高等学校教材

实用数学专业英语教程

吴炯圻　黄　琴　欧阳耿　阮其华　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

ISBN 978-7-04-034835-4



定价 49.70元

高等学校教材

实用数学专业英语教程

Shiyong Shuxue Zhuanye Yingyu Jiaocheng

吴炯圻　黄　琴　欧阳耿　阮其华　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书主要讲授数学专业英语阅读和翻译的基本知识和主要方法，同时提供数学论文写作的指导。全书包括六章，前三章是基础部分，后三章是提高部分。本书包含较多的阅读资料，通过大量例题来讲解数学专业英语读、译、写的基本方法及学习过程中应注意的事项。书中配有一定量的练习和模拟试题，附有部分练习的参考答案，便于读者自学与自我测试。

本书具有起点低、覆盖面大、适用面广、实用性强、便于教学与自学等特点，与高等教育出版社出版的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《数学专业英语》有互补互助的功能。作为教材或参考书，本书适用于数学各专业本科生及其授课教师、研究生、准备考研的人士以及中学教师，也可供科研人员和其他学科领域的师生阅读和参考。

图书在版编目（CIP）数据

实用数学专业英语教程 / 吴炯圻等编著. -- 北京 : 高等教育出版社，2012.7

ISBN 978-7-04-034835-4

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①吴… Ⅲ. ①数学－英语－高等学校－教材 Ⅳ. ①H31

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第108086号

策划编辑 胡 颖	责任编辑 胡 颖	封面设计 张 志	版式设计 于 婕
插图绘制 尹文军	责任校对 金 辉	责任印制 尤 静	

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京宏信印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	32.25	版 次	2012年7月第1版
字 数	590千字	印 次	2012年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	49.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 34835-00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010) 58581897 58582371 58581879
反盗版举报传真　(010) 82086060
反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn
通信地址　北京市西城区德外大街4号　高等教育出版社法务部
邮政编码　100120

前　言

本书主要讲授数学专业英语阅读和翻译的基本知识和主要方法，同时提供数学论文写作的指导。通过对本教材的学习，结合对其中配备练习的训练，将有助于读者较大程度地提高读、译、写的能力。

本书与吴炯圻编著的《数学专业英语》是姐妹篇，都是数学专业英语教材，各有特色，且可以起到互相参照和辅助的作用。两者除了摘录或引用的外文资料有交叉外，教材的编写思路不同，各书自成体系，主要内容不重复。

本书具有如下特点：

1. **起点低**：本书的第一章以中学（初中为主）数学教材为起点，用语法较简单的英文句进行叙述，并附上译文作为对照，主要帮助初学者了解数学基础概念和初等数学的基本命题的英语表达，掌握最基础的数学英语词汇。

2. **覆盖面广**：全书分成三部分。

第一部分为基础篇，包括前三章：

（1）第一章介绍数学基本概念和术语，为入门知识（见上条介绍）。

（2）第二章是课文精读和翻译指导，分16小节，每节2篇精读课文；其中前5节主要涉及中学教材，后11节则较为系统地涉及大学数学各门基础课的内容；每节除了针对难句讲解阅读理解与翻译的基本方法，还结合课文介绍常用英语句型、术语和重点词汇的应用。

（3）第三章是为配合第二、四章的学习而编写的数学专业英语语法和译法选讲，系统而简要地讲解数学专业英语中常见的语法和各种句型的译法。

本篇重点是第二章，通常是学生必修的，而对第一章和第三章，教师则可以根据教学需要及学生的水平，适当安排时间（在第二章学习之前或学习过程中），全部采用或部分选用作为教材，或有计划地安排学生进行自学。

第二部分为提高篇，包括后三章：

（4）第四章为精读和翻译的强化，通过对以往的学生在学习数学各分支的专业文献过程中出现的误读错译的例句（200个左右）进行分析和讲评，具体指导精读和翻译。

（5）第五章为数学论文写作指导，系统讲解论文标题、摘要、引言的写作，定义、定理和推理论证过程的表达，介绍各种常用的句型，并对论文写作过程中常见的错误进行分析。

(6) 第六章是扩展阅读与备考资料,包括大学本科数学基础课教材与专业文献选读、本课程的模拟试题和研究生入学复试的试题及模拟试题。

读者可以根据需要选用其中一章或多章进行学习提高。

第三部分为辅助学习篇,包括三方面内容:1. 部分练习参考答案(包括§6.2试卷及模拟试卷的参考答案),放在本书末的附录中;2. 第六章阅读资料的参考译文;3. 数学英语常用词汇表,其中第2和第3部分内容放在"中国高校数学课程网"(http://math.cncourse.com)的"教材中心",供读者下载。

3. **方便教学和自学**:(1) 从第一篇到第二篇,难度安排循序渐进。就阅读方面而言,第一章开头很浅显,而后逐步提高。我们相信,学好第四章之后,读者在应对难度和深度的能力方面已经达到通常数学专业研究人员的水平。第五章的写作指导和第六章的内容也都是在第一部分学习的基础上展开的。(2) 对学习重点、难点的解说分析深入浅出。(3) 第三章各节的常用语法和译法选讲,以及三个附录可为教学和自学自测提供方便。

4. **适用面广,实用性强**:本书的编写主要从实用性出发,力求较大限度地满足多种不同类型的读者的实际需要。作为高等学校教材或参考书,本书适用于数学各专业本科生及其授课教师、研究生、准备考研人士以及中学教师,对有待提高数学专业英语水平的数学研究人员和其他读者也是有益的。

5. **对《数学专业英语》有补充和强化的功能**:虽然本书的写作体系是独立于《数学专业英语》的,但是其中相当部分的英文原始资料与《数学专业英语》是一致的。主要是:本书第二章的多篇课文取自《数学专业英语》第二章的练习;第四章所列举的误读错译例句的原文大部分来自《数学专业英语》第三章的阅读材料。因此本书对《数学专业英语》有补充、辅导、参考和深化的功能,不仅为该书的使用提供方便的参考资源,而且有助于读者进一步夯实基础、加深理解、强化训练、提高应用能力。

本书主要由吴炯圻教授编著;黄琴副教授提供了大量素材、参与了多个章节和附录的编写(包括第三章大部分和第五章部分的初稿);欧阳耿教授参与了第三章和第五章的编写;阮其华教授参与了第六章和附录的编写。全稿的校对工作由吴炯圻、欧阳耿和阮其华三位作者共同完成。特别说明的是,第一、第二和第四作者都是数学专业教学和科研人员,有多年的数学专业英语教学经验;而第三作者既是英语专业的教学和科研人员,也是研究数学的专家,对完善全书的语言表达起了重要作用。

本书的初稿曾在漳州师范学院、莆田学院进行试用,得到这两个学院领导和师生的支持和帮助。此外,吴正沐先生参与了附录3的编写,吴正浩先生做了大量的文稿电脑输入工作。我们在此向所有支持和帮助过我们的领导、同事、学生

及其他朋友表示衷心的感谢。本书还摘录、引用了许多英文版文献中的资料，我们除了在引用时标明出处外，在此也向这些作者和有关出版社表示感谢，并为未能事先征求他们的同意表示歉意。

限于我们的学识和水平，不足之处在所难免。欢迎读者在使用中多提宝贵的修改意见和建议。

编著者 2011 年 10 月 28 日　于福建

目　录

第一章　数学基本概念与术语简介 …… 1

§1.1　基本运算符号及简单图形 …… 1

§1.2　数及其基本运算 …… 11

§1.3　代数式、方程与不等式 …… 17

§1.4　集的概念与初等函数 …… 22

§1.5　平面上的直线和三角形 …… 26

§1.6　多边形与圆 …… 32

§1.7　平面上的坐标几何 …… 38

§1.8　常见立体图形与空间坐标几何 …… 45

§1.9　数列与级数、数学归纳法 …… 53

§1.10　初等概率统计、近似与误差 …… 58

第二章　阅读与翻译初步 …… 65

§2.1　比、率与比例 …… 66

§2.2　三角函数与解三角形 …… 73

§2.3　素数与辗转相除法 …… 81

§2.4　集合论简介 …… 90

§2.5　平面点集与圆锥曲线 …… 97

§2.6　空间的向量、直线与平面 …… 105

§2.7　矩阵与线性变换 …… 114

§2.8　函数的概念及其演变 …… 126

§2.9　变量的极限 …… 134

§2.10　导数、微分与不定积分 …… 143

§2.11　定积分的性质与应用 …… 154

§2.12　函数项序列与级数 …… 164

§2.13　常微分方程 …… 175

§2.14　期望、方差与中心极限定理 …… 184

§2.15　数理逻辑入门 …… 194

§2.16　组合分析与数值分析 …… 203

第三章 数学专业英语常用语法和译法选讲 …… 213
§3.1 分词 …… 213
§3.2 动名词 …… 217
§3.3 动词不定式 …… 222
§3.4 定语 …… 228
§3.5 定语从句 …… 233
§3.6 状语从句 …… 237
§3.7 名词性从句与 It 的用法 …… 242
§3.8 同位语与插入语 …… 249
§3.9 被动语态 …… 254
§3.10 数量比较与倍数增减 …… 258
§3.11 常用多功能词 …… 264
§3.12 否定、省略与倒装 …… 272
第四章 数学专业文献读译指导 …… 281
§4.1 数学教材序言和导论的译例评析 …… 283
§4.2 数学基础和数学方法的译例评析 …… 289
§4.3 代数、几何与函数论的译例评析 …… 301
§4.4 应用数学和数学应用文献的译例评析 …… 316
§4.5 计算数学和计算机科学文献的译例评析 …… 330
§4.6 新数学分支专业文献的译例评析 …… 347
§4.7 数学练习题的译例评析 …… 359
§4.8 减少误读错译,提高读译能力 …… 365
第五章 数学论文的英语表达 …… 377
§5.1 数学论文的英语表达提要 …… 377
§5.2 论文标题的英语表达 …… 379
§5.3 论文摘要的英语表达 …… 382
§5.4 论文引言的英语表达 …… 397
§5.5 定理和定义的英语表达 …… 400
§5.6 数学推理与论证的英语表达 …… 407
附录 A 参考论文 …… 418
附录 B 利用“CNKI 翻译助手”辅助写作 …… 425
第六章 扩展阅读与备考资料 …… 428
§6.1 扩展阅读资料 …… 428
§6.2 本科学期考试与研究生入学复试参考资料 …… 444
附录 部分练习参考答案 …… 453
参考文献 …… 502

第一章　数学基本概念与术语简介

本章从初等数学最简单的知识开始，介绍一些基本数学概念、术语和符号的英文表达。为了便于初学者学习、复习和查阅，我们采用英汉对照的形式，把它们放在一个简单的表格之中(从第二节开始，把英、汉表达分别放在表格的左、右两边)。

本章的英文资料取材于国外和香港的中学(以初中为主)教材(主要取自书末所列的文献[15]—[20]、[57]—[63])，因此不仅数学知识通俗，而且英语表达相对简单。但是，希望初学者不要因为其简单而轻视它。事实上，只有坚实的基础，才是你今后专业英语能力突飞猛进的可靠平台。因此，如果你以前没学过专业英语，请你认真地从这里起步；如果你以前对专业英语已经有所了解，也希望你重新温习一次，检查一下自己是否很好地掌握了，然后再开始学习下面的章节。

§1.1　基本运算符号及简单图形

本节分两个小节，分别简要介绍基本运算符号与算式的英语读法，及简单几何图形的名称的英文表达。在第一小节，我们同时介绍与运算相关的术语，在第二小节附有对几何术语学习的说明与提示，主要在于帮助初学者尽快掌握常用的基本术语，为今后进一步学习提供较好的平台。

§1.1.1　基本运算符号与算式的读法及相关词语

首先指出：表示数或量的字母，特别是出现在算式中的字母(英文字母通常以斜体字出现)均按该字母的名称读。例如英文字母 A(或 a)和希腊字母 π 分别按国际音标[ei]和[pai]读。

一、四则运算

基本运算符号与算式的读法	相关词语
1. 加法(Addition) 加号“＋”读作 ***plus***。例如，1＋2 读作 one plus two，$a+3$读作 a plus three。 **注**：当“＋”看做正号时，可读作 ***plus*** 或 ***positive***，如＋5 读作 positive five 或 plus five。	加数：***addend***， 被加数：***augend*** 和：***sum***
2. 减法(Subtraction) 减号“－”读作 ***minus***。例如，3－2 读作 three minus two，$5-b$ 读作 five minus b。 **注**：当“－”看做负号时，可读作 ***minus*** 或 ***negative***，如－5 读作 negative five 或 minus five。	被减数：***minuend*** 减数：***subtrahend*** 差：***difference*** 负的：***negative***
3. 乘法(Multiplication) 乘号“×”、“·”或省略均读作 ***times*** 或 ***multiplied by***。例如，3×2 读作 three times two 或 three multiplied by two，$a\cdot b$ 或 ab 都读作 a times b 或 a multiplied by b。	乘数：***multiplicator***，***multiplier*** 被乘数：***multiplicand*** 积：***product***
4. 除法(Division) 除号“÷”读作 ***divided by***，用“/”或“—”表示除法时读作 ***over*** 或 ***divided by***。例如，10÷4 读作 ten divided by four；a/b 或 $\frac{a}{b}$ 读作 a over b 或 a divided by b。 有关分数的读法参见下面第五部分。	除数：***divisor*** 被除数：***dividend*** 商：***quotient*** 余数：***remainder***
5. 比和比例(Ratio and Proportion) 比的符号“：”读作 ***be to***。例如，$a:b$ 读作 a is to b，有时读作 the ratio of a to b。	比：***ratio*** 比例：***proportion*** 成(正)比例的：***proportional*** 反比：***inverse proportion*** 比例尺：***scale***
6. 乘方(Power，Involution) x 的 n 次方 x^n 读作 x ***to the nth power***，但是，当 $n=2$，3 时，通常分别读作 x ***squared***(x 的平方)和 x ***cubed***(x 的立方)。例如，3^2 读作 three squared，4^3 读作 four cubed，ab^n 读作 a times b to the nth power；b^{n-1} 读作 b to the n minus one power；b^{m+n} 读作 b to the m plus n power。	底数：***base*** 指数：***exponent***，***index*** 幂：***power***
7. 开方(Root-extracting，Evolution) x 的 n 次方根 $\sqrt[n]{x}$ 读作 the ***principle nth root*** of x，但当 $n=2$ 时，写成 $\sqrt{x}$，读作 the ***principle square root*** of x。有时为了简便，上面两种情形也经常省去 principle。$\sqrt[n]{x}$ 改写成 $x^{\frac{1}{n}}$ 时，按乘方读，即读作 x to the quantity one over n power。例如，$\sqrt[5]{a^2}$ 读作 the fifth root of a squared，$(\sqrt{a})^n$ 读作 the principle square root of a to the nth power。	被开方数：***radicand*** 根指数：***index of a radical*** 根：***root*** 平方根：***square root*** 立方根：***cube root*** 根式：***radical*** 不尽根：***surd*** 根号：***radical sign***

二、大小关系(Comparison of Quantities)

基本运算符号与算式的读法	相关词语
等于：$a=b$ 读作 a ***is equal to*** b 或 a ***equals*** b。$x+2=7$ 读作 x plus 2 is equal to 7 或 x plus 2 equals 7。 **不等于**：$a\neq b$ 读作 a ***is not equal to*** b 或 a ***does not equal*** b。 **恒等于**：$a\equiv b$ 读作 a ***is identical to*** b 或 a ***is identical with*** b。	相等：***equality*** (n.)，***equal*** (v./adj.) 等式：***equality*** 不等于：***unequal*** 不等式：***inequality*** 恒等式：***identity***
近似等于：$a\approx b$ 读作 a ***is approximately equal to*** b。$\pi\approx 3.14$ 读作 π is approximately equal to three point one four。 **小于**：$a<b$ 读作 a ***is less than*** b。$3+a<m-3$ 读作 3 plus a is less than m minus 3。 **大于**：$a>b$ 读作 a ***is greater than*** b。 **小于或等于**：$a\leqslant b$ 读作 a ***is less than or equal to*** b。 **大于或等于**：$a\geqslant b$ 读作 a ***is greater than or equal to*** b。	近似值：***approximate value*** 不大于：***not greater than*** 不小于：***not less than***

三、括号(Signs of Grouping, Brackets)

基本运算符号与算式的读法	相关词语
圆括号( )、**方括号**[ ]、**大括号**{ }分别读作 ***parentheses*** (或 ***round brackets***)，***square brackets***，***braces***。 括号的完整读法比较麻烦，如$(a+b)$，要先读左半括号(open parenthesis)，再读 $a+b$，最后读右半括号(close parenthesis)，整个式子读作：open parenthesis a plus b close parenthesis。为了简便，上式可改读成：the quantity a plus b。圆括号换成方括号、大括号时的情形类似。 更进一步的简化是省去 the quantity，如：$(a+b)(a-b)$读作 a plus b into a minus b (into 代表"乘")。	括号(的统称)：***signs of grouping*** 或 ***brackets*** 去括号：***eliminate bracket*** 添括号：***add bracket*** **注**：在不严格区分的情况下，parenthesis 也可读成 bracket。

四、特殊求值(Special Evaluation)

基本运算符号与算式的读法	相关词语
绝对值(absolute value)：$\lvert x\rvert$读作 the absolute value of x。 **最大值(maximum value)**：max $f(x)$读作 the maximum value of $f(x)$，max $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 读作 the maximum value of the series x sub one to sub n。(**注**：series 在这里的意思相当于"串"或"组"，max $\{x_1,\cdots,x_n\}$中的$\{x_1,\cdots,x_n\}$表示一组数，不是"数列"。)	相反数：***the opposite number*** 极大值：***maximum value*** 极大点：***maximum point***

续表

基本运算符号与算式的读法	相关词语
最小值(minimum value)：min $f(x)$读作 the minimum value of $f(x)$，min $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 读作 the minimum value of the series x sub one to sub n。	极小值：***minimum value*** 极小点：***minimum point***
求累加和(the sum of the terms indicated)：$\sum_{k=1}^{n} a_k$ 读作 capital sigma a_k from k equals one to k equals n 或 the sum of all a_k from k equals one to n，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 读作 capital sigma a_n from k equals one to k equals infinity 或 the sum of all a_n from k equals one to infinity。	平均值：***average value*** 级数：***series*** 数列：***sequence*** 前 n 项和：***the first n terms***
求连乘积(the product of the terms indicated)： $\prod_{k=1}^{n} b_k$ 读作 the product of all b_k from k equals one to n； $\prod_{k=1}^{\infty} b_k$ 读作 the product of all b_k from k equals one to infinity。 $n!$ 即 n 阶乘，读作 ***factorial n*** 或 ***n factorial***。	无穷乘积：***infinite product***

五、初等几何中的符号与表达式的读法

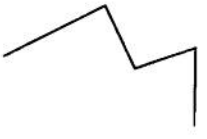
基本运算符号与算式的读法	相关词语
$\angle$ **角**，读作 ***angle***。如$\angle A$ 读作 angle A，$\angle ABC$ 读作 angle ABC。 $\triangle$ **三角形**，读作 ***triangle***。如$\triangle ABC$ 读作 triangle ABC。 $/\!/$ **平行于**，读作 ***be parallel to***。如 $AB/\!/CD$ 读作 AB is parallel to CD 或说成 AB and CD are parallel。 $\perp$ **垂直于**，读作 ***be perpendicular to***。如 $AB\perp CD$ 读作 AB is perpendicular to CD 或说成 AB and CD are perpendicular. $\cong$ **全等于**，读作 ***be congruent with***。如$\triangle ABC\cong\triangle XYZ$ 读作 triangle ABC is congruent with triangle XYZ。 $\backsim$ **相似于**，读作 ***be similar to***。如$\triangle ABC\backsim\triangle XYZ$ 读作 triangle ABC is similar to triangle XYZ。	顶点：***vertex*** 边：***side*** 平行的：***parallel*** 平行线：***parallel line*** 水平的：***horizontal*** 竖直的：***vertical*** 竖直线：***vertical line*** 全等三角形：***congruent triangles*** 相似三角形：***similar triangles***

六、分数和小数(Decimal Point)的读法(见§2.4 课文 4-C)

