real and Complex Analysis* 和 *Functional Analysis.*
2. N. Dunford 和 L. Schwartz 的“泛函分析圣经” *Linear Operators. Parts I, II, III.*

3. G. Strang 和 G. J. Fix 有思想的有限元导论 *An Analysis of the Finite Element Method.*

4. G. H. Hardy 和 E. H. Wright 的数论经典教材 *An Introduction to the Theory of Numbers.*

第六章 数学综合写作

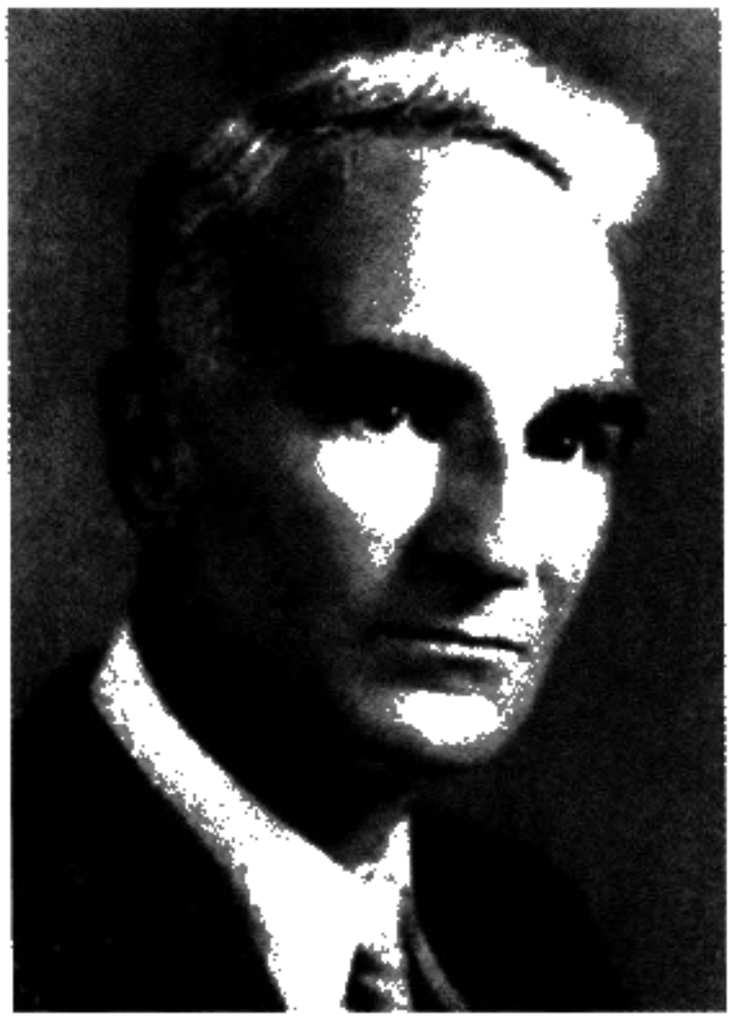
写好数学综合性和普及性文章也是数学写作的重要一环。研究性学术论文和普及性学术文章的读者人数相比颇有点像文学研究和文学作品的比较。文学研究论著，如文学理论和文学批评，一般为文学理论家所撰，对象人都是大学文科教师和学生，属于“阳春白雪”之流，一般读者不太光顾。而文学作品，如小说散文，人人都可读之，上至教授学者，下至市井平民，都可读得津津有味，废寝忘食。

有趣的是，文学理论家一般不写小说，而小说家也罕有做研究的兴致。当然也有众所皆知的例外，钱钟书的学术巨著《管锥篇》在学术界备受尊崇，而他的讽刺小说《围城》也令普通民众爱不释手，但这样的例子却不具有典型性。

对数学家而言，情况完全不一样。一个好的数学研究者也应该成为优秀的数学普及者。数学研究是一个数学家的毕生主要事业，如提出新思想、证明新定理、解决大猜想、建立新算法。清晰、准确地把结果以研究论文的形式发表，构成他的学术生涯的一大部分。这些论文是数学知识的新纪录，为数学本身及其科学技术所有领域提供了直接或潜在的应用前景。

然而，在数学家的职业生涯中，其它类型的数学写作比比皆是。学科介绍、综述报告、审稿意见、研究建议书、书评，甚至推荐信，都形成了数学写作的不同侧面。这些写作在英文里被称为 expository writing，中文可翻译成阐述性写作。如果说一个研究成果丰硕的数学家算作成功，那一个能让他的研究成果深入普罗大众人心的数学家则可称为杰出了。

被美国数学史家、1937 年初版的名著《数学家们》(*Men of Mathematics*) 的作者贝尔 (Eric Temple Bell, 1883—1960) 称为“最后的全能数学家”的法国大才昂利·庞加莱 (Henri Poincaré, 1854—1912) 是一百年前全世界最具创造力的数学家之一。其研究领域不光包括纯粹与应用数学的众多方面，亦包括相对论在内的物理学许多



Eric Temple Bell


Henri Poincaré

分支，而他对数学和科学哲学的深刻见解通过他脍炙人口的科学普及读物洒向大量的科学专业人士和普通市民百姓。他优美的科普著作一百多年来被翻译成多种文字出版，对芸芸大众的科学观之影响力不亚于他开创的现代数学学科对专业数学家研究的推动力。毕竟，当社会大众都能获得科学哲学的熏陶和数学思维的训练，那全人类的精神文明建设和物质文明积累就会大踏步前进。

庞加莱的故事反映出一个重要事实：在伟大科学家的眼里，好的研究者也会成为合格的教育家。对知识的渴望和对知识的传播构成一个真正成功的学者一生中的两大追求。

哈尔莫斯就是这样一位既是研究家又是教育家的数学家。他获得过美国数学会 1983 年度的 Steel Prize for Mathematical Exposition。在颁奖仪式的谢词中，他说了一段肺腑之言：

> I enjoy studying, learning, coming to understand, and then explaining, but it doesn't follow that communicating what I know is always easy; it can be devilishly hard. To explain something you must know not only what to put in, but also what to leave out; you must know when to tell the whole truth and when to get the right idea across by telling a little white fib. The difficulty in exposition is not the style, the choice of words — it is the structure, the organization. The words are important, yes, but the arrangement of the material, the indication of the connections of its parts with each other and with other parts of mathematics, the proper emphasis that shows what's easy and what deserves to be treated with caution — these things are much more important.
>
> 我喜欢学习、学会、逐步理解然后解释。但是这不能得出与我所知之物交流总是容易的结论；它可能异常困难。要解释某事，你不仅必须知道放进什么，而且需要知道哪些被剔除在外；你必须知道何时告诉全部真相，何时能让正确的想法通过某个善意谎言跨越过去。阐述的困难不是文体、选词——而是结构、组织。是的，词重要，但是材料的安排、它的各部分之间以及与数学其它部分联系的指示、显示哪些容易、哪些值得小心对待的合适重点——这些事要重要得多。

这说明，写好阐述性的数学文章，其困难程度不亚于研究性论文的书写。它对材料的选取与加工提出了更高的要求。

除了只让极少数人阅读的推荐信或审稿意见等外，像综述性报

告这样的阐述性写作面向的读者群比较大，因为它负有“数学传播”的使命。这就展示出这类体裁写作的新特点，也对它们的写作提出了新要求。

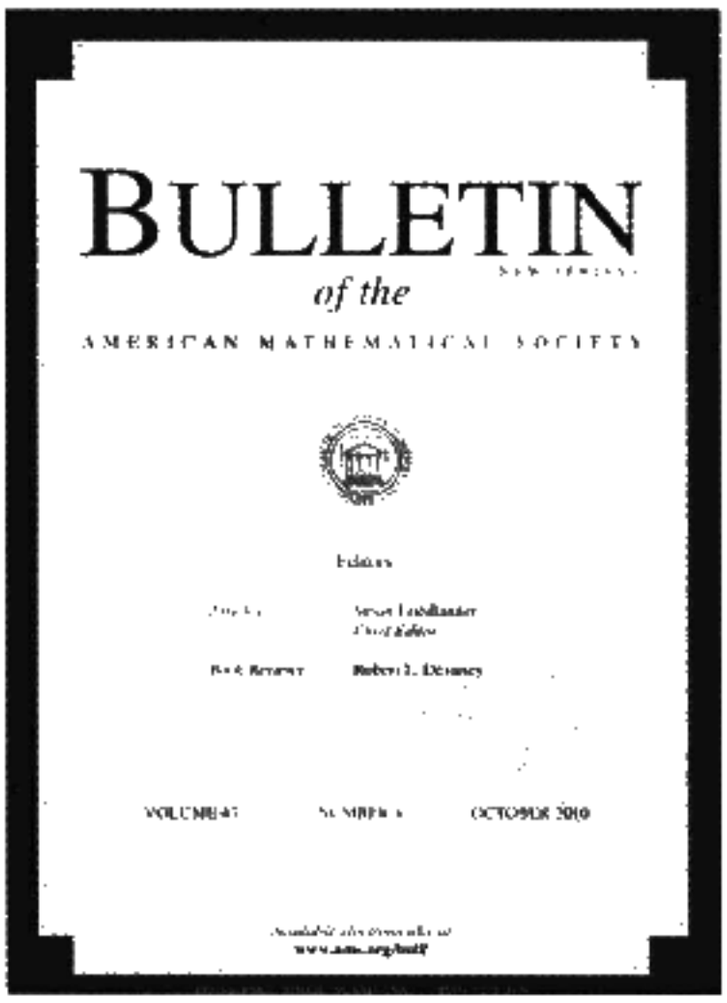
在下面的两章中，我们将谈谈非研究性文章的写作。在进入讨论之前，我们不要忘记前面第一、二章关于英文写作的基本要点对于任何形式的数学文章都有效。

6.1 综述文章

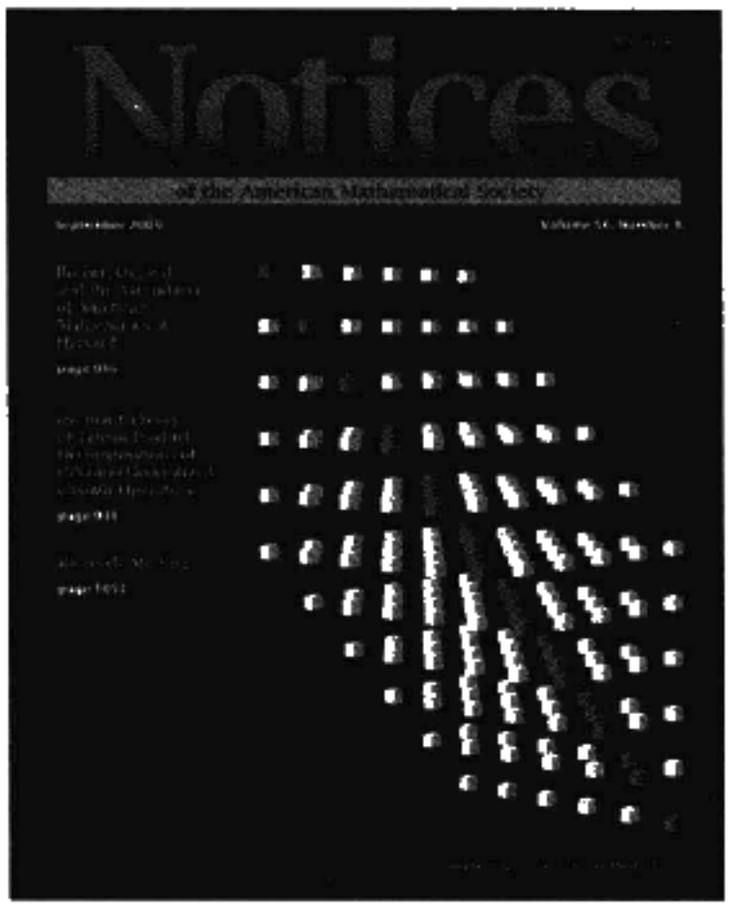
顾名思义，综述性文章与研究性文章的不同之处就在于，前者是对某一学科或某领域一段时期以来主要研究成果和现状 (state of the art) 的一个总结性概述，后者是作者最新研究结果的一个书面报告。从文章内容上来看，前者是辛勤园丁对已结满果实大树的啧啧称奇，后者是初为人母对才呱呱落地婴儿的一声惊喜。从撰稿人身份上看，综述性文章的作者在其领域往往已经功成名就，这篇文章可能就是应某本书或某杂志邀请而作；而研究性论文可由任何人物完成，其作者身份并没有象征意义。1905 年爱因斯坦推出他关于狭义相对论、光电效应和布朗运动等三篇革命性伟大论文时，他还只是瑞士专利局的一个小小职员。

综述性文章的功能似乎与教科书相同，但两者其实也有不小的差别。教科书更偏向教育的功能，它覆盖的内容基本上是那一学科的最基础部分，它面向的读者是大学生和研究生，因而假定读者只具备更基础的知识。譬如，一本泛函分析的教科书，无论是夏道行 (1930—) 等以适合大学生作对象编著的那本中国最好教材之一《实变函数论与泛函分析》，还是美国田纳西大学的数学教授 John B. Conway 为研究生写的教本 *A Course in Functional Analysis* (《泛函分析教程》)，都是关于这个数学分支的基础知识，只是后一本比前一本内容覆盖面更广些、更深些。它们丝毫不涉及书中所包含的子领域的任何当前研究现状。如果夏道行教授写一篇泛函分析中关于他所开创的“无穷维空间上的测度与积分”这一领域的综述性文章，它的起点就在基础教材之上，其读者对象是那些对此研究领域有兴趣的数学工作者。

综述性文章又经常脱胎于作者在某个国际会议上所做的四十五分钟或一小时特邀报告。美国数学会的邀请综述报告常刊登在它



Bulletin of the American Mathematical Society



Notices of the American Mathematical Society

的杂志《美国数学会通报》(*Bulletin of the American Mathematical Society*) 上。其它的专业或通俗杂志也不时登载综述性文章，目的是使广大读者熟悉那些有发展前途的新兴学科的研究现状。美国数学会的通俗杂志《美国数学会会刊》(*Notices of the American Mathematical Society*) 不光设有综述文章专栏，甚至登载只有一页纸长的解释新数学名词的短文，题目都具有统一的格式：What is ...?

由于综述性文章拥有庞大的读者群，摆在作者面前的是一个困难的平衡问题：数学内容的多寡和解释成分的分布。大多数读者对该领域的研究现状不甚了解，不能指望他们像读研究论文一样聚精会神地读你的综合报告。他们可能像读散文般以欣赏的态度对待你的作品，如果你在文中列出某个大定理详细而又复杂的证明，大概会把他们吓跑。如果你的综述文章是与哈密尔顿动力系统理论中著名的 Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) 定理有关，你不必提供这个定理的太多技术细节，而应从更为初等、更为具体的基本事实入手，比如说关于平面上圆环区域的经典庞加莱不动点定理，多讲一点 KAM 理论对于现代动力系统研究的影响和意义以及在不同领域的应用例子。有的重要定理虽然不必详证，列出证明思路或勾勒其主要步骤对读者可能有益，因为思想的理解比细节的追求更有意义，尤其对跨学科研究者容易起到触类旁通的作用。

总之，在写作综述性文章之前，你应该假定读者对此方面的背景材料知之甚少，他们不是该领域的行家，更不是权威。他们大多数只是初学者，抱着扩大知识层面、了解临近学科发展近况的初衷来浏览，而不是精读你的文章。作者之一在首次向他的博士生导师报告一篇研究论文时，导师的第一句话就是："你要把我当成笨蛋。"综述性文章的作者就是要把读者假设成彻底的外行人，以深入浅出的笔墨带出内容。

正因为读者群参差不齐的专业背景，尽管作者对本学科的研究现状了如指掌，真正写出一篇漂亮的综述性文章也不是一件轻而易举之事。研究论文的亮点是最新结果，综述文章主要以写法和风格吸引人，故从某种意义上讲，后者远远比前者难写。

《美国数学会会刊》每一期都会发表几篇介绍不同学科的综述性文章，由于面向的读者是全世界的美国数学会正式会员和美国各大学的高年级大学生及研究生会员，它们的写作方式是力求让具有不同数学训练的读者都能乐于粗读或细读，品味不同醇香的数学美酒，

品尝做法不一的数学佳肴。这些数学文章为提高整个读者群的数学素养贡献良多，也引导许多年轻学人进入新的研究空间，它们在内容展示、语言表达上均能经受读者的考验、时间的检查。多读它们，不光增进了自己的学问，也能从中体会写好这类文章的手法。SIAM 发行量最大的杂志 *SIAM Review* 的前几篇文章都是极为优秀的阐述性论文。



Ralph Waldo Emerson

在此我们提供写出一篇高质量综述性文章的几项关键之处。写作的第一要素是作者对于文章将要论及的整个学科有高屋建瓴式的洞察和了解，对它的知识结构有全面的通晓。但这还远远不够，作者亦要有把握重心、驾驭材料的能力，切忌将文章写成日记式的流水账。作者心中要清楚：读者花时间阅读的宗旨是希望从这篇文章读到原始的基本思想、新概念产生的来龙去脉、历史发展的渊源，从特殊到一般，从具体到抽象，而不是以编年史的方式罗列种种结果的层层堆砌。思想是一切研究的指路明灯。美国思想家爱默生 (Ralph Waldo Emerson, 1803 — 1882) 说过：唯一有价值的是拥有活力的灵魂。综述性文章需要的也是“活的灵魂”，它就是科学思想的融会贯通和活学活用。

好的综述性文章在开场时应务求简明，从复习初等概念着手。每个人都有避难趋易的本能，第一页就看到抽象语言、复杂定义、大量公式就不免胆怯，往往因此掩卷轻叹。数学之所以异于其它学科是因为它以高度抽象为特点。现代数学学科层叠，新概念泉涌不止，但无论花样怎么多变，数理的本质总万变不离其宗。再抽象的定义都有具体问题的影子。好的阐述者懂得抓住概念进化过程的那一根红线，让阅读者体验轻松畅快的学术之旅。比如，一篇上乘的关于多项式方程组同伦延拓法的文章可以从高中生都会解的特殊二元二次方程组作为初始点，比如像 $x^2 = 1$, $y^2 = 4$ 这般简单的方程组。然后再讨论怎样把这个解已知的方程组与解未知的像 $x^2 - y^2 = 1$, $2x^2 + 5xy - y^2 - 2$ 这样的方程组同伦起来，跟随所有的同伦道路，最终求出后一方程组的所有解。这种以初等方法起步的综述性文章远比一开始就引进研究求解多元多项式方程组的代数几何大定理吸引人，甚至连高中生都不会抗拒。

好的综述性文章应该富于具体的例子。缺乏生动活泼易于消化的好例子，抽象定义就好像是雾里看花，模糊不清，复杂定理就好像是空中楼阁，看似玄乎。一篇关于拓扑熵最新研究动态的文章，如果

不用几个拓扑动力系统众所周知的连续映射来阐述这些新结果的用途，就会让读者对定理的理解有捉摸不定的感觉。文中不必对定理作详细证明，只需提供大致的思路，或只需对某一有启发性的特别情形或具体例子论证一番，而一般的证明则让读者自行查阅有关的原始论文。作为例子，如果你想证明布劳威尔不动点定理，你不必证明对于紧凸集上连续映射的最一般情形，可以假设定义域为一闭球而映射为光滑的。这样就既可简化证明，而本质的思想亦没有丢掉。

一些简化证明用到的英文句型有 To simplify the proof, we add some assumptions 或 For simplicity, we consider only a special case。总而言之，不同于研究性论文的定理有必须详细正确证明的不成文规定，综述性文章内的定理证明可以简化、可以勾画、可以省略，更可以让读者在研究论文中自行查阅。

好的综述性文章应该高潮迭起，引人入胜，抓住读者的注意力。作者应是一位讲故事的高手。如果能像英国女作家克里斯蒂写的侦探小说那样制造一些科学的悬念，会吊起读者们的胃口。一篇关于代数域或伽罗瓦理论的文章如果包含阿贝尔、伽罗瓦的动人乃至悲惨的故事，就仿佛在这一学术大餐中增添了美味的调料。如果要讲基本拓扑概念的观念发展，费点笔墨在庞加莱关于天体力学三体问题得奖工作的微分方程定性理论和欧拉哥尼斯堡七桥问题的图论抽象，可让读者感受抽象数学定义在不同领域的奇妙用处。

好的综述性文章应该结尾新颖，能激起读者的共鸣与遐想，让他们有余音绕梁之叹。文章的结束之处，一个论题的大厦已经矗立在面前，一些里程碑的工作已经展示在空中，一片美好的前景向无穷远处伸展而去。这里有你的总结，有你的结论，有你的展望，更有你的信心。在这里，读者的心情被你的热情所激荡，他们中的一部分或许已经跃跃欲试，摩拳擦掌，准备在这充满曙光的未完全开垦的土地上大干一场。

最后，好的综述性文章应该列出比较完整的参考文献，它包括本领域最重要的教科书或专著。作者应优先列出那些有着主要贡献的研究论文，以及作者认为对未来发展极具影响力的最新文章。这些文献都应在文章内的合适地方恰当地被引用，文中亦应对那些原始工作的贡献作出客观而准确的评述。详细列出的参考文献为读者进一步了解有关论题的深入探讨提供了方便，这是综述性文章不可或缺的一个部分。

读者阅读了一篇优秀的综述性文章就像读完一本得了普利策奖的美国独立战争史，满载而归。他们学到了新数学，进入了新前沿，知晓了新事实，了解了新方法。他们会不时地重新捡起它，温故而知新。如果说研究性论文仅仅影响了少部分人，综述性文章则带动了一大批人。可以说，正因为它巨大的潜在功能，把握好这个千载难逢的机会把它写成洛阳纸贵之作，留给作者的是众人的感谢和无上的荣光.

让我们浏览一下一篇优秀综述报告的开头几段吧：

例 6.1 (*Notices of the American Mathematical Society*, **51**, 2004, p. 184).

Title. Geometrization of 3-Manifolds via the Ricci Flow

Introduction The classification of closed surfaces is a milestone in the development of topology, so much so that it is now taught to most mathematics undergraduates as an introduction to topology. Since the solution of the uniformization problem for surfaces by Poincaré and Koebe, this topological classification is now best understood in terms of the geometrization of 2-manifolds: every closed surface Σ admits a metric of constant Gauss curvature $+1, 0,$ or -1 and so is uniformized by one of the standard space-form geometries $\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2$. Hence any surface Σ is a quotient of either the 2-sphere, the Euclidean plane, or the hyperbolic disc by a discrete group Γ acting freely and isometrically.

The classification of higher-dimensional manifolds is of course much more difficult. In fact, due to the complexity of the fundamental group, a complete classification as in the case of surfaces is not possible in dimensions ≥ 4. In dimension 3 this argument does not apply, and the full classification of 3-manifolds has long been a dream of topologists. As a very special case, this problem includes the Poincaré Conjecture.

In this article we report on remarkable recent work of Grisha Perelman [15] — [17], which may well have solved the classification problem for 3-manifolds (in a natural sense). Perelman's work is currently under intense investigation and scrutiny by many groups around the world. At this time, much of his work has been validated by experts in the area. Although at the moment it is still too soon to declare a definitive solution to the problem, Perelman's ideas are highly original and of deep insight. Moreover, his results are already being used

by others in research on related topics. These circumstances serve to justify the writing of an article at this time, which otherwise might be considered premature.

The work of Perelman builds on prior work of Thurston and Hamilton. In the next two sections we discuss the Thurston picture of 3-manifolds and the Ricci flow introduced and analyzed by Hamilton. For additional background, in particular on the Poincaré Conjecture, see Milnor's Notices survey [14] and references therein. For much more detailed commentary and discussion on Perelman's work, see [13].

题目： 三维流形通过里奇流的几何化

引言： 在拓扑学进程中闭曲面的分类是一里程碑。它是如此有用，使得大部分数学系大学生念拓扑学引论时都要学之。自从庞加莱和科比给予曲面一致化问题解答以后，现在就二维流形的几何化方面对这个拓扑分类的了解最为透彻：每一个闭曲面 Σ 都容许一个具有常数 $+1, 0,$ 或 -1 的高斯曲率的度量，因而可由标准空间形式 $\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2$ 之一来一致化。所以任何曲面 Σ 都是二维球面、欧几里得平面、或双曲圆盘在一个离散群 Γ 自由作等距作用下的商。

高维流形的分类当然更复杂。事实上，由于其基本群的复杂性，维数 ≥ 4 情形曲面的完全分类是不可能的。维数为 3 时这种说法不适用，而三维流形的全部分类一直是拓扑学家的梦想。作为一个非常特殊的情形，这个问题包含庞加莱猜想。

在这篇文章里我们报告格里沙·佩雷尔曼最近的卓越工作 [15]—[17]；它也许已经（在自然的意义下）解决了三维流形的分类问题。佩雷尔曼的工作正由世界上多组人检查细察。截止到目前，他工作的相当大部分已被这个领域的专家认可，虽然这个时候宣称这个问题确实解决依然过早，然而佩雷尔曼的想法高度原创，并具深刻的洞察力，此外，他的结果已被他人在相关研究论题中使用。这些情况可充当现在撰写一篇文章的足够理由，否则可能会被认为是过早的。

佩雷尔曼的工作建筑在瑟斯顿和哈密尔顿之前研究的基础上。在下面两节我们讨论瑟斯顿关于三维流形的描绘和由哈密尔顿引进并分析的里奇流。其它背景，特别是关于庞加莱猜想方面的，可见米尔诺的综述报告 [14] 及其中的参考文献。对佩雷尔曼工作更详细的评述和讨论可见 [13]。 ♦

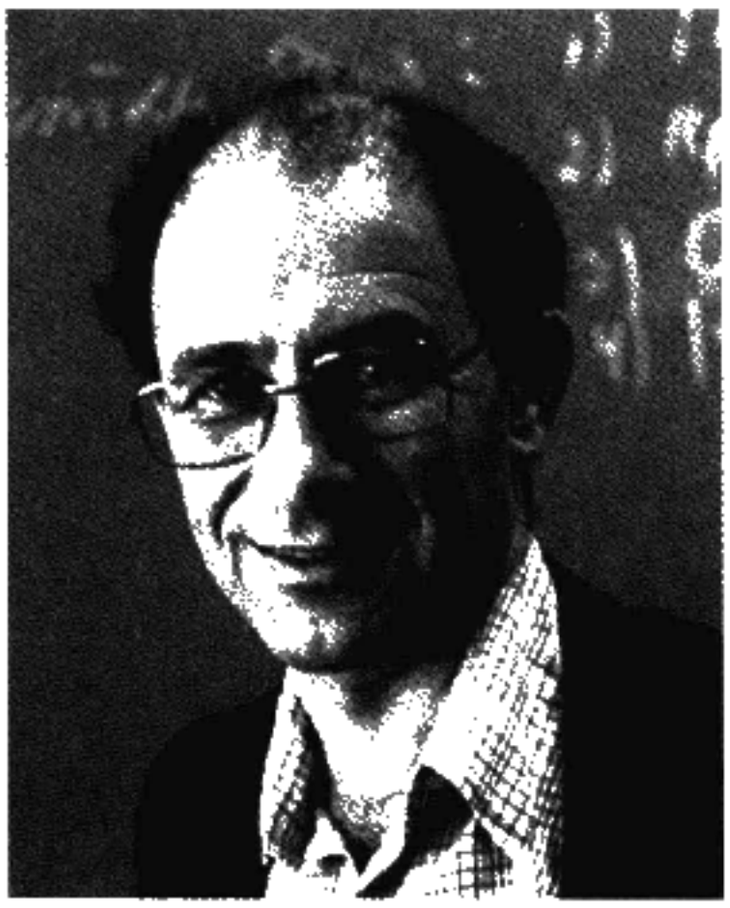
6.2 读书报告

在读书阶段，尤其是研究生期间，导师会指定学生阅读一些本学科的重要论文或书籍，借以奠定研究的基础，或在小组的讨论班 (seminar) 中报告。这时候，若有意识地撰写英文读书报告，虽然不会发表，却有一箭双雕之功：既帮助自己梳理对文章的理解线索，又增加了一次英文写作练兵的机会，为日后学位论文的完成进行排练。

读一篇学术论文与读一门课的教科书不同。教科书的内容是循序渐进的，弄懂不难。研究性论文用到的数学工具往往出乎于人们意料之外，很多已经跨出了读者目前的知识库。比方说，一篇关于线性规划算法复杂性的文章可能借用积分几何的思想和结果。又例如，正在阅读的这篇论文又与作者或其他人的另一篇文章有关，部分定理的证明需要参考该篇论文。这样一来，读懂一篇论文可能需要查阅其它有关资料。不过，耕耘是有收获的。这一过程将留给你不少迷茫、感叹和恍然大悟。

当你真正参透这篇文章时，你可以下笔写报告了。你的读书报告不是这样写的：This paper has the following results. Number 1 is ... Number 2 is ... (这篇论文有下面几个结果。第一……第二……)。那没有意思，那仅是罗列结果，几乎是重新复制。读文章的目的主要是学习它的思路，这也应是读书报告的主题所在。但是大部分作者有意无意地把他们脑袋瓜内的那个思路藏在文章背后，这需要读者设法把它挖出来。挖出思路的读书报告才是好报告。理解了文章的主要思想，就会更深入地理解主要结论的意义及它们与目前研究状况的关系。

读书报告的格式不必像写论文那样一板一眼地从引言写到结论。它的结构应该不落俗套，它的写法应该不拘一格。你可以围绕所读文献的主题进行发挥，从学科的发展简史入手，逐次展开到所论问题的提出与解决。你也可以单刀直入，提出问题，然后寻找历史的足迹。就像写叙事文一样，顺叙、倒叙，全凭你的思路发展和文字驾驭。但这篇报告内容的从上到下必须符合逻辑思维的合理顺序，能让读者或听众从你这里直接吸收到原文所提供的主要数学营养。你应当用自己的表达方式来复述作者解决问题的主要思路和主要定理的证明过程，而不满足于一字一句地抄写原文的推理步骤。用自己的话来写


Vladimir I. Arnold

读书报告是训练专业英文写作的好机会，不要轻易放过它。贯穿这一过程，你不光库懂了文章的数学思想，也经历了一次英文数学写作的练兵。

读书报告的另一重要部分就是根据自己的理解，对文章的结论进行分析和评述，提出一个观点要有充分的证据支持，要尽量使用自己的语言叙述别人的论文中所陈述的命题，以不同的形式表达等价的断言，这表明你真的搞懂了文章推理过程中的逻辑关系。如果可能的话，你可以将一般定理的证明变换一下，处理特殊一点的情形，借以检测自己是否有独立简化证明的能力。假使文章有吉洪诺夫 (Andrey N. Tikhonov, 1906 — 1993) 定理：任意个紧集的乘积也是紧集。你可以试图证明一个特例：两个紧集的乘积也是紧集。如果你的读书报告是为讨论班准备的，这样的简化证明也容易让听报告者消化。

但是，并不是每个研究生都能这样做的。有这样一个真实的故事，一位数学研究生在博士资格考试的口试时，教授要考她证明特殊的吉洪诺夫定理：两个紧集的乘积也是紧集。她央求教授让她证明如上所述的一般吉洪诺夫定理，因为她记得证明的每一个细节，而却不知道怎样证明更简单的两个紧集的情形。这说明，光靠机械记忆法读数学文章，是写不出理解透彻的读书报告的。无独有偶，俄罗斯数学家阿诺德 (Vladimir I. Arnold, 1937 — 2010) 在 2003 年一篇谈论他的老师、伟大的数学家柯尔莫果洛夫的文章中，也讲到他 2002 年参加面试申请法国一数学教授位置的某位候选人时，问了一下二次型 xy 的符号差为几，那位已教线性代数多年并已发表了几十篇论文的专家却迟迟疑疑地解释道，他的电脑程序一小时可以算出任何二次型的符号差，但他的大脑在十五分钟的时间内无法算出该题，这大概显示这位教授还没有真正掌握二次型的基本思想。李天岩在美国密西根州立大学对他博士研究生的讨论班报告立下如下的“规矩”：不要光讲 ϵ-δ 语言，那仅仅是逻辑，要讲基本思想和几何直觉。有了这样的要求，为讨论班准备的读书报告就不是一件轻而易举之事。

读书报告的最后部分应该总结你阅读文章后的心得体会，包括你对整个领域的看法要点，重复指出那些关键的想法和思想，并能展望新思想应用的前景。它应该类似于法庭陪审团对某件案件分析结果的最后陈述，让人清晰地知道这篇文章到底做了些什么东西，它的意义何在，它的贡献多大，以及它在所属领域中的历史地位。

6.3 学位论文

现在我们转向学位论文的写作，这里学位论文指的是硕士论文 (master's thesis) 和博士论文 (dissertation)。有的大学生毕业前也曾写作学士论文，如在美国的许多大学，一部分称为优等的学生 (honors student) 必须完成一篇 honors thesis 方能毕业。在欧洲，大部分硕士研究生需要写硕士论文，在国内，没有学位论文，研究生则不能毕业。而在美国，硕士学位可通过两种不同方式得到，一种是修足规定的学分，另一种是减少修几门课的学位要求，大多数学校减去两门课 (即六个学分)，换上一篇硕士论文。博士论文则对任何国家的研究生教育都是必需的。

虽然学位论文或多或少地应有一些创新的成分，尤其是博士论文，但总体上其大部分内容是对已有知识的阐述与总结，故我们把它们纳入本章“数学普及文章”写作的范畴，在这一小节稍加介绍。

学位论文应当满足下列基本要求：

(1) 显示该学生已经对某一领域的研究现状有一定的了解，并已阅读过部分文献。

(2) 证实该学生完成了这份学位论文研究，表明该学生已具备一定的从事原创性研究的能力。

对于博士论文，作为博士阶段训练过程的最后也是最重要的一步，一般还要求：

(3) 论文研究成果对所在领域有某种贡献；这种要求对硕士论文不甚强调。

对博士论文的“某种贡献”，不同的研究型大学有不同的解释，它们之间的差别可能相当大。有的博士论文开创了新的领域，如德国的黎曼 (G. F. B. Riemann, 1826—1866) 在哥廷根大学的博士论文；有的能发表在最好的杂志上，如中国的王湘浩在普林斯顿大学的博士论文。然而，绝大多数的博士论文仅仅表明作者已经受过足够的研究训练，基本可以独当一面，从事有意义的研究。如果达到这个目的，这份博士论文便是有价值的。20 世纪 80 年代初，国内某个著名大学的校长曾经指出，全世界绝大多数、甚至可能达到 90% 以上的数学博士论文对学科的发展几乎没有太大的影响。



G. F. B. Riemann

学位论文与一般学术论文的差别有下述几点：

(1) 学位论文的格式是严格的，其具体要求由所在的学校决定，不能违背，而一般论文的格式要求就灵活多了；
(2) 学位论文形式上像书，分为几个章节，而研究性论文一般只分节，不设章，因而前者的页数通常比后者为多；
(3) 学位论文必须是自封闭的，而研究性论文对理解新结果所必要的材料则可以让读者从其它文献中获取；
(4) 学位论文可以探讨多个论题，而研究性论文通常集中于一个论题的深入探讨；
(5) 学位论文的读者对象一般仅是指导教授及答辩委员会成员，而杂志上发表的论文的读者范围则广得多。

另外从字面上看，“学位论文”的对应英文单词，无论是 thesis 还是 dissertation，都与论文的英文单词 paper 相异，这在客观上就明确显示了它们与一般研究性论文的差别，比对应的中文词组更独具意义，因为后者从字面上看以为就是研究论文。顺便说一下，有些英文单词的中文翻译很好，如 chaos 翻译成“混沌”，有的不太准确，容易引起误解，如 temure 译成“终身教授”就容易误导，应该翻成“终身教职”，因为前面一个翻译容易给人以职称比正教授还要高的错误印象。

因为学位论文不像杂志论文那样有页数的限制，一般不必担心写得太多。有些科目的博士论文，比如数学教育方面的，往往很长，一二百页是常事，这与那个学科的教育特点和行文习惯有关。学位论文的写作原则是充分表明作者对所属学科的清晰理解，因而在它的概论部分可以不惜笔墨地将背景材料和预备知识交代透彻，便于答辩委员会成员审核时知道所研究问题的来龙去脉。这就要求尽量避免 it is easy to know that 或 the proof is omitted 这样的句子。另一方面，学科历史发展的陈述也不需面面俱到地包含与本文主要结论不太相干的成分。例如，一篇关于区域分解法的学位论文不必大谈特谈与算法分析关系不大的偏微分方程解的存在性理论，尽管算法的目的是数值求解某一类偏微分方程。

学位论文的结构有基本的规律。在它的开端第一、二章，一般是提出想要探索的主要论题。问题的提出与描述应该清楚无误，并与上下文一致。然后，简明地评述与此有关的学科发展和目前研究状况。这时，作者应显示出对相关文献资料的足够了解和认识。下一步就是作者提出自己对问题求解的基本思路和想法，同时指出其新颖之处，

如有不足之处，也要坦诚相告。对于理论性的探讨，证明一些定理是必需的。如果属于应用数学的范畴，就要对实际问题的数学模型进行令人信服的详细分析。在计算数学领域，要比较新算法与目前已知的主流算法在计算量和精度等方面的优劣，从而作出理由充分的结论.

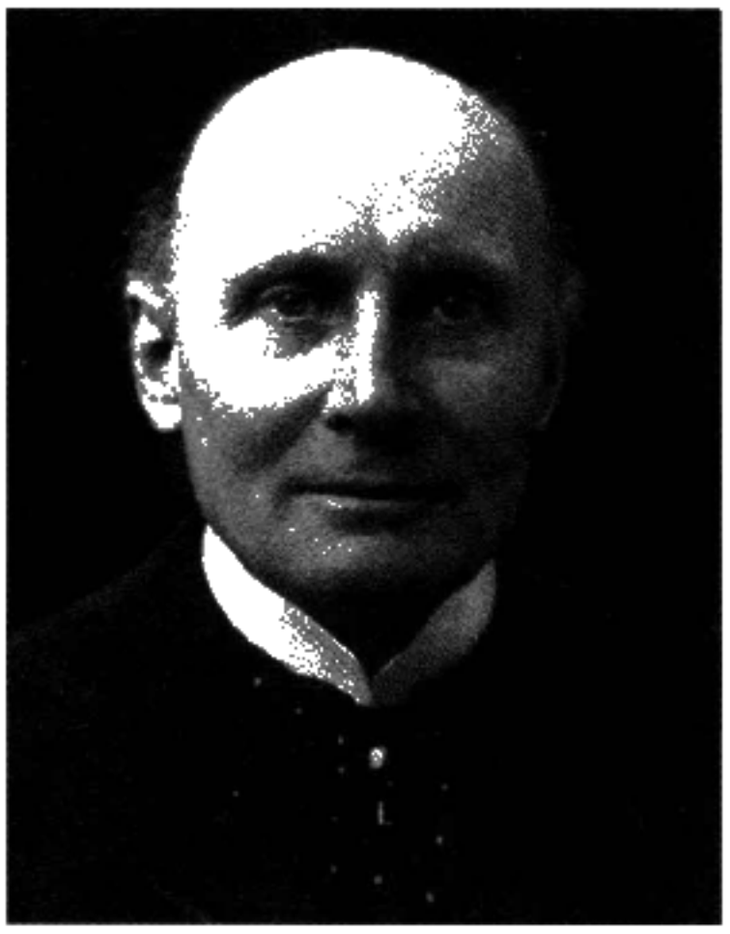
与一般科学文章一样，学位论文也以结论收场。在这最后的一章里，应用心地总结整个研究的过程及其获得的新结果和新贡献，并提出尚待解决的问题，预测未来进一步研究的途径。当论文审查者读到这里，就会对学位候选人的整体研究素质有了较为全面的了解，而作者本人也以论文的面貌全方位地证明了自己的研究能力.

作为科学研究战线的新手，学位论文撰写者要从专业书籍和论文研读中汲取养分，并在写作中体现出来。由于刚刚在研究领域中起步、在模仿中锻炼写作、在战争中学习战争，他们容易染上抄袭 (copy) 乃至剽窃 (plagiarism) 的毛病，甚至犯下过错却毫无知觉.一个值得注意的事项是：如果从文献中逐字逐句地复制别人作品中的某些话，一定要加引号“”，并指明引用部分的出处，最后该原始记录必须放进参考文献当中。如果需要别人的定理并需加以证明，最好用自己的语言重新诠释之，借以最大限度地远离复制别人作品的嫌疑.

与其它论文不太一致的是，学位论文基本有致谢一页，这好像成了惯例，并往往放在论文的前面。任何写作，贵在创新，致谢部分也不例外。几乎所有学位候选人都在这里感谢导师的指导，可能被感谢的人士还包括作者的父母、配偶、孩子、亲密朋友、其他老师及同门师兄弟等。谢词的用语不要千篇一律，缺乏特色，对老师的感恩要恰如其分，避免肉麻之语。谢词里最忌照抄现成货，因为这样的致谢反而给人以缺乏诚意之感，难以体现内心的真实感受。既然致谢来自肺腑之言，就要让自己的大脑创造出真正反映感激之情的美妙旋律.

6.4 数学文化

数学是思维的体操，它是逻辑的伴侣，但又在其顶高高在上。许多人都知道数学是科学的皇后，自然科学和工程技术的发展离不开数学的奇思妙想。现在更多的人了解到，好的数学训练对一个人的职业成功至关紧要，不管是立志成为经济学家、金融分析师，或当工程师。2009 年美国华尔街邮报 (*Wall Street Journal*) 公



Alfred North Whitehead

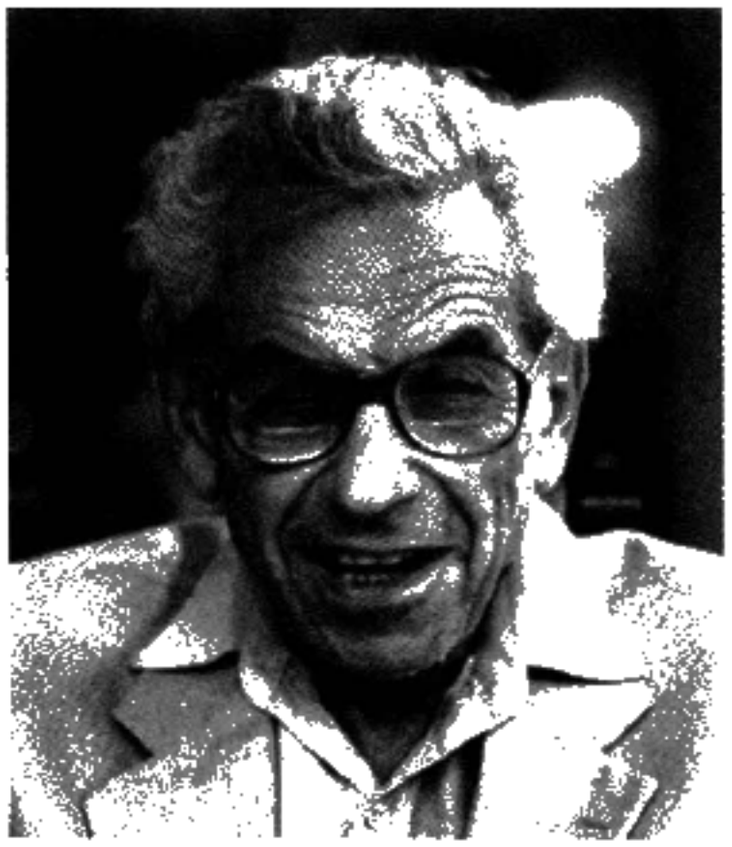
布了一个包括计算机程序员、动作片编辑、物理学家、宇航员、伐木者等两百种职业排名的问卷调查结果，发现数学家（在广义的意义上）在各种职业中最为炙手可热。排名的依据为五项重要指标：工作环境、收入、雇佣前景、体力要求及压力。最好职业的前三甲数学家、精算师和统计学家都和很强的数学教育有关（详情见 http://online.wsj.com/article/SB123119236117055127.html）。

但是，数学也是艺术。英国哲学家和数学家怀特海 (Alfred North Whitehead, 1861—1947) 在其 1932 年剑桥大学出版社出版的名著《科学与近代世界》(*Science and the Modern World*) [3] 中专列一章讲数学在科学史上的崇高地位。书中这第二章的标题赫然为 Mathematics as an Element in the History of Thought（作为思想史要素之一的数学）。它的第一句话令数学家们特别自豪：

> The science of pure mathematics, in its modern developments, may claim to be the most original creation of the human spirit.
>
> **纯粹数学这门科学在近代的发展可以说是人类灵性最富于创造性的产物。**

第二句肯定也让音乐家们十分高兴："另外还有一个可以和它争这一席地位的就是音乐。"怀特海这部至今已被其它文献引用了四千多次的杰作源自于他 1925 年 2 月间在任教的哈佛大学所做的八篇罗威尔讲演 (Lowell Lectures)，但上面提到的书中第二章却是他同年在一次美国数学会的会议上发表的一篇演说。

数学和诗歌、绘画、雕塑、音乐一样都和美感交织在一起。当我们读到李白的"飞流直下三千尺，疑是银河落九天"，就难免壮怀激荡，仿佛身临其境之中；当我们观赏达·芬奇的《蒙娜丽莎》就不免如梦如幻，似乎读懂美目盼兮；当我们注视罗丹的《思想者》就置身于无声处，好像沉入深思之海；当我们听到贝多芬的《英雄交响曲》，就心生悲怆之情，宛如置于枪林弹雨。我们每次看到集数学中最常用符号 0、1、e、i、π 于一身的欧拉公式 $e^{i\pi}+1=0$，总会感到炫目般的激动，赞叹上帝的神工鬼斧。有人说，欧拉公式"为数学之美确立了黄金标准。"其他人则说它"美得如梦似幻"或是"上帝的方程"。写过好些科普作品并多次获得科普奖的英国数学博士 Keith Devlin 曾经这样打过比方："欧拉公式好比是数学上的达·芬奇的蒙娜丽莎画像或米开朗基罗的大卫雕塑。"


Paul Erdös

如英国上世纪分析之王哈代在其著名的随笔式小书 *A Mathematician's Apology* 中宣告，且的数学在数学史上知寿而亡，美的数学则永垂不朽。法国雕塑大师罗丹 (A. Rodin, 1840—1917) 认为对于艺术家来说，“自然的一切都是美的”。对于自然规律的数学映像，表达得简单就是美、美的数学公式可以简单得美不胜收——勾股定理的三边平方之关系，多么简单、多么和谐、多么美妙！

优美定理的漂亮数学证明和定理本身交相辉映，深谙数学精神之士可以从玄妙的数学演绎中领悟出与中国古代诗词如出一辙的意境。数学史上那些令人赞叹的证明让匈牙利数学家爱尔迪希 (Paul Erdös, 1914—1996) 感慨不已，认为应该放进上帝的天书里 (*The Proofs from THE BOOK*)。哈代在书 *A Mathematician's Apology* 中把 $\sqrt{2}$ 是无理数的超短而又绝妙的证明和欧几里得《几何原本》中关于素数个数无限的证明并列为数学证明之美的典范。这两个反证法既简单，又深刻。大多数定理的证明都有改善的空间，但这两个放在天书里的证明，有巧夺天工之美，美得无瑕、美得极致。