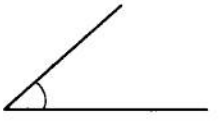
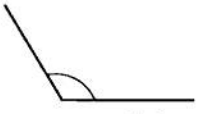
基本运算符号与算式的读法	相关词语
1. 分数(Fraction)和分式(Fraction Expression) 分数和分式的读法比较复杂,把$\frac{a}{b}$看做分数(式)时通常读作 *a over b*。例如,$\frac{1}{89}$和$\frac{52}{205}$分别读作 one over eighty-nine 和 fifty two over two hundreds and five;$\frac{2a-1}{ax+b}$读作 the quantity two times a minus one over the quantity a times x plus b。 但有许多具体情形,特别是常用分数,采用其他读法,如: (1) 分子是 1 时,先读 one,接着把分母读成它所对应的序数,如$\frac{1}{3}$读作 one third,$\frac{1}{4}$读作 one fourth。 例外:$\frac{1}{2}$读作 half,$\frac{1}{4}$也读作 a (one)quarter。 (2) 分子不是 1 时,$\frac{3}{4}$理解为 3 个$\frac{1}{4}$,读作 three quarters 或 three fourths 等;$\frac{5}{6}$理解为 5 个$\frac{1}{6}$,读作 five sixth。 例外:$\frac{5}{21}$读作 five over twenty-one(分母是 21,22,31,32 等个位数为 1 和 2 的数,不把分母读成它所对应的序数)。	分子:***numerator*** 分母:***denominator*** 倒数:***reciprocal***
2. 小数(Decimals, Decimal Fraction) (1) 整数部分不为 0 时,先读整数,然后读 ***point***(小数点),接着逐个读出小数点后的各位数字,如 12.65 读作 twelve-point-six-five。 (2) 整数部分为 0 时,先读 ***point***(小数点),接着逐个读出小数点后的各位数字,如 0.56,在英国写作 .56,读作 point-five-six。而对于像 0.0007 这样的小数,可按上述规定读作 point-nought-nought-nought-seven,但更常读作 point-three 0's-seven。	十进制小数:***decimal*** 混合小数:***mixed decimal*** 纯小数:***pure decimal*** 个位:***unit*** 十分位:***one tenth*** 百分位:***one hundredth***

§1.1.2　简单几何图形的认识

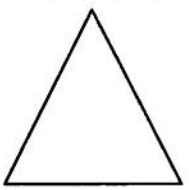
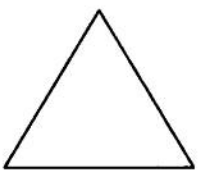
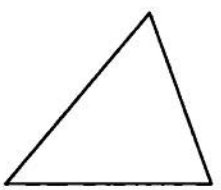
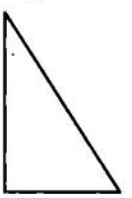
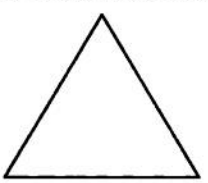
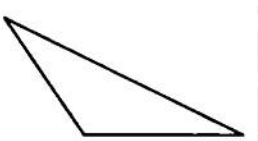
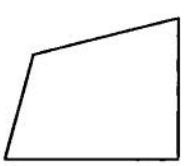
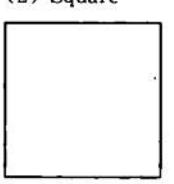
一、线(Lines)

图形	相关词汇的学习提示
(1) Straight Line (直线) **Figure 1.1.1** (2) Ray  (射线) **Figure 1.1.2** (3) Line Segment  (线段) **Figure 1.1.3** (4) Curve  (曲线) **Figure 1.1.4** (5) Broken Line  (折线) **Figure 1.1.5** (6) Arc  (弧) **Figure 1.1.6**	(1) 在英文中，当需要严格区分时，必须用 straight line，ray 和 line segment 分别表示直线、射线和线段；当上下文明确时，可以用 line 代替其中任何一种。 (2) segment 另有它意，不能单独用 segment 来表示线段。 (3) 曲线 curve 有时也写作 curved line。 (4) broken 和 curved 都是用过去分词当形容词，注意 curve 是规则动词，break 是不规则动词，二者过去分词的形式不同。

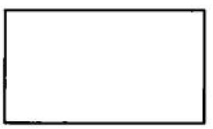
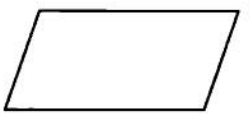
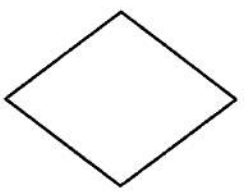
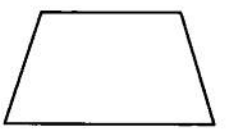
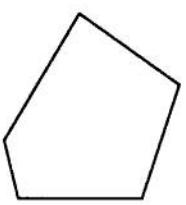
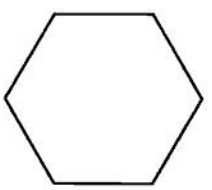
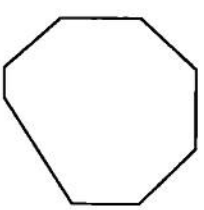
二、角(Angles)

图形	相关词汇的学习提示
(1) Right Angle  (直角) **Figure 1.1.7** (2) Acute Angle  (锐角) **Figure 1.1.8** (3) Obtuse Angle  (钝角) **Figure 1.1.9**	(1) 形容词 acute 的意思是尖锐的，obtuse 是钝的，acute angle 与 obtuse angle从字面上直接可知其意义。 (2) 初学者可能对 right angle 表示直角不太理解。其实，right 在这里的意思是“公正的”，“与各个方向不偏不倚的”。直圆锥，直圆柱等术语都用 right 表示“直的”，这与直线中的“直”含义不同。初学者不应把“直角”误译成“straight angle”，因为 straight angle 的意思是“平角”，即 180°的角。

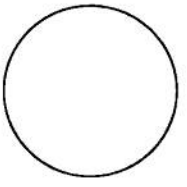
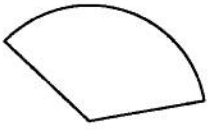
三、常见平面图形(Common Plane Figures)

图形	相关词汇的学习提示
1. 三角形(Triangles) (1) Isosceles Triangle  (等腰三角形) **Figure 1.1.10** (2) Equilateral Triangle  (等边三角形) **Figure 1.1.11** (3) Scalene Triangle  (不等边三角形) **Figure 1.1.12** (4) Right-angled Triangle  (直角三角形) **Figure 1.1.13** (5) Acute-angled Triangle  (锐角三角形) **Figure 1.1.14** (6) Obtuse-angled Triangle  (钝角三角形) **Figure 1.1.15**	(1) 前缀 tri-表示 3,与词干 angle(角)构成 triangle(三角形)。 (2) 前缀 iso-意思为"相同",isosceles 表示两腰相同;equi-意思为"完全一致",lateral 意思为"侧"或"边",equilateral 意思为"各边都相等的"。 (3) 由 right angle, acute angle 和 obtuse angle 的含义不难推知这三个术语的含义。但书写时要注意合成词构成法:angle 之前要加连字符"-",之后要加后缀 ed,变成形容词。
2. 四边形(Quadrilaterals) (1) Quadrilateral  (四边形) **Figure 1.1.16** (2) Square  (正方形) **Figure 1.1.17**	(1) lateral 意思为"侧"或"边",quad-有表示四的意思,合成 quadrilateral 为四边形。

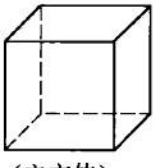
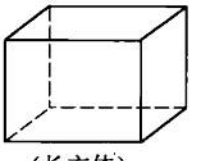
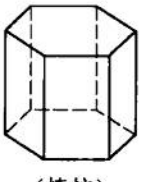
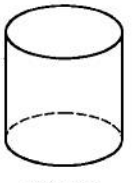
续表

图形	相关词汇的学习提示
(3) Rectangle  (矩形) **Figure 1.1.18** (4) Parallelogram  (平行四边形) **Figure 1.1.19** (5) Rhombus  (菱形) **Figure 1.1.20** (6) Trapezium  (梯形) **Figure 1.1.21**	(2) parallelogram 的前半为 parallel(平行)，后缀-gram 表示“……之物”，这里可把 gram 理解为“之图形”。 (3) 梯形有两种译法：trapezium 和 trapezoid，它们也表示不规则四边形，应根据上下文来定。这两个单词的前半都是 trap(陷阱)，可用它来帮助记忆。
3. 边数大于 4 的多边形(Polygons with More than 4 Sides) (1) Pentagon  (五边形) **Figure 1.1.22** (2) Hexagon  (六边形) **Figure 1.1.23** (3) Octagon  (八边形) **Figure 1.1.24**	(1) 前缀 poly-表示“多”，词干 gon 表示“图形”，合成词 polygon 为“多边形”。 (2) 前缀 penta-表示“五”，hexa-表示“六”，octa-表示“八”，分别合成为 pentagon(五边形)，hexagon(六边形)和 octagon(八边形)。

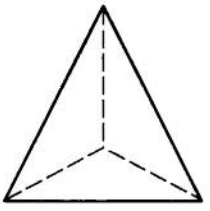
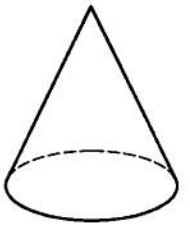
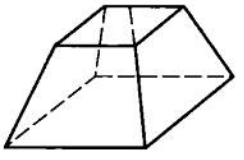
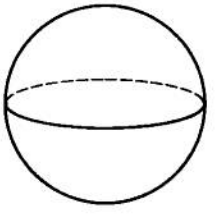
续表

图形	相关词汇的学习提示
4. 圆及其部分(Circle and Its Parts) (1) Circle (2) Semicircle  (圆) **Figure 1.1.25**  (半圆) **Figure 1.1.26** (3) Sector  (扇形) **Figure 1.1.27**	circle 含义是“圆”，主要指它的形状，也指圆的边界(圆周)及内部(圆盘)。需要严格说明时，圆周要用 circumference，圆盘要用 disc 分别译出。

四、立体图形(Solid Figures)

图形	相关词汇的学习提示
(1) Cube (2) Cuboid  (立方体) **Figure 1.1.28**  (长方体) **Figure 1.1.29** (3) Prism (4) Cylinder  (棱柱) **Figure 1.1.30**  (圆柱) **Figure 1.1.31**	(1) cube 与 cuboid 是同根词，长方体与正方体关系密切。 (2) 英文中没有统一表示各种柱体的单词，特别，表示棱柱的 prism 和表示圆柱的 cylinder 词形相差很大，读者需多下点工夫记忆。

续表

图形	相关词汇的学习提示
(5) Pyramid  (棱锥) **Figure 1.1.32** (6) Circular Cone  (圆锥) **Figure 1.1.33** (7) Frustum of Prism  (棱台) **Figure 1.1.34** (8) Frustum of Cone  (圆台) **Figure 1.1.35** (9) Sphere  (球) **Figure 1.1.36**	(3) pyramid 本指金字塔，正因为金字塔是特殊的棱锥，数学才采用它来表示棱锥。 (4) cone 本来就指“圆锥”，现在因为 cone 也可以表示更一般意义的锥，所以加上 circular 以明确化。在不至于混淆的情况下，可单独用 cone 表示“圆锥”。 (5) sphere 主要指“球形”和“球面”，也可表示“球体”。但在要求严格的场合，球体要用 ball 译出。 (6) frustum 意思为“平截头体”或“平截头台”，与 prism 及 cone 分别结合，表示“棱台”和“圆台”。

练 习 1.1

1. 把下列专业术语译成英文：

等腰三角形、等边三角形、直角三角形、平行四边形；球、圆柱、圆锥、棱锥、长方体、立方体；直线、线段；绝对值、最大值、最小值；加、减、乘、除、和、差、积、商。

2. 用英文读出以下算式或数：

(1) $3x-4y+5z$, $(2a+3b)(4c-3d)$。

(2) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, $2a\geqslant 3b+c$, $4x<2$; $3x$。

(3) x^5, $2x^3y^2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3x^2}$。

(4) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{34}{123}$, $\frac{2a+3b}{3b-5c}$。

(5) 0.234, 0.000 2, 12.34, 103.01.

3. 汉译英：

(1) 一个直角三角形有一个直角和两个锐角。

(2) 这个圆台的体积(volume)等于那两个圆锥的体积之差。

(3) 直线有时可看成特殊的曲线。

(4) 平行四边形和圆都是重要的平面图形。

4. 英译汉：

(1) Addition, subtraction, multiplication and division are basic operations.

(2) If both sides of the equation are multiplied by 3, then we have $x=1$.

(3) The inequality $x\geqslant y$ is read as that x is greater than or equal to y.

(4) A rectangle is a special parallelogram and a square is a special rectangle.

§1.2 数及其基本运算

§1.2.1 整数和有理数 (Integers and Rational Numbers)

(1) By ***natural number*** we mean 1, 2, 3 and so on. Natural number is also called ***positive integer***, −1, −2, −3 and so on are ***negative integers***. ***Integers*** include positive integers, negative integers and zero.	(1) **自然数**指的是 1, 2, 3 等等。自然数也称为**正整数**，而 −1, −2, −3 等称为**负整数**。**整数**包括正整数、负整数和零。
(2) ***Fractions*** include ***proper fractions*** (such as $\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{7}$ and $\frac{15}{100}$), ***improper fractions*** (such as $\frac{21}{4}$, $-\frac{11}{3}$ and $\frac{14}{7}$) and ***mixed fractions*** (such as $2\frac{1}{3}$, $-1\frac{2}{5}$ and $1\frac{23}{100}$). Every fraction can be expressed in the form of $\frac{p}{q}$, where p and q are integers with $q>0$.	(2) **分数**包括**真分数**(如 $\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{7}$ 和 $\frac{15}{100}$)、**假分数**(如 $\frac{21}{4}$, $-\frac{11}{3}$ 和 $\frac{14}{7}$)和**带分数**(如 $2\frac{1}{3}$, $-1\frac{2}{5}$ 和 $1\frac{23}{100}$)。每个分数都可以转化为 $\frac{p}{q}$ 的形式，其中 p 和 q 都是整数且 $q>0$。

续表

(3) Numbers 2.31, −5.03, 0.041, 3.141 592 65… and −0.787 878…are all ***decimals***, among them, 2.31, −5.03, 0.041 are ***finite decimals*** (***terminating decimals***) and 3.141 592 65… and −0.787 878… are ***infinite decimals***; −0.787 878… is a ***recurring decimal*** (or ***repeating decimal***), but the number 3.141 592 65… which is used to expressed the ***circumference ratio*** π is not a recurring decimal.	(3) 数 2.31, −5.03, 0.041, 3.141 592 65… 和 −0.787 878…都是小数,其中 2.31, −5.03, 0.041 是有限小数而 3.141 592 65… 和 −0.787 878…都是无限小数; −0.787 878…是循环小数,但用于表示圆周率 π 的小数 3.141 592 65… 却不是循环小数。 注:有限小数可译成 finite decimals 或 terminating decimals,循环小数可译成 recurring decimal 或 repeating decimal。无限小数也有另一种译法(见下面)。
(4) The sum, difference and product of two integers are integers. But when an integer (called the ***dividend***) is divided by another integer (called the ***divisor***, which is not zero), the result (called the ***quotient***) may not be an integer. For example, the quotient of 5 divided by 3 is not an integer, but a ***fraction*** $\frac{5}{3}$, or a ***recurring decimal*** 1.666 6….	(4) 两个整数的和、差和积都是整数。但是,当一个整数(称为被除数)除以另一个整数(称为除数,它不为零)的结果(称为商)可能不是整数。例如,5 除以 3 的商就不是整数,而是一个分数 $\frac{5}{3}$ 或循环小数 1.666 6…。
(5) ***Rational numbers*** include integers and fractions. A fraction can be rewritten as a finite decimal or a recurring decimal. For example, $\frac{3}{5}=0.6$ is a finite decimal and $\frac{5}{3}=1.666\,6\cdots$ is a recurring decimal.	(5) 有理数包括整数和分数。分数可以改写成有限小数或循环小数。例如,$\frac{3}{5}=0.6$ 是有限小数,而 $\frac{5}{3}=1.666\,6\cdots$ 是循环小数。

§1.2.2 实数与复数 (Real Numbers and Complex Numbers)

(1) The circumference ratio π and the number $\sqrt{2}$ are not rational numbers, they are ***irrational numbers***. Unlike rational numbers, any irrational number can not be expressed in the form of $\frac{p}{q}$, where p and q are integers with $q>0$.	(1) 圆周率 π 和数 $\sqrt{2}$ 不是有理数,它们是无理数。和有理数不同的是,任何无理数都不能表示成 $\frac{p}{q}$ 的形式,其中 p 和 q 都是整数且 $q>0$。
(2) ***Real numbers*** include rational numbers and irrational numbers. Every Real number can be expressed as a decimal. The decimal for an irrational number is ***non-terminating***, non-repeating. For example, $\pi=3.141\,592\,65\cdots$, $\sqrt{2}=1.414\,2\cdots$.	(2) 实数包括有理数和无理数。每个实数都可以表示成一个小数。表示无理数的小数是无限的且不循环的。例如,$\pi=3.141\,592\,65\cdots$, $\sqrt{2}=1.414\,2\cdots$。

续表

(3) If n is a natural number, then the expression $\sqrt[n]{x}$ is a ***radical*** if it is a real number. For example, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt{2}$ are all radicals. If $\sqrt[n]{x}$ is an irrational number, then it is called a ***surd***. For example, $\sqrt{2}$ is a surd, but $\sqrt[4]{81}$ and $\sqrt[3]{-27}$ are not, since $\sqrt[4]{81}=3$, $\sqrt[3]{-27}=-3$ are rational.	(3) 如果 n 是一个自然数，则当表达式 $\sqrt[n]{x}$ 是实数时，称之为**根式**。例如，$\sqrt[4]{81}$，$\sqrt[3]{-27}$，$\sqrt{2}$，都是根式。若 $\sqrt[n]{x}$ 是一个无理数，则该根式称为**不尽根式**。例如，$\sqrt{2}$ 是不尽根式，但 $\sqrt[4]{81}$，$\sqrt[3]{-27}$ 不是不尽根式，因为 $\sqrt[4]{81}=3$，$\sqrt[3]{-27}=-3$ 是有理数。
(4) For two given real numbers a and b, the new number $a+bi$ is called a ***complex number***, where i is the ***imaginary unit***. For a complex number $z=a+bi$, we say that a is the ***real part*** of the complex number z and b is its ***imaginary part***. If $a=0, b\neq 0$, then $z=bi$ is called a ***pure imaginary number***; if $b=0$, then $z=a$ is a real number.	(4) 对两个给定的实数 a 和 b，新的数 $a+bi$ 称为**复数**，其中 i 是**虚数单位**。对于一个复数 $z=a+bi$，称 a 为其**实部**，b 为其**虚部**。如果 $a=0, b\neq 0$ 则 $z=bi$ 称为**纯虚数**；如果 $b=0$，则 $z=a$ 是实数。
(5) For example, 2+3i, −3−4i, 5 and −6i are all complex numbers, among them −6i is a pure imaginary number and 5 is a real number.	(5) 例如，2+3i，−3−4i，5 和 −6i 都是复数，其中 −6i 是纯虚数，而 5 是实数。

§1.2.3 基本运算：次序与运算律 (Basic Operations: Order and Laws of Operations)

(1) The basic operations — addition, subtraction, multiplication, division, involution and evolution (root-extracting) are usually divided into three classes: addition and subtraction are in the first class, multiplication and division in the second class, and the others, i.e. involution and evolution in the third class.	(1) 加、减、乘、除、乘方和开方这些基本运算通常分成三级：加和减是第一级，乘和除为第二级，乘方和开方为第三级。
(2) For an ***expression*** without brackets, we should handle the operations following the order "from that in higher class to that in lower class successively", i.e. we handle involution and evolution first, then multiplication and division before addition and subtraction. Operations in the same class in an expression should be handled from left to right. For example, to evaluate $3\div 4\times 2$ we should divide 3 by 4 first, then multiply the quotient by 2.	(2) 对于不含括号的**算式**，应按先高级后低级的次序进行运算，即先作乘方开方，然后作乘除，最后作加减。在一个算式里的同一级运算应按从左到右的次序进行。例如，计算 $3\div 4\times 2$ 时，应先把 3 除以 4，然后将所得的商乘以 2。