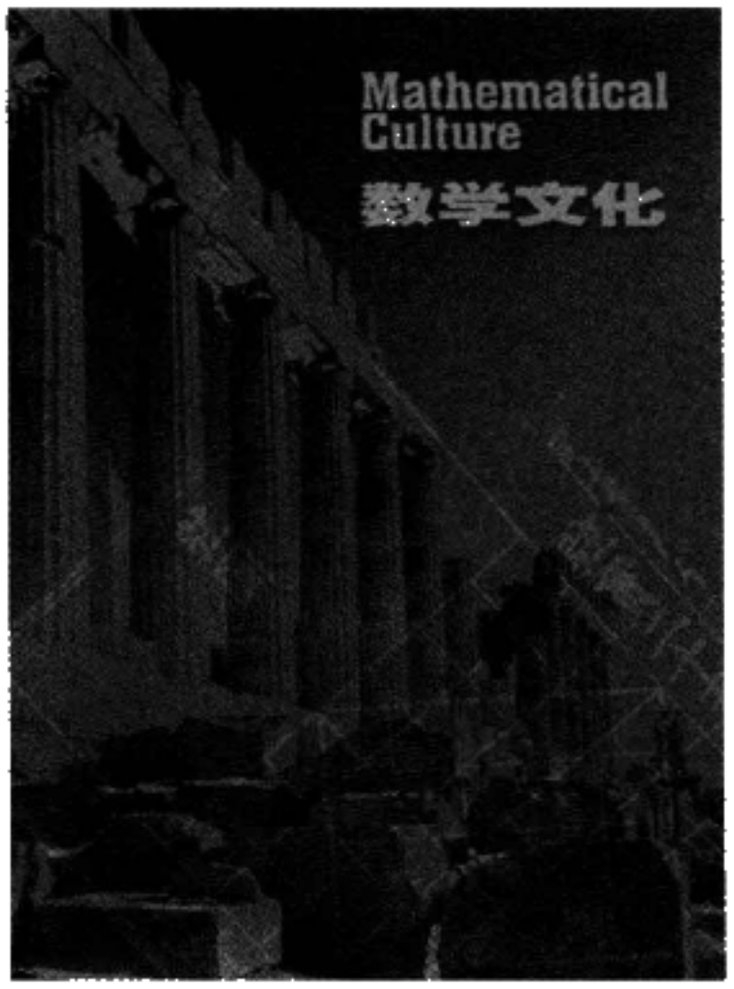
数学与文学，都是文化大家族的亲密兄弟，都是自然界美德的存在形式。许多人丰硕的科学研究成果也得益于从人文阅读、艺术爱好中汲取的灵感和力量。众所周知，爱因斯坦终生喜好拉小提琴，冯·诺依曼的历史知识犹如百科全书，费恩曼的打鼓技术堪称一绝，纳什对棋盘的痴迷也许启发了他获得诺贝尔经济学奖的对策论思想。对爱好古文的中国数学家而言，曹雪芹的《红楼梦》独特写法可以启发他们想象研究数学的新途径；俞伯牙与钟子期高山流水觅知音的动人故事可以让他们感悟到“做大学问者必有大感情”这一颠扑不破的真理；为留下千古传诵的《史记》而宁肯接受耻辱腐刑的司马迁可以激励他们历事百折不挠；刘禹锡“山不在高，有仙则名。水不在深，有龙则灵”的《陋室铭》可以令他们甘心寂寞、潜心学问；“好读书，不求甚解，每有会意，便欣然忘食”的陶渊明可以在他们的精神上得到共鸣：科学研究何尝不是这样？只要有兴趣，读书时不一定要全懂，思想自然会在“潜润无声”中慢慢地领会。读过《中国现代数学家传》一至五卷的人都知道，那些杰出学者的终生事业不光是纯粹的数学研究，博学的他们对人文、历史、艺术等同样有终生的爱好。华罗庚的“三强韩赵魏，九章勾股弦”的巧妙对联、许宝騄的昆曲情怀、苏步青的格律诗词，给他们如歌似诗的数学人生增添了浓厚的色彩。

伟大的数学家常具有文学家气质，庞加莱就是一位杰出的代表。他的科学普及读物，如科学基础三部曲的 *Science and Hypothesis*, *The Value of Science*, *Science and Method*（《科学与假设》、《科学的价值》以及《科学与方法》），既有科学著作的思辨性，又有文学作品的优美性，更有科学文化的有机性。它们是法国那个时代的科学专业人士和普通老百姓在巴黎的咖啡馆或公园里必不离身的读本，雅俗共赏，各取所需，引导了一代又一代人形成正确的科学思维观和方法论。英国剑桥大学的数理哲学家罗素把《科学与方法》视为“一个宽广而优质的头脑关于科学发现的一般过程和基本原理大马行空式的沉思默想”。由于其非凡的语言驾驭能力和科普作品的文学成就，数学家庞加莱被选为法兰西学院文学部院士，这是对科学界人士的独特荣誉。

近年来，越来越多的华人数学家在他们的公众演讲中，或诉诸文字的散文里，多次发出“数学之美”的赞叹之声。陈省身早在 2003 年就自己出资发行了下一年度的《数学之美》挂历，对数学文化的传播身体力行。

或许最能反映其本质的数学定义是：数学是关于数量关系和空间形式的精确学科。它表面上是人的大脑抽象思维的产物，实际上是外部的自然世界在精神范畴的一种映像。文化是一个更难定义的抽象名词，但一些真有文化的饱学之士会以“真的没文化”，作为对行为不检人物的批评。这种现象表明，虽然“文化”像“美学”一样难以精确定义，但人们常能毫无困难地使用它。大体来说，文化是社会历史的积淀物，是一个国家、社会的人们经过长期创造、长期实践而形成的产物。东方社会有东方的文化，西方社会有西方的文化，这两种文化既有异曲同工之处，又有相互冲突之点。东方文化容易个人崇拜，西方文化敢于藐视权威，就是文化相左的显例之一。

科学文化，尤其是数学文化，却是人类的共同财富，它是一切民族精神生活的重要支柱。数学文化源远流长，古希腊哲学家柏拉图认为，数学与伦理学中的“善”在理想化方面的探索是一致的。欧几里得几何的抽象概念点、线、面，给我们充分的美感，因而也是一种人类理想的图形化。毕达哥拉斯学派甚至认为“万物皆数”，他们把“一”称为神圣数、“二”称为女性数、“三”称为男性数、“四”称为公正数、“五”称为婚姻数，然后又有代表着友善、完美、丰富、自恋等等具有感情色彩的数字，这样，自然数就被充分地人性化了。数



学最看重的就是“真善美”，而一切的虚假和丑陋在真正的数学中没有市场，这难道不就是我们时刻憧憬的乌托邦般的理想世界？从这个角度而言，刻苦研习纯真的数学可以帮助净化心灵，可以陶冶君子风度，可以养成淡泊明志的个性，可以追求真实自我.

难道不是这样吗？大多数数学家，由于职业的天然训练，可能比其它团体的人士距离完美之境界更近一步. 君不见写下最多数学论文的匈牙利数学奇才爱尔迪希多么纯真，多么善良，多么富有正义感. 面对美国签证官的刁难，他宁可不要入境签证，亦大胆表达对乌克思的敬仰之情. 他在没有终身教职的情况下，仍把沃尔夫数学奖的奖金献给曾经饱受灾难的犹太人. 中国人华罗庚、陈省身，既是数学家中的翘楚，又是高尚品质的典范. 是数学，是融化在数学血液中的那种高贵的文化，把他们磨炼成具有完美人格的贤者.

正由于数学的文化特质与数学的研究学习相辅相成，培养数学的鉴赏力对数学家的成长具有更深层次的意义. 一些眼光远大的华人数学家不再仅仅热衷于自己的研究小天地而开始放眼全国，培养新一代对数学文化的感情. 近年来高等教育出版社参与策划出版的“数学与人文”丛书，旨在提高国人的数学文化素养，增加科学思维和形象思维的相互交融. 几乎同时，本书作者之一担任其间主编的普及杂志《数学文化》开始问世，它更是以“数学人物”、“数学姻云”等多种栏目全方位地展示数学文化的方方面面.

历史是一面镜子. 主流数学的发展通过数学史的书面记录而留下经纬，阅读好的数学史也是一次美的历程. 美国物理学家惠勒 (John Wheeler, 1911—2008) 在其自传中提到，他在普林斯顿的邻居、大数学家外尔 (Hermann Weyl, 1885—1955) “曾经说，他喜欢讲授数学史，因为只有经由纵览整个领域及其历史发展，才能清楚看出其中的缺陷，找出值得从事新研究的地方”. 纵观数学史不难看到，那些杰出的数学理论研究家同时也是数学历史鉴赏家，他们对身居其中的学科发展了如指掌，如数家珍. 许多了不起的数学家不光写出影响史册的研究专著，也留下脍炙人口的历史总结. 著作等身的法国布尔巴基数学学派的第一号作高手让·迪也多内 (Jean Dieudonné, 1906—1992) 撰写的数学史书也多得惊人，当中英文版的就包括 *History of Functional Analysis* (1981), *History of Algebraic Geometry* (1985), *A History of Algebraic and Differential Topology 1900—1960* (1989) 数种. 中国数学工作者不会忘记北京大学数学系 20 世纪 80 年代分



Hermann Weyl


Morris Kline

四册翻译出版的，美国应用数学家、数学史家和数学普及家莫里斯·克莱因 (Morris Kline, 1908 — 1992) 的皇皇巨著《古今数学思想》(*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*). 这本书除了一个缺点——缺乏中国古代数学思想和成就的描述——之外，具有优秀数学史书籍的一切特点，不光记录数学史实，史是传播数学思想. 可以想象，多少人从这本好书中了解到分析数学从直觉行事到严格推理的演变过程，欧氏几何第五公设之史改所导致的革命性思想，追求代数方程根式求解公式的好几代悲壮故事以及集合论危机掀起的“第三次数学浪潮”

如果我们立志涉足于数学史研究和著述的领域，怎样写出一部让人读得爱不释手的学科史呢? 这对作者提出了许多要求. 首先必须对所论学科有通盘的了解和广博深刻的知识. 其次，要有足够的书面写作的能力和组织材料的本事. 要围绕主题，抓住学科演化史上的几个关键瞬间，让高潮迭起，让思想腾飞，让余音绕梁. 写作技巧上，思想是贯穿上下的红线，准确是忠实还原的历史，人物是重点刻画的对象，故事是环环相套的情节，细节是突出的个人风采，语言是轻松活泼的音符. 这样，在作者的生花妙笔之下，数学之美在逻辑性、故事性、戏剧性的历史舞台上将被展现得淋漓尽致.

最近，有两本主要面向高中生和数学爱好者的好的数学概观书. 前者洋洋大观，覆盖了现代数学的几乎所有分支，有众多一流数学家执笔；后者动因于 2009 年在德国举行的第 50 届国际数学奥林匹克竞赛上的邀请报告，14 篇文章的作者都是各自领域的顶尖学者，包括陶哲轩等 4 位菲尔兹奖获得者. 他们中的许多人是昔日的国际数学奥林匹克竞赛金牌获得者. 这两本书是：

1. *The Princeton Companion to Mathematics* (编者 W. Timothy Gowers, June Barrow-Green 和 Imre Leader, Princeton University Press, 2008)
2. *An Invitation to Mathematics: from Competitions to Research* (编者 Dierk Schleicher 和 B. Malte Lackmann, Springer, 2011)

最后，我们把一些经久不衰的数学思想、数学史名著和几本写法简洁的中文数学史著作列在这里推荐给读者：

1. *A History of Mathematics* (作者 Carl B. Boyer 和 Uta C. Merzbach, John Wiley & Sons, Second Edition, 1991)

2. *Mathematics: Its Content, Methods, and Meaning*（编者 A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov 和 M. A. Lavrent'ev, 1956；此为英译本，也有中译本《数学：它的内容、方法和意义》）
3. *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*（作者 Richard Courant 和 Herbert Robbins, Oxford University Press, 1941；有中译本《什么是数学》）
4. *The World of Mathematics*（编者 James R. Newman, Simon and Schuster, 1956）
5. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*（作者 Morris Kline, Oxford University Press, 1972；有中译本《古今数学思想》）
6. *The Mathematics of Great Amateurs*（作者 Julian L. Coolidge, Oxford University Press, 1949）
7. *The Mathematical Universe*（作者 William Dunham, John Wiley & Sons, 1994；有中译本《数学那些事儿：思想、发现、人物和历史》）
8. 《数学史概论》（第三版；作者李文林，高等教育出版社，2011）
9. 《20 世纪数学经纬》（作者张奠宙，华东师范大学出版社，2002）

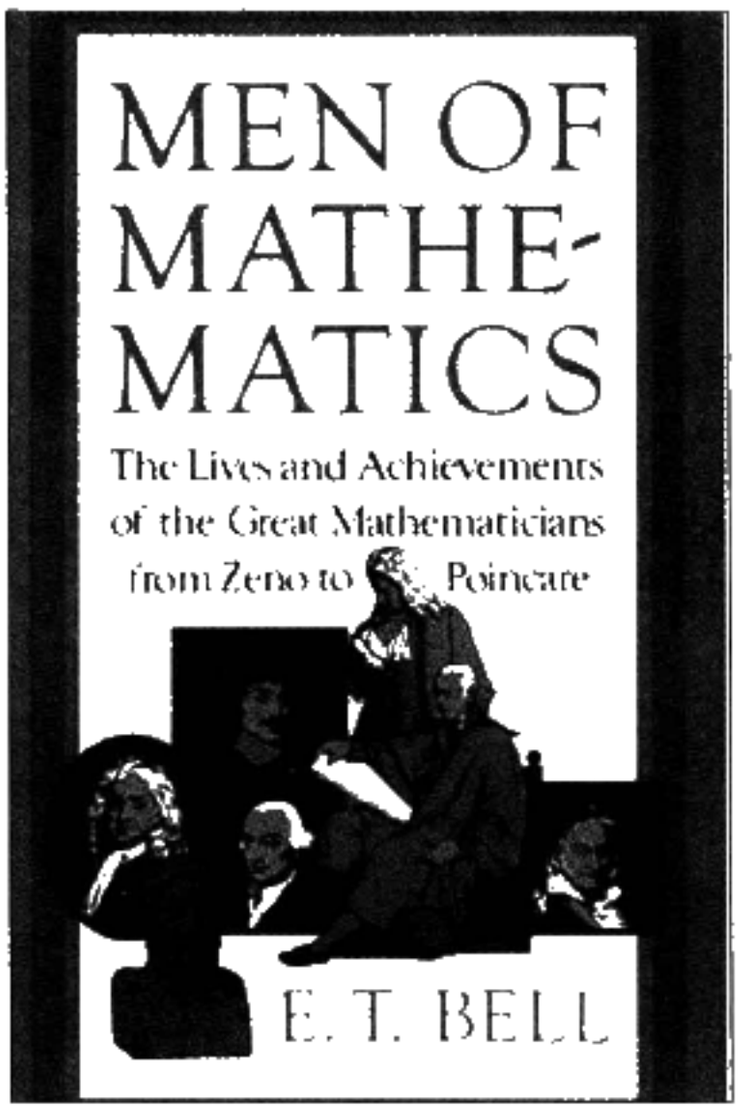
6.5 人物传记

伟大人物总是芸芸众生的榜样，他们的生平、他们的精神、他们的奋斗史、他们的事迹功业打动我们的心弦，令我们景仰，并见贤思齐。他们的轶事传闻、他们的喜怒哀乐也让我们津津乐道，并心生与他们亲近、与之面对面交流的冀盼。杰出科学家的一生更是波澜壮阔、丰富多彩。他们既有名垂青史的发现，又有特立独行的个性。一部关于他们的优秀传记或自传往往写得既饱含科学养分，又幽默风趣。希尔伯特 (David Hilbert, 1862—1943)、冯·诺依曼 (1903—1957)、维纳 (Nobert Wiener, 1894—1964)、乌拉姆 (Stanislaw Ulam, 1909—1984)、费恩曼、爱尔迪希等人的自传或传记会让读者不忍卒卷。

数学家是整天生活在思维空间里的一群人，是如爱尔迪希所言的“把咖啡转化为定理”的推理机器。由于他们需要长时间全神贯注

地独立思考，他们在工作时最怕的是被周围不相干的人和事所干扰。由于他们时常对周围的一切视而不见、听而不闻，他们在常人的眼中容易被描绘成不食人间烟火的一群麻木不仁者、眼光呆滞者、衣衫不整者、与世无争者。有这种偏见的人是否想过，正是这些不求回报的数学家们的默默奉献，平民百姓们才能充分享用像钱塘江的潮水一样滚滚而来无穷无尽的现代高科技产品？

中国数学会几年前委派几位数学家到美国调研那个最发达国家的数学教育近况。在他们的考察报告中，我们读到这样的观察：在美国，大约 5% 的顶尖聪明人为其他人创造了几乎所有的高尖端产品，普通老百姓坐享其成。这样的出类拔萃人群的三个代表为创造“苹果”奇迹、2011 年 10 月 5 日去世的乔布斯 (Steve Jobs, 1955—2011)，以及谷歌王朝的建立者布林 (Sergey Brin, 1973—) 和佩基 (Larry Page, 1973—)。在这些为人类现代文明作出较大贡献者中，数学家占有重要一席。君不见信用卡公司采用的用户安全密码学技术来源于数论；新一代无线通信技术由于混沌学研究而发展迅猛；谷歌搜索引擎用到全世界最大的矩阵——线性代数扮演着关键角色；药物设计与计算分子动力学也挂上钩，当中遍历理论则必不可少；天气预报、飞机设计离不开流体力学的计算，这是计算数学家大显身手的地盘。



无论是纯粹的、应用的还是计算的数学家，都用他们的智慧让我们的世界变得更美好，因而他们的事迹应该大书特书。人物传记就建立起了一座桥梁，一方面它展示了数学家们丰富多彩的学术生涯和个人特质，另一方面它给茁壮成长的青少年指引了前进的方向，因为榜样的力量是无穷的。许多人正是由于读了伟大人物的传记而立下凌云之志，几经刻苦磨砺，终成栋梁之才。

写得最好的数学家传记大概属于极富写作天赋的美国数学家和数学史家贝尔 1937 年出版的 *Men of Mathematics*。近百年来，这部集中描绘了两千年数学史上从古代科学之王阿基米德到现代集合论之父康托尔 (Georg Cantor, 1845—1918) 等三十几位最伟大数学家的事迹、生平及趣闻的大书，激励了一代又一代的青年学子投身数学事业，他们当中有我们在第三章第二节中提到过的纳什，他是基于同名传记《美丽心灵》(*A Beautiful Mind*) 拍摄的好莱坞电影的主角。贝尔的学士、硕士学位都属于文学系，拿到数学博士后他成了一名数学教授，后来当过美国数学会的副会长。他得天独厚的文学才能

充分运用在其数学普及作品的撰写上，并以散文般的特写集《数学家们》达到高峰。可以不夸张地说，他这部杰作比一百年来任何其它有关数学的作品对大众的影响力都大得多。

也许我们的读者中有人在未来的 50 年间写下可与《数学家们》媲美的《中国数学家们》或像《希尔伯特：数学世界的亚历山大》那样有名的单个数学家传。后者的作者（并非数学工作者，但她的姐姐是一位卓有成就的数学家，是美国科学院第一位数学女院士）在写作之初的一片怀疑声中（比如，希尔伯特的得意弟子外尔），她笔下的希尔伯特光芒四射，不是不食人间烟火的数学神，而是有血有肉的数学家，是为了杰出女代数学家诺特 (Emmy Noether, 1882—1935) 获得哥廷根大学正式教职而吐出一句名言“大学不是澡堂”的矮个子东普鲁士人。很少有数学家传记写得像这一本那么传神、耐看。

但是，亲爱的读者，不要灰心。只要我们中华民族再出现像华罗庚或陈景润那样的世界级传奇数学家，只要我们的未来一代多几个既有数学造诣、又有写作天赋的优质人才，不愁没有中国数学家传的传世之作。当然，目前看到的中国数学家传除了极少数，如王元教授的《华罗庚》外，少有上乘之作，即便是已出五卷并多年来续编的《中国现代数学家传》也有一些平庸之作。传记作品的一个普遍写作问题是其内容一般只褒不贬，几乎都呈现出完美的一生，好像读的是先进人物事迹报道，读之反而因过于失实而令人反感。正由于传记成自传的某些失真现象，钱钟书曾对此挖苦了一句。另一个困惑是：传记成为编年史，写成了加长版的《个人履历》。也许教授聘用委员会可以读读，但不会读下去，因太长。反而有的写得较为生动的人物传记，由于加入了在西方传记中十分普遍的个性化描述和真实的细节特写，却招致一些在世名人的误解。

热爱数学的学生、敬仰优秀学者的年轻人当然对好的数学家传记翘首以盼。如果有一天，你为他们写一本合格的某某伟大数学家传，你就应该将这位幸运的数学家写得栩栩如生，读在二维的纸上，传主就像三维似的呼之欲出。你如果认识传主，你必须写出他在你眼中真正的印象，就像高尔基回忆列宁时用过的“他（列宁）狡黠地眨了眨眼笑了”。你也应该采访许多和传主有关的人，阅读他的全部或大部分作品，做好写作前的一切准备工作。在材料收集完备的基础上，调动你头脑中的一切数学知识，运用你日积月累的写作技能，写出一部真正感人心肺的数学家传。

这里，我们列出几部外国数学家传记的中译本或中文的数学家传记，在国内书店或网上书店都可以买到它们.

1. 《我的大脑敞开了》
2. 《数字情种——埃尔德什传》(即爱尔迪希)
3. 《知无涯者：拉马努金传》
4. 《美丽心灵：纳什传》
5. 《希尔伯特：数学世界的亚历山大》
6. 《库朗：一位数学家的双城记》
7. 《突破维数障碍：斯梅尔传》
8. 《数学大师：从芝诺到庞加莱》(即本节提到的《数学家们》)
9. 《华罗庚》(作者王元)
10. 《难以企及的人物》(作者蔡天新)

第七章 其它文体的书写



我们已经谈了用英文从事数学写作的基本书面格式和主要注意事项，无论是写研究性论文还是阐述性文章，其主要的内容都与数学密不可分，而英文只是表达数学知识的工具。可以说数学是主体，语言是载体。但是在我们目前或未来的职业生涯里，还不时面临着另外一些性质不同的写作。它们当中有的数学味道浓厚，有的语言成分居多。大学毕业生报读研究生院的申请信；研究生毕业后找工作的求职信；教授给学生写的推荐信、替杂志审稿后提交的审稿报告、书评等等都是常见的例子。

外文写作和母语写作一样，都须遵循书面语言交流的普遍原则和行文规律。表达能力不仅对科技工作者非常重要，从事任何工作的群体都需要重视母语知识的吸收和作文的训练。杨振宁的父亲数学教授杨武之即便早就发现了儿子的数学能力，但还是不慌不忙地先让他学《孟子》，而并非给他猛灌数学。须知孟子是先秦时代的顶尖思辨高手，他和王公贵族的交谈和辩论，充满逻辑性、思想性及说服力。早期的古文训练对于杨振宁的科学一生影响巨大，让他受益无穷。

理工科大学生的英文写作能力与他们的中文写作能力紧密相关，因为写作的基本原理与语言种类关系不大。譬如说，一篇文章必须具有明确无误的主题，结构必须紧凑，层次必须分明，交代必须清楚，语句必须通顺，形容必须贴切，语法必须正确。这些都是放之四海而皆准的真理。对于专业文章的写作，无论英文、中文，都具有类似的基本格式：题目、摘要、引言、主体、结束语、致谢、参考文献，以及有时会需要的附录，所不同者仅仅在于对选定的语言在词汇、语法、句法使用上的驾驭能力。

专业数学论文的写作，由于其主要部分是数学语言，只要掌握了写作的基本法则，一般不会写得太离奇，但是非专业写作语文功力的要求则比较高。语文能力并非只读几本写作指导书就能迅速提高，

行之有效的主要办法就是大量阅读他人作品，使自己在潜移默化中提高。养成大量阅读习惯的人在写作时往往有板有眼，“熟”就能生“巧”。本书作者二人都经历过东、西方两个国家的教育，并有长期的教学经历。我们共同的发现是：国内学校的语言教育方面偏于淡薄，校方不鼓励学生课外时间的大量阅读，客观而论可能是数理化家庭作业的负担太重，导致学生无暇阅读名著名篇。欧美的做法恰恰相反，那里的学生没有沉重的数理化作业负担，但花在语言训练上的时间很多，教师布置庞大的阅读和写作量，指定通读或精读的书籍较多，并且要求课堂讨论，发表真知灼见时备受鼓励。其结果是那里的学生大都能言善辩，辩论起来口若悬河、滔滔不绝。自然地，他们的文字写作能力以及口头表达能力普遍都比较强。

在本章，我们将讨论与学术有关但不属于研究或综述性文章的一些常见文体的英文写作，并提供我们认为比较重要的一些建议。

7.1 申请

申请信是我们司空见惯的文体。无论申请什么，一堆正式的申请材料总是以申请信鸣锣开道。我们这里主要讨论入学申请书和求职申请信的一些写作要领。

欧美大学研究生院的入学申请，除了填写申请表格外，一般要求写篇论述文 (Statement)，陈述申请该系硕士或博士学位的动机、个人的特点、对未来的规划等。虽然在许多申请者眼中，这篇文章的重要性对于录取或提供资助重要性不及申请读大学本科所要求的作文 (essay) 那样突出，理由是研究生的录用标准更倾向于申请者的学术背景。但很多情况下，美国大学各系的研究生录取委员会不光看重申请者的大学成绩单、教授推荐信、GRE 和 TOEFL 成绩（对于英文非母语申请人而言），也对申请材料中的英文写作十分注意。他们从中可以看出对方的文字表达能力、逻辑思维能力和自我展示能力。对于数学系的学生，第二种能力一般毋庸置疑，但第三种能力则因人而异，这与当事人的个性特点及其环境熏陶有关。第一种能力主要依赖于平时的知识积累、阅读习惯的养成和爱好写作的实践等。

“为什么想读这个专业？”写作这类申请书所不可回避的问题，需要生动和有创意的回答。如果仅仅将人云亦云的大道理照本宣科，就缺乏新鲜之感。每种生物，包括人类在内，都有喜新厌旧的秉性。求

取委员会自然也不例外，不会喜欢读八股文式的空洞之语。就本书面向的数学系学生而言，申请书上切忌如出一辙地罗列大段司空见惯的描述数学多么重要的标准行话，如“数学是自然科学的皇后，是锻炼思维的体操”，或“没有数学，卫星就不能上天，飞船就不能航行”。这些话虽然通顺，甚至还用了修辞手法，但依然是老调重弹。如果能用亲身经历的典型例子阐述思想，那比仅仅抽象说教更能打动别人的心弦。本书作者之一当年高中毕业后在工厂当学徒。有一天，几位工人师傅要制作一个装柴油的椭圆柱形特大容器，但苦于画不出精确的椭圆。由于在高二的数学课上学过椭圆的定义，他便找了一根长绳子和一支粉笔，让师傅中的两位按住绳子的两端以固定椭圆的两个焦点，用粉笔漂亮地画出一个大椭圆，让在场的师傅们喜不自禁。这是他有生以来第一次亲身体会数学在实际工作中的妙用，对他日后考大学，最终把数学作为终生职业不无影响。如果在入学申请书中描述类似的终生难忘的故事，相信会给录取委员会的教授们留下难忘的印象，当然对录取很有帮助。

总之，申请文章应写得有特色，既有思想，又有情趣，既抽象，又具体，令人耳目一新。一定要通过自己的精心构思来写好申请材料内的这篇关键散文，万万不可整句整句地复制别人写的东西，或从某些《申请指南》书中的样本文章中顺手拈来。

准备一份格式漂亮、内容清晰的个人履历也极具作用。如果你已经发表了论文，如果你在某个全国会议或国际会议上做过学术报告，如果你能熟练地使用一些数学程序包和其它计算机实用软件，如果你曾获得某种学术荣誉或校方奖励，都可以在履历表上列出，为你的申请材料添砖加瓦。

求职申请与入学申请的目的不同，故写作上差异很大。在求职过程中，申请者要充分展示自己各方面的优势，扬长避短但诚实地通过“个人履历”来宣传自己。在工商界，个人履历的英文词通常用 resumé，而在学术界，更常用的是 curriculum vitae，简称 vitae 或 CV。它不是一篇文章，而是表格化格式的自我推销。履历表是你的职业简史，是你的形象说明，是你自我介绍的广告词。它告诉别人：你是谁？在何处受过教育？有哪些闪光的职业经历？赢得过哪些奖项？有哪些特色的个人爱好？等等。如果你申请大学教职的位置，更重要的是列举那些学术成就，包括发表的论文题目和所属杂志的名称（有时包括这些刊物的影响因子），以及做过的那些邀请

报告。如果你的研究得到国家自然科学基金委员会或其它机构的资助，如果你带出了一些硕士、博士、博士后，如果你是好的专业杂志编委，也要列上去，因为这是对你研究能力的重要承认。

但是，个人履历表不能什么都列。比如，如果你已教了二十年的书，你不必将每学期教过的课程一一“记录在案”，在履历中只需列出那些你开发出来的新课程，尤其是研究性的科目，这些有创新意义的事物尤其吸引眼球。另外，履历记录必须真实，切忌说谎。无中生有地故意造假除却是不端行为，更可能是刑事罪行。文章的投稿，在最后接受之前，都只能说 submitted，而不能说 accepted，更不能说 published。另外要实事求是。履历表仅仅是事实的列举，不是评价的场地，更不是吹牛的舞台。知道自己的研究很一般，发表的杂志档次较低，就不能吹嘘自己有精深的研究，或是世界级的武林高手。这也许能骗过外行人，在内行人看来便不免贻笑大方，使你名誉扫地，得不偿失。这里，我们还是应该牢记华罗庚的殷切之语：文章自己写，评价在别人。

申请位置的求职材料中的求职信 (cover letter) 一般不要太长，最好不要超过一页纸。因为你的专业背景已经详细出现在申请材料中的个人履历表上，没有必要再在信中重复强调自己的种种优势。只要开门见山地表明自己申请这个位置的意图，告诉对方你的最基本信息，加上你的推荐人姓名等即可。如果推荐人信息已在履历表上正式列出，就不必在信中再次列出，除非有特殊要求，如招聘单位规定如此。下面是一封简易的大学求职信样式：

Faculty Search Committee
Department of Mathematics
United University
College City, AR 98765, USA

Dear Sir/Madam,

I write to apply for a tenure track assistant professor position of your department. I obtained my Ph.D. degree in applied mathematics from the University of Maryland in 2010, under the direction of Professor Adam Smith. Enclosed please find my Curriculum Vitae. Statement of Research Achievement, Statement of Teaching Philosophy, and a copy of my graduate transcripts.

Three letters of recommendation on my behalf will be sent to you by my referees whose names and contact information are listed in my CV.

Thanks for your kind consideration. I look forward to hearing from you.

Sincerely,
Russell Whitehead

美国阿肯色州学院城
联合大学数学系
教师遴选委员会

尊敬的先生/女士：

我写信申请贵系的通向终身聘用的助理教授职位。我于 2010 年在马里兰大学亚当·史密斯教授指导下获得应用数学的博士学位。随信附上我的个人履历表、研究成果说明、教学理念说明以及我的研究生成绩单的一份复印件。

三封为我而写的推荐信将分别由我的推荐人寄上，他们的信息已在我的履历表中提供。

感谢您的考虑，并期待着您的回音。

您真诚的，
罗素·怀特海

如上列信中所述，申请大学的教职，除了履历表外，一般还需要提交你的研究成果及未来研究计划说明书，加上你的教学经验和教育理念叙述。前者让系里的招聘委员会成员对你的研究历史及前景了解得更为详尽，后者将使他们了解你对教师这个职业的理解。对于研究型大学，这两者对于你的求职申请都很关键。如果你计划在一所教学型大学或人文学院教书，则校方对于后者的加权系数可能会更大，因为这类学校更注重的是培养好学生，是教学，而不特别强调教授自己的学术研究。这两方面的写作稍有不同，前者以叙述为主，等于写一篇紧凑的综述性文章；后者可以夹叙夹议，在谈论教学实践的同时描述自己的教书理念，它更像一篇随笔或散文，因此要写得有血有肉。

7.2 推荐

作为大学教授，你常被继续求学或正找工作的学生请求写推荐信，或替一个想另谋高就的同事写支持信。如果你是资深教授，你领域里的某个外校助理教授或副教授会请你写升迁推荐信，或者提职申请者所在的院系升迁委员会也会请你给出书面评价，帮助系方作出支持或者反对升迁的决定。有的声名显赫的教授被提名某某奖项或讲座教授、大学杰出教授头衔时，不光需要其他教授的推荐信，可能还要求该教授学生的推荐信（下面有一例）。推荐信的用途各种各样，但其基本目的都是一样的：客观、恰当地评价当事者，从而帮助被推荐者“把理想变成现实”。

把理想变成现实的愿望应该通过正当的途径来实现，如同孔夫子所言：“君子爱财，取之有道”。正确的推荐信应该提供执笔者出自内心的真实评价，以事实为基础，尽量全面客观地总结被推荐者的成就。这就是为何原则上被推荐者无权向推荐者索取推荐信，尽管许多学校容许申请者可以接触推荐信内容。东方文化较之西方文化更讲究面子、人情，更看重朋友义气。但是，如果一个社会的整体诚信出了问题，推荐信的可信度也就容易打上折扣。我们见到过这样的求职推荐信，明明是个低级研究者，却被吹嘘为本领域的国际级高人。如果这样的推荐信到处泛滥，推荐信就变成吹牛信的代名词。

这样的情形经常存在：一位想请你写推荐信的学生没有给你留下很好的印象，如期末考试仅得 D，或经常旷课，或作业迟交。你知道你不大可能违心地在信中对之过分拔高，这时你应该及时并婉转地拒绝此人的请求。用一个能让对方理解但并非说谎的理由来避免可能引起的尴尬，例如说，I am afraid that I am not able to write the letter for you since I have been terribly busy in finishing two referee reports that are already overdue（我恐怕不能给你写此信，因为我最近为完成两篇已迟交的审稿报告而忙得不可开交）。其它一些可以回绝写信的理由是：对方和你有过学术争执，你的信中观点之客观性可能受其影响；彼此有某个方面的裙带关系 (conflict of interest)；不熟悉对方的研究领域；你对对方的工作几乎一无所知。一旦决定回绝，不要拖了好长时间才通知对方。另一方面，如果你已经答应写信，也必须按时完成。推荐信有时效性，未及时收到的推荐信等于没写，过期作废。如果你真的太忙，或是属于贵人好忘事的一类，建议你在口

头答应时让对方以书面或电邮形式提醒你一下。记住，当你替人写推荐信时，你肩上的责任很重，因为你的信可能在系主任、院长和各级委员会成员手中传阅，你的观点可能在决定一个人的命运中起了关键作用。

写推荐信是大学教师学术性服务工作的一部分，就跟文章审稿同一道理。但是一些教授们把时间花在这方面，把撰写推荐信的工作让回给学生自己，然后他们只负责签署，甚至看也不看就直接签字，这在有些地方已不幸地成为风气。另一方面，许多学生也懒惰起来，干脆就在那些《出国指南》或《推荐信大要》诸如此类的工具书中抄写现成的样板推荐信。其结果是欧美大学看到的推荐信内容大同小异、看不到特色、千人一面。须知这是亵渎了写推荐信这一神圣的职业使命，是逼别人不再信任自己的一种举动。西方教授大多数遵守职业道德，以认真的态度书写推荐信。他们认为邀写推荐信这一行为代表着别人，包括学生对自己的信任，这种对人格的尊重理应得到同等的回应。故认真对待这件事是他们行动的准则，只要答应对方，再忙也要亲自完成。因为并不参考标准样板，他们的推荐信大都真实可靠，可读性强，的确起到了应有的作用。

那么，假如你已答应给别人写推荐信，怎样写好它呢？推荐信最重要的一点是：你要清楚地陈述你的观点并给予充分论据。在信的开头几句，你应直截了当地表达你此信的写作动机和结论，虽然许多人将结论放在信的末尾。兹举一例：

- The purpose of this letter is to support Mr. Ailing Zhang's application for his Ph.D. study in your department. I have known the applicant for two years since he took my complex analysis course. He has taken some other courses that I taught during the past two years. My judgement is based on the following observations related to his academic ability and other issues.

  这封信的目的是支持张爱凌先生申请在贵系攻读博士学位。从他修我的复分析课算起我已经与申请者相识两年。两年中他也修了我教的一些其它课程。我对他的评价基于与他学术能力和其它方面有关的以下观察。

如果你应系方请求写一评价信，可以这样开头：

– This letter is in response to your recent request for my opinion concerning Dr. James Watson's promotion to Associate Profes-

sor. Dr. Watson has held his current title of Assistant Professor for six years, and from his academic record he has not produced research papers of enough quality and quantity. Based on the following analysis, I do not think he should be promoted at this time.

这封信是应您最近请我就关于詹姆斯·华生博士申请晋升副教授提供意见之求而写。华生博士拥有目前的助理教授头衔已经六年，但从他学术记录来看还没有产出有足够质量与数量的研究性论文。根据如下的分析，我认为他目前不能晋升。

论点提出后，你的推荐信的主要部分就是用事实来说话，支持你的意见。这部分以一到二页为佳，因为太长的话要花费读信者太久的时间才能读完，而人们一般喜欢读短信，除非优美的长信或不嫌长的情书。当然，有些关于正教授的推荐信可以长些，因为他们的学术成就较多，需要较大篇幅来做评述。如果你希望信的这一说理部分对委员会具有真正的影响力，引起他们的认真关注，你必须做好两件事：第一，对候选人的某些具体工作或关键论文作较具体的评述；第二，采用比较法，将此人与同一层次的其他人士的水准和研究作出对比。你的比较分析必须知无不言、准确无误而又提供细节，就事论事而又具体到位，并且仅在你直接了解的知识范围内作出判断。仅仅好话连篇但缺乏佐证支持的内容一般难以取信于人。

除了谈论候选人研究工作的科学价值，你也可以提供其它方面的有用信息，如该人在合作研究中扮演的角色或在某次会议上所作的演讲。大学教职对课堂授课技巧和语言驾驭能力（主要对非母语候选者而言）十分重视，因为大学教授受雇后的主要工作是教书。许多大学甚至明确要求有一封推荐信只需谈及申请人的教学素质。正因如此，求职推荐信中应尽可能地评价候选人作为教师的基本条件。如果被荐人真是杰出的教师，无论是否和你同系，你都有机会了解此人的讲课大分。如果你知道这个人拿过教学奖，只要在信中指出来，便“事实胜于雄辩”，效果胜过千言万语。

推荐信的最后一个段落就是结论部分。你将总结你的观点看法，重申你在信的开头申明在先的断言。下一例提供它的一种写法：

– In summary, based on her significant contributions to the general field of computational mathematics and particularly numerical linear algebra, I believe that Dr. Mary Shoemaker should be

promoted to the rank of Professor.

总之，鉴于她对计算数学领域，特别在数值线性代数方面的重要贡献，我相信玛丽·苏娜柯博士应晋升到教授等级。

也有学生给老师写推荐信的时候。下面是一封真实的美国大学生为其外国血统授课教授撰作的推荐信，该信写于 2010 年 11 月 9 日，内容是推荐该教授竞争一项已被提名的大学卓越教学奖。这位数学系的大四学生不光写作态度认真，而且观察细致入微，用词丰富贴切，其母语的写作能力也十分高强，值得我们的理工科大学生学习，因此在获得写信者的同意后，我们推荐读者阅读此文（学校与教授真名隐去）：

University Teaching Awards Committee
University of Southern Maple
Re: Nomination of Prof. Zhou-ren Yang

Dear Committee Members,

It gives me great pleasure to recommend Professor Zhou-ren Yang for the University of Southern Maple's Excellence in Teaching Award. I am a senior mathematics major here at USM and am extremely honored to have received instruction from a teacher as competent, organized, caring, knowledgeable, and impressive as Professor Yang.

Although he is very humble and quiet, Professor Yang's presence engenders such a sense of awe that the classroom falls respectfully silent when he enters. Despite Prof. Yang's obvious brilliance in his field, he is always personable and approachable, which has led to many fascinating class discussions. I have never seen Prof. Yang behave angrily, condescendingly, or otherwise inappropriately towards a student or anyone else.

Prof. Yang's lectures are captivating and energized: he clearly loves his subject, and his enthusiasm is contagious. Because he enjoys his work, Prof. Yang is never too bored or tired to completely show the work for every example problem, which boosts the students' understanding tremendously. He reminds the class often that he is happy to use his office hours to help students outside of class. At the beginning of the semester, he told us honestly that if we were already having trouble with the work (or hadn't fully mastered calculus in

previous classes) that we might benefit more from retaking a lower-level class; he then said that, as long as students were willing to work hard, even if they'd forgotten everything from their previous classes, he would spend as much as his own time outside of class as necessary to help them understand the material.

Prof. Yang begins each class by asking for questions, and always stops to answer any that arise during the lecture. He gives all questions his full attention, explaining until every student understands, but his talent in his field is such that detailed explanations take him only a couple of minutes.

In all my years as a student, in any school or grade, I have never encountered a teacher with such command of his subject matter. Five minutes in Professor Yang's classroom would convince even other professors in the department that he is a master in the field of mathematics.

Prof. Yang possesses the rare ability to quickly relay complex concepts and processes with absolute clarity. Indeed, his talent to concisely communicate details is unsurpassed, and it makes him an incredibly efficient instructor. He also repeats important concepts while working examples in order to reinforce our previous knowledge without wasting class time. His tests are equally efficient, demanding nothing more or less than proof of our full understanding.

Professor Zhou-ren Yang is the greatest instructor I have had honor of learning from. With his efficiency, his complete grasp of the subject matter, and his endearing personality, Professor Yang comes as close as possible to perfection in the art of instruction.

Please do not hesitate to contact me for additional information, amplification, or clarification regarding Prof. Yang's outstanding qualifications for this award.

Sincerely,

(Signature)
Emily E. Huffman
Math Major
USM

南枫树大学
大学教学奖委员会
关于：杨周人教授的提名

尊敬的委员会成员：

我十分高兴地推荐杨周人教授成为南枫树大学卓越教学奖得主。我是本校数学专业的四年级学生，曾特别荣幸地得到杨教授这样称职、有条理、有爱心、有知识及令人钦佩的教师的教导

杨教授虽然谦逊文静，可是一旦踏进教室，他的存在立刻滋生了一种敬畏感，使得整个课堂毕恭毕敬，鸦雀无声。尽管杨教授在他的领域有着明显的辉煌成就，他总是风度翩翩，平易近人，从而导向了许多迷人的课堂谈论。我从未目睹过杨教授对学生或任何其他人表现出愤怒、高傲或其它不恰当的举止行为。

杨教授的讲课令人神魂颠倒，充满活力。他显然热爱他的学科，其热忱深具感染力。正因为杨教授喜欢自己的工作，对每一道例题他都从不嫌无聊或劳累，把它贯彻始终，这大大促进了学生的理解。他在班上经常提醒：他会乐于利用办公时间在课外帮助学生授业解惑。这学期一开始他就如实地告诉大家，如果有人对这门课已经有困难（或在以往的课上还没有真正掌握微积分），可以通过重修较低档次的课而获益更多。然后他说，只要学生愿意刻苦钻研，即使他们忘记了过去课堂上所学的知识，他都会尽可能在必要时花自己课外的时间帮助他们理解教学内容。

杨教授每节课开始时会先回答学生的问题，在课堂中间只要学生有疑问他都停下来回答。对所有问题他都充分重视，解释到每一个学生弄懂为止。同时由于他才华横溢，仅仅几分钟就可给出详细解释。

在我的学生年代，在任何学校或年级，我从未碰到一位教师像他那样精通学科内容。甚至系里的其他教授只要在杨教授的班上待上五分钟，就会信服他在数学领域是个能手。

杨教授拥有以绝对清晰的方式将复杂概念和过程快速转达的罕见能力。确实，他简明地沟通细节的才能是无与伦比的，这让他成为令人难以置信的高效率教师。为了让我们早先学到的知识更加巩固而不浪费课堂时间，他在示范做题时也不时复习重要的概念。他的测试也同样有效，在证实我们是否充分理解的方面要求得恰如其分。

杨周人教授是我有幸曾跟随求学的最优秀的教师。随着他的效率、他对学科内容的完全掌握以及他可爱的个性，杨教授在教学的艺术上已近臻完美。

关于杨教授对于这个奖项的优秀资格，如需其它的信息、详述或说明，请直接与我联系。

您真诚的，

（签字）
埃米莉·霍夫曼
南枫树大学数学本科生

最后我们就帮助求职学生的推荐信再说几句。在求职博士的推荐信中，论文导师的信一般最为详细，也最有分量，因为一般情况下他对弟子的学术研究状况、研究能力最了解。这封信讲的主要内容是以往研究的细节以及未来发展的预测，而其他教授的信可能偏重于其它方面，如课程学习、TA 工作 (teaching assistantship，这是系方为了减轻研究生经济负担而提供的付薪半日制教学助理工作)，甚至个性特点。有的教授对候选人的研究不甚了解，干脆就用一句话 I refer to his thesis advisor for a more detailed assessment of his dissertation work（我把对他博士论文工作的详细评估留给其论文导师）来节省笔墨。

假如你是某人的论文指导教授，你当然希望这位学生马上找到好工作，你也因此脸上有光。有了这样的假设，导师的推荐信容易给人留下有意拔高的第一印象。的确，我们听说过某位美国大牌数学家给他所有毕业的博士写推荐信都有同样的这样一句话：He is one of my best students.（他是我最好学生之一。）这颇像说某个城镇里，all the children are above average.（所有孩子都在平均之上。）为避免这种被认定是先入为主的偏见，你必须更多地让事实为被推荐者说话：为什么这个新科博士是个好学生？在信中列举优秀研究成果、找出教学闪光点、赞叹极佳的学术交流能力、和近期同类其他毕业生的相比所具有的优势等就会使人相信你的推荐信绝非是属于“胳膊肘总是往里弯”的那一类，而是实事求是，可信度高的客观评价。

我们给出三封典型的推荐信来结束本节。

例 7.1. 这是一封对办公室工作人员的推荐信；主要述说了这个申请人的工作态度和工作表现。

To Whom It May Concern,

This letter shall serve as a letter of reference for Miss Cindy Wong who is applying to a position in your organization.

Cindy has been serving the Hong Kong Mathematical Society (HKMS) as the Administrative Assistant since June 2009. As the only administrative supporting staff of the Society, she has had to perform a wide range of office duties, including website administration, administrative support to the Society, newsletter editing, logistics support to the events organized by HKMS, etc. Cindy has done an excellent job in this position and made a positive contribution to the development of the Society.

With the above job duties, Cindy's written and verbal communication skills have been sharpened and enhanced. She is quite organized and self-sufficient. She is able to work independently and take care of different tasks at the same time. Taking this opportunity, we would like to express our complete satisfaction with the services provided by Cindy. As a vice president of HKMS, it has been a pleasure for me to work with her over the past two years.

In summary, Cindy is an excellent staff member who can be completely and consistently relied upon to complete any tasks assigned to her. It is without hesitation that I recommend her for a position with your organization. Should you need further information about Cindy, please feel free to contact me at jli@hkedu.edu.hk.