续表

(3) For an expression with brackets, we should handle the operations in brackets first. For an expression with many layers of brackets (parentheses, square brackets and braces), we should handle the operations within the inner brackets first. Then evaluate the expression layer by layer, from inner brackets to the outer ones following the order of basic operations.	(3) 对于一个含有括号的算式,应先作括号内的运算。对于一个含有多层括号(多个小括号、中括号和大括号)的算式,应先作最内层括号内的运算,再由内至外按基本运算的次序对该算式进行计算。
(4) Addition and multiplication satisfy the following laws: (ⅰ) ***Commutative law***: $a+b=b+a$, $ab=ba$; (ⅱ) ***Associative law***: $(a+b)+c=(a+b)+c$; (ⅲ) ***Distributive law***: $(a+b)c=ac+bc$. Addition and subtraction are mutually inverse operations; multiplication and division are also mutually inverse operations. But, subtraction and division do not satisfy the above laws.	(4) 加法和乘法满足下面运算律: (ⅰ) **交换律**: $a+b=b+a$, $ab=ba$; (ⅱ) **结合律**: $(a+b)+c=(a+b)+c$; (ⅲ) **分配律**: $(a+b)c=ac+bc$。 减法与加法互为逆运算,乘法与除法互为逆运算,但是,减法和除法不满足上面这些运算律。
(5) Involution and evolution are mutually inverse operations. Involution satisfies the following ***indices laws***: (i) $a^m\times a^n=a^{m+n}$, $a^m\div a^n=a^{m-n}$; (ii) $(a^m)^n=a^{mn}$; (iii) $(a\times b)^n=a^nb^n$.	(5) 乘方与开方互为逆运算。乘方满足如下**指数律**: (i) $a^m\times a^n=a^{m+n}$, $a^m\div a^n=a^{m-n}$; (ii) $(a^m)^n=a^{mn}$; (iii) $(a\times b)^n=a^nb^n$.
(6) Since the indices laws are available in the case that indices are general real numbers when $a>0$, $b>0$, many problems concerned with evolution can convert into the operation on indices.	(6) 由于当 $a>0$, $b>0$ 时,指数律也适用于指数是一般实数的情形,所以许多涉及开方的问题可转换为指数的运算。

§ 1.2.4 倍数和因数 (Multiple and Factor)

(1) Suppose k is an integer. When A is equal to $B\times k$ (or $B\cdot k$), then A is a ***multiple*** of B.	(1) 设 k 是一个整数。若 A 等于 $B\times k$ (或 $B\cdot k$),则 A 是 B 的**倍数**。
(2) Suppose A and B are positive integers. If A is a multiple of B, then B is said to be a ***factor*** of A. In this case, we also say A is	(2) 设 A 和 B 是正整数。若 A 是 B 的倍数,则称 B 是 A 的**因数**。在这种情形下,也称 A 可被 B **整除**。例如,因为

续表

divisible by B. For example, 6 is a multiple of 3, 6 is divisible by 3, and 3 is a factor of 6, since $6=2\times3$.	$6=2\times3$，所以 6 是 3 的倍数，6 能被 3 整除，而 3 是 6 的因数。
(3) When a natural number (except 1) can only be divisible by 1 and itself, it is called a ***prime number***. A natural number having factor(s) other than 1 and itself is called a ***composite number***. 1 is neither prime number, nor composite number. Hence the set of natural numbers consists of three different parts: 1, prime numbers and composite numbers.	(3) 如果一个自然数(1 除外)仅仅能被 1 和它本身整除，则称之为**素数**。一个自然数若具有 1 和它自身之外的因数，则称之为**合数**。1 既非素数，也非合数。因此，自然数集由三个不同部分组成：1、素数和合数。
(4) When a factor of a natural number is a prime number, that factor is called a ***prime factor***. For example, the factors of 18 are 1, 2, 3, 6, 9 and 18 among which 2 and 3 are prime factors. Any composite number can be expressed as a product of its prime factors. For example, $18=2\times3\times3$.	(4) 当一个自然数的因数是素数时，这个因数就称为**素因数**。例如，18 的因数有 1，2，3，6，9 和 18，其中 2 和 3 是素因数。任何一个合数都可以表示成它的素因数的乘积。例如，$18=2\times3\times3$。
(5) To find the ***highest common factor*** (H. C. F) or the ***least common multiple*** (L. C. M) of some natural numbers, we can express each of them as a product of its prime factors first. For example, to find H. C. F and L. C. M of 18 and 24, we express them as $18=2\times3\times3=2\times3^2$ and $24=2\times2\times2\times3=2^3\times3$ first. Then by considering the common prime factors of 18 and 24, we know the H. C. F of 18 and 24 is 6, since 6 is the product of common prime factors 2 and 3. On the other hand, by choosing factors with the larger index, we obtain the L. C. M of 18 and 24 is $72=2^3\times3^2$.	(5) 为了求某些自然数的**最大公因数**或**最小公倍数**，可以先把其中每个数表成素因数的乘积。例如，为求 18 与 24 的最大公因数和最小公倍数，先表成 $18=2\times3\times3=2\times3^2$ 和 $24=2\times2\times2\times3=2^3\times3$。然后，考虑 18 与 24 共同的素因数，就得到 18 与 24 的最大公因数是 6，因为 6 是共同的素因数 2 与 3 的乘积。另一方面，通过选取具有较高指数的因数，可求得 18 与 24 的最小公倍数为 $72=2^3\times3^2$。

§1.2.5 百分数的概念 (Concept of Percentage)

(1) ***Percentages*** are fractions with 100 as the ***denominator***. We usually write 1/100 as 1%. The symbol % is called ***percent***, which means "per hundred". For example, $6/100=6\%$, $100/100=100\%$.	(1) **百分数**就是以 100 作为**分母**的分数。通常把 1/100 记作 1%. 符号%称为**百分比**(或**百分率**)，意思是"每一百份中的……"或"百分之"。例如，$6/100=6\%$，$100/100=100\%$。

续表

(2) If 51% of the students in a school are girls, it means that 51 out of every 100 students are girls. Similarly, if 15% of the flowers in a shop are rose, it means 15 out of every 100 flowers are rose.	(2) 如果某学校的学生中有51%是女孩,这意味着每100个学生中有51个是女孩。类似地,如果某商店的鲜花中有15%是玫瑰,就意味着每100株鲜花中有15株是玫瑰。
(3) The ***marked price*** of a mobile phone is 2 000 RMB yuan. If it is sold at 30% off, then its ***selling price*** is $2\,000\times(1-30\%)=1\,400$ yuan and the ***discount*** is $2\,000-1\,400=600$ yuan.	(3) 一只手机的标价是人民币2 000元。如果该手机以七折卖出,则其售价是$2\,000\times(1-30\%)=1\,400$元,折扣是$2\,000-1\,400=600$元。

练 习 1.2

1. 把下列专业术语译成英文:

自然数、整数、负数、正数、有理数、无理数、实数、虚数、复数;分数、真分数、假分数、分母、分子;小数、循环小数、有限小数、无限小数;除数、被除数、倍数、因数、最大公因(约)数、最小公倍数;交换律、结合律、分配律;百分数、百分率、标价、售价、折扣。

2. 汉译英:

(1) 整数包括正整数、负整数和零。自然数就是正整数,它不包括零。

(2) 一个数是有理数的充要条件是它可以表示成两个整数的商(其中除数不是零)。

(3) 无理数表示成小数时,不是有限小数,也不是无限循环小数。

(4) 小学生都被要求会计算两个正整数的最小公倍数及最大公约数。

(5) 对于一个含有多层括号(小括号、中括号和大括号)的算式,应先作最内层括号内的运算。

(6) 在日常生活中经常遇到求百分率的问题;当商品的售价低于标价时,人们常用百分数来计算折扣。

3. 英译汉:

(1) Find the L. C. F and H. C. M of 56 and 42 and then denote them by a and b respectively. Is there any relationship among a, b and the product of 56 and 42?

(2) By considering the common prime factors of 45 and 75, we know the L. C. F of 45 and 75 is 15, since 15 is the product of the common prime factors

3 and 5.

(3) Subtraction is the inverse operation of addition and division is also the inverse operation of multiplication. But, subtraction and division do not satisfy Commutative law, Associative law and Distributive law.

(4) The sum, difference, product and quotient of two rational numbers are also rational numbers (the divisor is not zero when a quotient is considered). But the square root of a natural number may be an irrational number.

§1.3 代数式、方程与不等式

§1.3.1 单项式、多项式、分式 (Monomial, Polynomial, Fraction)

(1) An expression containing only one product of numbers and letters (variables) is called a ***monomial***. For a monomial, the ***constant factor*** is called its ***coefficient*** and the sum of all the ***exponents*** of letters (variables) is called its ***degree***. For example, $-0.3xy^2z^3$ is a monomial and its coefficient is -0.3, and its degree is 6.	(1) 一个算式若只包含数、字母(变量)的一个乘积,则称为**单项式**。对于一个单项式,其**常数因子**称为**系数**,而各个字母(变量)的**指数**之和称为**次数**。例如,$-0.3xy^2z^3$ 是一个单项式,它的系数是 -0.3,次数为 6。 **注**:letters (variables),这里的括号用来进一步说明"所说的字母指的是变量"。
(2) A ***polynomial*** is a monomial or a sum of monomials, and each monomial is a ***term*** of the polynomial. For example, -3, $-3+4x$ and $-3+4x+5x^2$ are all polynomials, they have 1, 2 and 3 terms respectively. The ***degree of a polynomial*** is the highest degree of all terms. As a term, -3 is called ***constant term*** and its degree is 0. Hence -3, $-3+4x$ and $-3+4x+5x^2$ has degree 0, 1 and 2 respectively.	(2) **多项式**指的是一个单项式或多个单项式之和,且其中的每个单项式称为是该多项式的一个**项**。例如,-3,$-3+4x$ 和 $-3+4x+5x^2$ 都是多项式,它们分别含有 1,2 和 3 个项。**多项式的次数**就是其各项的最高次数。作为一个项,-3 称为**常数项**,其次数是 0。因此,-3,$-3+4x$ 和 $-3+4x+5x^2$ 的次数分别为 0、1 和 2。 **注**:用 respectively 时注意前面的谓语要跟第一个主语的数一致。
(3) When adding or subtracting polynomials, we ***combine*** the ***like terms***. We use the distributive law to ***expand*** the product of two or more polynomials. It is often necessary to ***factorize*** a polynomial, i.e. to express the polynomial as a product of some polynomials.	(3) 对多项式作加或减运算时,就要**将同类项合并**。可利用分配律将两个或更多个单项式的乘积**展开**。经常需要将一个多项式进行**因式分解**,即将它表示成一些多项式的乘积。

续表

	注：expand v. 展开，对应的名词为 expansion，动名词为 expanding；factorize v. 因式分解，对应的名词为 factorization。
(4) For example, the procession to convert $(x+1)(x-3)$ into x^2-2x-3 is called ***expanding***, and the reverse procession, i.e. that to express x^2-2x-3 as $(x+1)(x-3)$ is called ***factorization***, and both $x+1$ and $x-3$ are called the ***factors*** of x^2-2x-3.	(4) 例如，把 $(x+1)(x-3)$ 变形为 x^2-2x-3 的过程称为**展开**，而其逆过程，即把 x^2-2x-3 表示成 $(x+1)(x-3)$ 的过程称为**因式分解**，其中 $x+1$ 和 $x-3$ 都称为 x^2-2x-3 的**因式**。 **注**：convert 是及物动词，convert A into B 表示把 A 转变成 B。
(5) The methods of factorization include ***abstracting common factors***, ***grouping terms***, ***using product formulas*** and so on. Especially, ***cross multiplication*** is an effective method to factorize a ***trinomial***.	(5) 因式分解的方法包括**提取公因式**、**分组分解**、**应用乘法公式**等等。特别，**十字相乘法**是对**二次三项式**进行因式分解的好方法。 **注**：monomial, binomial, trinomial 和 polynomial 分别为单项式、二项式、三项式和多项式。这里 trinomial 特指**二次三项式**。
(6) A polynomial is an ***integral expression***. It means that when it is considered as a quotient of two polynomials, the denominator (divisor) is a constant. Conversely, a quotient of two polynomials with denominator containing letter(s) (variable(s)) is called a ***fractional expression***. Hence a fractional expression $f(x)$ is of form $\frac{P(x)}{Q(x)}$, where $P(x)$ and $Q(x)$ are polynomials and the degree of $Q(x)$ is greater than or equal to 1.	(6) 多项式是**整式**，即把它看成两个多项式的商时其分母（除式）是一个常数。反之，如果两个多项式的商的分母含有字母（变量），则该商称为**分式**。因此，每个分式 $f(x)$ 具有 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的形式，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是多项式且 $Q(x)$ 的次数大于或等于 1.

§1.3.2 简单方程与不等式 (Simple Equations and Inequalities)

(1) The equality with ***unknown(s)*** is called an ***equation***. For example, let x be an unknown. Then $2x+3=5$ is an equation. It is an equation of first order in an *unknown* (variable).	(1) 含有**未知数**的等式称为**方程**。例如，设 x 为一个未知数，则 $2x+3=5$ 是一个方程。这个方程是一元一次方程。 **注**：由于解析几何的引入，方程的未知数常看成变量。所以英文有两种表示法，中文都可以称为“元”。

续表

(2) It is clear that $x=1$ can make the equality $2x+3=5$ hold, i.e. $2\times1+3=5$. Thus $x=1$ is called the ***solution of the equation***. We can use the ***principle of balance*** to find the solutions of equations, or to ***solve equations***.	(2) 显然，$x=1$ 能使等式 $2x+3=5$ 成立，即 $2\times1+3=5$。于是，$x=1$ 称为该方程的解。我们可以利用平衡原理来求方程的解，或称为解方程。
(3) The general procedure for solving a first-degree equation with an unknown can be stated as follows: (a) ***Eliminating denominators***; (b) ***Eliminating signs of grouping***; (c) ***Removing terms***; (d) ***Combining like terms***; (e) ***Dividing both sides of the equation by the coefficient of the unknown***; (f) ***Checking your answer***.	(3) 解一元一次方程的一般步骤可以概述如下：(a) 去分母；(b) 去括号；(c) 移项；(d) 合并同类项；(e) 方程两边同时除以未知数的系数；(f) 检验答案。
(4) An expression like $5>1$, $2x>1$, $3(x-1)<2+5x$ and $3-4x\geqslant2$ is called an ***inequality***. The procedure for solving the inequality $3(x-1)<2+5x$ with an unknown x is similar to that for solving the equation $3(x-1)=2+5x$. But it is noticeable that if we divide (or multiply) both sides of the inequality $a<b$ by a constant number c with $c>0$, then we have $a/c<b/c$ (or $ac<bc$), i.e. the inequality sign remains unchanged; if $c<0$, then we have $a/c>b/c$ (or $ac>bc$), i.e. the inequality sign must be ***reversed***.	(4) 形如 $5>1$, $2x>1$, $3(x-1)<2+5x$ 和 $3-4x\geqslant2$ 的表达式称为不等式。解含有未知数 x 的不等式的步骤与解方程 $3(x-1)=2+5x$ 类似。但值得注意的是，若不等式 $a<b$ 的两端同除以(或乘)常数 c，则当 $c>0$ 时有 $a/c<b/c$ (或 $ac<bc$)，即原不等号保持不变；而当 $c<0$ 时有 $a/c>b/c$(或 $ac>bc$)，即原不等号必须转向。
(5) There are many daily life problems that involve the concepts of equality and inequality. Sometimes we can set up equations or inequalities to find the relevant solutions, but we must check whether the answers ***make sense***.	(5) 许多日常生活中的问题都含有方程和不等式的概念。有时，可以建立方程或不等式来求出相关的解，不过，我们必须检验所求得的答案是否有意义。

§1.3.3 线性方程组与二次方程 (Systems of Linear Equations and Quadric Equations)

(1) When we want to solve a problem associated with 2 ***changeable factors***, we may try to set up equations in 2 unknowns and then find its solution. An equation in form of	(1) 当我们想要解决涉及两个可变因素的问题时，可以试图建立含有两个未知数的方程并求出它的解。形如

续表

$Ax+By+C=0$ is an ***equation in unknowns*** x ***and*** y, where A and B are constants with $A^2+B^2\neq 0$. Since the equation has order 1 (or degree one), it is a ***first-degree equation***. But we often call it a ***linear equation*** because it represents a straight line on the ***coordinate plane*** xOy.	$Ax+By+C=0$ 的方程就是一个**含有未知数** x **和** y **的方程**，其中 A 与 B 是常数且 $A^2+B^2\neq 0$。由于该方程的次数是 1，所以是**一次方程**。但我们常称之为**线性方程**，因为在**坐标平面** xOy 上它表示一条直线。
(2) If a ***pair of ordered numbers*** (a, b) satisfy the equation $Ax+By+C=0$, then (a, b) is a solution of the equation. It is easy to see that there are ***infinitely many*** solutions of the equation. According to the need of practice problems, we often consider the solution (a, b) satisfying both equations $A_1x+B_1y+C_1=0$ and $A_2x+B_2y+C_2=0$ and say (a,b) is the solution of the ***systen of equations*** (or ***Simultaneous equations***): $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases}$	(2) 如果一个**有序数对** (a, b) 满足方程 $Ax+By+C=0$, 那么 (a, b) 为该方程的一个解。容易看出，该方程有**无穷多个解**。根据实际问题的需要，我们经常考虑同时满足方程 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 及 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的解 (a, b)，并且说 (a, b) 是如下**方程组**（或**联立方程**）的解： $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases}$
(3) A first-degree equation in 3 or more unknowns is also called a linear equation. The systems of equations in 3 or more unknowns are also of great use. The following is a system of 3 linear equations in 4 unknowns: $\begin{cases}2x+3y+4z+5w=1,\\4x+2y+3z+7w=-2,\\0.5x+y+3.1z+w=3.\end{cases}$	(3) 含有三个或更多个未知数的一次方程也称为线性方程。含有三个或更多个未知数的方程组也很有用。下面是一个由三个四元线性方程组成的方程组： $\begin{cases}2x+3y+4z+5w=1,\\4x+2y+3z+7w=-2,\\0.5x+y+3.1z+w=3.\end{cases}$
(4) The ***methods of elimination*** and ***substitution*** are usually used to solve simpler system of linear equations. To deal with more general system of linear equations, mathematicians have introduced many new methods, including applying ***matrixes***, ***determinants*** and other important tools. For example, to solve the above system of equations, one can consider its ***coefficient matrix*** and the ***matrix of coefficients and constants***. By means of electronic computers, we can also solve the system of m linear equations in n unknowns with m, $n\geqslant 100$.	(4) **消元法和代入法**常用于解较为简单的方程组。为了处理更一般的线性方程组，数学家们引进了许多新的方法，包括应用**矩阵**、**行列式**及其他重要工具。例如，要解上述方程组，可以考虑它的**系数矩阵**和**增广矩阵**。借助于电子计算机，人们还可以解由 m 个 n 元线性方程组成的方程组，其中 m, $n\geqslant 100$。

续表

(5) An equation in the form $ax^2+bx+c=0$ is called a ***quadratic equation*** (or second-degree equation) ***in one unknown*** x, where a, b and c are real constants with $a\neq 0$. There are several methods to solve the equations, among which are ***factoring methods***, ***extracting the square roots***, ***completing the square*** and ***using quadratic formulas***.	(5) 形如 $ax^2+bx+c=0$ 的方程称为**一元二次方程**，其中 a，b 和 c 是实数且 $a\neq 0$。有许多方法可用于解这种方程，包括**因式分解法**、**开方法**、**配方法**及**应用公式法**。
(6) A quadratic equation in one unknown may have 2 unequal ***real roots***, 2 equal real roots or no real root. The situations are determined by the sign of the ***discriminant*** b^2-4ac. An equation of this kind may have 2 unequal (or equal) real roots when and only when the discriminant $b^2-4ac>0$ (or $=0$). When $b^2-4ac<0$, the quadratic equation has no real root, but has 2 ***conjugate complex roots***.	(6) 一个一元二次方程可能有两个不等的**实根**、两个相等的实根或没有实根。属于哪种情况由**判别式** b^2-4ac 的符号来确定。一元二次方程有两个不等的实根(或相等的实根)当且仅当它的判别式 $b^2-4ac>0$(或 $=0$)。当 $b^2-4ac<0$ 时，这个二次方程没有实根，但有两个**共轭的复根**。

练 习 1.3

1. 把下列专业术语译成英文：

单项式、多项式、整式、分式、项、常数因子、次数、系数；展开、因式、因式分解、提取公因式、十字相乘法、应用公式法、分组分解；方程、未知数、方程的解、去分母、去括号、合并同类项；不等式、可变因素；联立方程、方程组、线性方程、消元法、代入法、配方法；系数矩阵、增广矩阵；一元二次方程、判别式、实根、共轭复根；坐标平面、有序数对。

2. 汉译英：

(1) 指出单项式 $-213x^2y^3$ 的系数和次数。

(2) 若干个单项式的和称为多项式，而单项式可看成是特殊的多项式。

(3) 求两个多项式的和或差时，我们要合并同类项。

(4) 解一元一次方程就是要求出它的根，即使得方程成立的未知数的值。

(5) 消元法、代入法是解二元一次方程组的常用办法；利用矩阵我们可以解多元线性方程组。

(6) 解一元一次不等式的方法类似于解一元一次方程，但是要注意，不等式两边如果同时乘或除以一个负数，则原来的不等号要改变方向。

(7) 在坐标平面上，两条直线的交点就是对应的二元一次方程组的解。

(8) 一元二次方程有或无实根的情况可由判别式的符号来确定。

3. 英译汉：

(1) Equations are of two kinds—identities and equations of condition. An arithmetic or an algebraic identity is an equation. An identity involving letters is true for any set of numerical values of the letters in it.

(2) An equation which is true only for certain values of a letter in it, or for certain sets of related values of two or more of its letters, is an equation of condition, or simply an equation. For example, $3x-5=7$ is true for $x=4$ only, and $2x-y=10$ is true for $x=6$ and $y=2$ and for many other pairs of values for x and y.

(3) To solve an equation means to find the value of the unknown term. To do this, we must, of course, change the terms about until the unknown term stands alone on one side of the equation, thus making it equal to something on the other side. We then obtain the value of the unknown and the answer to the question.

(4) Compound linear inequalities are two or more linear inequalities related together by the words "and" or "or". When we are asked to solve two inequalities related together by the word "and", we have to find those values of x which can satisfy both inequalities. In other words, a value of x which satisfies one inequality but not the other cannot be included in the solution. On the other hand, when we are asked to solve two inequalities related together by the word "or", any value satisfying any one of the two inequalities can be included in the solution.

§1.4 集的概念与初等函数

§1.4.1 集合(集)的概念 (The Concept of Set)

(1) In modern set-theory, "***set***" and "***belonging to***" (denoted by the symbol "$\in$") are the fundamental concepts. If A is a set and $x\in A$, then x is an ***element*** of A. Suppose A and B are sets. If every element of A is an element of B, then A is said to be a ***subset*** of B, and denoted by $A\subseteq B$. If A is a subset of B and B is also a subset of A, then it is said that A is equal to B and denoted by $A=B$; in this case, A and B have the same elements. If A is a subset of B and $B\neq A$, then it is said that A is a ***proper subset*** of B.

(1) 在现代集合论中，"**集**"与"**属于**"(用记号"$\in$"表示)是基本概念. 若 A 是一个集且 $x\in A$，则 x 是 A 的**元素**。假定 A 和 B 是集，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$。如果 A 是 B 的子集且 B 是 A 的子集，则称 A 等于 B 并记作 $A=B$；此时，A 与 B 具有相同的元素。如果 A 是 B 的子集但 B 不是 A 的子集，则称 A 是 B 的**真子集**。

续表

(2) ***Integers*** (i.e. the set of all integers, denoted by **Z**), ***natural numbers*** (i.e. the set of all natural numbers, denoted by **N**), ***rational numbers*** (i.e. the set of all rational numbers, denoted by **Q**) and ***real numbers*** (i.e. the set of real numbers, denoted by **R**) are common and useful sets.	(2) **整数集**(指所有整数组成的集,记作 **Z**),**自然数集**(指所有自然数组成的集,记作 **N**),**有理数集**(指所有有理数组成的集,记作 **Q**)及**实数集**(指所有实数组成的集,记作 **R**)都是很有用的常见集。
(3) ***Intervals*** are often used to denote the special subset of **R**. $[a, b]$ is a ***closed interval***, and (a, b) is an ***open interval***, $(a, b]$ and $[a, b)$ are ***half-open-closed intervals***, each of them has the endpoints a, b with $a<b$. Besides, we have ***infinite intervals*** such as $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ and so on.	(3) **区间**常用于表示 **R** 的特殊子集。$[a, b]$是**闭区间**,(a, b)是开区间,$(a, b]$和$[a, b)$是**半开半闭区间**。这些区间都以 a, b 为端点,其中 $a<b$。此外,还有诸如 $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$和$(-\infty, +\infty)$之类的**无穷区间**。
(4) A group of ***axioms*** are given to ensure the operations on sets can be handled well. The ***union*** and ***intersection*** of two sets are the most common basic operations. The union of A and B, denoted by $A \cup B$, is a set which consists of all the elements of A or B. The intersection of A and B, denoted by $A \cap B$, is a set consisting of the elements which belong to both A and B.	(4) 有一组**公理**用以保证集的运算得以良好地操作。两个集的**并**和**交**是两种最常见的基本运算。A 与 B 的并是一个由 A 和 B 的所有元素所组成的集,记作 $A \cup B$;A 与 B 的交是一个由既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集,记作 $A \cap B$。

§1.4.2 函数 (Function)

(1) In modern mathematics, as an important concept, ***function*** is defined as a ***mapping*** from set X to set Y, i.e. if every element x in X has a defined ***image*** $f(x)$, an element in Y, then it is said that $f(x)$ or $y=f(x)$ is a function of x. In history, x and y are considered as ***variables***, since the concept came from the formulas describing motions such as $s=\frac{1}{2}gt^2$.	(1) 在现代数学中,作为一个重要的概念之一的**函数**,定义为从集 X 到集 Y 的一个映射,即若 X 中的每个元素 x 在 Y 中都有一个确定的元素 $f(x)$作为它的**象**,则称 $f(x)$或 $y=f(x)$是 x 的一个函数。在历史上,x 和 y 都被看成是**变量**,因为这个概念起源于诸如 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 之类的描述运动的公式。
(2) Functions $y=ax+b$ and $y=ax^2+bx+c$ with $a\neq 0$ are called a ***linear function*** and ***quadratic function*** respectively. The graph of a linear function in the ***coordinate plane*** is a straight line, and that of a quadratic function is a ***parabola***. We can solve the quadratic equation $ax^2+bx+c=0$	(2) 函数 $y=ax+b$ 和 $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, 分别称为**线性函数**与**二次函数**。在**坐标平面**上,线性函数的图形是一条直线,而二次函数的图形是一条**抛物线**。在解二次方程 $ax^2+bx+c=0$

续表

and the inequality $ax^2+bx+c>0$ by means of the graph of the corresponding quadratic function $y=ax^2+bx+c$.	和不等式 $ax^2+bx+c>0$ 时，可以借助于它们对应的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图形来求解。
(3) Functions $f(x)=a^x$ and $g(x)=\log_a x$ with $a>0$ and $a\neq 1$ are called ***exponential functions*** and ***logarithmic functions*** respectively. Functions $f(x)$ and $g(x)$ are ***converse mutually***. Since $y=a^x$ if and only if $x=\log_a y$, the domain **R** of exponential functions is the ***range*** of logarithmic functions and the range $(0,+\infty)$ of exponential functions is the ***domain*** of logarithmic functions.	(3) 函数 $f(x)=a^x$ 和 $g(x)=\log_a x$ 分别称为**指数函数和对数函数**，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$。$f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个**互逆函数**。因为当且仅当 $x=\log_a y$ 时，$y=a^x$，所以指数函数的定义域 **R** 是对数函数的**值域**，而指数函数的值域 $(0,+\infty)$ 是对数函数的**定义域**。 **注**：表示“逆的”的形容词 converse 常作表语；而 inverse 常作定语，不作表语。
(4) ***Trigonometric functions*** such as $\sin x$, $\cos x$ and $\tan x$ are all ***periodic functions***, among which both $\sin x$ and $\cos x$ have the ***period*** 2π, but $\tan x$ has the period π. Since the domain of both $\sin x$ and $\cos x$ is **R**, which contains infinitely many intervals with length 2π, these functions take each value in $[-1,1]$ ***infinitely many times***. The domain of $\tan x$ is $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2};k\in\mathbf{N}\right\}$ and the function takes each value in **R** infinitely many times.	(4) 如 $\sin x$，$\cos x$ 和 $\tan x$ 这样的**三角函数都是周期函数**，其中 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的**周期**是 2π，而 $\tan x$ 的周期是 π。因为 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的定义域是 **R**，它包含了无穷多个长度为 2π 的区间，这两个函数取 $[-1,1]$ 中的每一个值**无穷多次**。$\tan x$ 的定义域是 $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2};k\in\mathbf{N}\right\}$，该函数取 **R** 中的每一个值无穷多次。
(5) If we confine the domain of a periodic function $f(x)$ into an interval I such that $f(x)$ is ***monotonic*** in I, then we can obtain the ***inverse function*** $f^{-1}(x)$ of $f(x)$. According to the idea, the inverse functions of $\sin x$ in $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x$ in $[0,\pi]$ and $\tan x$ in $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ can be well defined, they are $\arcsin x$, $\arccos x$ and $\arctan x$ respectively.	(5) 若我们把一个周期函数 $f(x)$ 的定义域局限于一个区间 I，使 $f(x)$ 在 I 上是**单调的**，那么就可以得到 $f(x)$ 的**反函数** $f^{-1}(x)$。根据这一思想，$\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 和 $\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数都可以很好地定义，它们分别是 $\arcsin x$，$\arccos x$ 和 $\arctan x$。 **注**：及物动词 confine 常用 into 搭配，意思为“把……局限于……”。

练 习 1.4

1. 把下面专业术语译成英文：

集合(集)、属于、元素、子集、真子集、并、交、公理；整数集、自然数集、有理数集、实数集、区间、开区间、闭区间、半开半闭区间；函数、定义域、值域、映射、象、逆映射；线性函数、二次函数、抛物线、指数函数、对数函数、反函数、三角函数；周期、变量、互逆的、周期的、单调的、无穷多的。

2. 汉译英：

(1) 集 A 是集 B 的子集，记作 $A\subseteq B$，当且仅当 A 的每一个元素都是 B 的元素。

(2) 开区间(a, b)是闭区间$[a, b]$的真子集，因为区间端点 a 和 b 属于$[a, b]$而不属于(a, b)。

(3) 函数可以看成映射，反函数就是逆映射。定义在区间上的单调函数有反函数。

(4) 线性函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数都是初等(elementary)函数。

(5) 三角函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是$[-1,1]$，它们都是周期函数，周期是 2π。

(6) 在坐标平面上，线性函数的图形是一条直线，而二次函数的图形是一条抛物线。

(7) 在历史上，函数是变量 y 和变量 x 之间的对应关系，这种关系可以用一个公式来表示。

(8) 函数 $\tan x$ 实际上是 $\sin x$ 除以 $\cos x$ 的商，所以它的定义域必须扣除使 $\cos x=0$ 的点。

3. 英译汉：

(1) The words "set" and "collection" are synonyms, and "set" is used in mathematics as a terminology and "collection" is seen in everyday usage.

(2) Any function that can be written in the form $f(x)=ax+b$, where a and b are real numbers, is called a linear function. Any function that can be written in the form $f(x)=ax^2+bx+c$, where a, b and c are real numbers with $a\neq 0$, is called a quadratic function.

(3) A function f is called periodic if there exists a positive real number p such that $f(x+p)=f(x)$ for all x in the domain of f. The smallest value for $p(p>0)$ is called the period of the function.

(4) The graph of $f(x)=\sin(x+\pi)$ is the basic sine curve shifted π units to the left. In general, the graph of $f(x)=\sin(x-\alpha)$ is the basic sine curve shifted $|\alpha|$ units to the right if $\alpha>0$ or to the left if $\alpha<0$. Here $|\alpha|$ is called the *phase shift* (相位移) of the graph.

(5) If we write the equation

$$x=b^a,$$

we express then the essential relation between a number, x, and its logarithm, a, for a given base, b. In the notation of logarithms this is written as

$$\log_b x=a,$$

and it is read "the logarithm of x to the base b equals a".

(6) We can define verbally in one statement both logarithm and base as follows:

The logarithm of a given number is the power to which another number, called the base, must be raised in order to equal the given number.

§1.5 平面上的直线和三角形

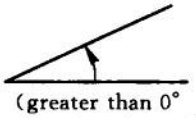
§1.5.1 平面上的直线与角(Straight Lines and Angles in the Plane)

(1) Two ***rays*** starting at the same point form an ***angle*** at that point. The 2 rays are called the ***arms*** of the angle and the starting point is called the ***vertex***.

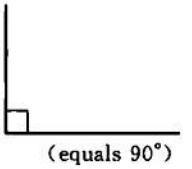
(1) 从同一点出发的两条**射线**在该点构成了一个**角**。这两条射线称为该角的**边**,而该出发点称为**顶点**。

(2) We can classify angles into 6 types according to their size, namely, ***acute angle***, ***right angle***, ***obtuse angle***, ***straight angle***, ***reflex angle*** and ***round angle***.

(2) 可以根据角的大小把它分成 6 种类型:即**锐角**、**直角**、**钝角**、**平角**、**优角**和**周角**。



(greater than 0° but less than 90°)
acute angle
(锐角)
Figure 1.5.1



(equals 90°)
right angle
(直角)
Figure 1.5.2

续表



(greater than 90° but less than 180°)

right angle

(钝角)

Figure 1.5.3

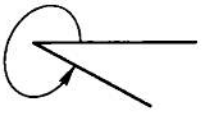


(equals 180°)

straight angle

(平角)

Figure 1.5.4

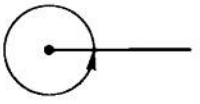


(greater than 180° but less than 360°)

reflex angle

(优角)

Figure 1.5.5



(equals 360°)

round angle

(周角)

Figure 1.5.6

(3) If the sum of 2 angles α and β is equal to 180°, then they are called ***supplementary angles***. When two ***adjacent angles*** are supplementary, they are on a straight line. If the sum of 2 angles α and β is equal to 90°, then they are ***complementary angles***. The two acute angles in a right triangle are complementary.

(3) 若两个角 α 与 β 之和等于 180°，则称他们为(互)补角。当两个邻角互补时，它们在同一条直线上。若两个角 α 与 β 之和等于 90°，则称它们为(互)余角。直角三角形的两个锐角是互余的。

(4) If 2 straight lines AB and CD intersect at the point O, then the opposite angles $\angle AOC$ and $\angle BOD$ are called a pair of ***vertical opposite angles***. Thus $\angle AOD$ and $\angle BOC$ are the other pair of vertical opposite angles. It is obvious that vertical opposite angles formed by two straight lines are equal.

(4) 如果两条直线 AB 和 CD 交于点 O，那么对角 $\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 称为一对对顶角。于是，$\angle AOD$ 与 $\angle BOC$ 是另一对对顶角。显然，由两条直线形成的对顶角相等。

(5) If 2 straight lines AB and CD on the same plane do not intersect no matter how far they extend, then the 2 lines are called ***parallel lines***. In this situation, we say AB and CD are parallel to each other, which is denoted by $AB \,//\, CD$, where the symbol "//" means "be parallel to".

(5) 如果同一平面上的两直线 AB 与 CD 不论如何延长都不相交，则这两直线称为平行线。在这种情形下，我们说 AB 与 CD 互相平行，记作 $AB \,//\, CD$，记号"//"的含义是："平行于"。

续表

(6) If a straight line XY intersects 2 straight lines AB and CD, then XY is called the ***transversal*** of AB and CD. If a transversal XY intersects 2 parallel lines AB and CD, then the ***corresponding angles*** formed are equal, the ***alternate angles*** formed are also equal and the ***interior angles on the same side*** are supplementary.	(6) 若一条直线 XY 与两直线 AB 与 CD 相交，则 XY 称为 AB 与 CD 的**截线**。如果截线 XY 与两平行直线 AB 与 CD 相交，则其形成的**同位角**相等，**内错角**也相等，而**同旁内角**互补。

§ 1.5.2 三角形(Triangles)

(1) Triangles can be classified into 3 types according to the size of their ***interior angles***: ***acute-angled triangle*** whose all angles are acute; ***right-angled triangle*** with one angle being right angle and ***obtuse-angled triangle*** with one angle being obtuse angle.	(1) 三角形可以根据其**内角**的大小分成三类：**锐角三角形**，其三个角都是锐角；有一个角是直角的**直角三角形**和有一个角是钝角的**钝角三角形**。 **注**：注意这个术语的构词法： right-angled triangle 直角三角形。
(2) Triangles can be classified into 3 types according to their side lengths: ***scalene triangle*** whose all sides are unequal; ***isosceles triangle*** with 2 equal sides and ***equilateral triangle*** with 3 equal sides.	(2) 三角形可以根据其边长(关系)分成三类：三边互不相等的**不等边三角形**，有两边相等的**等腰三角形**和三边都相等的**等边三角形**。 **注**：前缀 isos-和 equi-都有相等的含义，它们分别构成 isosceles(等腰的)和 equilateral(等边的)。
(3) The sum of the 3 interior angles of a triangle must be equal to 180°. That is, in $\triangle ABC$, $\angle A+\angle B+\angle C=180°$. The sum of the lengths of any two sides of a triangle must be larger than the length of the third side. That is, in $\triangle ABC$, we have $AB+BC>CA$, $AB+CA>BC$ and $BC+CA>AB$. These inequalities are called the ***triangle inequalities***.	(3) 一个三角形的三个内角之和必等于 180°。这就是说，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$。一个三角形的任意两边的长度之和必大于第三边的长度。这就是说，在 $\triangle ABC$ 中有 $AB+BC>CA$，$AB+CA>BC$ 和 $BC+CA>AB$。这些不等式称为**三角不等式**。
(4) Four kinds of line segments in a triangle are often considered, they are ***angle bisectors***, ***medians***, ***altitudes*** (***heights***) and ***perpendicular bisectors***. The points of intersection of the angle bisectors, the medians, the altitudes and the perpendicular bisectors of a triangle are called ***incenter***, ***centroid***, ***orthocenter*** and ***circumcenter*** respectively.	(4) 三角形中有四类线段经常要考虑，即**角平分线**、**中线**、**高**和**垂直平分线**。三角形的三条角平分线、中线、高和垂直平分线的交点分别称为**内心**、**重心**、**垂心**和**外心**。 **注**：bisector (平分线)由前缀 bi-，词根 sect 和后缀-or 构成，bi-有二、两、双、二分的含义，sect 有交、切的含义，-or 提示名词(常表示行为者的一种属性)。

续表

(5) Suppose $\triangle ABC$ is an isosceles triangle with $AB=AC$. Then the third side BC is called the ***base***, $\angle BAC$ is called the ***vertex angle***, while $\angle ABC$ and $\angle ACB$ are called the ***base angles***. It can be proved that two base angles are equal, i.e. $\angle ABC=\angle ACB$. Conversely, a triangle with 2 equal angles is an isosceles triangle.	(5) 假定$\triangle ABC$是等腰三角形，其中$AB=AC$。那么第三边BC就称为**底边**，$\angle BAC$称为**顶角**，而$\angle ABC$与$\angle ACB$称为**底角**。可以证明，这两个底角相等，即$\angle ABC=\angle ACB$。反之，有两个角相等的三角形是一个等腰三角形。
(6) An isosceles triangle is a figure with ***reflection symmetry***. In an isosceles triangle, the following lines overlap: ① the ***axis of symmetry***, ② the angle bisector of the vertex angle, ③ the median joining the mid-point of the base, ④ the altitude standing on the base, ⑤ the perpendicular bisector of the base.	(6) 等腰三角形是一个**反射对称**的图形。在一个等腰三角形中，以下线段重合：① **对称轴**，② 顶角的平分线，③ 底边上的中线，④ 底边上的高，⑤ 底边的垂直平分线。
(7) An equilateral triangle can be regarded as a special isosceles triangle, all angles of which are equal, thus each angle is 60°. The incenter, centroid, orthocenter and circumcenter of an equilateral triangle are all ***overlap***.	(7) 等边三角形可视为特殊的等腰三角形，它的三个角都相等，即每个角等于60°。等边三角形的内心、重心、垂心和外心都**重合**。

§1.5.3 全等三角形与相似三角形(Congruent Triangles and Similar Triangles)

(1) Figures with the same shape and size are called ***congruent figures***. For two congruent triangles, the sizes of their ***corresponding sides*** and the lengths of their ***corresponding angles*** are equal. The expression $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ is used to denote that $\triangle ABC$ and $\triangle XYZ$ are congruent or $\triangle ABC$ is congruent with $\triangle XYZ$.	(1) 形状与大小都一样的图形称为**全等形**。两个全等三角形的所有**对应边**及**对应角**都相等。式子$\triangle ABC\cong\triangle XYZ$用来表示$\triangle ABC$与$\triangle XYZ$全等，或$\triangle ABC$全等于$\triangle XYZ$。
(2) Two triangles are congruent if one of the following conditions is satisfied: (a) The corresponding sides of the triangles are all equal (Reference: SSS); (b) Two pairs of corresponding angles and one pair of corresponding sides of the triangles are equal (Reference: AAS); (c) Two pairs of corresponding sides and one pair of included angles of the triangles are equal (Reference: SAS).	(2) 若下面诸条件之一成立，则两个三角形全等： (a) 两个三角形的所有对应边都相等(引用时写：边边边)； (b) 两个三角形的两组对应角相等且一组对应边相等(引用时写：角角边)； (c) 两个三角形的两组对应边相等且它们的夹角相等(引用时写：边角边)。