Sincerely,

John Li
Vice President of HKMS

敬启者：

此信将用作黄辛蒂小姐申请贵组织一职位的推荐信。

辛蒂自 2009 年 6 月以来一直在香港数学会任行政助理。作为学会唯一的行政工作人员，她必须担当范围很大的办公室职责，包括网站管

理、对学会提供行政支持、编辑新闻简报、对香港数学会组织的活动提供后勤支持，等等。辛蒂在这个岗位上工作出色，对学会的发展作出了积极贡献

伴随以上的工作责任，辛蒂的书面与口头交流能力已经得到加强。她相当有条理、自强，能独立工作，还同时能兼顾好几件不同的工作。趁此机会，我们表达对辛蒂提供的服务的充分满意。作为数学会的副会长，在过去的两年中我很愉快地与她共事。

总之，辛蒂是个优秀的职员，她能被完全、一贯地依靠并完成指派给她的任何任务。我毫不犹豫地将她推荐给贵机构担任一职。如需辛蒂更进一步的信息，请随时与我联系；我的电邮地址为 jli@hkedu.edu.hk。

真诚的，

李约翰
香港数学会副会长 ♦

例 7.2. 这是为找教职的申请人撰写的推荐信，主要是评论申请人的研究能力和研究表现。请注意信的分段结构。

To Whom It May Concern,

This is a reference letter for Dr. Jeff Wilson, whose application for the post of Assistant Professor in the Department of Mathematics at your University is being considered. It is my great pleasure to comment on Dr. Wilson's outstanding academic, teaching and research contributions to the field of Mathematics.

I have known Dr. Wilson for 5 years in my capacity as his collaborator. Dr. Wilson's research interests include applied and computational mathematics, stochastic simulation and analysis, and computational physics, etc. He has made a significant progress in the development of some important areas in mathematics. His publication record is impressive, in particular he has published 10 SCI journal articles in the past 4 years. Some of his papers have been published and accepted by the top mathematical journals, including *Physical Review Letters*, *Journal of Computational Physics*, *Journal of Scientific Computing*. One of his most impressive works is his article entitled "An effective adaptive grid method for solving phase

field problems" which was published in *Communications in Computational Physics* (2011). This paper proposed an effective technique for dealing with large solution domain and long time integration for the nonlinear phase field problems. The advantage of this technique is that it only requires very little additional CPU time to obtain much higher solution resolution.

Dr. Wilson's continuous research outputs clearly demonstrate his extraordinary ability and commitment in the field of scientific computing. Therefore, I believe that his research achievements would qualify him to be considered the post of Assistant Professor in any institutes. Over the past few years, considering his expertise and the contribution made in the field, Dr. Wilson has been invited to visit and deliver talks in world-renowned universities and research institutes. He has also participated in various international mathematical conferences and workshops from time to time. From the list of his lectures at various conferences, I can see that he is an active participant at various influential conferences and workshops.

I believe that Dr. Wilson is very enthusiastic about teaching and other services to the academic community as he has been involved in co-supervising Master and PhD students and teaching quite many undergraduate and postgraduate courses.

In summary, it is a clear case that Dr. Wilson deserves an offer from the Department of Mathematics at your University and I would give my strongest support to his application without hesitation.

Best Regards,

Catherine Nelson
Chair Professor

敬启者：

这是一封为杰夫·威尔逊博士所写的推荐信，他对贵大学数学系助理教授位置的申请正被考虑中。我很荣幸能评述一下威尔逊博士在学术、教学及研究上对数学的突出贡献

我作为合作者认识威尔逊博士已有五年。威尔逊博士的研究兴趣包括应用及计算数学、随机模拟和分析、计算物理等。他在数学几个重要领域的发展中已经取得显著的进展。他的论文发表记录令人印象深

刻，特别他在过去的四年中已经发表了 10 篇 SCI 杂志论文。他某些文章已被数学领域的顶尖杂志发表或接受，如《物理评论快报》、《计算物理杂志》和《科学计算杂志》。他最出色的文章之一题为“解相位场问题的一个有效的自适应网格法”，发表在《计算物理通讯》上。它对非线性相位场问题的大的解领域及长时间积分提出了一个有效技术。此法的优点是它仅仅需要很少的额外 CPU 时间而能大大提高数值解的分辨率。

威尔逊博士持续不断的研究成果清楚地表明他在科学计算领域里的非凡能力和承诺。因此我相信他的研究成就足以使他有资格在任何大学担任助理教授之职。在过去的几年内，由于他在这个领域的专业知识和贡献，威尔逊博士已被世界的著名大学及研究所邀请访问并给予演讲。他也不时参加各种各样的国际会议和专题研讨会。从他列出的会议报告一览表我能看出，他是许多有影响的会议和研讨会的积极参与者。

我相信威尔逊博士对教学及学术界的其它服务极具热诚，如同他已置身于本科生和研究生教学及共同指导硕士和博士研究生那样。

总之，很清楚威尔逊博士是值得贵校数学系考虑给予职位的，我毫不犹豫地对他的申请给以最强的支持。

最好的祝愿，

凯萨琳·纳尔逊
讲座教授 ♦

例 7.3. 这是一份给申请研究生学位的大学生的推荐信，主要说明他在大学的学习表现、英语能力、性格等方面。

Dear Sir/Madam.

Mr. David Ho is applying for admittance to become a graduate student in your Department. I would like to support his application strongly.

I have known Mr. Ho for about 3 years. I taught Mr. Ho in his final year of study, with a subject titled Numerical Methods for Partial Differential Equations. He worked very hard for this subject, and placed in top 20% in the class.

Mr. Ho has a strong analytical skill, and he is also quite independent. He was in our Dean's list in the 2004—2005 academic year, which also indicates that he is one of the top students in his class.

Mr. Ho's English ability is very impressive, who has a strong ability to express views orally and in writing. He is also mature and easy going.

It is without hesitation that I offer my support to his application.

Sincerely,

Jingrun Zhang
Associate Professor

尊敬的先生/女士：

何大卫先生正在申请成为贵系的研究生。我想强有力地支持他的申请。

我认识何先生已经大约三年。在他读书的最后一年我教了他一门《偏微分方程数值解》的课。这门课他十分用功，在班上是最优秀的两成学生之一。

何先生具有很强的分析能力，他也相当独立。他在2004—2005学术年度进入了我们的优秀学生名单，这也表明了他在课堂上是最好的学生之一。

何先生的英语能力让人影响深刻，有很强的口头和文字表达思想的能力。他也很成熟，并容易相处。

我毫不犹豫地支持他的申请。

真诚的，

张景润
副教授 ♦

7.3 审稿



John E. Littlewood

学术性杂志收到稿件后要寻求本领域的专家审阅 (referee 或 review)，帮助编辑作出录用或退稿的决定。这项工作通常是大学教授事务的一部分。在美国，一个教授的平均时间分配是 40% 研究、40% 教书和 20% 服务。最后一类的服务工作包括校外学术性服务和校内事务性服务。审稿是学术性服务的一种。这种服务基本上是不计报酬的，是研究者对学术界的义务劳动和无私奉献。积极参与审稿是职业生涯中不可或缺的重要一环。

这种学术服务本质上是双赢的。一方面，学术期刊依赖于审稿人的把关，以确保不断发表高质量的研究论文。另一方面，由于审稿人较其他人更早接触到所在领域或相近领域最新的研究成果，这对自己的研究有许多正面的影响。至少，可以比别人更早一步增加对研究前沿的了解。另外，这篇待审文章或许能给审稿人一些触类旁通甚至意想不到的启发。在这个意义上，审稿不光是一种光彩的义务，也是有回报的投资。

当然，审稿不是强制性的工作。如果目前忙得焦头烂额，你完全可以婉拒审稿邀请。有时，杂志编辑会请你推荐另一合适人选。这时，绅士式的做法是尽量帮助该杂志物色另一位审稿人，而不应冷冰冰地回应请求者 find someone else to review the paper（找其他人审）。一旦同意审稿，你就应该尽可能在编辑建议的时段内完成这项任务。如果你拖拉行事，甚至到编辑来信催促不肯动笔，就应扪心自问：如果你投稿后一年半载依然杳无音讯，你会不会气得七窍生烟？

审稿过程须遵循由英国数学家利特尔伍德 (John E. Littlewood, 1885 — 1977) 提出的三项基本原则：

> **Is it new? Is it correct? Is it surprising?**
>
> **结果是否为新？结果是否正确？结果是否出乎意料？**

评价一篇研究文章就应该从这三个方面入手。当然，不同档次的杂志对上述三点的解释和实践不大一样。譬如，仅仅提供了一个证明无误的新定理，如果令人惊奇的程度不高，普林斯顿大学的《数学年刊》是不会采纳的，但是这类文章对于一本普通杂志可能就绰绰有余了。这样来看，不同杂志发表文章的标准大不一样，就像美国的几千所大专院校的水准参差不齐，质量差别巨大。

尽管如此，审稿人还是有一些可供参考的普适规则，他们在撰写审稿报告 (referee report) 前亦应该知晓一些事项。首先我们指出，审稿人是以第一读者的身份阅读这篇文章，他的直接感觉往往能代表一般读者的普遍感觉。无论是被这篇文章迷住了、还是提不起劲，这种直觉往往都能说明问题，因此应将之在报告中坦率地告诉编辑。

审稿花费的时间因人而异。有的人只看主流，不问细节；有的人逐字逐句推敲，不放过定理证明的每一步，甚至帮助作者修改英文，尤其对外国作者。这后一种审稿态度值得推崇，但很少有人做得到。略为折中的做法是：不必对每一命题找到一个新证明，不必将参考文献内的论文都浏览一遍，亦不必过分拘泥于表达细节的改进，但你应该读懂这篇文章的基本思想和证明的思路，能够判断文章主要结论的正确与否。这样，你就能胸有成竹地建立关于文章的整体观点。许多文章的主题是对其它已知结果的或大或小的改进或推广，这时，你应把部分注意力放在将它和目前其它研究的比较工作上，看看被审文章是前进了一大步还是无关紧要的小改进。判断一篇文章是否有价值的一个简易方法是：假如你不是审稿人，你有阅读它的兴趣吗？

当你赞赏或批评文章的全部或局部时，应该提供详细的论据，要让作者以及作为中间人的编辑信服于你提出的理由。对于文章的结构组织、表达方式等可以改善的地方要有建设性的意见，而不是仅下武断性的结论而缺乏说理步骤。即便你不推荐该文的发表，作者如能从你这匿名评审者处得到有价值的建议，也会对你衷心感谢，且其修改后的文章增加了未来被其他杂志接受的机会。

当你对被审的文章有了较为透彻的理解，并形成了明确的观点和有用的建议，你就可以动笔写审稿报告了。这个报告的格式比较简单、基本如下：第一段以概括描述该文要处理的事。主体部分则是对文章布局、主要结论、证明方法、文献引用、结果比较等方面全面阐述你的观点并提供论据，指出你认为恰当的修改意见。其后你应清楚地表明你的推荐意见，它们有下列几种：接受；小范围修改后接受；大范围修改后再次投稿；拒绝。

审稿报告的最后一段往往是审稿人发现的数学小错误和英文笔误。当然，审稿者没有义务找到所有需要改正的错误，故即使文章已被无条件接受，作者也应再次仔细校对文稿，力求发表时是无瑕疵。

总之，审稿既是一种义务，也是一种荣誉。审稿人应不负编辑的期望，把这份被委托的神圣工作做得让人满意。

下面我们提供四个具体的审稿报告以飨读者，它们代表了关于稿件不同类型的推荐建议。

例 7.4. 这篇审稿报告的结论完全是肯定的。

The authors prove that for the family of maps $T_\lambda(x) = \cos(\lambda \arccos x)$ from $[0, 1]$ onto itself with $\lambda > 1$, which is called in the paper the family of Chebyshev maps, there is a set of certain irrational numbers λ such that the unique fixed density of the corresponding Frobenius-Perron operator can be determined exactly.

When λ is a positive integer, T_λ is a polynomial, and in this case the unique fixed density of the Frobenius-Perron operator has been known. For general λ, the authors establish a differentiable conjugacy between T_λ and a piecewise linear continuous map. Since for some values of irrational λ, the latter map is a Markov one for which the fixed density can be found explicitly using a matrix method. Such λ values satisfy a quadratic equation, so can be determined explicitly. Using the conjugacy function h the explicit fixed density of the original Chebyshev map is obtained.

The paper is written clearly and easy to follow, and the mathematics is correct and strict. But since some readers may not be familiar with the concept of Frobenius-Perron operators, it seems better to add some words on this concept or refer the reader to the authors' book [3] in the Reference. I recommend its publication.

作者证明对于 $\lambda > 1$，将 $[0,1]$ 映到其上的一簇本文所称的切比雪夫映射 $T_\lambda(x) = \cos(\lambda \arccos x)$ 有一个某些无理数 λ 组成的集合，使得对应的弗罗贝尼乌斯－佩龙算子的唯一不变密度能被精确地确定。

当 λ 为一正整数时，T_λ 是一多项式，已经知道这一情形时弗罗贝尼乌斯－佩龙算子的唯一不变密度。对一般的 λ，作者在 T_λ 和一个逐段线性连续映射之间建立了一个微分共轭。因为对一些无理数的 λ 后者是一马尔可夫映射，其不变密度能由矩阵方法显式求出。这些 λ 值满足一个二次方程，因此可以显式确定。利用这个共轭函数 h 就得到了原先的切比雪夫映射显式的不变密度。

该文写得清楚，易于理解，其数学正确严密。但是因为某些读者可能不熟悉弗罗贝尼乌斯－佩龙算子的概念，关于这个概念略加阐析似

乎更好，或让读者参见参考文献 [3] 作者的著作。我建议发表此文。

♦

例 7.5. 这篇文章的第一同个审稿报告提出了一系列的问题和建议；下面是其第二次审稿报告，当中肯定了作者的修改稿。

The revised version of the paper has addressed the questions asked in my earlier referee report. Although the energy method, like the maximum entropy method, may not beat Ulam's method for piecewise expanding mappings in the convergence rate, the convergence property of the proposed new method under the very mild assumption is its great advantage over Ulam's method for which the convergence has only been shown for piecewise expanding mappings. For example, I have not seen a direct proof of Ulam's method applied to the logistic mapping $S(x) = 4x(1-x)$ since S is not expanding.

The energy method using partitions of the domain, so that the locally defined "generating functions" can be used, is an improvement of the traditional maximum entropy in which only monomials are used. This is another merit of the paper.

The third merit of the energy method over the maximum entropy one is the resulting system of equations from optimizing the quadratic energy function is a linear system. Thus, numerical linear algebra techniques can be employed for fast computation.

Therefore, I suggest to publish this paper on the DCDS.

文章修改稿已经回答了我上次审稿报告提出的问题。虽然能量方法像最大熵方法一样对于逐片伸展映射在收敛速率方面可能不敌乌拉姆方法，但是所提出的新方法在非常一般假设下的收敛性质是它超过乌拉姆方法的大优势，而后者的收敛性只对逐片伸展映射证明过。例如，我还没有看见乌拉姆方法对逻辑斯蒂映射 $S(x) = 4x(1-x)$ 收敛性的直接证明，因为 S 不是伸展的。

运用定义域划分使能用到局部定义的“生成函数”的能量方法改进了只使用单项式的传统最大熵方法。这是本文的另一优点。

能量方法好于最大熵方法的第三个优点是，由最优化二次能量函数得到的方程组为一线性系统。这样，数值线性代数技术能用来快速计算。

因此，我建议在《离散与连续动力系统》上刊登这篇文章。 ♦

例 7.6. 这篇较长的审稿意见基本上是负面的，当中给了不予录用的理由，并指出了文章许多其它的小毛病。

The title of the paper explicitly says its purpose: finding a particular solution of the following fourth order PDE

$$\Delta^2 u + cu = f,$$

where $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ or $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ is the Laplacian, and $c \neq 0$ is a constant. It is assumed that the right-hand side function f is a power of r in the case of R^3 and is $\ln r$ times a power of r in the case of R^2, where r is the distance of the point $\mathbf{x}$ to the origin. Thus, the original PDE is reduced to the following ODE

$$\Delta_r^2 u + cu = r^{2n-1}$$

in R^3 or

$$\Delta_r^2 u + cu = r^{2n} \ln r$$

in R^2, where $\Delta_r u = (r^2 u_r)_r / r^2$ for $u = u(r)$. The method for a particular solution is basically the method of the undetermined coefficients, and this method has been used by the authors and their co-workers to other types PDE's such as the Helmholtz-type equation and the axisymmetric Poisson equation.

Although I believe that the paper has no major mathematics mistakes, the closed form formulas for the particular solutions are only of importance in pure mathematics, not very useful from the viewpoint of computational mathematics. No consideration of efficiency or computational cost is given in the paper for the actual application in engineering, and there are no numerical experiments or comparisons with other numerical methods in the paper.

Let me use an example in numerical linear algebra to illustrate my point here: In linear algebra, the solution of the algebraic equation $Ax = b$ is $x = A^{-1}b$ when A is nonsingular, but how to efficiently compute the solution is the main topic of numerical linear algebra. Nobody uses the "linear algebra formula" of A^{-1} to calculate the solution. Cholesky's decomposition gives a very efficient method when A is positive definite since it uses an iterative scheme that can be

easily performed on computers. In my mind, an iterative method should be developed for the efficient computation of the particular solution of the special types of PDEs. In this sense, if the paper does not give the strong evidence of its efficiency in computations, it may be of little value to the engineering community.

I also have a question about approximating the source term f in the original multi-Helmholtz-type equation. The paper adopts the radial basis function approximation. But some other papers from the authors and their co-authors use Chebyshev interpolations. Which one is better? It seems to me that with the radial basis function approach in this paper, the particular solutions have complicated series representation, which explains why the computation may not be efficient. If the Chebyshev-type polynomial is used, a better way to get a *polynomial* particular solution may be obtained.

The paper is also not very carefully written and there are quite a few minor mistakes. Some are listed below:

1. Page 1, line −3 in "Abstract", "interst" should be "interest".

2. Page 2, in formula (2), Δ should be used for the Laplacian without using the other notation.

3. Page 4, Formulas (11) through (13) just repeat formulas (9) and (10) on page 3, so should be deleted. Also in formulas (14) and (16), delete "$\sum_{j=1}^{N} a_j$". Formula (20) is not mathematically strict since who knows when L^{-1} exists if no domain of L is specified. Here is one method that avoids using L^{-1}:

$$(I-\Delta)(I+\Delta+\Delta^2+\cdots+\Delta^k)=I-\Delta^{k+1},$$

and for large k we have $\Delta^{k+1}p=0$ for a given polynomial p.

4. Page 5, in formula (21), r^{2n-1} is from the radial basis approximation of the original f, so $r_j=\|\mathbf{P}-\mathbf{P_j}\|$ which is not the distance from the point to the origin. We need to add some translation argument to move $\mathbf{P_j}$ onto $\mathbf{0}$ and the fact that the differential equation is translation invariant. In formula (23) delete the square of the left-hand side.

5. Page 7, in formula (36) add square to the left-hand side.

6. Pages 9–10, Theorems 1 and 2 can be easily deduced from the following simple general result: If $\Delta^2 u+cu=0$, then $v\equiv\Delta u$ satisfies

$\Delta^2 v + cv = 0$. Its proof: since $u = -\Delta^2 u/c = -\Delta v/c$, we have $v = \Delta u = -\Delta^2 v/c$. This result can be written as a lemma and Theorems 1 and 2 can be listed as corollaries.

7. Page 12, line 6, delete "to".

8. Page 15, line 2, "we expect" should be "are expected".

文章的题目明确显示了本文的意图：对下列四阶偏微分方程

$$\Delta^2 u + cu = f$$

找到一特解，其中 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ 或 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ 是拉普拉斯算子，c 为一非零的常数。假定右端函数 f 在 R^3 情形是 r 的幂函数，在 R^2 情形是 $\ln r$ 乘上 r 的幂函数，其中 r 是点 $\mathbf{x}$ 到原点的距离。这样，原来的偏微分方程化简成一个常微分方程：在 R^3 的情形为

$$\Delta_r^2 u - cu = r^{2n-1},$$

而在 R^2 的情形则为

$$\Delta_r^2 u + cu = r^{2n} \ln r.$$

这里，$\Delta_r u = (r^2 u_r)_r / r^2$，其中 $u = u(r)$。这里的特解方法本质上是待定系数法，它已被作者及其合作者们用于像亥姆霍兹方程和反对称泊松方程这样的其它类型的偏微分方程。

虽然我相信本文没有较大的数学错误，但是特解公式的封闭形式仅有纯数学方面的重要性，而从计算数学的观点来看则不是非常有用的。文章既没有列出在工程实际应用中其有效性和计算成本考虑，也没有提供与其它算法进行比较的数值试验。

让我用数值线性代数的例子来说明我的观点。在线性代数中，当 A 为非奇异时代数方程 $Ax = b$ 的解是 $x = A^{-1}b$，但怎样有效计算解是数值线性代数的主要论题，没人会用"线性代数公式" A^{-1} 来计算解。当 A 是正定矩阵时，乔利斯基分解给出一个有效方法，因为它利用一个在计算机上容易执行的迭代格式。我认为应该对特殊类型的偏微分方程发展有效计算其特解的迭代方法。在这个意义上，如果

文章未能提供关于计算有效性的强有力证据，它对工程界可能价值微小。

我还有关于逼近原先的多重亥姆霍兹型方程源函数项 f 的一个疑问：文章采用径向基函数逼近，但是作者及合作者们的一些其它论文用的是切比雪夫插值，两者哪个更好？对我而言，本文使用的径向基函数处理似乎导致特解复杂的级数展开式，这大概能解释为何计算可能不太有效。假如用切比雪夫型多项式，或许能得到获取多项式特解的一个更好的方法。

文章写得也不太认真，有相当多的小错，兹举一些如下：

1. 第 1 页倒数第 3 行，在“摘要”里：“interst”应为“interest”。

2. 第 2 页公式 (2) 中，应用 Δ 表示拉普拉斯算子，而不是其它符号。

3. 第 4 页，公式 (11) 到 (13) 恰恰重复第 3 页的公式 (9) 和 (10)，故应删去。并且在公式 (14) 和 (16) 中删去“$\sum_{j=1}^{N} a_j$”。公式 (20) 数学上不严格，因为假如 L 的定义域未给出时谁知道什么时候 L^{-1} 存在。这里是避免使用 L^{-1} 的一个办法：

$$(I-\Delta)(I+\Delta+\Delta^2+\cdots+\Delta^k)=I-\Delta^{k+1}.$$

且对任一多项式 p 只要 k 适当大我们就有 $\Delta^{k+1}p=0$。

4. 第 5 页，在公式 (21) 中，r^{2n-1} 来自原先 f 的径向基函数的逼近，故 $r_j=\|\mathbf{P}-\mathbf{P_j}\|$ 不是这个点到原点的距离。我们需要加上将 $\mathbf{P_j}$ 搬到 $\mathbf{0}$ 的一个平移论述和该微分方程平移不变的事实。在公式 (23) 中去掉左端的平方。

5. 第 7 页，在公式 (36) 在左端加上平方。

6. 第 9、10 页，定理 1 和定理 2 可由下列简单结果导出：若 $\Delta^2 u+cu=0$，则 $v\equiv\Delta u$ 满足 $\Delta^2 v+cv=0$。证明：因为 $u=-\Delta^2 u/c=-\Delta v/c$，我们有 $v=\Delta u=-\Delta^2 v/c$。这个结果可写成一个引理，定理 1 和定理 2 则可列为推论。

7. 第 12 页，第 6 行，删去“to”。

8. 第 15 页，第 2 行，“we expect”应为“are expected”。 ♦

例 7.7. 与这篇被审文章类似的英文错误在许多中国学者的投稿中比比皆是；这也是我们写作本书的动机之一。

This paper studies the stability problem for the θ-scheme applied to solve the Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions. But the paper is not clearly written with many English typos. It might have new contributions to the subject, but because of the poor presentation it is hard for the reader to follow the basic idea in the analysis. Some parts of the paper can be shortened. For example, one of the formulas of (1.1) and (2.1) can be removed since they are exactly the same.

There are too many English errors in the manuscript to list here. I suggest the authors to polish their paper first and then submit it to a more suitable journal.