续表

(3) If the ***hypotenuses*** and one pair of the legs of two right-angled triangles are equal correspondingly, then they are congruent triangles (Reference: RHS).	(3) 若两个直角三角形的**斜边**及另一组对应的边相等，则这两个三角形全等(引用时写：直角三角形判别法)。 **注**：引用时也可以写 RHS。
(4) ***Similar figures*** have the same shape but can be different in size. They will overlap each other after suitable enlargement or reduction. For 2 similar triangles, the sizes of their corresponding angles are equal and the corresponding sides are ***proportional***. Symbolically, we write $\triangle ABC \backsim \triangle XYZ$ to denote that $\triangle ABC$ and $\triangle XYZ$ are similar or that $\triangle ABC$ is similar to $\triangle XYZ$.	(4) **相似的图形**具有相同的形状但大小未必相同。通过适当地放大或缩小后它们可以重合。两个相似三角形的所有对应角都相等，且所有对应边成比例。我们用记号 $\triangle ABC \backsim \triangle XYZ$ 来表示 $\triangle ABC$ 与 $\triangle XYZ$ 相似或者 $\triangle ABC$ 相似于 $\triangle XYZ$。 **注**：proportional adj. 成比例的，比例的。
(5) Two triangles are similar if one of the following conditions is satisfied: (a) The corresponding angles of the 2 triangles are all equal (Reference: AAA); (b) The corresponding sides of the 2 triangles are all proportional (Reference: 3 sides proportional); (c) 2 pairs of corresponding sides are proportional and one pair of included angles of the 2 triangles is equal (Reference: ratio of 2 sides, inc. $\angle$).	(5) 若下面诸条件之一成立，则两个三角形相似： (a) 两个三角形的所有对应角都相等(引用时写：角角角)； (b) 两个三角形的所有对应边成比例(引用时写：三边成比例)； (c) 两个三角形的两组对应边成比例且它们的夹角相等(引用时写：两边成比例，夹角相等)。
(6) The ***mid-point theorem***: The line segment joining the mid-points of 2 sides of a triangle is parallel to the third side and half the length of the third side.	(6) **中点定理**：连接一个三角形两边的中点的线段平行于第三边且等于第三边长度的一半。 **注**：join v. 连接。
(7) The ***intercept theorem***: If a transversal cuts 3 or more parallel lines with equal intercepts, then any other transversal also cuts the parallel lines with equal intercepts.	(7) **截距定理**：若一条截线被三条或更多的平行线所截时截距相等，那么其他截线被这些平行线所截时截距也相等。 **注**：(1) intercept n. 截距，截线；v. 截取；(2) transversal n. 截线；adj. 横截的。

练 习 1.5

1. 把下列专业术语译成英文：

角、顶点、边；锐角、直角、钝角、平角、优角、周角；补角、余角、互补的、互余的；内角、外角；平行的、平行线、平行于、内错角、同位角、同旁内角、对顶角；三角形、等腰三角形、等边三角形、直角三角形、锐角三角形、钝角三角形；角平分线、中线、高、垂直平分线；内心、重心、垂心、外心；对称轴、反射对称；全等的、相似

的、全等三角形、相似三角形、对应边、对应角、成比例。

2. 汉译英：

(1) 由平面上的一点 O 出发的两条射线形成了一个角，O 称为这个角的顶点，而这两条射线称为边。

(2) 两条直线平行时，若它们与第三条直线都相交，则内错角相等，同位角也相等。

(3) 有两边相等的三角形称为等腰三角形；三边都相等的三角形称为等边三角形。

(4) 如果两个三角形的两组对应边相等且它们的夹角相等，则这两个三角形全等。

(5) 如果两个三角形的两组对应边成比例且它们的夹角相等，则这两个三角形相似。

(6) 等腰三角形是一个反射对称的图形，它底边上的高就是对称轴。

(7) 等边三角形的每一个内角都是 60°；内心和外心重合，每个角的平分线也是对边的中线。

(8) 一个三角形两边中点的连线平行于第三边，且等于第三边的一半。

3. 英译汉：

(1) Congruent figures have the same shape and size. They will remain congruent after *translation*(平移), *reflection*(反射) and *rotation*(旋转).

(2) If three parallel lines are cut by a transversal with equal intercepts, then the parallel lines cut by any other transversal are also with equal intercepts.

(3) If two triangles are similar then

(a) The corresponding angles of the 2 triangles are all equal;

(b) The corresponding sides of the 2 triangles are all proportional.

(4) If two similar figures have different size, we can enlarge the smaller one or reduce the larger one by suitable times to make their size equal.

(5) Since the sum of the 3 interior angles of a triangle is equal to 180°, we have another equivalent proposition that each exterior angle of a triangle is equal to the sum of the two interior angles which are not adjacent to the exterior angle.

(6) If a straight line XY intersects two straight lines AB and CD, we call XY the transversal of AB and CD. The two lines and the transversal may form 2 points of intersection and 8 angles. These angles can be classified into 3 groups: corresponding angles, alternate angles and interior angles on the same side.

§1.6 多边形与圆

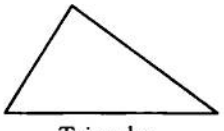
§1.6.1 多边形(Polygon)

(1) A ***polygon*** is a closed plane figure bounded by 3 or more line segments. The line segments are called the ***sides***, and the points where they intersect are called the ***vertexes***. Any line segment joining 2 non-adjacent vertexes of a polygon is called a ***diagonal***.

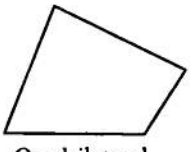
(1) **多边形**是由 3 条或 3 条以上线段围成的平面图形,其中的线段称为它的**边**,边与边的交点称为**顶点**。连接多边形的两个不相邻顶点的线段称为**对角线**。

(2) Triangles, ***quadrilateral***, ***pentagon***, ***hexagon***, and ***octagon*** are common polygons. A polygon with n sides is called ***n-sided polygon***, where n is an integer greater than 2. Therefore, an octagon can be also called 8-sided polygon.

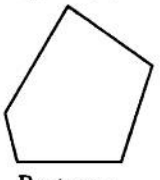
(2) 三角形、**四边形**、**五边形**、**六边形**和**八边形**是常见的多边形。具有 n 条边的多边形称为 n **边形**,这里的 n 是大于 2 的整数。因此在英文里,八边形也称为 8-sided polygon。



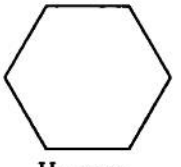
Triangles
(三角形)
Figure 1.6.1



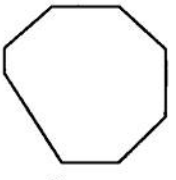
Quadrilateral
(四边形)
Figure 1.6.2



Pentagon
(五边形)
Figure 1.6.3

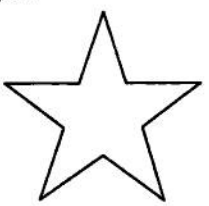


Hexagon
(六边形)
Figure 1.6.4



Octagon
(八边形)
Figure 1.6.5

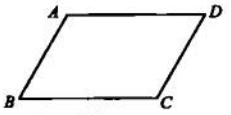
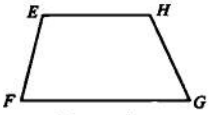
续表

(3) It is known that the sum of all ***interior angles*** of a triangle is 180°. Since an n-sided polygon with $n>3$ can be divided into $(n-2)$ triangles whose interiors do not intersect, the sum of all interior angles of an n-sided polygon is $(n-2)\cdot 180°$ and the sum of its all ***exterior angles*** is always 360°.	(3) 我们知道,一个三角形的**内角**之和是 180°。因为一个 n 边形(当 $n>3$ 时)可分划成$(n-2)$个其内部互不相交的三角形,所以 n 边形的内角之和为$(n-2)\cdot 180°$,而其**外角**之和总是 360°。
(4) A polygon is a ***convex polygon*** if each of its interior angles is less than 180°. Conversely, if there is at least one interior angle of a polygon is greater than 180°, the polygon is called a ***concave polygon***. All triangles are convex, and the figure for "five pointed star" is a concave polygon.  Five pointed star (五角星) **Figure 1.6.6**	(4) 一个多边形若其每一个内角都小于 180°,则为**凸多边形**。反之,一个多边形若至少有一个内角大于 180°,则称之为**凹多边形**。所有三角形都是凸的,而表示"五角星"的图是凹多边形。
(5) If all sides as well as all interior angles of a polygon are equal, then it is called a ***regular polygon***. For example, equilateral triangles and ***squares*** are all regular polygons, which are also called ***regular triangles*** and ***regular 4-sided polygons*** respectively	(5) 如果一个多边形的所有的边都相等,所有内角也相等,则称其为**正多边形**。例如,等边三角形和**正方形**都是正多边形,它们也分别称为**正三角形**和**正四边形**。

§1.6.2 四边形(Quadrilateral)

(1) A quadrilateral having one pair of parallel opposite sides is called a ***trapezium***. If a quadrilateral has 2 pairs of parallel opposite sides, then it is called a ***parallelogram***. In the figures, $ABCD$ is a parallelogram where $AB/\!/CD$, and $AD/\!/BC$; $EFGH$ is a trapezoid but it is not a parallelogram, since $EH/\!/FG$ but EF is not parallel to GH.	(1) 有一组对边平行的四边形称为**梯形**;若一个四边形有两组对边平行,则称之为**平行四边形**。在下面图形中,$ABCD$ 是平行四边形,其中 $AB/\!/CD$ 且 $AD/\!/BC$; 而 $EFGH$ 是梯形,但它不是平行四边形,因为 $EH/\!/FG$ 但 EF 不平行于 GH。

续表

 Parallelogram （平行四边形） **Figure 1.6.7**  Trapezium （梯形） **Figure 1.6.8**	
(2) A quadrilateral is a parallelogram if and only if one of following conditions holds: (a) The opposite sides are parallel; (b) The opposite sides are equal; (c) The opposite angles are equal; (d) The diagonals bisect each other.	(2) 一个四边形是平行四边形当且仅当下面条件之一成立： (a) 每组对边平行； (b) 每组对边相等； (c) 每组对角相等； (d) 两对角线互相平分。 **注**：注意这里中英文在表达上的区别，为了明确化，在(a)，(b)，(c)的中文表达中宜加上“每组”，(d)则加上“两”。
(3) A ***rhombus*** is a quadrilateral with 4 sides equal in length. It is easy to prove that a rhombus is a special parallelogram. Hence, rhombuses have not only all properties of parallelograms, but also other properties including (a) 4 sides equal in lengths, (b) diagonals are perpendicular to each other, and (c) diagonals bisect each interior angle.	(3) **菱形**是四边长度都相等的四边形。容易证明，菱形是特殊的平行四边形。因此，菱形不仅具有平行四边形的所有性质，而且还具有其他性质，包括(a)四边长度都相等；(b)两对角线互相垂直；(c)对角线平分每一个内角。
(4) A ***rectangle*** is a special parallelogram with 4 interior angle equal in size. Therefore a rectangle has not only all properties of parallelograms, but also other properties including (a) each interior angle is 90°, (b) diagonals are equal, and (c) diagonals bisect each other into 4 equal line segments.	(4) **矩形**是特殊的平行四边形，其四个内角都相等。因此，矩形不仅具有平行四边形的所有性质，而且还具有其他性质，包括(a)每个内角都是 90°；(b)对角线相等；(c)对角线互相平分成 4 条相等的线段。
(5) A ***square*** is a quadrilateral with 4 right angles and 4 equal sides. A square can be regarded as a rhombus with 4 right angles or a rectangle with 4 equal sides. Therefore squares have all the properties of rhombuses and rectangles.	(5) **正方形**是具有四个直角和四边相等的四边形。正方形可以看成具有四个直角的菱形或四边相等的矩形。因此，正方形具有菱形和矩形的所有性质。

§1.6.3 圆(Circle)

(1) If the ***center*** O and ***radius*** r of a circle are given, we can determine the circle. The ***circumference*** of the circle is equal to $2\pi r$ and its area is πr^2, where π is the ***circumference ratio***, i.e. the ratio of the circumference of a circle to its diameter, and its value is $\frac{22}{7}$ or 3.14 approximately.

(1) 如果一个圆的**圆心** O 与**半径** r 给定,就可以确定这个圆。该圆的**周长**等于 $2\pi r$,面积为 πr^2,其中 π 是**圆周率**,即圆的周长与直径的比,其值近似等于 $\frac{22}{7}$ 或 3.14。

注:circumference 既表示周长(在这里),又表示圆周;后者为图形,前者为量度图形的值,是一个数。

(2) The curve between two points A and B on a circumference is called an ***arc*** and denoted by arc AB or $\overset{\frown}{AB}$. The region enclosed by $\overset{\frown}{AB}$ and two ***radii*** OA and OB is called a ***sector***, which is denoted as sector OAB. It is should be noticed that the circumference is divided by A and B into 2 arcs. In order to avoid confuse, we may add one more letter (e. g. m) near the median of the arc which we will deal with and name the arc with 3 letters, i.e. $\overset{\frown}{AmB}$ (c. f. Figure 1.6.9).

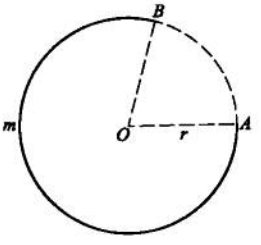


Figure 1.6.9

(2) 圆周上两点 A 与 B 之间的曲线段称为**弧**,记作弧 AB 或 $\overset{\frown}{AB}$。由 $\overset{\frown}{AB}$ 与两半径 OA 与 OB 围成的区域称为**扇形**,记作扇形 OAB。应该注意的是,圆周被 A 与 B 分成了两段弧。为了避免混淆,可以在待处理的那一段弧的中点附近加上一个字母(例如 m),并用三个字母,即 $\overset{\frown}{AmB}$ 来给该弧命名(见图 1.6.9)。

注:radii (半径)为单词 radius 的复数形式。

(3) Figure 1.6.10 below is a circle with center O and radius r, where points A and B are on the circumference. The angle ($\angle AOB$) at the center O corresponding to $\overset{\frown}{AB}$ is called the ***angle at the center***. If the angle at the center is θ, then the arc length of $\overset{\frown}{AB}$ is equal to $\frac{\theta}{360^\circ}\times 2\pi r$ and the area of sector OAB is equal to $\frac{\theta}{360^\circ}\times \pi r^2$.

(3) 下面的图 1.6.10 是以 O 为圆心、r 为半径的圆,A 与 B 两点在圆周上。以圆心 O 为顶点对应于 $\overset{\frown}{AB}$ 的角($\angle AOB$)称为**圆心角**。如果该圆心角的度数为 θ,则 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长等于 $\frac{\theta}{360^\circ}\times 2\pi r$,而扇形 OAB 的面积等于 $\frac{\theta}{360^\circ}\times \pi r^2$。

续表

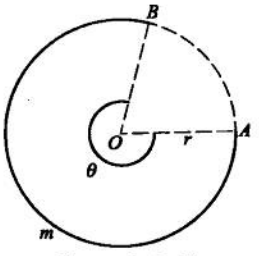


Figure 1.6.10

注：the angle at the center 既表示圆心角(图形)，又表示圆心角的度数。译成中文时，若有必要需区分表示。又，也可用 central angle 表示圆心角。

(4) The line segment joining two points A and B on a circumference is called a ***chord*** and denoted by chord AB. $\overset{\frown}{AB}$ is said to be the arc subtended by chord AB. If four points A, B, C and D on the same circumference, then $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ if and only if $AB=CD$. Since a diameter is a chord passing through the center of the circle, it divides the circumference into two equal arcs, each of which is called a ***semi circle***.

(4) 连接圆周上两点 A 与 B 的线段称为**弦**，记作弦 AB。$\overset{\frown}{AB}$被称为是弦 AB 对向的**弧**。A，B，C 和 D 四点在同一圆周上，则$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$当且仅当弦 $AB=CD$。因为直径是经过圆心的弦，它把圆周分成两条相等的弧，其中每一条都称为**半圆**。

(5) Figure 1.6.11 below gives a circle with center O and radius r where A, B and C are on the circumference. Then the angle ($\angle ACB$) at point C with sides CA and CB is called an ***angle of circumference***. It is easy to prove that $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$ or $\theta=2\phi$, i.e. an angle at the circumference is half the angle at center corresponding to the same arc. If arc ACB is a semi circle, i.e. AB is a diameter, then $\angle ACB=90°$ since $\angle AOB=180°$ (See Figure. 1.6.12).

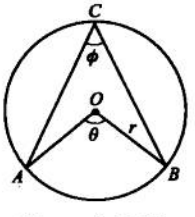


Figure 1.6.11

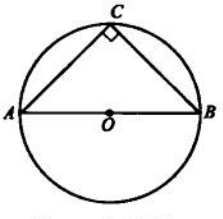


Figure 1.6.12

(5) 下面的图 1.6.11 给出了以 O 为圆心、半径为 r 的圆，A，B 和 C 在圆周上。那么，以 C 为顶点，以 CA 及 CB 为其两边的角($\angle ACB$)称为**圆周角**。容易证明，$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$，或 $\theta=2\phi$，即对应于同一条弧的圆周角等于圆心角的一半。如果弧 ACB 是半圆，即 AB 是直径，则由$\angle AOB=180°$知$\angle ACB=90°$(见图 1.6.12)。

注：在英文中也可用 circumferential angle 表示圆周角。

续表

(6) If all the vertex points of a polygon are on the circumference of a circle, then the circle is called the ***circumcircle*** of the polygon. Any triangle always has its circumcircle, whose center is just the ***circumcenter*** of the triangle. A quadrilateral has its circumcircle if and only if a pair of its opposite interior angles are supplementary.	(6) 如果一个多边形的所有顶点都在一个圆周上，则这个圆称为该多边形的**外接圆**。每个三角形都有外接圆，其圆心刚好是该三角形的**外心**。一个四边形有外接圆当且仅当它有一组对角是互补的。

练 习 1.6

1. 把下面专业术语译成英文：

多边形、四边形、五边形、六边形、八边形、对角线；内角、外角、凸多边形、凹多边形、正多边形、正三角形、正四边形；平行四边形、梯形、菱形、矩形；圆、圆心、半径、直径、圆周、弦、弧、半圆、扇形；圆心角、圆周角、外接圆、外心。

2. 汉译英：

(1) 三角形、四边形、五边形、六边形、八边形都是特殊的多边形。

(2) 正 n 边形有 $n-2$ 条对角线，它们把该正多边形分成 $n-2$ 个其内部不相交的三角形。

(3) 一组对边互相平行、其余两边不平行的四边形称为梯形。这样，平行四边形就不是梯形。

(4) 如果平行四边形的一个角是直角，则它是矩形；如果平行四边形的两条邻边相等，则它是菱形。

(5) 圆由它的半径和圆心所确定，它有无数条直径，每条都是圆的对称轴。

(6) 如果圆 O 上的一个圆心角和一个圆周角所对的弧相同，则前者的大小是后者的 2 倍。

(7) 一个扇形的面积由它的圆心角确定，圆心角越大，则扇形的面积就越大。

(8) 每个三角形都有外接圆，但是只有满足一定条件的四边形才有外接圆。

3. 英译汉(必要时借助于词典)：

(1) Is a polygon *regular* one if all its sides are equal? If the answer is positive, please prove it; if the answer is negative, please give a *counterexample* (反例).

(2) A quadrilateral is a parallelogram if its diagonals bisect each other or

the opposite angles are equal.

(3) Two angles at the circumference are equal if their corresponding arcs are equal.

(4) Three round gold coins have the same thickness and their radii are 2cm, 3cm and 4cm respectively. The three gold coins are melted and recast into one new gold coin. If the new coin is just as thick as each of the original three gold coins, find the radius of the new gold coin.

(5) Given a circle of radius 2 cm, center O. A point P moves inside the circle so that its shortest distance from the circumference of the circle is always equal to its distance from the center of the circle. Sketch and describe the *locus* (轨迹) of the point P.

(6) *Euclid* (欧几里得) did a comprehensive study on geometry in his 13-volume work, *Elements* (几何原本). Firstly, he established a set of *axioms* (公理) which were facts. These were well-accepted facts so that proofs were not needed. Secondly, he stated the meanings of some terms and figures precisely. The statements were called definitions. From axioms and definitions, reliable conclusions called theorems were deduced. Then the theorems obtained were used to deduce more theorems. Thus a deductive reasoning system was established.