这篇文章研究用于带有混合边界条件 Navier-Stokes 方程的 θ-格式稳定性问题。但该文写得不清楚，且有许多英文笔误。文章也许对这个学科有新贡献，但由于其糟糕的表达很难让读者跟随分析中的基本思想。文章中某些部分可以缩短，公式（1.1）和（1.2）中的一个可以去掉，因它们是同一回事。

因为这篇手稿英文错误太多，这里我无法一一列举。希望作者们替他们的文章润饰一下，再投到更为合适的杂志。 ♦

7.4 书评

书评 (book review) 与文章审稿报告有许多相异之处。研究性文章专业性强、论题集中、读者层面狭窄；而书的内容比较基础、材料较为庞杂、读者群广泛。更大的不同是：审稿报告的审核对象是尚未发表的投稿文章，它的宗旨是判定投稿的质量是否值得录用发表；书评所评论的对象则是已经问世的书籍（除非是出版前的审阅），它的目的是为该书的潜在读者提供一个行家的鉴定。审稿报告所决定的是文章的生死命运，或可以莎士比亚剧本《哈姆雷特》(*Hamlet*) 中的著名台词 to be or not to be 来比喻；书评对原作的效果则像美联储主席的评述之于纽约股票市场，影响的是销售效果。权威人士的书评可以左右该书的市场销售，因为许多普通读者因为名人情结而相

信书评人的判断力。在美国，登载于 New York Review of Books 的书评篇篇写得生动活泼，它们全方位地展示所评图书的整个画面，让读者马上心领神会，未花多少时间就能估计那本书在他们心目中的价值，据此是否值得花上价值的钞票买回家拜读。

鉴于书评的重要性，《美国数学会会刊》、《美国数学会通报》等杂志都有书评专栏，邀请专人评述一些新出的与数学有关的书籍。哈尔莫斯曾经是后者的书评专栏编辑，他给书评作者的指导性建议是：书评不是内容介绍。按照他对书评的写作原则，写一篇关于某论题书籍的书评等于为这个论题写一篇随笔。如果写的只是“本书第一章讲甲、第二章说乙、第三章聊丙、第四章端丁”，那不如让读者去书店翻翻书的目录更为省事。

如果你写一篇关于有限元方法教材的书评，你应首先列出有限元发展历史的一个概况，列举几个里程碑式的重大成果，包括几个关键人物。你大概不会忘记中国的冯康 (1920 — 1993) 对有限元法的理论贡献。书评的开端把这些历史事实写出来，能给读者一个历史进程的全景俯瞰，然后你可以列出目前最受欢迎的那些教科书和专著并指出它们的各自特色。有了这些背景材料的铺垫，你进而可以专心于评论手上这本新书的工作了。

评论新书应该采用实事求是的方法，根据合乎科学的评价标准行事，而不要只讲优点，不讲缺点，报喜不报忧。书评的作者应该尽己所能，为读者的利益着想，全面而客观地统揽全书，力所能及地指出它的优缺点、实用性和局限性。你应该告诉读者，这本书较之以往的同类书籍有哪些突出的优势？哪些人群可以是其读者？可以预见的效果如何？组织结构是否合乎逻辑、循序渐进？它强调的是专业基础知识的教学性还是热门前沿的研究性？如是教科书，习题分量、难度及和正文的互补是否合适？如是研究专著，是否包含待解决问题 (open problems)？参考文献是否精确、完整？是否提供学科、人名索引和符号表？

哈尔莫斯这位数学写作高手写的书评大概是我们每一个数学工作者都想读的。现在就让我们读一段他在 1998 年为《美国数学会会刊》写的爱尔迪希传记 *The Man Who Loved Only Numbers* (作者：Paul Hoffman) 的书评第一段、中间一段及最后一段。书评作者与传主都是 20 世纪匈牙利民族众多杰出数学家中的佼佼者。可以想见，当哈尔莫斯评述后者的传记时，他会倾注多大的感情。

(*Notices of the American Mathematical Society*, **45**, 1998, p. 1156)

– **Title.** The Man Who Loved Only Numbers (Book Review)

This book is about Paul Erdös (who lived from March 26, 1913 to September 30, 1996). He was a mathematician who lived and loved and breathed and thought mathematics and almost nothing else. The author obviously loves his subject; he writes with care and affection. Much of what he writes consists of quotations or paraphrases of what Erdös wrote and said. A fair way to review such a book seems to be to quote or paraphrase what's in it, and what follows is written in that spirit.

题目： 《数字情种》书评

这本书是关于保罗·爱尔迪希（1913年3月26日—1996年9月30日）的。他是一名数学家，以数学为生：爱它、呼吸它、思考它，而几乎不干别的。作者显然爱上了这个选题，用心写之并充满情感。他写的许多东西包括了爱尔迪希写过和说过的语录或转述。评价这样一本书的一种公平方式似乎是引用或复述书中的东西，下面所写即据此精神

– He loved children, and he fussed over them when he met them, but not for long—his patience was quickly exhausted. And he loved all children, not just the mathematically precocious, and doted on the epsilons of his collaborators. "People are always taking pictures of me holding babies," said Erdös. In one photo "the baby looked so content that somebody said, 'Uncle Paul is nursing.'" The younger the child was, the deeper his connection.

他爱孩子，碰见他们时会过分亲密，但不会长久——他的耐心很快耗尽。他爱所有的孩子，不仅仅是数学上的早熟者，且宠爱其合作者的爱波西龙。爱尔迪希说："人们总是拍我抱孩子的照片。"在一张照片上"婴儿瞧上去如此心满意足，以至于有人说'保罗大叔正在看护着呢！'"孩子越小，他与之的连接越深。

– His mother was a big part of his life. She was always on his mind, and he phoned her every day from everywhere. "Erdös mama" was famous in the mathematical world. "No son loved his mother more than Paul," said John Selfridge. "We got to

know her well during the spring of 1966. She was a kind woman. We called her *Anyuka* [not "mother" but "mommy"] like Paul. ... When Paul died, I went to his funeral in Budapest. I hate funerals, but I am glad I went. The official memorial service ... was one of the largest ever held in Hungary, with more than five hundred people in attendance, as if it were the funeral of a head of state."

他的母亲是他生命的一大部分。她总在他的心上，他每天在不同的地方都给她打电话。"爱尔迪希妈妈"在数学世界里很是有名。John Selfridge 说过："没有哪个儿子比爱尔迪希更爱母亲。"他又说："1966 年春我们对她知之甚多。她是仁慈之妇。我们像保罗一样叫她 *Anyuka* [不是"母亲"，而是"妈咪"] ····· 保罗去世后，我出席了他在布达佩斯的葬礼。我讨厌葬礼，但我很高兴我去了。其官方追悼会 ····· 是历史上举行于匈牙利的最大型追悼会之一，出席者有五百多人，仿佛是国家元首的葬礼。"

这篇书评不到两页长，词汇、句子都很简单，但那种娓娓动听的语气呼之欲出，读了这样的书评，还没有读过 *The Man Who Loved Only Numbers* 的读者就可能迫不及待地找那本传记 [15] 去了。

7.5 文评

在任何专业领域里，面临浩瀚无边的论文之海，我们难以逐篇翻看，以求了解、吸取营养。毕竟我们的时间、空间和精力都是有限的。这时，由科学家或工程师们自己应邀撰写的 paper reviews 帮了研究者们的大忙。这里，我们把"文章评论" (paper review) 简称为"文评"，以和上一节的主题"书评" (book review) 相对应。通过阅读简明扼要、恰到好处的文评，我们可以在几乎一瞬间的时间内大致知道所评论文的基本思想和主要结论是什么。

众所周知，在数学领域，美国的《数学评论》是名气最大的数学研究论文评论汇集。在网络时代之前，北京大学图书馆或南京大学数学系图书室书架上一排排放置的每月一大卷的《数学评论》让多少年轻的数学研究生们感慨万千，心存感激。从这一本本大书里他们被引导进了研究领域的前沿。1940 年创造《数学评论》的奥地利数学家和科学史家 Otto Neugebauer (1899—1990) 于 1931 年



Otto Neugebauer

建立了德国版的“数学评论” Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete。由于拒绝效忠希特勒，他失去了工作，但在 1934 年出任丹麦的哥本哈根大学数学教授，并于 1939 年始永久性地待在美国的布朗大学。他对现代数学最大的贡献就是至今未衰的这两套德国版和美国版的《数学评论》。七十年后的今天，美国《数学评论》的数据库已经包含了超过两百万篇的论文。由于大量属于自愿性质的数学评论员的辛勤劳动，《数学评论》已成为数学研究者不可或缺的主要研究帮手之一。

如果你加盟《数学评论》或其它类似杂志，成为了一名数学评论员，那你怎样才能称职呢？

首先我们指出的是，数学评论与数学审稿的性质是不一样的，它们负有不同的使命。审稿的职责是鉴别文章是否值得发表，它对杂志负有把关的责任。评论的功能是客观总结已发表论文的主要内容，必要时加上自己的主观评价，它对潜在的读者负有引导的作用。这种功能的不同导致它们各自所花时间的不同。一般而言，审稿花费的时间与精力大大超过评论。前者的时间分配主要是在证明过程的仔细检查上，而后者通常不必对证明再作斟酌；毕竟这篇论文已经通过了严格的专家审核。

文评与审稿的另一不同之处在于评价语言。审稿像审判，决定稿件的生死存亡，故审稿报告可以毫不留情地对文章提出批评甚至否定，当然必须是理由充分。而文评一般不会对所评文章乱批一通、满篇贬语。它更像一篇简短的“新闻报道”。此外，审稿是匿名的，而文评者的名字是公开的。诚然，文评中可以出现评论员的评述与主观判断，但这通常是对整个领域及论文思路、定理结论的一般评述，而不是到处找错。在文评中写下负面意义的断言着实要小心谨慎。浏览一下《数学评论》中的文评就会发现，几乎所有的数学评论的语气都是中性的，公平客观的。

然而，评论与审稿又有许多一致之处。首先，写评论之前需要认真而仔细地阅读论文，以便对所评文章最新结论的来龙去脉有全盘的了解。不要认为仅仅罗列论文中的主要定理就万事大吉。固然，在文评中列出作者的主要贡献是评论员常做的事情，但如果就此止步，读者可能从评论中获得的益处达不到最大限度。研究者从别人的工作中想得到的不光是结果，更想知道的是思想、方法、动机及前景。而有的东西在不少作者的笔下是有意或无意地深藏不露的。有洞见

的论文评述者会在文章错综复杂的经纬中理出一条清晰的思路，并能把这最关键的基本想法传递给读者。这样的文评实在是最受读者欢迎的。

最懒的数学评论是照抄作者的文章摘要。这就是说，评论者什么事也没有干。固然，优秀论文的摘要往往叙述精辟、突出重点、切中要害、总结得当、方便读者。但是，评论员还是应该另辟蹊径，以新颖的语言诠释文章的重点之处。文章贵在创新，评论员也不应走作者的老路，而应以全新的面貌出现。这就像当年中国文坛的一对散文家朱自清和俞平伯同游南京相约而撰的同名散文名篇《桨声灯影里的秦淮河》：题材一样，题目一样，描写的角度、重点却不一样。它们完全是各有特色的美文佳例，在中国现代散文史上光芒四射。如果评论者真的太喜欢作者的精彩摘要而“自叹弗如”，不想“关公面前要大刀”，而一定要用那个通篇的摘要来充当自己评论的代言，则须在文评的最前面加上 From the Abstract 三个词，再将被引用的摘要用双引号括起来。这样做是允许的，但却不是值得提倡的。

我们在《数学评论》中挑选了下面的两个例子来让读者体会文评该怎样写。一篇是美国教授 Sheldon Axler 评论中国教授的论文，另一篇是中国学者评论意大利学者的文章。Axler 是哈尔莫斯的徒孙，是个很会教书的泛函分析专家，曾给修过他《高等泛函分析》课的本书作者之一写过推荐信。

例 7.8. 这篇文评清楚地复述了论文的主要结果。为帮助读者，评论者在两个括号里解释了基本概念，连并非算子理论专家的笔者二位都能看懂。

Title. Compact Toeplitz Operators on $A^p(\phi)(1 \leq p < \infty)$

Review. For ϕ a normal weight on the unit disk (roughly, this means that ϕ behaves like some power of $(1 - |z|)$, let $A^p(\phi)$ denote the Bergman space of analytic functions in the weighted L^p space determined by ϕ; here we assume that $1 \leq p < \infty$. For f a bounded measurable function on the unit disk, the Toeplitz operator T_f on $A^p(\phi)$ is defined as usual (multiplication by f followed by the orthogonal projection onto $A^p(\phi)$). This paper shows that if f is nonnegative, then T_f is compact on $A^p(\phi)$ if and only if the weighted average of f on pseudohyperbolic disks of fixed radius goes to 0 as the pseudohyperbolic center goes to the boundary of the unit disk. The author also shows that suitable Carleson squares can be used in

place of pseudohyperbolic disks. Finally, he shows that if f is in the closed algebra generated by the bounded harmonic functions on the unit disk, then T_f is compact on $A^p(\phi)$ if and only if f is continuous on the closed unit disk and equal to 0 on the boundary of the unit disk.

题目： $A^p(\phi)(1 < p < \infty)$ 上的紧 Toeplitz 算子

文评： 对于单位圆盘上的一个正规权 ϕ（大致来说，这意味着 ϕ 的行为如同 $(1-|z|)$ 的某次方幂），令 $A^p(\phi)$ 表示由 ϕ 决定的加权 L^p 空间内的解析函数全体所组成的 Bergman 空间；这里我们假设 $1 \le p < \infty$。对于单位圆盘上的有界可测函数 f，把 $A^p(\phi)$ 映入自身的 Toeplitz 算子 T_f 按常规定义（即先乘上 f，再正交投影到 $A^p(\phi)$ 之上）。这篇论文证明：若 f 是非负的，则 T_f 在 $A^p(\phi)$ 上为一紧算子当且仅当 f 在半径不变的拟双曲圆盘上的权平均当拟双曲中心走向单位圆盘的边界时趋向于 0。作者也证明合适的 Carleson 平方能取代拟双曲圆盘。最后他证明：若 f 属于单位圆盘上的有界调和函数所生成的闭代数，则 T_f 在 $A^p(\phi)$ 上为紧的当且仅当 f 在单位闭圆盘上连续且在单位圆盘边界上为 0。 ♦

例 7.9. 这篇文评比较简短，但也相当专业化，非本领域专家不易读懂。

Title. Euler Systems Obtained from Congruences between Hilbert Modular Forms

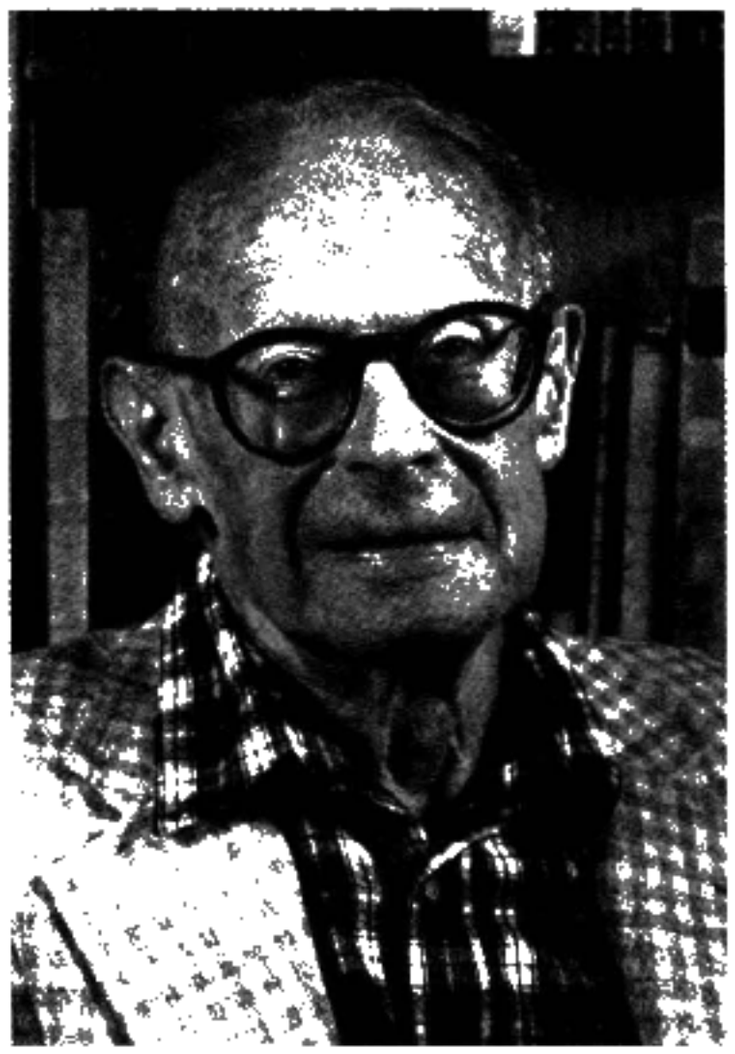
Review. Let F be a totally real number field, n an integral ideal of the ring of integers of F, K/F a totally imaginary quadratic extension, and A/K an abelian variety. Let p be a prime ideal of the ring of integers of the finite extension of Q generated by the eigenvalues of the action of the Hecke algebra T_n on a Hilbert modular new form. Under certain assumptions on K and p, it is proved in this paper that there exists an Euler system relative to A/K and p_n for all n. Some arithmetic applications are given.

题目： 由希尔伯特模形式之间的协同得到的欧拉系统

文评： 令 F 为一全实数域，n 为 F 中的整数环的一个整数理想，K/F 为一全虚二次扩张，且 A/K 为一阿贝尔簇。设 p 为 Q 由 Hecke 代数 T_n 在希尔伯特模的新形式上作用的特征值生成的有限扩张的整数环的一个素理想。在某些关于 K 和 p 的假设下，这篇

文章证明：对所有的 n，关于 A/K 和 μ_n 存在一个欧拉系统 …此算术应用也被给出. ♦

在结束本节之前，让我们阅读一篇著名的文评，这是一个法国数学家对一位刚刚崭露头角的中国数学家一篇六页论文的评论之语. 发表于 1944 年《数学年刊》的这篇预示着整体微分几何诞生的文章作者是三十三岁的陈省身，而评论员则是比他大五岁的韦伊 (André Weil, 1906—1998)



André Weil

Title. A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds

Review. In order to understand the true nature of the Euler-Poincaré characteristic of a (differentiable) manifold, one has to consider it as a topological invariant of a fibre-space invariantly attached to the manifold, namely, of the space of tangent unit-vectors (or "tangent sphere bundle") to the manifold. It is therefore only natural that an intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula (which expresses the Euler-Poincaré characteristic as the integral of a differential form invariantly attached to the Riemannian structure) should involve the consideration of that fibre-space. This is how the author proceeds here; and his proof, as he states, is merely the simplest example of a general method in the differential-geometric study of fibre-spaces, which is developed in the paper reviewed below.

If R^n is a manifold, the tangent sphere-bundle, or space of tangent unit-vectors, is a manifold M^{2n-1}. A vector-field with isolated singular points on R^n appears in M^{2n-1} as a manifold $\overline{R}^n$ of dimension n, having on R^n the projection R^n, but having in M^{2n-1} a boundary (in the sense of combinatorial topology) which consists of a sum of fibres multiplied with integral coefficients (equal respectively to the indices of the singular points of the given vector-field); the sum of these coefficients is then equal to the Euler-Poincaré characteristic. By integrating on $\overline{R}^n$ a suitable differential form, and applying to this integral the theorem of Stokes, one obtains the generalized Gauss-Bonnet formula for Riemannian manifolds. To construct a differential form which has the required properties, and to prove that it has these properties, is a purely algebraic task (but by no means a trivial one), of which the author acquits himself by a skillful application of the Cartan methods and notations in Riemannian geometry.

题目： 闭黎曼流形高斯－博内公式的一个简单内蕴证明

文评： 为了理解（微分）流形欧拉－庞加莱示性数的真正本质，必须将它考虑成不变地附属到该流形上的一个纤维空间（即流形的单位切向量空间，或“切球面丛”）的一个拓扑不变量。因此很自然地，高斯－博内公式（将欧拉－庞加莱示性数表达为不变地附属到黎曼结构上的一个微分形式的积分）的一个内蕴证明应当包含纤维丛的考虑。这就是作者在这里怎样做的；如他所述，他的证明仅仅是纤维丛的微分－几何研究中一般方法的最简单例子。在所评之文中有以下的发展：

如果 R^n 是一个流形，切球面丛，或单位切向量空间，是一个流形 M^{2n-1}。在 R^n 上的具有孤立奇点的一个向量场在 M^{2n-1} 内作为一个维数为 n 的流形 $\overline{R}^n$ 出现。在 R^n 上有投影 R^n，而在 M^{2n-1} 内有一个（在组合拓扑意义上的）由纤维的整系数（各自等于给定向量场的奇点的指数）之和所构成的边界；这些系数的和然后等于欧拉－庞加莱示性数。如在 $\overline{R}^n$ 上积分一个合适的微分形式，并把斯托克斯定理用于该积分，就可得到黎曼流形的广义高斯－博内公式。构造一个带有所需性质的微分形式并证明它的确具有这些性质，是一个纯代数的任务（但绝非平凡之事），作者基于娴熟地运用嘉当方法和黎曼几何的符号而大功告成。

怎样讲数学

第八章



讲数学是一个数学工作者一生中最常做的事之一，从大学生、研究生阶段的讨论班上报告自己或别人的工作，到参加学术会议讲述自己的最新研究成果，讲数学的风格和艺术都起着似乎觉察不到的作用。在本书最后的一章里，我们试图探讨一下讲数学的技巧和方法。

这里所谓的“讲数学”是狭义的，它不包括以学期为单位的大学数学课的教学，虽然下面的论述对此也能提供参考。下文中的数学演讲指的是本系讨论班的报告、各式学术会议上作的大会或小组报告，亦包括应聘大学教职时所作的校园面试报告。

每个人都会记得第一次在讨论班上报告或第一次在学术会议上发言的情形。前面提到过的美国物理学家费恩曼在普林斯顿大学跟惠勒教授读博士学位时，应导师要求第一次在爱因斯坦、泡·诺依曼、泡利 (Wolfgang Pauli, 1900—1958) 等大牌人物参加的讨论班上作报告，在他的传记《迷人的科学风采——费恩曼传》(*The Life and Science of Richard Feynman*) 对该报告中的紧张气氛有生动的描述。他后来不仅是美国那个时代最伟大的理论物理学家，而且也是最杰出的物理学演讲者。他 1961 年 9 月至 1963 年 5 月在加州理工学院主讲了一、二年级的基础物理课，事后又根据讲课录音编辑出版了一套三卷本的《费恩曼物理学讲义》，几十年来影响深远。

本书作者之一也清楚记得他在南京大学读研究生时第一次在最优化理论和方法讨论班报告的内容是关于线性规划的对偶理论，当时他着实花了一番功夫准备，将数学中某些对偶概念进行了一次大检阅，并得到导师何旭初教授 (1921—1990) 的鼓励。后来他在美国密歇根州立大学就读博士时第一次在讨论班上报告的内容，是美国麻省理工学院的斯特朗 (Gilbert Strang, 1934—) 教授的新著 *Introduction to Applied Mathematics*（《应用数学导论》）中关于最优化理论的那一章，讲的是约束最优化求解的拉格朗日乘子法则。报告中作者未照本宣科而一字不差地用了基于梯度直观概念的简单

几何推导法，获得导师李大岩教授一句“马列主义学得好”的幽默肯定，至今犹在耳旁。

我们在学生时代都体会到一个优秀的老师对自己一生的巨大影响。几乎所有的科学传记都会列举传主永铭在心的那些启蒙者。就好像一本打动心灵的好书能让读者印象深刻，一场优秀的数学演讲也会给听众留下“不虚此听”的感觉，这种良好的印象大多反映在听众如痴如醉的面部表情中。引人入胜的演讲不光增加了报告者的自信心，更提升了他的学术名望。如果他正在职场上推销自己，这甚至能为就职前景预订了一张入场券。