§1.7 平面上的坐标几何

§1.7.1 平面上的坐标系 (Coordinate Systems on the Plane)

(1) In a ***rectangular coordinate plane***, there are 2 ***axes*** — the horizontal axis (named as ***x-axis***) and the vertical axis (named as ***y-axis***). Each of them is a ***number line*** (***axis***). The 2 axes are perpendicular to each other and intersect at the origin which is labeled O. They form up a ***rectangular coordinate system*** xOy on the plane.	(1) 在**直角坐标平面**上有两条**轴**，即一条水平轴(称为 x **轴**)和一条竖直轴(称为 y **轴**)。它们都是**数直线**(**数轴**)。这两条轴互相垂直且相交于一点 O。它们在该平面上形成了一个**直角坐标系** xOy。 **注**：coordinate axis 坐标轴。
(2) By using the rectangular coordinate system xOy, each point P on the plane corresponds one and only one pair of ***ordered numbers*** (a, b), where a is the ***x-coordinate*** and b	(2) 利用直角坐标系 xOy，平面上的每一点对应着一对(且只有一对)**有序数** (a, b)，其中 a 是 P 的 x **坐标**，b 是 y **坐标**，(a, b)称为 P 的**坐标**。另一方面，如

续表

the ***y*-coordinate** of P and (a, b) is called the ***coordinates*** of P. On the other hand, if a pair of ordered numbers (a, b) is given, we can locate one and only one point P on the plane such that (a, b) is its coordinates.	果给定一对有序数(a, b)，我们可以在该平面上找到一个(且只有一个)点 P 使得(a, b)是它的坐标。 **注**：abscissa n. 横坐标； ordinate n. 纵坐标； the origin 坐标原点。
(3) In the rectangular coordinate system xOy, the coordinate axes, i.e. x-axis and y-axis, divide the coordinate plane into four equal parts, each part is called a ***quadrant***. Points (x, y) with $x>0$ and $y>0$ are laid on the first quadrant, those with $x<0$ and $y>0$ are on the second quadrant, those with $x<0$ and $y<0$ are on the third quadrant, those with $x>0$ and $y<0$ are on the fourth quadrant. Points (x, y) with $x=0$ are laid on y-axis and those with $y=0$ are on x-axis.	(3) 在直角坐标系 xOy 中，坐标轴，即 x 轴和 y 轴把坐标平面分成 4 个相等的部分，每一个部分称为一个**象限**。点(x, y)当 $x>0$ 且 $y>0$ 时位于第一象限，当 $x<0$ 且 $y>0$ 时位于第二象限，当 $x<0$ 且 $y<0$ 时位于第三象限，当 $x>0$ 且 $y<0$ 时位于第四象限。点(x, y)当 $x=0$时位于 y 轴，当 $y=0$ 时位于 x 轴。
(4) A ***polar coordinate system*** on a plane consists of a fixed point called the ***pole*** O and a fixed horizontal ray OX, which is starting from the pole and is called the ***polar axis***. Then each point Q $(Q\neq O)$ on the plane corresponds to one pair of ordered numbers (r, θ), which is called the polar coordinates of Q, where r is the distance of Q from the pole O, and θ is the angle measured from OX to OQ in an ***anticlockwise direction***, called the ***argument***. In the polar coordinate plane, the pole O is a special point, its polar coordinates is supposed to be $(0, 0)$.	(4) 平面上的**极坐标系**由一个固定的称为**极点**的点 O 和一条固定的水平射线 OX 构成，该射线从极点出发，称为**极轴**。于是，平面上的每一点 Q $(Q\neq O)$都对应着一对有序数(r, θ)，它们称为 Q 的极坐标，其中 r 是 Q 到极点 O 的距离，θ 是 OX 沿**反时针方向**旋转到 OQ 的角度，称为**辐角**。在极坐标平面上，O 是一个特殊的点，其坐标设定为$(0, 0)$。
(5) Similar to the rectangular coordinate system, the polar coordinate system establishes the one to one correspondences between the points on the plane and the ***ordered pairs*** of real numbers. By the rectangular coordinate systems, R. Descartes successfully created the new Geometry, and the polar coordinate system is frequently used in aviation and sailing, to locate the directions and distances of different objects.	(5) 类似于直角坐标系，极坐标系建立了平面上的点与实数的**有序对**之间的一一对应关系。利用直角坐标系，R. 笛卡儿成功地创立了新的几何学；而极坐标系常用于航空、航海，以测量各种目标的方向与距离。

§1.7.2 xOy 平面上的直线 (Straight Lines on xOy-Plane)

(1) Suppose l is a straight line on xOy-plane which is not a vertical line. For any two points $A(x_1, y_1)$and $B(x_2, y_2)$on l, it is easy to locate the third point $C(x_2, y_1)$. Then the ratio $\frac{BC}{AC}$ is defined as the ***slope*** of l and denoted by m_l, i.e.

$$m_l=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

where $x_2-x_1\neq 0$ since l is not vertical. The slope of any vertical line is undefined.

In the practical problems, BC and AC are called the ***vertical rise*** and ***horizontal run*** respectively when AB is considered as a road on a hill side. The concept slope or gradient is used to describe the ***steepness*** of the road.

(1) 假设 l 是 xOy 平面上的一条的非竖直的直线(注:即不与 x 轴垂直)。对 l 上任意两点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$,不难找出第三点 $C(x_2, y_1)$。这时,把比值$\frac{BC}{AC}$定义为 l 的**斜率**并记作 m_l,即

$$m_l=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

其中 $x_2-x_1\neq 0$ 是因为 l 不是竖直的。竖直线的斜率没定义。

在实际问题中,当 AB 看成是山坡的一条路时,BC 和 AC 分别称为**竖直升高**和**水平距离**。斜率或梯度的概念被用来描述这条路的**斜度**。

(2) If the slopes of two straight lines l_1 and l_2 on xOy-plane are given, then it is easy to determine whether they are parallel, perpendicular or neither. In fact, if the slopes of l_1 and l_2 are m_1 and m_2 respectively, then $l_1 /\!/ l_2$ if and only if $m_1=m_2$, and $l_1\perp l_2$ if and only if $m_1\times m_2=-1$. Of course, if one of l_1 and l_2 is a vertical line, then the problem can be solved directly without considering their slopes.

(2) 如果给定 xOy 平面上两条直线 l_1 和 l_2 的斜率,那么很容易确定它们是否平行、垂直或都不是。事实上,如果 l_1 与 l_2 的斜率分别为 m_1 和 m_2,那么 $l_1 /\!/ l_2$ 当且仅当 $m_1=m_2$,而 $l_1\perp l_2$ 当且仅当 $m_1\times m_2=-1$。显然,如果 l_1 与 l_2 中有一条是竖直线,那么这个问题无需考虑它们的斜率就可以直接解决。

(3) The equation $Ax+By+C=0$ is a linear equation with two variables (unknowns), where A, B and C are constants with $A^2+B^2\neq 0$. In a coordinate plane, we often identify a point P with its coordinates (x, y). Then each straight lines l corresponds to a linear equation in the following sense: every point (x, y)on line l is a solution of the equation and conversely, every solution (x, y) of the equation is on the line.

(3) 方程 $Ax+By+C=0$ 是一个二元线性方程,其中 A, B 和 C 是常数且 $A^2+B^2\neq 0$。在坐标平面中,我们常把一个点 P 与它的坐标(x,y)等同起来。于是,每一条直线 l 对应着一个线性方程,其含义是:l 上的每一点(x, y)是该方程的一个解,反之,该方程的每个解是该直线上的一个点。

(4) The expression $Ax+By+C=0$ is the ***general form*** of a linear equation. This means that the same equation may have other forms and they all express the same straight line l. For example, if $B\neq 0$, the general form can be convert into the ***slope-intercept form***:

(4) 表达式 $Ax+By+C=0$ 是线性方程的**一般式**。这意味着同一个方程还可能有其他形式,它们都表示同一条直线 l。例如,若 $B\neq 0$,一般式可以转化为**斜截式**:

续表

$y=mx+k$ with $m=-\frac{A}{B}$ and $k=-\frac{C}{B}$, where m and k are the slope and ***y-intercept*** of line l respectively. The special cases of the equation with slope-intercept form are $y=k$ as $A=0$ and $y=mx$ as $C=0$. For the exceptional case $B=0$, we have the form $x=h$ with $h=-\frac{C}{A}$.	$y=mx+k$，其中 $m=-\frac{A}{B}$ 而 $k=-\frac{C}{B}$，这里 m 和 k 分别是直线 l 的斜率与 y **截距**。斜截式方程的特殊情形是，当 $A=0$ 时变成 $y=k$，而当 $C=0$ 时变成 $y=mx$。对于 $B=0$ 的例外情形，方程的形式为 $x=h$，其中 $h=-\frac{C}{A}$。
(5) The following are some other forms for linear equations: The ***point slope form***: $y=y_0+m(x-x_0)$, where $(x_0, y_0)$is a given point on the line l and m is the slope of l; The ***two-point form***: $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, where (x_1, y_1), $(x_2, y_2)$are two given points on line l; The ***intercept form***: $\frac{x}{h}+\frac{y}{k}=1$, where $h=-\frac{C}{A}$and $k=-\frac{C}{B}$with $A\neq0$, $B\neq0$, h and k are the x-intercept and y-intercept of the line l respectively.	(5) 下面是线性方程的其他形式： **点斜式**：$y=y_0+m(x-x_0)$，其中 (x_0, y_0)是直线 l 上的一点，m 是 l 的斜率； **两点式**：$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，其中$(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$是直线 l 上的两点。 **截距式**：$\frac{x}{h}+\frac{y}{k}=1$，其中 $h=-\frac{C}{A}$，$k=-\frac{C}{B}$，$A\neq0$，$B\neq0$，这里 h 和 k 分别是直线 l 的 x 截距和 y 截距。
(6) The solution of a system of equations such as $$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$$ has a clear geometric interpretation on the coordinate plane xOy. Suppose $a_1x+b_1y+c_1=0$ and $a_2x+b_2y+c_2=0$ are the equations of straight lines l_1 and l_2 respectively. Then $(x, y)$is a solution of the system of equations if and only if $(x, y)$is a common point of l_1 and l_2. If $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, then the system has one solution since l_1 and l_2 are not parallel and have a unique point of intersection; if $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, then the system has no solution since $l_1 // l_2$ and $l_1\neq l_2$, which means l_1 and l_2 have no point of intersection; if $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, then the system has infinitely many solution since $l_1=l_2$.	(6) 形如 $$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$$ 的方程组的解在坐标平面 xOy 上具有明显的几何意义。假定 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 和 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 分别是直线 l_1 和 l_2 的方程，那么(x, y)是方程组的解当且仅当 (x, y)是 l_1 与 l_2 的公共点。如果 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$，则方程组有一个解，这是因为 l_1 与 l_2 不平行，且有唯一的交点；如果 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$，则方程组无解，这是因为 $l_1 // l_2$ 且 $l_1\neq l_2$，即 l_1 与 l_2 没交点；如果 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，则方程组有无穷多个解，这是因为 $l_1=l_2$。

§1.7.3 xOy 平面上的圆 (Circles on xOy-Plane)

(1) Consider two points $A(x_1, y_1)$and $B(x_2, y_2)$on the rectangular coordinate plane as shown in the figure 1.7.1. Draw a vertical line l_1 passing through B and a horizontal line l_2 passing through A. Suppose that l_1 and l_2 intersect at the point C, which has coordinates (x_2, y_1). Thus, a right angled triangle ABC with AB as the hypotenuse is formed. Since $AC= x_2-x_1$ and $BC=y_2-y_1$, we have by Pythagoras theorem

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

This is called the ***distance formula*** between the two points.

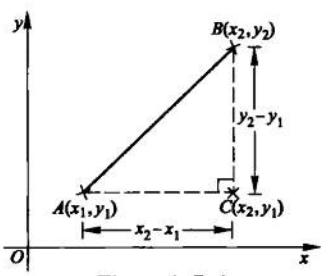


Figure 1.7.1

(1) 考虑直角坐标系中的两点 $A(x_1, y_1)$和 $B(x_2, y_2)$,如图 1.7.1 所示。过 B 画一条竖直线 l_1,过 A 画一条水平线 l_2。假定 l_1 与 l_2 交于 C,其坐标是 (x_2, y_1)。于是得到一个以 AB 为斜边的直角三角形 ABC。因为 $AC= x_2-x_1$ 且 $BC=y_2-y_1$,由勾股定理得

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}。$$

此式称为两点间的**距离公式**。

(2) A ***locus*** is a figure traced by the points which satisfy some special condition(s). A circle can be regarded as the locus of a point moving in a plane at a constant distance from a fixed point. Let $P(x, y)$be the moving point in the coordinate plane at a constant distance r from the origin $O(0,0)$. Then by the distance formula,

$$OP=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2},$$

i.e. $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Thus we obtain the equation of the circle with center at O and radius r as follows:

$$x^2+y^2=r^2.$$

(2) **轨迹**是满足一定条件的点移动形成的图形。圆可以看成是平面上与定点保持固定距离的动点所产生的轨迹。设 $P(x, y)$是坐标平面上移动的点,它与原点 $O(0,0)$保持固定距离 r。于是,由距离公式得

$$OP=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2},$$

即 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。这样,就得到了以原点为中心、r 为半径的圆的方程:

$$x^2+y^2=r^2。$$

(3) The equation of a circle with center at a general point $P(x_0, y_0)$and radius r is:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \quad \text{(i)}$$

This equation can be rewritten as

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \quad \text{(ii)}$$

(3) 以任意点 $P(x_0, y_0)$为中心、r 为半径的圆的方程是

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \quad \text{(i)}$$

这个方程可以改写成

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \quad \text{(ii)}$$

续表

where $D=-2x_0$, $E=-2y_0$ and $F=x_0^2+y_0^2-r^2$. The expression (ii) is known as the ***general form of the equation of a circle***. Indeed, for a given equation with form (ii) where $\left(-\frac{D}{2}\right)^2+\left(-\frac{E}{2}\right)^2-F>0$, it is not difficult to convert it into form (i)if we set, $x_0=-\frac{D}{2}$, $y_0=-\frac{E}{2}$ and $r=\sqrt{\left(-\frac{D}{2}\right)^2+\left(-\frac{E}{2}\right)^2-F}$.	其中 $D=-2x_0$, $E=-2y_0$ 且 $F=x_0^2+y_0^2-r^2$。 式(ii)称为**圆的方程的一般式**。事实上,若给定形如式(ii)的方程,其中 $\left(-\frac{D}{2}\right)^2+\left(-\frac{E}{2}\right)^2-F>0$,则不难把它转化为式(i),只要令 $x_0=-\frac{D}{2}$, $y_0=-\frac{E}{2}$, $r=\sqrt{\left(-\frac{D}{2}\right)^2+\left(-\frac{E}{2}\right)^2-F}$ 即可。
(4) A circle is a special ellipse. ***Ellipses***, ***parabolas*** and ***hyperbolas*** are called ***conic sections***. In the coordinate plane, these curves can be expressed as quadric equations in the form: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, where $A^2+B^2+C^2\neq 0$. By using the ***algebraic method***, ***Cartesian geometry*** has given a successful classification for conic sections and made a complete study on their properties.	(4) 圆是特殊的椭圆。**椭圆、抛物线和双曲线都是圆锥曲线**。在坐标平面上,这些曲线都可以表示成如下形式的二次方程: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, 其中 $A^2+B^2+C^2\neq 0$。利用**代数方法**,**卡氏几何**成功地给出了圆锥曲线的分类并对它们的性质作了完整的研究。
(5) A straight line l and a circle C on the same plane may intersect at two points, one point or no point. When we set up a rectangular coordinate system xOy on the plane, we are given the equation of line l and the equation of circle C. Suppose they are $y=mx+k$ and $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ respectively. Then we can find (1) the number of point(s) of intersection, and (2)the coordinates of the point(s)of intersection by solving the ***simultaneous equations***: $\begin{cases}y=mx+k,\\x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.\end{cases}$	(5) 平面上的一条直线 l 和一个圆 C 可能交于两点、一点或不相交。当我们在该平面上建立坐标系 xOy 时,就得到了直线 l 和圆 C 的方程。假定它们分别是 $y=mx+k$ 和 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$。这时,通过解如下**联立方程**,我们就可能求出(1)交点的数目和(2)交点的坐标: $\begin{cases}y=mx+k,\\x^2+y^2+Dx+Ey+F=0。\end{cases}$

练 习 1.7

1. 把下列专业术语译成英文:

坐标平面、轴、水平轴、x 轴、竖直轴、y 轴、数直线、数轴;互相垂直、相交、直角坐标系、有序数、有序对、x 坐标、y 坐标、象限;极坐标系、极点、极轴;竖直升高、水平距离、坡度、斜率、梯度;一般式、斜截式、点斜式、两点式、截距式、x 截距、y 截距;轨迹、圆的方程、椭圆、抛物线、双曲线、圆锥曲线、代数方法、卡氏几何、联立方程。

2. 汉译英：

(1) 如果在一个平面上建立了一个坐标系，如直角坐标系或极坐标系，该平面就称为坐标平面。

(2) 平面直角坐标系通常由一条水平的数轴(叫做 x 轴)和一条与它垂直的数轴(叫做 y 轴)组成。

(3) 在平面直角坐标系中，一条直线可以用二元线性方程 $Ax+By+C=0$ 来表示，其中 A，B 和 C 是常数且 $A^2+B^2\neq 0$。

(4) 平面直线若不是竖直的，就有斜率(或梯度)。一条直线如果已知斜率和该直线上的一个点，就可以写出它的方程。

(5) 圆锥曲线包括椭圆、抛物线和双曲线，圆是特殊的椭圆。它们都可以用二次方程来表示。

(6) 如果给出圆的一般方程，我们就可以求出圆心的坐标和半径；反之，如果已知圆心的坐标和半径，就可以求出圆的方程。

(7) 平面上的两条不同的直线可能相交，也可能不相交，这对应于它们的方程组成的方程组有唯一解或者无解。

(8) 极坐标系在航空与航海方面特别有用。它把平面上的点 P 与它的极坐标，即一个有序对(r,θ)建立对应，其中 r 是 P 到极点 O 的距离，θ 是从极轴转到射线 OP 的夹角(按反时针计算)。

3. 英译汉：

(1) Suppose $a_1x+b_1y+c_1=0$ and $a_2x+b_2y+c_2=0$ are the equations of straight lines l_1 and l_2 respectively. Then (x, y) is a common point of l_1 and l_2 if and only if (x, y) is a solution of the system of these equations.

(2) A straight line l and a parabola U on the same plane may intersect at two points, one point or no point. Suppose they are $y=mx+k$ and $x^2+Dx+Ey+F=0$ respectively. Then we can find (i) the number of point(s) of intersection, and (ii) the coordinates of the point(s) of intersection by solving the simultaneous equations.

(3) A locus is a figure traced by the points which satisfy some special condition(s). An ellipse can be considered as the locus of a moving point P in a plane such that the sum of PA and PB is constant where PA and PB are the distances from two fixed points A and B respectively.

(4) Given two points $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$ on the rectangular coordinate plane with $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$. Let C be the point with coordinates (x_1, y_2). After linking AB, AC and BC, we obtain a right angled triangle ABC with AB

as the hypotenuse.

(5) We are now ready to graph quadratic equations of the form $y=ax^2+bx+c$, where a, b and c are real numbers and $a\neq 0$. The general approach is one of changing equations of the form $y=ax^2+bx+c$ to the form $y=a(x-h)^2+k$. The process of completing the square serves as the basis for making the change in the form of the equations.

(6) It is known that any equation of the form $Ax^2+By^2=C$, where $A=B$ and A, B and C are nonzero constants having the same sigh, is a circle with the center at the origin. The general equation $Ax^2+By^2=C$ can be used to describe other geometric figures if the restrictions on A and B are changed. For example, if A, B and C are of the same sigh but $A\neq B$, then the graph of the equation $Ax^2+By^2=C$ is an ellipse.

§1.8 常见立体图形与空间坐标几何

§1.8.1 常见立体图形(Some Common Solid Figures)

(1) Solids can be classified into 2 types: ***polyhedron*** and ***non-polyhedron***. A polyhedron is a solid figure that is enclosed by polygonal planes. ***Cubes*** and ***cuboids*** are common examples of polyhedra and spheres and cylinders are examples of non-polyhedra.

(1) 立体可以分成两类:**多面体**与**非多面体**。多面体是由几个平面多边形包围的立体图形。**立方体**和**长方体**是常见的多面体,而球与圆柱是非多面体的例子。

注:polyhedron 的复数有两种形式:通常写为polyhedra,有时也用 polyhedrons。

(2) The surfaces of a polyhedron are formed by polygons, which are called the ***faces*** of the polyhedron. When 2 faces meet, the line segment where they meet is called the ***edge***. When 2 edges meet, the point where they meet is called the ***vertex***. (See figure 1.8.1.)

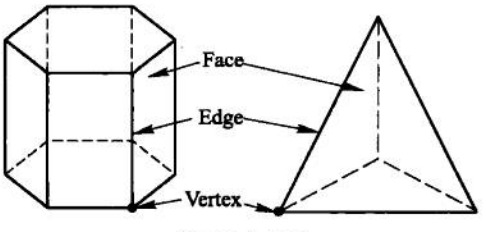


Figure 1.8.1

(2) 多面体的表面由多边形组成,它们称为该多面体的**面**。当两个面相交时,交汇处形成的线段称为**棱**。当两条棱相交时,交汇处形成的点称为**顶点**(见图 1.8.1)。

续表

(3) A solid is said to be ***convex*** if the line segment joining any two points in the solid is always contained in the solid. The famous Euler theorem indicates that the number E of edges, the number V of vertexes and the number F of faces of a convex polyhedron satisfy the following Euler formula:

$$F+V=E+2.$$

Remark It is proven that the Euler formula is also valid for more general polyhedra called the ***simple polyhedra***, which contain some concave polyhedra such as concave prisms and concave pyramids besides all convex polyhedra.