我们身边不乏这样的情形：有的人，比如大学教授，尽管满腹经纶、才高八斗、但讲课时却“茶壶里煮饺子，肚子里有货，嘴上倒不出”。这可能是天性使然，也可能是高估了听众的理解力而致。的确，有人天生会讲课，有人教书数十载都是不受欢迎的教书匠。然而，世上无难事，只怕有心人。只要记住一些“讲课须知”，勤学苦练，并能时刻留意别人讲学的艺术，就会逐步提高自己的讲演能力，成长为会作报告的专家。

即便是那些讲数学的高手，也是得益于精心的准备，就像一句格言所说：天才在于勤奋。一位著名数学家告诉过哈尔莫斯，他花了五十个小时来准备一场五十分钟的邀请报告，也就是说最后演讲平均一分钟花了一个小时准备。至于哈尔莫斯本人，他这样描述他一次准备报告稿的过程：

> I talked it, the whole thing, out loud, and then, I talked it again, the whole thing, into a dictaphone. Then I listened to it, from beginning to end, six times - three times for spots that needed polishing (and which I polished before the next time), and three more times to get the timing right (and, in particular, to get the feel for the timing of each part.) Once all that was behind me, and I had prepared the transparencies, I talked the whole thing through one final rehearsal time (by myself - no audience). That's work.
>
> 我大声讲了一遍，然后对着录音机又讲了一遍。然后我从头到尾听了六遍——其中三遍找出需要加工的地方（下次前已加工），其后的三次调整演讲时间（特别要对每部分的用时找到感觉。）一旦做完了这些并已准备好了胶片，我从头到尾又彩排了一次（就我自己，没有听众）。这就是工作。

希望下面的几节阅读会给你的数学演讲带来理由充分的启发，打下你自信心理的基础，见到演讲成功的前兆。

8.1 基本原则

没有人会否认数学演讲的重要性，但能不能讲好它则是另当别论。不容乐观的现实是许多学术报告让我们听得失望、听得扫兴。想开阔新眼界的研究生对此的感觉尤其深刻，他们经常乘兴而去、败兴而归。

哈尔莫斯是数学演讲的高手，在作为纯粹数学家漫长的职业生涯中，他就怎样写数学、怎样讲数学对年轻一代提出了极有价值的真知灼见。在他 1974 年为《美国数学会会刊》写的一篇文章 How to talk mathematics 中（参见 [12]），他具体地提供了讲好数学的关键诀窍。我们将介绍这篇短文的一些要点作为演讲的基本原则，并结合我们自己的理解和经验，和读者分享我们多年数学演讲的心得体会。



Ludwig Mies van der Rohe

原则 一：**少就是多**。

这是德国建筑大师 Ludwig Mies van der Rohe (1886—1969) 的名言。哈尔莫斯说：

> If all lecturers remember that adage, all audiences would be both wiser and happier.
>
> 假如所有演讲者记住那句格言，所有听众将更聪明、更快乐。

多与少是一对矛盾的统一体，处理好它们的辩证关系并非易事。许多学术报告者希望对听众输出越多越好的信息，但正如俗语“好的动机不一定有好的效果”所预见的那样，听众往往并不领情。因为绝大多数听众的脑子结构都很普通，既没有诺格涅夫 (1818—1883) 那样的大脑袋，又没有冯·诺依曼 (1903—1957) 那样的理解力。更合理的解释是，绝大多数的听众都不是你领域里的专家，他们来听报告主要是希望了解一下你研究领域的基本行情，而不是细枝末节。更常有这样的场景：为免听众寥寥无几而让报告者感到脸上无光，出席演讲的听众有很大部分是被报告邀请人请来捧场的本系学生，而这些学生可能对所涉及的领域更是一无所知。你能指望他们享受一场全是复杂公式的报告吗？

哈尔莫斯问很多人问过同一个问题：Have you ever disliked a



陈省身

lecture because it was too elementary? (你曾因为一场报告太初等而讨厌它吗?) 虽然他确信有回答 Yes 的听众，但是每一次他得到的回答都是 No (注意：这个回答意思是"喜欢初级的报告"). 事实上于丹辩解，因此他真心地劝说报告者：

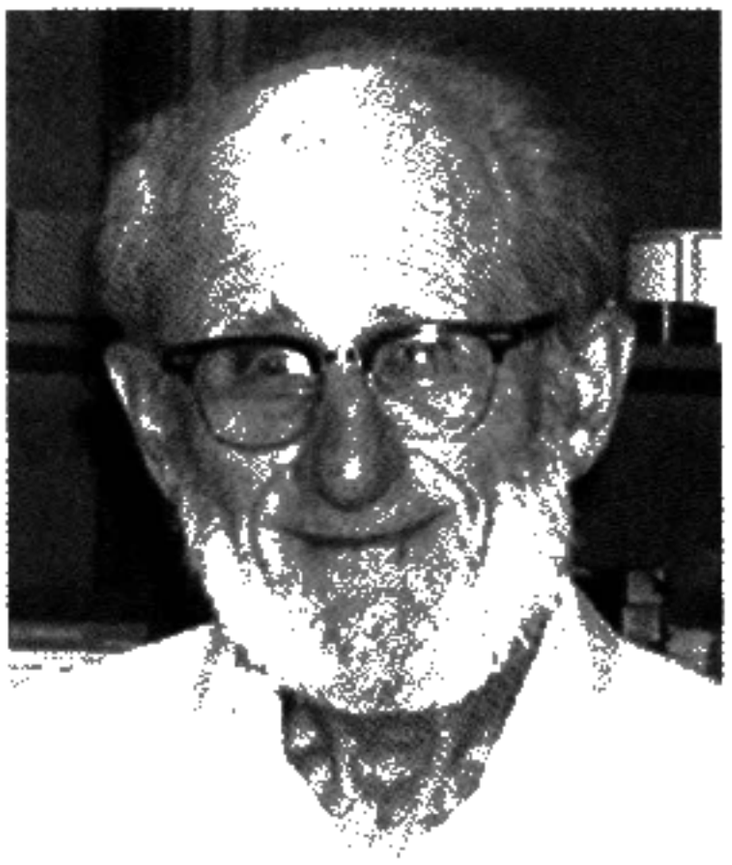
> A public lecture should be simple and elementary: it should not be complicated and technical.
>
> 公众报告应当是简单和初等的；它不应该是复杂的和技术性的.

1985 年本书作者之一在南京大学有幸听过陈省身教授一场关于微分几何的演讲. 众所周知，现代微分几何内容庞杂、高度抽象. 如果他一开始就流形来、流形去，大部分听众大概会被吓跑，或有组团子只好坐在那里发呆. 可是，陈教授这样开始他的演讲："笛卡尔最伟大的数学贡献是引进了直角坐标系，标志解析几何的诞生——用代数方法研究几何问题. 但是，他无意中犯了一个小'错误'：x 轴总是画成水平的，y 轴总是垂直的，这就让人们总是以为 y 一定是 x 的函数." 然后，他话锋一转，接下来说："现代微分几何恰恰把 x 和 y 看成一样的东西，它们都是第三者的函数." 这段开场白多么精彩、既新鲜、又简单、更风趣，难怪报告会散场时不少听众议论纷纷，啧啧称赞. 几十年过去了，作者依然清楚地记得这个他出生以前听过的最好的数学演讲之一，也记得走在他旁边的听众的赞叹之语.

原则二：以具体体现简单

好的报告大都以听众熟悉的简单例子作为序曲，让听众在轻松愉快的氛围里慢慢进入角色. 任何高深的学问、任何抽象的概念都有它的原始模型，植根于一些具体的、实际的问题，而这些最初的想法往往是简单而又深刻的. 抓住这些本质而又易懂的思想并将它传达给听众，才会使这场报告真正让大家受益. 李天岩教授讲多项式方程组现代同伦法时，常常从解两个未知数的两个二次多项式方程组这种中学级别的数学开始. 有人这样说过，一个好的报告的最初四分之一应能让外行人听懂大意，第二个四分之一应能让本系研究生懂得内涵，第三个四分之一能让本系的教授基本理解，最后的四分之一才属于你的研究领域专家的交流时间. 甚至有人断言，真正了不起的现代数学报告应能让高中生听懂，虽然这对绝大多数演讲者而言不易做到，尤其是当报告需要太多的数学语言时. 但是只要通过努力，完全可以大幅增加一场报告中能让高中生听懂的百分比.

美国布朗大学数学教授 John Werner 在他 1994 年写给《美国数学会会刊》编辑的信（发表在 1995 年第一期上）中，直言不讳地指出：研究型大学数学系外校请来的专家报告大都达不到预期效果，尽管演讲者可以在其领域学富五车、热情似火。他认为：



> The reason is, I think, that the speaker is not addressing the real audience in the room, but an imaginary audience existing in his or her mind. The imaginary audience knows all the terminology of the field, knows all but the most recent results, remembers the meaning of all the symbols introduced (and then quickly erased) by the speaker, and can follow complicated arguments and calculations on the board with ease.
>
> 我认为原因是演讲者不是对报告厅里真实的听众，而是对其头脑里想象的听众作报告。想象中的听众知道这个领域中的一切术语，知道最近的和之前的所有结果，他们还记得演讲者刚刚引进（但然后又很快地擦去）的所有符号的意思，并且不费吹灰之力就能跟上黑板上的复杂论证及计算。
>
> John Werner

上述见解真是一针见血。讲数学最大的敌人是演讲者脑子里挥之不去的假设：听众与自己份量本行。事实刚好相反，大部分听众是外行或几乎是外行。即便是解决了庞加莱猜想的俄罗斯数学奇才佩雷尔曼 (Grigori Perelman, 1966—)，你和他一下子大讲有限元超线性收敛的高度技术性细节，他大概也会听得一头雾水。在这个世界里，几乎所有人都是像你我一样的正常人，而非马·诺依曼那样的天才。因此报告人应把“听众对此一无所知”作为演讲的必然前设，把演讲内容细心处理后才报告给心目中的外行听，听众就会满载而归，深深地感谢你提供的一顿学术佳肴。

“自讲浅了被人瞧不起”也是讲数学的敌人之一，这是要面子思想的典型事例之一。许多人的报告复杂难懂，正是因为演讲者经常有着报告讲得越深越好的错误观念，就像 20 世纪 90 年代的某次中央电视台春节联欢晚会上演员王馥荔说的一句台词“喝水越多，水平越高”那样会受到听众的崇敬和恭维。其实，能把复杂的东西用通俗易懂的语言完美地表达给听众，这才是最高的水平。

按照 John Wermer 的说法：

> Necessary conditions for success are
>
> (1) discussion of some simple examples,
>
> (2) some explanation of how the problem arises from the classical body of mathematics,
>
> (3) avoidance of all but a few key calculations, and
>
> (4) ruthless elimination of most details.
>
> 一个报告成功的必要条件是：
>
> (1) 讨论一些简单的例子；
>
> (2) 解释问题怎样来自于数学的某个经典论题；
>
> (3) 只列出几步关键计算；
>
> (4) 无情地略去大部分细节。

他还记得他在研究生阶段听过的大拓扑学家霍普夫 (Heinz Hopf, 1894—1971) 做的关于某类流形上始复结构存在性报告。那时的他拓扑、几何知识贫乏，不知道张量场、不知道复流形、不知道始复结构，但他从霍普夫的一小时精彩报告中学到了这些！

8.2 演讲准备

演讲虽然与写作不同，前者宣之于口，后者形诸笔墨，但后者往往是前者的预演阶段。为了准备演讲，通常要写出一些提纲挈领式的讲稿。在数字时代来临之前，基本的做法是把讲稿手写在纸上，用于黑板上的演示，或是打印在胶片上在投影仪上使用。现在，高科技时代下绝大多数报告者已经习惯于采用电脑产生的幻灯片。然而，一些数学家依然喜爱传统方法：在黑板前讲数学。

其实，就帮助理解数学思维的过程而言，传统的黑板书写方法仍然是讲数学的最佳途径。这是因为小小的粉笔头可以引导听众跟随演讲者的思路走，以减少迷路的可能性。而无论何种幻灯片，同时看到的是公式的全部，如果解释不当，听众有时会看得目光眩晕。比如说，遍历理论里有个伯克霍夫逐点遍历定理，说的是在某些假设下，时间平均等于空间平均。它的意思是映射 S 从初始点 x 出发的迭代

点列进入给定子集 A 的频率等于该子集的概率测度值，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_A(S^k(x))=\mu(A).$$

上述等式的左端有极限、分数、求和、集合特征函数及迭代点列等好几个符号和运算，在幻灯片上一下子从左到右看过去不太容易理解。这时，黑板的优势显而易见：这个公式的理解过程应是由内到外，先讲迭代点的特征函数值恰好表示该点是否属于集合 A，再讲求和结果是计数多少个点在集合 A 中，再被 n 除给出的是前 n 个迭代点中进入 A 的那些点的个数的频率，最后的极限则计算出所需要的时间平均。好的演讲者一边如上解释，一边由内向外地写出等式的左端，这样，听众就可基本听懂这个等式的含义。

上面的一段实际上暗示了怎样准备一场学术演讲的某个方面，这就是处处为听众考虑，以便于他们理解的方式来准备你的报告。下面我们略为深入地谈谈怎样准备报告稿的一些细节要求。因为现在用电脑制作报告投影文件已成主流，故我们不在已经鲜有的“黑板式书写报告法”上多费唇舌，而直接讨论怎样制作报告幻灯片。这里，“幻灯片”意指一切用来投射到报告厅屏幕上的文稿，它可以是写有内容的胶片或直接连到投影仪上的电脑文件。

准备报告前首先要问自己的是：听众是哪些人？在美国数学会某个专业特别小组会上作专题报告和应邀在外校数学系作综述性报告听众对象完全不一样。前者坐在下面的基本上是你的同行专家，后者绝大多数的听众可能是这个学科的外行。你的报告应该因人而异，对症下药，否则的话要不被认为是小儿科式的，要不会因为太专业而对牛弹琴。

学术报告的题目应事先已向听众广而告之，有的连摘要也在布告栏上贴出。报告者在考虑报告题目时要尽量吸引学生和非专家来听你的报告。演讲者有普遍一种心理学不难解释的心理：听众越多，越感自豪。增加听众的妙法之一就是避免使用专业术语，即便你估计你的报告一般人能听懂，如果在题目上加个骇人听闻的单词，某些潜在的听众就不再“潜在”。英国曼彻斯特大学数值代数专家 Higham 院士就反省过他的一次经历。他曾经以 Exploiting Fast Matrix Multiplication within the Level 3 BLAS（在第三级 BLAS 内探索快速矩阵乘法）为题作过通俗报告，但他后来得知几个潜在

听众因为从未听说过 BLAS，担心听不懂这个报告最终放弃听讲。Higham 豁然领悟，如果他提供的题目改成 Exploiting Fast Matrix Multiplication in Matrix Computations（在矩阵计算中探索矩阵乘法），情形就会更好。作者之一也有体验。他的名为 Chaos from the Statistical Viewpoint（从统计观点看混沌）报告比更专业性的 An Introduction to Frobenius-Perron Operators（弗罗贝尼乌斯佩龙算子介绍）报告在题目上更胜一筹，尽管它们的内容基本上大同小异。写书何尝不是同一道理？Lasota 和 Mackey 1985 年的书 *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*（《确定性系统的概率性质》）1994 年第二版时改名为 *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics*（《混沌、分形及噪音：动力学的随机方面》）。一个易懂而又时髦的名词多么吸引眼球，估计作者的版税收入也因之大涨。

幻灯片的第一张应放上你报告的题目、阁下的大名和工作单位，如果你报告的是合作研究成果，也要放上所有合作者的名字。如该研究有基金资助，也可在这一页上致谢，当然放在报告的最后也行。和书有目录类似，幻灯片的第二张放上报告几个部分的梗概可让听众预先知道你要讲什么，以便心中有数。后面的演讲内容就围绕这几点按部就班地展开。问题是：下面的讲稿怎么写？

最差报告的做法是直接将报告所依据的研究性文章用复印机复制到胶片上，投影仪出来的影像密密麻麻、一团混乱，难以阅读，甚至不能辨认。我们在各种各样的数学会议上见过这些懒惰的教授，他们这种“只求报告走过场，管他听懂没听懂”的现象在 Higham 的眼里简直就是罪过 (sin)。他规劝道：

> Avoid this sin; prepare concise, legible slides specially for the talk.
>
> **避免这个罪过；准备为这个报告特制的简洁可读的幻灯片。**

那么，什么是次差的做法？幻灯片上内容太多几乎也是“罪过罪过”。哈尔莫斯“少就是多”的箴言同样适用于讲稿制作。很多人有种心理，唯恐写得太少，别人看不明白。其实，写作幻灯片与写文章的效用不一样。文章读者看时，作者不在身边。因而作者要设法让对方在无人协助的情况下理解文章的要点。在报告厅，当听众的

眼睛看到幻灯片时，同时也在竖起耳朵听报告者的演讲表演，但是眼睛看字一般不及耳朵听话速度快。由于这种双管齐下并有区别的效果，幻灯片的内容应该能少则少，绝不能像韩信点兵那样多多益善。每一张胶片最好不超过七到八行，胶片四周留有足够空白，大刀阔斧地删去可要可不要的非关键字句。比如 It can be shown that $\|P_n\| \leq C$ uniformly for some constant C（能被证明 $\|P_n\| \leq C$ 对某一数 C 一致成立）可以被削减成 Can show $\|P_n\| \leq C$ uniformly（能证 $\|P_n\| \leq C$ 一致成立）或干脆只写 $\|P_n\| \leq C, \forall n$。此例说明，幻灯片只作为听众的视觉帮助器而存在，当中只需包含报告人口头表达的句子当中的关键词，其它部分可通过报告者亲口说出。如果说的和写的一模一样，那么报告者就不必粉墨登场了。

单张幻灯片不仅要只言片语，而且只应含有一个主要思想或结果，这样就显得主题突出，听众不会搞混。为了让听众不致迷失方向，可在每张幻灯片上方写着它所属的那部分的标题，这样做听众从头到尾都会知道身处何地，容易前后相连，易于理解。幻灯片的多寡决定于报告时间的长短和听众对该学科的熟悉程度。平均而论，一张幻灯片若配合演讲者的解释放上两、三分钟是个情合理的。部分大型报告厅备有两个投影仪，使得前后相连两张幻灯片有两分钟左右时间的共同亮相，更方便了听众理解的连贯性。

数学定理总有证明，但仔细的证明是研究性论文的任务，在报告中不必承担。除非证明极短，否则在报告中不厌其烦地叙述证明的详细步骤或罗列大量的推导公式均将得不偿失。利人又利己的做法是描述证明的主要思路，给出推理步骤的大致梗概。细节可让感兴趣的听众去读文章，而大多数的人只想知道其基本想法而不追根求源。另一可行做法是复印完整证明让有兴趣的与会者取阅。

报告人也需考虑坐在后排的听众，在幻灯片上应使用足够大的字体让他们看得清楚。如用手写的胶片，则应以印刷体用大字写出关键词和符号。总之，一切为听众着想是制作幻灯片的准则。

幻灯片正文的最后部分通常是该报告的汇总和结论，演讲者于此简短总结这场报告的要点并给出结论性的断语，其基本功能与文章的结束语一节相仿。再下面的幻灯片可以列出有关的参考文献，不过，它们也可以在演讲中间的相应位置摆出，但一般只简洁写出作者的姓以及杂志名和发表年份即可。

多数人的最后一张幻灯片以大字 Thank You! 告终。这时最好

不要忘记放上你的联系方式，如电邮地址，给出个人网页也是有益之举。

当你写好了讲稿之后，认真校对一下，改正拼写笔误或公式错误。毕竟，当屏幕上出现一个错字时，当事人总不免尴尬。为了避免在众目睽睽之下说一声 I am sorry，校对多花点时间是值得的。

上述事项一一完成后，你就可以开始想想怎么做这场已经安排好的报告了。

作为本节的结尾，我们总结一下数学演讲注意事项：

(1) 题目是否言简意赅且能引起广泛兴趣？
(2) 幻灯片内第二页是否有演讲的重点内容和简要结构？
(3) 每页是否有一定的内容？字体够不够大？句子是否简练？
(4) 配图是否合理？花点时间找些相关的说明图或附上一些相关的研究图表；
(5) 要突出演讲的重点和亮点；
(6) 避免强调证明细节；若需要的话，引出较易理解的思想和思路；
(7) 要有演讲的总结和展望；
(8) 演讲前要预演，最好能让别人提提意见；报告时要控制时间；
(9) 可以把演讲稿事先发给朋友征求意见；
(10) 最后，每次演讲可根据可能出现的听众“势利”地引用或联系他们相关的工作（很多会议海报上或网站上有参会者名单）；只要不是肉麻吹捧，学术同行之间的褒奖话语也是会议交流的调味剂，并能活跃会场气氛，增进同行友谊。演讲中如能适当加点得体的俏皮话制造幽默，则更为理想。

8.3 演讲技巧

演说需要技术，能力需要培养。现代教育不光重视语言的精通，也注重提高辩论、演讲这种用口语方式进行交流的能力。英国政治家丘吉尔 (Winston Churchill, 1874—1965) 不光是写作高手，其演讲也属一流；比尔·克林顿为何更比小布什受人追捧，原因之一是他的三寸不烂之舌；肯尼迪 (John F. Kennedy, 1917—1963) 的美国总统就职演说中的名言 Ask not what your country can do for you—ask what you can do for your country（不要问国家为你做了什么，而要问你为国家做了什么）和美国黑人民权运动领袖马丁·路

德·金 (Martin Luther King, Jr., 1929—1968) I have a dream (我有一个梦想) 的大声呐喊均令人难忘；毛泽东对留学苏联的中国学生的讲话“你们青年人朝气蓬勃，正在兴旺时期，好像早晨八、九点钟的太阳，希望寄托在你们身上”鼓舞了一代人，五十年后还让聆听者激动不已。他们的演说为何能鼓动人心？首先是因为他们都是语言活用的工匠，其次他们也懂得怎样运用吸引听众的演讲技巧。

数学人的演讲，固然不必像大政治家那样追求雷霆万钧之势，但也要追求自己的风格，尽一切能力让听众理解、消化你告诉他们的东西。在这里，掌握一些演说技术会帮助你达到目的。



首先，如同英国人 Peter Kenny 在他 1982 年出版的科技演讲书 *A Handbook of Public Speaking for Scientists and Engineers* [17] 中所云：

> Do not thank the Chairman or thank the audience. Do not attempt to tell them that you are pleased to be there, and above all do not elaborate on your lack of skill as a public speaker. Audiences do not like speakers to apologize. They find it embarrassing.
>
> 不要感谢主席或感谢听众。不要试图告诉他们你在那里很高兴，尤其不要阐释作为演讲者你的功力不足。听众们不爱听演讲人道歉；过度道歉会使听者尴尬。

他的第一句建议许多人并不采纳，许多报告者一开始总是感谢张三邀请、感谢李四介绍。其实，与其让这些客套话占用了宝贵的一、两分钟，不如开门见山、单刀直入，以浅显、具体、幽默的方式引导听众逐步登堂入室。

其次，报告者事先应以每一张上台完相的幻灯片为单位，组织好所有的演讲内容。新手可以将要讲的东西全部写下来，在报告前站到空教室里练习几遍。最好让你的朋友充当听众，帮你改进演讲方式。切记正式报告时不要照本宣科或死记硬背，而是在记忆的基础上临场发挥。幻灯片作为你表演的道具，它展示的仅是你嘴中吐出内容的核心材料和数学表达，你应该像展览馆的解说员一样把它们解释清楚。这时的你，应该面朝大众，成竹在胸，有条不紊地用通俗语言把听众所看到的主要部分扩展开来。如果你能激情四射、充满自信、不徐不疾、发音清晰、抑扬顿挫、加上恰当的肢体语言，就可能增加你