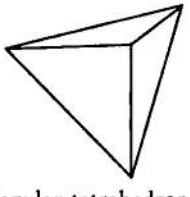
(3) 一个立体称为**凸的**，如果连接其中任意两点的线段都包含在该立体之中。著名的欧拉定理指出：每一个凸多面体的棱数 E、顶点数 V 和面数 F 满足如下欧拉公式：

$$F+V=E+2。$$

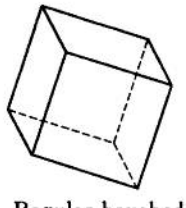
附注 已经证明，欧拉公式还适用于称为**简单多面体**的更一般的多面体，其中除了包含所有凸多面体，还包含了诸如凹棱柱和凹棱锥之类的某些凹多面体。

(4) If all the faces of a polyhedron are regular polygons with the same shape and size, and each vertex is the intersection of the same number of edges, then the polyhedron is called a ***regular polyhedron***. There are exactly 5 regular convex polyhedra. They are: ***regular tetrahedron***, ***regular hexahedron***, ***regular octahedron***, ***regular dodecahedron***, ***regular icosahedron***.

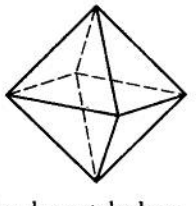
(4) 如果一个多面体的所有的面都是形状与大小一样的正多边形，而且每个顶点都由同样条数的棱交汇形成，则该多面体称为**正多面体**。只有 5 种凸的正多面体。它们是**正四面体**、**正六面体**、**正八面体**、**正十二面体**和**正二十面体**。



Regular tetrahedron
(正四面体)
Figure 1.8.2



Regular hexahedron
(正六面体)
Figure 1.8.3

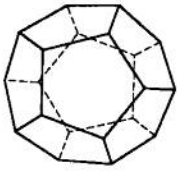


Regular octahedron
(正八面体)
Figure 1.8.4



Regular dodecahedron
(正十二面体)
Figure 1.8.5

续表

 Regular icosahedron (正二十面体) **Figure 1.8.6**	
(5) If a solid is given, we can get different ***cross-sections*** by cutting the solid in many differential directions. If we cut a ***prism*** into many slices in the direction that is parallel to the base faces, we can obtain many cross-sections of the same shape and size. These cross-sections are called ***uniform cross-sections***.	(5) 若给定一个多面体,在它上面沿着不同的方向截切,可以得出不同的**横截面**来。如果把一个**棱柱**沿着平行于底面的方向截切,可以得到许多具有同样形状和大小的横截面。它们称为**均匀横截面**。
(6) The uniform cross-sections of a prism are polygons, each of them is identical to the bases of the prism. A ***cylinder*** is also a solid with uniform cross-sections, each of them is a disc and identical to the base of the cylinder.	(6) 棱柱的所有均匀横截面都是多边形,其中每一个都和该棱柱的底面相同。**圆柱体**也是具有均匀横截面的立体,它的所有横截面都是圆盘且与该圆柱体的底面相同。

§1.8.2 一些立体图形的表面积和体积(Surface Area and Volume of Some Solid Figures)

(1) A regular hexahedron is also called ***cube***. A cube has 6 faces, 12 edges and 8 vertexes. The total surface area of a cube is $6\times$ (length of edge)^2, and the volume of a cube is equal to (length of edge)^3. The volume of a cube with unit length of edge is a standard unit to measure the volume of other solids, for example, $1cm^3$, $1m^3$, $1km^3$ and so on.	(1) 正六面体也称为**正方体**。一个正方体有 6 个面、12 条棱和 8 个顶点。它的总表面积等于 $6\times$(棱长)^2,体积等于(棱长)^3。具有单位棱长的正方体的体积是测量别的立体的标准单位,例如 $1cm^3$, $1m^3$, $1km^3$ 等等。
(2) A ***cuboid*** is a prism whose 6 faces are all rectangles. Its numbers of faces, edges and vertexes are the same as a cube. The lengths of edges of a cuboid may not be equal, but they can be divided into 3 groups such that the lengths of edges in the same group are equal. If the sides in group 1, group 2 and group 3 are called ***lengths***, ***breadths*** and ***heights*** respectively, then the volume of a cube is equal to length $\times$ breadth $\times$ height. The total surface area of a cuboid is the sum of the areas of its six faces.	(2) **长方体**是 6 个面均为矩形的棱柱。它的棱数、面数和顶点数都和正方体一样。长方体各条棱长可以不一样,但可以把它们分成 3 组,使得在同一组的棱长相同。如果在第一组、第二组和第三组的棱长分别称为**长**、**宽**和**高**,则该长方体的体积等于长$\times$宽$\times$高。长方体的总表面积等于其六个面的面积之和。

续表

(3) The surface of a prism is consisted of two parallel polygons called bases and a ***curved surface***. The ***perpendicular distance*** between the two bases is called the ***height*** of the prism. The volume of a prism $=S\times h$, where S is the area of one base and h is the height. The total area of surface of a prism is the sum of the areas of the curved surface and the two bases.

(3) 棱柱的表面由两个称为底面的平行多边形和一个曲面组成。两个底面之间的垂直距离称为该棱柱的高。棱柱的体积$=S\times h$，其中 S 是底面积，h 是高。棱柱的总表面积是曲面与两个底面的面积之和。

注：表示曲面的英语词组 curved surface 有时(如由上下文可知时)可简写成 surface。

(4) A cylinder is enclosed by two parallel and equal discs called bases and a curved surface. Usually, a cylinder means a ***right cylinder***, i.e. the distance between the centers of two bases is just the height (the perpendicular distance between the two bases). Then the curved surface can be considered as a rolled up rectangle $ABCD$ with a pair of opposite sides AB and CD stickled (c.f. Figure. 1.8.7). The method to find the volume of a cylinder is similar to that for a prism. And the total surface area A of a cylinder can be formulated as

$$A=2\pi r^2+2\pi rh,$$

where r is the radius of the base and h is the height.

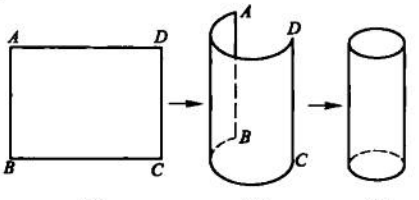


Figure 1.8.7

(4) 圆柱是由两个称为底面的平行且相等的圆盘和一个曲面围成的。圆柱通常指的是**正圆柱**，即两底中心的距离刚好等于它的高(两底面之间的垂直距离)。于是，其曲面就可以看成由一个矩形 $ABCD$ 卷成，即把矩形的一组对边 AB 和 CD 黏起来(参见图 1.8.7)。求圆柱体积的方法类似于棱柱。圆柱的总表面积 A 可以用公式表示为：

$$A=2\pi r^2+2\pi rh,$$

其中 r 底面圆盘的半径，h 是高。

(5) A ***pyramid*** has a polygonal base and some triangular faces that meet at a common vertex. Each triangular face is called a ***lateral face***. The common edge of 2 adjacent lateral faces is called a ***slant edge***. The perpendicular distance between the vertex and the base is the height of a pyramid. If the lengths of all slant edges are equal, then the pyramid is a ***right pyramid***. If the base of a right pyramid is a regular polygon, then the pyramid is called a ***regular pyramid***.

(5) **棱锥**由一个多边形的底面和交汇于一个公共顶点的若干个三角形的面围成。每个三角形的面称为**侧面**。两个相邻的侧面的公共棱称为**斜棱**。顶点到底面的垂直距离是该棱锥的高。如果每条斜棱相等，则该棱锥是**直棱锥**。如果底面是正多边形，则该棱锥称为**正棱锥**。

续表

(6) Suppose D is a disc on a plane with its boundary C (the circumference). Fix a point V outside the plane. For a point A on C, it is clear, the line segment VA joining V and A is outside the plane. When A moves along the circumference over, we obtain a curved surface S. Then the solid enclosed by D and S is called a ***circular cone***, D and V are called its ***base*** and ***vertex*** respectively, each OA is a ***slant height***. The perpendicular distance between the vertex and the base is the height. If all slant heights of a circular cone are equal, then it is a ***right circle cone***.

(6) 设 D 是平面上的一个圆盘，其边界为 C(圆周)。在平面外取一个定点 V。对 C 上的某一点 A，显然，连接 V 与 A 的线段 VA 在该平面之外。当 A 沿着圆周移动时，就得到一个曲面 S。于是，由 D 和 S 围成的立体称为**圆锥**，D 和 V 分别称为它的**底面**和**顶点**，每条 OA 称为**斜高**。顶点到底面的垂直距离是该圆锥的高。如果圆锥的每条斜高都相等，则它是一个**正圆锥**。

注：each OA is a slant height，这个句子的动词是 is，但根据上下文知，这句仍然在叙述定义，所以应译成“每条 OA 称为斜高”。

(7) The volume of a pyramid can be calculated by the formula:

$$\text{Volume}=\frac{1}{3}Ah,$$

where A and h are the base area and the height respectively. This formula is also available to a circle cone and can be refined as

$$\text{Volume}=\frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

where r is the radius of the base (disc).

(7) 棱锥的体积可由如下公式计算：

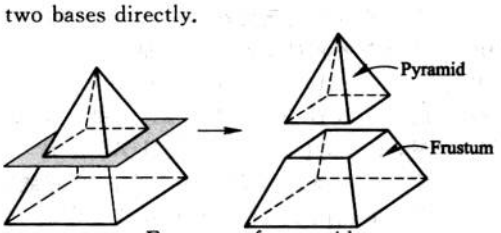
$$\text{体积}=\frac{1}{3}Ah,$$

其中 A 和 h 分别是底面面积和高。这个公式也适用于圆锥且可更具体地写成：

$$\text{体积}=\frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

其中 r 是底面(圆盘)的半径。

(8) When a pyramid (or circular cone) is cut by a plane parallel to its base, 2 solids are obtained. One of them is a small pyramid (or circular cone) and the other is called a ***frustum of pyramid*** (or ***frustum of circle cone***, or ***frustum of cone***)(See the figure 1.8.9). The problems on a frustum can be converted into the problems on pyramids or circular cones to deal with. Besides, we also have a formula to find the volume of a frustum by the areas of two bases directly.



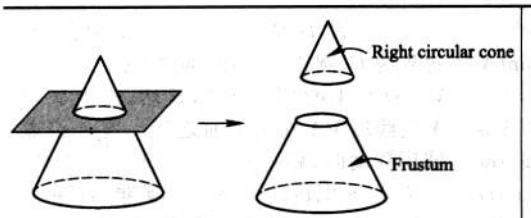
Frustum of pyramid

(棱台)

Figure 1.8.8

(8) 当一个棱锥(或圆锥)被沿着与底面平行的平面所截，可得到两个立体，其中一个是小的棱锥(或圆锥)，而另一个称为**棱台**(或**圆台**)(见图 1.8.9)。台体的问题可以转化为棱锥或圆锥的问题去处理。此外，也有一个公式可用来由两个底面的面积直接求出台体的体积。

续表



Frustum of cone

（圆台）

Figure 1.8.9

（9）A ***sphere*** is a closed surface, all points on which are at a fixed distance r from a point O. The point O is called the center of the sphere, the distance r is the radius of the sphere. The line segment joining any two points on the surface and passing through the center O is a diameter of the sphere. The surface area of a sphere with its radius r is given by:

$$\text{Surface area of a sphere} = 4\pi r^2.$$

The solid enclosed by a sphere is called a ***ball***, which have the same radius and center as the sphere. The volume of a ball (sphere) with its radius r is given by:

$$\text{Volume of a ball} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

（9）**球**是一个封闭的曲面，它上面的每一点到固定点 O 的距离都是 r。点 O 称为球心，r 是球的半径。连接球面上的两点且经过球心的线段是球的直径。半径为 r 的球的表面积可用下式求出：

$$\text{球的表面积} = 4\pi r^2。$$

球面包围的立体称为球体，它与球面具有同样的球心和半径。以 r 为半径的球体的体积可用下式求出：

$$\text{球的体积} = \frac{4}{3}\pi r^3。$$

注：sphere 的含义主要是球形、球面。sphere 表示球形时，有时也用来代表 ball。

§1.8.3 空间的坐标几何(Coordinate Geometry in the Space)

(1) In the space we can set up the rectangular coordinate system by using three mutually perpendicular number axes intersecting at the same point O. Then each point P in the space corresponds to one unique ordered 3-***tuple*** (x, y, z) of numbers. Each plane in the coordinate space is associated with a linear equation in three variables x, y and z in the form

$$Ax + By + Cz + 2D = 0,$$

where A, B, C, D are constants with $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. A straight line is considered as the ***intersection*** of two planes and corresponds to a system of two linear equations.

(1) 在空间中，利用三条互相垂直且相交于同一点 O 的数轴可以建立直角坐标系。于是，空间中的每一点 P 对应着唯一的有序**三元数组** (x, y, z)。空间中的每个平面对应着一个形如

$$Ax + By + Cz + 2D = 0$$

的三元线性方程，其中 x，y 和 z 是变量，A，B，C，D 是常数且 $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$。每条直线看做两个平面的**交线**，对应着由两个线性方程构成的方程组。

续表

(2) A common surface in the coordinate space can be expressed as an equation $F(x, y, z)=0$. Spheres, the curved surfaces of cylinders and circular cones belong to the same kind of surfaces called ***quadratic surfaces***. They correspond to equations in the form: $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz+2Gx+2Hy+2Iz+J=0$, where A, B, C, D, E, F, G, H, I and J are constants with $A^2+B^2+C^2\neq 0$, x, y and z are variables. In three-dimensional coordinate geometry, one has used algebraic methods to discuss the solutions of the above equations and made a thorough investigation on quadratic surfaces.	(2) 坐标空间中的常见曲面可由一个形如 $F(x, y, z)=0$ 的方程表示。球面、圆柱曲面和圆锥曲面都属于同一种曲面，称为二次曲面。其对应的方程形如 $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz+2Gx+2Hy+2Iz+J=0$, 其中 A, B, C, D, E, F, G, H, I 和 J 是常数且 $A^2+B^2+C^2\neq 0$，而 x, y 与 z 是变量。在三维坐标几何中，人们利用代数方法讨论上述方程的解，对二次曲面作了彻底的研究。
(3) ***Vectors***, ***matrixes*** and ***determinants*** are very important tools in ***linear algebra*** and ***analytic geometry***. General speaking, vectors are often used to set up equations of surfaces and planes; matrixes and determinants play a significant role in solving simultaneous equations and discussing classifications of curved surfaces.	(3) 向量、矩阵和行列式在线性代数与解析几何中是很重要的工具。总体上说，向量常用于建立曲面和平面的方程，矩阵和行列式在解联立方程及讨论曲面的分类方面起了重大作用。

练 习 1.8

1. 把下列专业术语译成英文：

多面体、非多面体、面、棱、顶点、正多面体、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体；横截面、均匀横截面；圆柱、棱柱、棱锥、直棱锥、底面、顶点、斜高、棱台、圆台、球；三元数组、交线、二次曲面；向量、矩阵、行列式；线性代数、解析几何。

2. 汉译英：

(1) 一个多面体 T 至少有四个面，每个面都在一个平面上；如果对于每个面 F，T 只位于 F 所在的平面的一侧，则 T 是凸的，否则，T 是凹的。

(2) 简单多面体的面数 F、棱数 E 和顶点数 V 的关系可以用欧拉公式来描述。

(3) 正棱锥和直棱锥是不同的概念，前者是后者的特殊情况，它还要求底面是正多边形。

(4) 正六面体就是正方体，它有六个面，每个面都是大小相等的正方形。

(5) 圆柱和棱柱的体积都等于底面积与高的乘积，其中底面和每个横截面一样，而高同时垂直于两个底面。

(6) 圆台的体积等于一个大圆锥的体积与小圆锥的体积之差，它们相似而且大圆锥的底和圆台的下底(lower base)一样，而小圆锥的底和圆台的上底(upper base)一样。

(7) 在空间中可以用三条互相垂直且交于一点的数轴来建立直角坐标系，该交点称为原点。

(8) 解析几何与线性代数有密切联系，向量、矩阵和行列式是它们的重要工具。在研究二次曲面方面，代数方法显示了很多优势。

3. 英译汉：

(1) Polyhedra can be classified into 2 types: convex polyhedron and concave polyhedron. Cubes and cuboids are some common examples of convex polyhedra.

(2) The problems on a frustum can be converted into the problems on pyramids or circular cones to deal with. For example, if a frustum F is formed by cutting a smaller pyramid A from the original pyramid B, then

$$\text{Volume of } F = \text{Volume of } B - \text{Volume of } A.$$

(3) In Figure 1.8.10, some water is poured into a container in the shape of a right circular cone. The height and the base radius of the container are 20cm and 7.5cm respectively. The height of water level is 18cm. Find the volume of water in the container and the inner surface area of the container that is not wet.

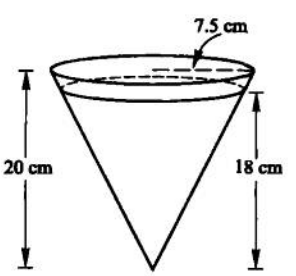


Figure 1.8.10



Figure 1.8.11

(4) Figure 1.8.11 shows the cross-section of a chocolate ball. The dark chocolate ball is coated with a layer of white chocolate. The inner radius and

the outer radius of the white chocolate are 1.5cm and 1.8cm respectively. Find the volume of the white chocolate on the chocolate ball.

(5) In Figure 1.8.12, a *solid*(实心的)right circular cone is placed inside an *empty*(空心的)cylinder with common base and height. Water is poured into the cylinder up to a level of 6cm.

(a) Find the volume of the frustum up to the water level in terms of π.

(b) Hence find the height of the water level if the cone is taken out.

(6) In the space, after a rectangular coordinate system is set up, the quadratic surfaces, especially spheres, the curved surfaces of cylinders and circular cones, can be expressed by an equation in the form:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz+2Gx+2Hy+2Iz+J=0,$$

where A, B, C, D, E, F, G, H, I and J are constants with $A^2+B^2+C^2\neq 0$, x, y and z are variables.

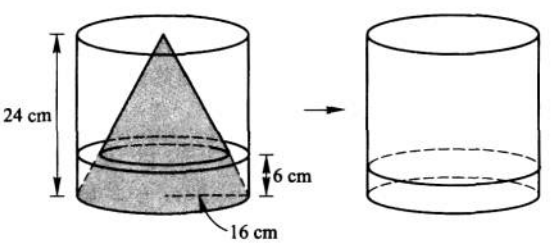


Figure 1.8.12

§1.9 数列与级数、数学归纳法

§1.9.1 数列 (Sequences)

(1) A ***sequence*** is a list of numbers following one another. Each number in a sequence is called a ***term*** of the sequence. The terms of a sequence are usually denoted by the symbols:

$T(1)$, $T(2)$, $T(3)$,…, $T(n)$,…

or

a_1, a_2, a_3,…, a_n,…,

where $T(n)$ or a_n is the nth term, also called the ***general term***.