的演讲效果。有激情的演讲者会让听众的精神为之一振，而萎靡不振的报告人则容易使人昏昏欲睡。有位数学教授曾经回忆起 2005 年当他做完面向全校的一个公共演讲后，在场的校长在之后的招待会上对他说：You had passion!（你有激情！）并在晚间的宴会讲话中再次表达对“激情”的赞赏，可见一个充满激情的演讲会给人留下深刻的印象。当然有的人即使激情在胸，也不露声色，这是个性所然。但是，正如 Higham 所鼓励的那样，每一个报告者都应

> try to give a dynamic presentation that conveys enthusiasm for your subject.
>
> 试图给出一个传达对学科热忱的活力表现。

莫里斯·克莱因于 1956 年对课堂教学说过这样的观点：

> I would urge every teacher to become an actor. His classroom technique must be enlivened by every device used in theater. He can be and should be dramatic where appropriate. He must not only have facts but fire. He can utilize even eccentricities of behavior to stir up human interest. He should not be afraid of humor and should use it freely. Even an irrelevant joke or story perks up the class enormously.
>
> 我想力劝每位老师成为演员。他必须借助运用于剧场的每一种手段来使课堂技巧生机盎然。在适当时他的人可以成为也应当成为戏剧性的。他不能仅给事实，缺乏火样热情。他甚至可以利用近乎怪癖般的举动来挑起人们的兴趣。他不应该害怕幽默，却应将之运用自如，这样即使是不相干的笑话也会使课堂大大活跃起来。

以上所述难道不是也适用于任何形式的数学讲座吗？

演讲者常犯的错误有两种，一是面向屏幕，一是照本宣科。前者可能是害羞心理在作怪，尤其是台下坐着大牌人物时更是紧张得要命。克服这一困难的办法是假设大人物也是笨蛋。李天岩对第一次在他办公室给他报告 James Renegar 文章的弟子说：“你要把我当成笨蛋。”费恩曼的父亲在他小的时候叫他这样看那些穿了制服的大人物：“想象他们脱了制服后就是和我们一样的人。”更进一步讲，侧向或背向听众也有对他们不恭之嫌，同时也妨碍他们的理解，因为他们不能从报告者完整的面部表情中捕捉到有用的信息。

照本宣科也可分为两类，一是直接读幻灯片，二是背诵事先准备充分的讲稿。前者当然效果最差，因为听众理所当然会有“让我们看好了，不必读给我们听”的想法。如果会议语言并非母语，那阅读的效果就只会更差。后者的缺陷是背诵式的讲话总让人感到别扭，并容易使得报告人的水平被低估。

还有两点需要指出，一是语速不要太快，二是声音不能太轻。学术报告不似日常聊天，听者的大脑思维难以跟上飞速流逝的专业资讯。专家建议每分钟吐出一百个左右的英文单词比较合适，而一秒钟顶多两个单词。听众中的那些英文非母语者更希望你说得慢点，经常给些几秒钟的等顿能收到意料不到的效果，因为听众的紧张神经亦可得到片刻松弛。平时嗓门小的人报告中应该仿效吵架的方式并加大嗓门，可以在报告之初试验一下自己的声音是否能让后排听见，只需看看最后一排听众脸上的反应就能判断，而不必问 Can you hear me at the back?（后面的人能听见吗？）这种多余的话。

每场报告都有时间规定，在欧美，系里邀请的 Colloquium 一般长 50 分钟，然后有 10 分钟左右让报告者回答听众的疑问。各种学术会议的大会报告 (plenary lecture) 大约从 45 分钟到一个小时不等。四年一度的世界数学界最大盛会——国际数学家大会中，最尊荣的二十几个大会报告为一小时，一百多个各学科的特邀报告则为 45 分钟。美国数学会会议的 special session 的邀请报告限时 25 分钟，加上 5 分钟听众提问，而 contributed session 的报告加提问时间则为 15 分钟。对报告人的一个基本要求就是：不要超时。拖堂的演讲不光不合规矩，缺乏专业精神，而且是对听众的不恭和对下一个报告者（如果是会议报告的话）的不敬。开会时，听众往往各取所需，只听那些他们感兴趣的报告，因而他们会川流不息地穿梭在各个报告厅之中。也许在你的报告之后一部分听众要赶去听其它报告，如果时间到了你还在喋喋不休，他们就会失去下一个报告的前面部分。当然，即使你的报告排在最后，也没有理由延长时间。总之，为了遵守规则、尊重别人，报告人应事先确信在限定的时间内能完成报告。在报告当中要不露声色地随时留意时间的流逝，摘下手表放在讲台上不时察看不失为一个好方法；如果报告厅有抬头就可看到的挂钟，就应善加利用。万一发现时间不够，应该及时调整下面要讲的内容，但最好避免明显的跳跃或不连贯，适当删减次要部分，以保证主要结果的传达。要知道，迫使会议主持人站起来提醒你赶快停止多少让双方感到

难堪，但是他这样做是应该的。在西方的学术会议上，就是大牌学者也必须该停就停，没有二话好讲。线性规划中著名的 Karmarkar 算法的发明人 Karmarkar 的一次会议报告就因为超时而被请下台。

Higham 模仿《圣经》"旧约"中记载的摩西所提出的"十诫"，总结出如下的"演讲十诫"：

> (1) 为听众设计报告；
> (2) 准备充分并试讲；
> (3) 做出清楚可读的幻灯片；
> (4) 早点到场，查看报告厅；
> (5) 讲慢点、大声点；
> (6) 讲得满怀热情；
> (7) 看着听众演讲；
> (8) 不要不安地摆弄幻灯片或"电子教鞭"；
> (9) 准时或提前结束；
> (10) 礼貌并简洁地回答问题，如不知答案，如实承认

除了第八、十诫，其它八诫我们在上面都已经基本说过。第八诫的重要性易于理解，但第十诫对东方人有时不易做到。西方文明对君子风度颇为推崇，学术界的大头往往十分谦虚，不懂也不装懂，他们常说的一句话是 I don't know 而绝不会觉得丢脸，好像他们早就聆听过孔夫子的教导"知之为知之，不知为不知，是知也"似的。对真正的学者而言，诚实的作风是值得追求的

8.4 论文答辩

学位论文完成并经过论文指导教授仔细的过目检查确认无误后，就会交给事先组织好的答辩委员会的所有成员审阅，候选人的论文答辩就可在几周或几个月之后的一个大家满意的选定日期举行。

学位论文答辩的方式各国不尽相同。本书的两位作者分别在英美两国获得博士学位，对这两国博士学位的申请过程较为熟悉。英国可能是唯一的西欧国家不要求答辩人进行正式的报告，而是让学位候选人在答辩委员会成员前回答他们就论文的各个方面提出的问题。本书作者之一答辩时除了自己，就只有两个人在场，一个是从曼彻斯

特大学来的主考官，还有一个是系内的一个老师负责程序问题，导师也不允许在场。主考官问了近一个小时的问题，之后答辩就结束了。美国则与包括中国在内的大部分国家类似，在答辩过程中先安排学位候选人做一个介绍论文研究工作的报告，时间一般为 40 到 50 分钟，然后答辩委员会的成员提出相关问题期待答辩者作出圆满的回答。然后委员们让当事人暂时回避，和论文导师共同讨论他们对学位论文的总体印象，并提出一些技术性的改进建议，讨论完毕后表决是否无条件或有条件通过这篇学位论文，或不予通过。后者一般较为少见，但绝非不存在，尤其在研究标准极高的某些顶尖大学。较为常见的是“有条件通过”，尤其对外国学生，因为英文写作能力的欠缺往往让一部分学位候选人在答辩后还需花大力气修改论文，这主要在于结构的调整和语句的再次加工。

最具有象征意义的答辩是荷兰和周边的一些国家。本书作者之一曾被邀请参加在老牌大学 Utrecht 大学举行的一次答辩。答辩委员会有导师、校内的三四个教授及外面请来的三五个教授（其中一两位可能是被请的外国专家）。答辩在一个教堂式的地方隆重举行，主考官们身穿学位袍，由礼宾官带领进入。博士候选人先报告自己的成果（大都已经在印刷好的像书一样精致装订的论文里），然后考官们每人问 5 分钟的问题（外来的考官先问）。大约一个小时后，之前出现的礼宾官再次进场，权杖击地，考官们则列队退场。最有意思的是，听众里除了老师、同学，还有考生的朋友（包括发小）、亲属（包括父母），还有打扮成花童一样的小朋友，给人的感觉不像是参加答辩，而是出席教堂婚礼。答辩之后，是颇为正式的酒会，以及晚上颇具规模的庆祝晚会！

有些答辩委员会成员对学位论文语言的要求较严，但也很热心于帮助外国学生润色英文。作者之一当年在海外读书时听说，本系的一位教授在批改《实变函数论》课习题的过程中，不仅仔细修改修课学生答案中的数学错误，而且一字一句地重新加工其英文书写，帮助他们尽快提高数学的英文写作水平。对这些负责任教授的无私奉献，当事人应该心怀感激，并将之视为受用终生的书面写作学习机会，而不应错误地认为教授故意刁难。如在本书序言所说，作者之一在英国发表的基于博士研究工作的第一篇论文有幸得到投稿杂志主编细致的英文写作指导，其学习过程至今难以忘怀。另一作者当年在美国的博士论文答辩委员会的几个成员，如写过教科书或专著的 Richard

Hill 教授和 Frank Hoppensteadt 教授，极其耐心地帮助他修改英文，尤其是告诉定冠词和不定冠词运用的种种诀窍，而这些用法对初学英文写作的外国学生是不易掌握的。须知，运用语言的能力越强，越容易在学术界取得显著的进步。另外在美国，许多研究型大学都有专门人士帮助研究生，尤其是外国研究生，替学位论文的英文质量作最后的把关。

我们转向讨论怎样认真对待论文答辩这个一生中可能比结婚次数还要稀少的重要活动。首先应该考虑的是那一天的仪表和服饰。这在不同的国家也有不一样的风俗习惯。在欧洲，答辩人的穿着比较正式，一般都是西装革履、着上其器宇轩昂。在美国随便、风格多样是美国文化的特点之一，故美国大学的论文答辩可以穿西装、结领带，也可以穿 T 恤衫、外加牛仔裤。但是，整洁是基本要求，蓬头垢面是答辩人的大忌。

因此，我们建议答辩人在论文答辩的前一天或当天将个身整理一遍，尤其要洗净并梳理好别人一眼就能看清的头发，并根据所在国家或地区的习俗选择答辩时要穿的合适服饰。毕竟，这是一生中求学阶段仅有的几次重要场合之一，如果是博士候选人，则大概是一生中最后一次的论文答辩了，或许你的至亲要给你留下珍藏一辈子的摄影肖像，或寄给远在天涯的亲朋好友，以最佳的外形出现在答辩场上无疑是明智之举。

学位论文是在论文导师的指导下完成的，因此许多论文答辩的开场白以表达对指导老师的感激之情开始，部分答辩者也会感谢所有教过他课的教授，更多的人感谢亲朋好友、同门师兄弟师姐妹、配偶和小孩。这本是无可非议，但是感谢语要用得恰如其分、合情合理。如果一个导师根本就没有花过任何心血在指导学生上，或花的心血极其有限，就没有必要“以德报怨”地反过来肉麻地感激他、吹捧他。这在目前国内的毕业论文中时有所见。如果这样，那就可能是一种言不由衷、碍于情面的做法。该感谢的应该感谢，不该感谢的不必浪费时间，唯物主义“实事求是”的原则在这里依然有指导意义。

对于答辩，Higham 给出了一个很好的建议：

> Perhaps the most important piece of advice applicable to all forms of defence is to read the thesis beforehand.
>
> 或许能用于所有形式的答辩的最重要建议是事先阅读学位论文。

答辩的日子距离论文完成之日已经相当长，答辩人对他几个月前的长篇大论的记忆也许开始模糊，从头到尾再读一遍只有好处，没有坏处。但是，学位候选人的答辩报告并非只是论文内容的照本宣科。这个报告无须列出定理证明的详细步骤，不必面面俱到地谈论研究的精细过程，学问不差的考核官们都能在学位论文中读到。答辩人正确的做法是：先概述学位论文研究论题的动机和背景以及所属领域的简史和现状，再大致描述你研究工作的思路、方法和结论，最后展望未来研究的一些愿景。

由于考官们希望从答辩报告和问题回答中了解学位候选人是否较为透彻地掌握了该领域的知识，是否独立地完成所断言的研究，是否理解研究方法背后的分析理论，故他们会希望在答辩报告后的提问中对上述种种得到肯定的结论。他们选择的问题一般不会刁钻古怪，基本上与论文内容有关，关于数值代数的论文答辩不会问到代数几何的知识，但可能涉及线性代数的初等定理。如果一篇大学优等生学士论文是关于用 Householder 变换计算矩阵特征值，答辩委员也许会问：Householder 变换矩阵本身的特征值为何？如果答不出，尽管该生会用这个矩阵，但其研究领域基础知识的缺乏是不言而喻的。作者之一将近二十年前担任一位美国大学生的 Honors Committee 成员时，在其学士论文答辩时问过这个简单问题，却出乎意料地没有得到期望中的答案。

回答提问时不要紧张，要面向提问者，不要东张西望。要仔细听清楚提问者的问题。如没有听清楚问题，可让对方重复一遍，没真正听懂便回答容易答非所问。回答问题要简洁明了，不要画蛇添足。对不知答案为何但不在你应知范围之内的问题，直接说 I don't know 即可，没有人会因此而取笑诚实的你，因为即便诺贝尔奖获得者在其研究领域里也有许多东西不懂。

最后，我们以疑问句的方式总结一下准备毕业论文答辩应该注意的要点：

答辩报告建议

(1) 开场白和致谢；
(2) 论文主要干什么？
(3) 论文的基本理论基础是什么？
(4) 其他人的主要贡献是什么？遗缺了什么？
(5) 你遇到的主要困难在哪里？是如何解决的？
(6) 你的主要贡献是什么？主要定理？
(7) 有无计算结果（找几个代表性的）？
(8) 哪些方面还可以再拓展，以后可以继续？
(9) 总结和展望；
(10) 列出读学位期间发表的文章。

当你完美地或成功地通过了学位论文答辩，我们就和其他认识你的人一道祝贺你。你的人生之旅将开始新的一页。

参考文献

[1] 齐玉葭. 英汉数学词汇. 第二版. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] 杨大成, 杨自辰. 科技英语写作. 北京: 国防工业出版社, 1991.

[3] A. N. 怀特海. 科学与近代世界. 何钦, 译. 北京: 商务印书馆, 1959.

[4] 上海译文出版社. 新英汉词典. 增订本. 上海: 上海译文出版社, 1985.

[5] 张奠宙. 20 世纪数学经纬. 上海: 华东师范大学出版社, 2002.

[6] R. P. Boas. Can we make mathematics intelligible? *American Mathematical Monthly*, 88: 727-731, 1981.

[7] G. Chen. 漫谈如何写好一篇英文科技论文. 公众演讲, 2011.

[8] J. Ding and A. Zhou. *Nonnegative Matrices, Positive Operators, and Applications*. World Scientific, 2009.

[9] J. Ding and A. Zhou. *Statistical Properties of Deterministic Systems*. Tsinghua University Press and Springer-Verlag, 2009.

[10] B. Dixon. Sciwrite. *Chemistry in Britain*, 9(1): 70–72, 1973.

[11] J. R. Ewer and G. Latorre. *A Course in Basic Scientific Writing*. Longman, Harlow, Essex, 1969.

[12] J. Ewing. Paul Halmos: in his own words. *Notices of the American Mathematical Society*, 54(9): 1136–1144, 2007.

[13] C. Gordon, D. L. Webb, and S. Wolpert. One cannot hear the shape of a drum. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1): 134–138, 1992.

[14] N. J. Higham. *Handbook of Writing for the Mathematical Sciences*. SIAM, Philadelphia, 2nd edition, 1998.

[15] P. Hoffman. *The Man Who Loved Only Numbers*. Hyperion Books, 1998.

[16] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *American Mathematical Monthly*, 73(4): 1–23, 1966.

[17] P. Kenny. *A Handbook of Public Speaking for Scientists and Engineers*. Adam Hilger, Bristol, 1982.

[18] S. G. Krantz. *A Primer of Mathematical Writing: Being a Disquisition on Having Your Ideas Recorded, Typeset, Published, Read, and Appreciated*. American Mathematical Society, Providence, 1997.

[19] A. Lasota and M. Mackey. *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics*. Springer-Verlag, 1994.

[20] A. Lasota and J. A. Yorke. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Transaction of the American Mathematical Society*, 186: 481–488, 1973.

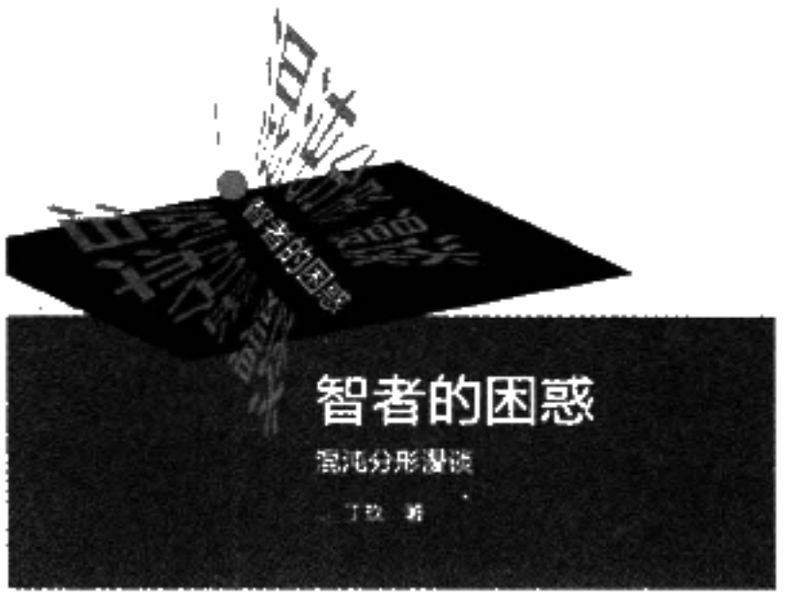
[21] J.-L. Lebrun. *Scientific Writing: A Reader and Writer's Guide*. World Scientific, Singapore, 2007.

[22] J. Lü and G. Chen. Another chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(3): 659–661, 2002.

[23] B. Mandelbrot. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156(3775): 636 638, 1967.

[24] J. Shen, T. Tang, and L.-L. Wang. *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer-Verlag, 2011.

[25] N. E. Steenrod, P. R. Halmos, M. M. Schiffer, and J. A. Dieudonné. *How to Write Mathematics*. American Mathematical Society, 1973.



智者的困惑

混沌分形漫谈

丁玖 著

ISBN 978-7-04-035148-4

定价 39.00元

这是一本从求学青年到退休老人、从莘莘学子到教授学者都能从中获益的科普读物。作者以散文和哲理的笔调为我们勾勒出百余年来混沌、分形思想发展进程中的几大幅宏伟画面：在这些里程碑式的开创性工作中，庞加莱、冯·诺依曼、乌拉姆、柯尔莫哥洛夫等数学巨人的名字大放光芒，斯梅尔、香农、约克、曼德博、梅、费根鲍姆等杰出学者的贡献长留人间。他们的新颖想法、他们的追根求源、他们的惊人发现，以及他们的花絮轶闻，在作者的笔下跃然纸上。

——李天岩

混沌与分形密切联系。本书将其两方面的基本概念和简要历史展示一览无遗，生动风趣地讲述了会让许多大、中学生和青年读者颇感兴趣的名人轶事和历史事件，不少还是独家新闻，非常值得推荐。

——陈关荣

本书引领读者跟随近代科学、数学史上青史留名的一批智者，历经一次混沌、分形思想形成与概念发展的百年之旅。从“混沌之祖”庞加莱对天体力学三体问题因生困惑而初生混沌思想，到“计算机之父”冯·诺依曼与“氢弹之父”乌拉姆亲密合作而首创非线性分析新领域；从“混沌之父”洛伦茨破解天气预报“蝴蝶效应”之谜，到数学家师徒约克和李天岩以一篇不朽之作“周期三则乱七八糟”为混沌定义一锤定音；从菲尔兹奖得主斯梅尔在巴西海滩上锻造出数学杰作“马蹄铁”，到数学杂学家曼德博“丈量”出英国海岸线的无穷长；从动物学家梅教授对人口动力学简单逻辑斯蒂模型复杂行为的痴迷不解，到物理学家费根鲍姆日夜摆弄计算器挖掘出普适常数金矿；从电子工程师香农为信息学巧借东风引来熵概念，到数学巨人柯尔莫哥洛夫妙用熵武器“遍历”动力系统无敌手……读完这本思路清晰、内容丰富、故事迷人、妙语连珠的科普佳作，你必能掩卷赞叹：数学——科学发展的真正动力！

科学素养丛书

序号	书名	著译者
1	Klein 数学讲座	F. 克莱因 著，陈光还 译，徐佩 校
2	Littlewood 数学随笔集	J. E. 李特尔伍德 著，李培廉 译
3	直观几何 (上册)	D. 希尔伯特，S. 康福森 著，王联芳 译，江泽涵 校
4	直观几何 (下册)	D. 希尔伯特，S. 康福森 著，王联芳、齐民友 译
5	惠更斯与巴罗，牛顿与胡克 —— 数学分析与突变理论的起步，从渐伸线到准晶体	B. И. 阿诺尔德 著，李培廉 译
6	人生 艺术 几何	M. 吉卡 著，盛立人 译
7	关于概率的哲学随笔	P. S. 拉普拉斯 著，龚光鲁、钱敏平 译
8	数学及其历史	John Stillwell 著，袁向东、冯绪宁 译
9	数学天书中的证明 (第 4 版)	Martin Aigner, Gunter M. Ziegler 著，冯荣权、宋春伟、宗传明 译
10	解码者：数学探秘之旅	Jean F. Dars, Annick Lesne, Anne Papillault 著，李锋 译
11	数论 从汉穆拉比到勒让德的历史导引	A. Wei. 著，胥鸣伟 译
12	数学在 19 世纪的发展 (第一卷)	F. Kelin 著，齐民友 译
13	数学在 19 世纪的发展 (第二卷)	F. Kelin 著，李培廉 译
14	初等几何的著名问题	F. Kelin 著，沈一兵 译
15	著名几何问题及其解法：尺规作图的历史	B. Bold 著，郑元禄 译
16	趣味密码术与密写术	M. Gardner 著，王善平 译
17	莫斯科智力游戏：359 道数学趣味题	B. A. Kordemsky 著，叶其孝 译
18	智者的困惑——混沌分形漫谈	丁玖 著
19	数学与人文	丘成桐 等 主编，姚恩瑜 副主编
20	传奇数学家华罗庚	丘成桐 等 主编，冯克勤 副主编
21	陈省身与几何学的发展	丘成桐 等 主编，王善平 副主编
22	女性与数学	丘成桐 等 主编，李文林 副主编
23	数学与教育	丘成桐 等 主编，张英伯 副主编
24	数学无处不在	丘成桐 等 主编，李方 副主编
25	魅力数学	丘成桐 等 主编，李文林 副主编
26	数学与求学	丘成桐 等 主编，张英伯 副主编
27	回望数学	丘成桐 等 主编，李方 副主编

网上购书：academic.hep.com.cn，
www.china-pub.com，卓越，当当

其他订购办法：
各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购。书款通过邮局汇款或银行转账均可。购书免邮费，发票随后寄出。

单位地址：北京西城区德外大街4号
电　　话：010-58581118/7/6/5/4
传　　真：010-58581113

通过邮局汇款：
地　　址：北京西城区德外大街4号
户　　名：高等教育出版社销售部综合业务部

通过银行转账：
户　　名：高等教育出版社有限公司
开 户 行：交通银行北京马甸支行
银行账号：110060437018010037603