(1) 一个接一个地排列着的数称为**数列**。数列中的每个数称为数列的**项**。数列的所有项通常采用如下记号表示:

$T(1)$, $T(2)$, $T(3)$,…, $T(n)$,…

或

a_1, a_2, a_3,…, a_n,…,

其中 $T(n)$及 a_n 为第 n 项,也称为**通项**。

续表

(2) Given a sequence which follows a simple ***pattern***, it is usually possible to work out a formula for the nth term (the general term) by observing the relationship among the first few terms and their positions in the sequence. For example, given sequences (a) 1, 3, 5, 7, $\cdots$; (b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$; (c) 1, 4, 9, 16, $\cdots$. It is easy to find the general term $T(n)=2n-1$ for (a), $T(n)=\frac{1}{n^2}$ for (b)and $T(n)=n^2$ for (c).	(2) 对一个具有简单**模式**的数列，通常经过观察其前几项与它们在数列中的位置之间的关系，就有可能得出表示第 n 项(即通项)的公式。例如，对给出的数列 (a) 1, 3, 5, 7, $\cdots$; (b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$; (c) 1, 4, 9, 16, $\cdots$。 不难求出(a)的通项 $T(n)=2n-1$，(b)的通项 $T(n)=\frac{1}{n^2}$，(c)的通项 $T(n)=n^2$。
(3) Considering the sequence 2, 5, 8, 11, 14, 17, $\cdots$, we notice the difference $T(n+1)-T(n)$ for any $n\geqslant 1$ is a constant, which is 3. The constant is called the ***common difference*** of the sequence, and the sequence itself is called an ***arithmetic sequence***. In general, an arithmetic sequence is a sequence having a common difference between successive terms.	(3) 考虑数列 2, 5, 8, 11, 14, 17, $\cdots$，我们不难发现对每一个 $n\geqslant 1$，$T(n+1)-T(n)$ 是一个常数，即 3。这个常数称为**公差**，而这个数列本身称为**等差数列(算术数列)**。一般地，一个数列若任何相邻的两项具有相同的公差，则称其为等差数列。
(4) Consider the sequence 1, 4, 16, 64, 256, 1024, $\cdots$. It is obviously not an arithmetic sequence. But, we notice that, whenever $n\geqslant 2$, the ratio of any term $T(n)$ to its former term $T(n-1)$ is a constant, which is 4. The constant is called the ***common ratio*** of the sequence, and the sequence itself is called a ***geometric sequence***. In general, a geometric sequence is a sequence having a common ratio between successive terms.	(4) 考虑数列 1, 4, 16, 64, 256, 1024, $\cdots$。显然它不是等差数列。但是，我们注意到，只要 $n\geqslant 2$，任何一项 $T(n)$ 与其前一项 $T(n-1)$ 之比是一个常数，即 4。这个常数称为**公比**，而这个数列本身称为**等比数列(几何数列)**。一般地，一个数列若任何相邻的两项具有相同的公比，则称其为等比数列。
(5) For an arithmetic sequence with first term a and common difference d, the general term, $T(n)$, is given by $$T(n)=a+(n-1)d,$$ where n is a natural number. When we consider a geometric sequence with first term a and common ratio r, the general term will be $$T(n)=ar^{n-1}.$$	(5) 对于一个首项为 a、公差为 d 的等差数列，其通项 $T(n)$ 可表为 $$T(n)=a+(n-1)d,$$ 其中 n 是正整数。当考虑的是首项为 a、公比为 r 的等比数列时，其通项为 $$T(n)=ar^{n-1}。$$

§1.9.2 级数 (Series)

(1) For a given sequence a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$, the expression

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

is called an ***infinite series***, or simply, a ***series***, and any term of the sequence is also called a ***term*** of the series. The sum $S(n)$ of the first n terms, i.e. $S(n)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ is of great importance in studying the properties. Sometimes, $S(n)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ is also called a ***series***; but accurately speaking, it is a ***finite series***.

(1) 对于一个给定的数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$, 表达式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

称为**无穷级数**，或简称**级数**，而数列的项也称为级数的项。前 n 项和 $S(n)$，即 $S(n)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 在级数性质的研究中具有重要作用。$S(n)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 有时也称为级数，但是，准确地说，这是一个**有限级数**。

(2) The sum $S(n)$ of the first n terms of an arithmetic sequence can be calculated by

$$S(n)=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

or

$$S(n)=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2},$$

where d is the common difference.

(2) 等差数列的前 n 项和可用如下公式计算：

$$S(n)=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

或

$$S(n)=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2},$$

其中 d 是公差。

(3) The sum $S(n)$ of the first n terms of a geometric sequence can be calculated by

$$S(n)=\frac{a_{n+1}-a_1}{r-1}$$

or

$$S(n)=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1},$$

where r is the common ratio and $r\neq 1$. Since a geometric sequence with the common ratio $r=1$ has the general term $a_n=a_1$, a constant, it is easy to see $S(n)=na_1$. But this sequence is not of great use.

(3) 等比数列的前 n 项和可用如下公式计算：

$$S(n)=\frac{a_{n+1}-a_1}{r-1}$$

或

$$S(n)=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1},$$

其中 r 是公比且 $r\neq 1$。因为公比 $r=1$ 的等比级数的通项 $a_n=a_1$ 是一个常数，容易看出 $S(n)=na_1$。只是这样的数列没多大作用。

(4) A company invests $\$x$ at the beginning of each year. The interest rate is 16% p. a. compounded yearly. (a) Find, in terms of x, the total value of the investment at the end of the nth year. (b) If the total value of the investment at the end of the fifth year is $\$300\,000$, find the value of x.

(4) 某公司在每年初投资 $\$x$，年利率是 16%，按每年一期的复利计算。(a) 求该项投资到第 n 年底的总值。(b) 该项投资到第 15 年底的总值为 $\$300\,000$，求 x 的值。

注：interest rate 利率；

p. a. 每年(p. a. 是 per annum 的缩写)；

compounded yearly 按复利计算，每年一期。

续表

(5) There are many useful sequences which are neither arithmetic sequences, nor geometric ones. For example, the famous Fibonacci sequence is of important sense both in theory and practical applications.	(5) 有些数列很有用,但它们既非等差数列,也非等比数列。例如,著名的斐波那契数列在理论上和实际应用中都具有重要的意义。

§1.9.3 数学归纳法 (Mathematical Induction)

(1) A set S of real numbers is said to be ***inductive*** provided that ① the number 1 is in S and ② if the number x is in S, the number $x+1$ is also in S. The set of real numbers **R** is inductive. The set of natural numbers, denoted by **N**, can be defined as the intersection of all inductive sets. Then **N** itself is inductive.	(1) 一个实数集 S 若满足下面两条件则称为是**归纳集**:① 数 1 属于 S 且② 如果 x 属于 S, 则数 $x+1$ 也属于 S。实数集 **R** 是一个归纳集。把自然数集记作 **N**,则它可定义为所有归纳集的交集。那么,**N** 本身也是一个归纳集。
(2) ***Principle of mathematical induction***: Let $S(n)$ be some mathematical proposition on an integer variable n. Suppose that $S(1)$ is true. Also suppose that whenever k is a natural number such that $S(k)$ is true, then $S(k+1)$ is true. Then $S(n)$ is true for every natural number n.	(2) **数学归纳法原理**:对任意自然数 n, 设 $S(n)$ 是某个以 n 为自变量的数学命题。假定 $S(1)$ 成立。同时假定,对任意自然数 k,只要 $S(k)$ 成立, 就有 $S(k+1)$ 成立。那么,对每一个自然数 n, $S(n)$ 都成立。
(3) From the principle of mathematical induction follows an important reasoning method — ***mathematical induction***. To prove a proposition $S(n)$ to be true for all natural numbers n, it suffices to prove that ① $S(1)$ is true, ② if $S(k)$ is valid for any natural number k, then $S(k+1)$ is true.	(3) 由数学归纳法原理得到一种重要的推理方法 —— **数学归纳法**。要证明一个数学命题 $S(n)$ 对所有自然数 n 成立,只要证明① $S(1)$ 成立,② 如果 $S(k)$ 对任意自然数 k 成立, 则 $S(k+1)$ 也成立。

练 习 1.9

1. 把下列专业术语译成英文:

数列、项、通项、等差数列(算术数列)、公差、公比、等比数列(几何数列)、级数、无穷级数、有穷级数、前 n 项和、归纳集、数学归纳法。

2. 汉译英:

(1) 通过比较一个数列任意相邻两项(two consecutive terms)的差,我们可以判定该级数是否为等差数列。

(2) 对于一个取定的数列，如果每一个项与它的后继项(successor term)的比为常数，则这个数列是等比数列，该常数的倒数称为公比。

(3) 只要等差数列的第一项和公差是已知的，就不难求出它的通项，并能求出它的前 n 项和。

(4) 如果已知一个等比数列的第一项和公比，就可以求出它的通项及它的前 n 项的和；而且，当公比的绝对值小于 1 时，还可以求出所有项之和。

(5) 级数的概念不同于数列，级数通常指的是无穷级数，在形式上它是无穷多个数的和。

(6) 级数的前 n 项和 S_n 的概念很重要，利用它可以把级数求和的问题转化为数列$\{S_n\}$的极限问题来处理。

(7) 数学归纳法在证明一些关于自然数的命题的正确性方面很有用。但是，它不能用来证明关于一般实数的数学命题。

(8) 当用数学归纳法来证明一个命题 $T(n)$对所有大于或等于 n_0 的正整数都成立时，必须首先证明 $T(n_0)$成立，然后假定 $T(k)$成立，$k\geqslant n_0$，证明 $T(k+1)$成立。

3. 英译汉：

(1) For a given sequence a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$, we can form an infinite series

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots.$$

On the other hand, by setting $S(n)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ for all n, we obtain a new sequence

$$S(1),\ S(2),\ S(3),\cdots,\ S(n),\cdots$$

(2) If a, b, c are any three consecutive terms of an arithmetic sequence, then the middle term b is equal to the *arithmetic mean*(算术平均)of a and c, i.e. $b=\frac{a+c}{2}$. Conversely, if a, b, c are real numbers such that $b=\frac{a+c}{2}$, then a, b, c form an arithmetic sequence.

(3) If x, y, z are any three consecutive terms of a geometric sequence, then the middle term y equals the *geometric mean*(几何平均)of x and y, i.e. $y=\sqrt{xz}$ or $y=-\sqrt{xz}$. Conversely, if x, y, z are real numbers such that $y=\sqrt{xz}$ or $y=-\sqrt{xz}$, then x, y, z form a geometric sequence.

(4) (a) Find the first term and the common ratio of the geometric series

whose fifth term is 27 and eighth term is 729; (b) Hence find the sum of the first 9 terms of the series.

(5) Suppose the recurring decimal $0.\dot{1}\dot{8}$ is expressed as a geometric series with infinite number of terms such that the first term is 0.18. (i) Write down the first three terms of the series; (ii) Find the common ratio of the series; (iii) Express $0.\dot{1}\dot{8}$ as a fraction.

(6) In some cases, the assumption of the truth of the proposition $P(n)$ when $n=k$ is not sufficient to deduce the truth of $P(n)$ when $n=k+1$. The induction procedure also requires the assumption of the truth of the proposition for some values n less than k, say $k-1$, $k-2$, etc. Such approach is termed the second principle of mathematical induction.

§1.10 初等概率统计、近似与误差

§1.10.1 概率 (Probability)

(1) In throwing a fair dice, there are 6 occurrences that are equally likely to happen, namely 1, 2, 3, 4, 5 and 6. Each of those occurrences is called an ***outcome***. For the ***event*** of getting an odd number, there are only three possible outcomes which can give rise to event. We say that the ***probability*** of getting an odd number is $\frac{3}{6}$ or $\frac{1}{2}$.

(1) 在抛掷一个均匀的骰子时，有 6 种等可能的情形出现，即显示的点数可能是 1，2，3，4，5 和 6。其中每种情形称为一个**结果(结局)**。对于得到奇数点这一**事件**，只有三种可能的结果形成该事件。所以说，得到奇数点的**概率**是 $\frac{3}{6}$ 或 $\frac{1}{2}$。

(2) In general, when E denotes an event, the probability $P(E)$ of event E is defined by:

$$P(E)=\frac{\text{the number of outcomes favourable to } E}{\text{the total number of possible outcomes}}.$$

An event that is certain to happen is said to be a ***certain event***, and an event that is certain not to happen is said to be an ***impossible event***. Hence the probability of a certain event is 1 and the probability of an impossible event is 0; the probability of any event E always lies between 0 and 1.

(2) 一般说来，当 E 表示一个事件时，事件 E 发生的概率定义为：

$$P(E)=\frac{\text{使 } E \text{ 出现的结果的个数}}{\text{所有可能出现的结果的总数}}。$$

一个事件若必然发生则称为**必然事件**，若必然不发生则称为**不可能事件**。因此，必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0；事件 E 的概率的值总在 0 与 1 之间。

续表

(3) When we consider a ***random problem***, the collection of all possible outcomes is called the ***sample space***. Then every event is a subset of the space. For example, in the above situation, the equally likely outcomes 1, 2, 3, 4, 5 and 6 obtained by throwing a dice make up a sample space X, the event E getting an odd number is a subset of X.	(3) 当考虑一个**随机问题**时，把所有可能的结果组成的集称为**样本空间**。于是，每个事件都是该空间的一个子集。例如，在上述情形下，抛掷一个骰子时出现的所有等可能的结果 1，2，3，4，5 和 6 组成了一个样本空间 X，而获得奇数点这一事件 E 是 X 的一个子集。
(4) When a coin is tossed, we know that either the head or the tail will show up. Since the two outcomes are equally likely, we say that the probability of either outcome is theoretically equal to 0.5. But it does not mean that whenever a coin is tossed twice, a head will show up one time and a tail will show up the other time.	(4) 当抛掷一个硬币时，要么出现"头(正面)"，要么出现"尾(反面)"。因为这两种结果是等可能的，所以说，在理论上每一种结果出现的概率都是 0.5。但是这并不意味着：若把一个硬币抛掷两次，"头"和"尾"必定各出现一次。
(5) In fact, experiments show that when we have tossed a coin 50 times, the number of times the head shows up may be greater than 30 (it means the frequency is greater than 0.6) or less than 20(it means the probability is less than 0.4). Therefore, it is necessary to introduce the concept of the ***experimental probability***. The experimental probability of event E is denoted by $P_1(E)$, which is defined as follows: $P_1(E)=\dfrac{\text{number of trials in which } E \text{ occurs}}{\text{total number of trials}}$.	(5) 事实上，试验表明，若把一个硬币抛掷 50 次，"头"出现的次数可能多于 30(这表明其频率大于 0.6)或者小于 20 次(这表明其概率小于 0.4)。因此有必要引入**实验概率**的概念。一个事件 E 的试验概率记作 $P_1(E)$，定义为 $P_1(E)=\dfrac{\text{有 } E \text{ 出现的试验次数}}{\text{试验的总次数}}$。
(6) The ***general rule for the addition of probabilities*** is $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, where $P(A\cup B)$ is the probability that either event A or B occurs (at list one of A and B occurs), and $P(A\cap B)$ is the probability that event A and B both occur at the same time.	(6) **概率加法的一般法则**是 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，这里 $P(A\cup B)$ 是要么事件 A 发生要么事件 B 发生(即 A 与 B 至少有一个发生)的概率，而 $P(A\cap B)$ 是事件 A 与 B 同时发生的概率。
(7) Two events are said to be mutually ***exclusive*** when both cannot happen at the same time. If E denotes an event, then the event that E does not happen is called the ***complementary event*** of E, and is denoted by E'. Obviously, E and E' are mutually exclusive. Since an event either happens or does not happen, the sum of their probabilities is 1.	(7) 两个事件如果不可能同时发生则称为**互斥**的。若 E 是一个事件，而 E 不发生的这一事件称为 E 的**互补事件**，记作 E'。显然，E 与 E' 是互斥的，因为一个事件要么发生，要么不发生，所以它们的概率之和是 1。

§1.10.2 统计 (Statistics)

(1) Many different tables and graphs are given in statistics to describe the properties and characteristics of a set of data. Among them ***frequency distribution histogram***, ***frequency polygon*** and ***frequency curve***, ***cumulative frequency polygon*** and ***cumulative frequency curve*** are some common graphs.

(1) 在统计学中，有许多不同的表格和图形用来描述一组数据的性质和特点。其中，**频率分布直方图**、**频率多边形**和**频率曲线**、**累计频率多边形**和**累计频率曲线**是一些常用的图形。

(2) Consider a set of ***discrete data***. If there are many data having the same value (it means some data occur several times), then we can record them and give their ***frequency distribution table***. The ***mean*** of the set of discrete data is found using the following formula:

If the data x_1, x_2, $\cdots$, x_n have the frequencies f_1, f_2, $\cdots$, f_n respectively, then the mean,

$$\overline{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}.$$

The value of the ***median*** and the ***mode*** can be read from the frequency distribution table in the following way: median is the datum in the middle, mode is the datum with the highest frequency.

(2) 考虑一组**离散数据**。如果其中有许多数据具有相同的值(这意味着某些数据出现多次)，我们就可以把它们记录下来并作出**频率分布表**。这组数据的**平均值**可以用下面公式求得：

设数据 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 分别具有频率 f_1, f_2, $\cdots$, f_n，则平均值

$$\overline{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}。$$

中位数和**众数**的值可以按下面办法从频率分布表中读出：中位数就是位于中间的数据，众数是具有最高频率的数。

(3) Consider a set of data arranged in ascending order of value. If Q_1, Q_2 and Q_3 divide the data into 4 equal parts, then Q_1, Q_2 and Q_3 are called the 1st, 2nd and 3rd ***quartile*** respectively. Q_2 here is the same as the median.

The ***inter-quartile range*** is defined as the distance between the third quartile and the first quartile, i.e.

Inter-quartile range $=Q_3-Q_1$.

In general, a larger inter-quartile range indicates a greater ***dispersion*** while a smaller inter-quartile range indicates a smaller dispersion.

(3) 考虑一组按照从小到大的次序排列的数据。如果 Q_1, Q_2 和 Q_3 把这组数据分成相等的 4 部分，则 Q_1, Q_2 和 Q_3 分别称为第一、第二和第三个**四分位数**。其中 Q_2 与中位数相同。

第三个四分位数和第一个四分位数的差定义为**四分位数间距**，即

四分位数间距 $=Q_3-Q_1$。

一般说来，若四分位数间距比较大，则**离差**比较大；若四分位数间距比较小，则离差比较小。

(4) Given a set of discrete data. As a datum greater (smaller) than the mean is deleted from the set of data, the mean will decrease

(4) 给定一组离散数据。当一个大于(小于)平均值的数据从该数据组删除时，平均值将减少(增大)；当一个大于

续表

(increase); as a datum greater (smaller) than the median is deleted from a set of data, the median will decrease (increase); as a datum (not the mode) is deleted from a set of data, the mode will not be affected.	(小于)中位数的数据从该数据组删除时,中位数将减少(增大);当一个非众数的数据从该数据组删除时,众数不受影响。
(5) Mean, median and mode are 3 measures of the ***central tendency***, which have important role in data analysis. But, a measure of central tendency is only a number representing a set of data. The range of the set of data can be very large. For example, a mean mark of 75 for a class of students can represent a range of marks from 60 to 80, or it can also represent a range of marks from 20 to 100.	(5) 平均值、中位数和众数是**中心趋势**的3种度量值,它们在数据分析中具有重要作用。但是中心趋势的度量值只是代表该组数据的一个数。该组数据的变化范围可能很大。例如,一个班的学生的平均分数是75分时,它代表的分数范围可能是60分到80分,也可能是20分到100分。
(6) Given a set of ***ungrouped data*** x_1, x_2, …, x_n, and let $\bar{x}$ denote the mean of the data, the ***mean deviation*** of the data is defined by: $$\text{mean deviation}=\frac{\sum\|x-\bar{x}\|}{n},$$ where n is the number of data.	(6) 给出一组**未分类数据** x_1, x_2, …, x_n, 用 $\bar{x}$ 表示这些数据的平均值,那么这些数据的**平均偏差**定义为 $$\text{平均偏差}=\frac{\sum\|x-\bar{x}\|}{n},$$ 其中 n 是数据个数。
(7) We shall use the Greek letter μ to denote the ***arithmetic mean*** of a ***population*** and the Greek letter σ to denote the ***standard deviation*** of a population. In a ***normal distribution*** almost all of the population lies between the values of variable those are four standard deviation (4σ) either side of the arithmetic mean (μ) of the distribution. In fact the range $\mu-4\sigma$ to $\mu+4\sigma$ spans 0.9999 or 99.99% of the population.	(7) 我们用希腊字母 μ 表示**总体**的**算术平均**,希腊字母 σ 表示总体的**标准差**。在**正态分布**中,总体的绝大部分位于变量的两个值之间,这两个值分别是分布的算术平均(μ)减去和加上4个标准差(4σ)。事实上,从 $\mu-4\sigma$ 到 $\mu+4\sigma$ 的区域支撑了总体的0.9999,即99.99%。

§1.10.3 近似与误差 (Approximations and Errors)

(1) To estimate a given number with several digits, we often find an ***approximate value*** of the number according to the indicated ***degree of accuracy***. For examples, when we ***round off*** 40613 correct to 3 ***significant figures***, we obtain the approximate value 40600, where the leftmost 3 digits 4, 0 and 6 are the significant figures.	(1) 为了估计一个由多位数字组成的数,经常是根据指定的**精确度**求出该数的**近似值**。例如,要精确到三位**有效数字**,对数40613进行**四舍五入**时,就得到近似值40600,其中最左边的3个数字4,0和6是有效数字。 **注**:(1) round off 有的词典译成"舍入",这里根据上下文译成"四舍五入"。

续表

	(2) significant figures 与 significant digits 相同。 (3) 在 round off 后的"correct to"常省略为"to"。
(2) When we round off 40 613 to 2 significant figures, the approximate value is 41 000 by the rule of rounding off. It is clear that for a given number, the degree of accuracy of the approximate value is higher when the indicated number of significant digits is larger. But, the indicated number of significant digits is usually not more than 3 in order to make the approximate value simple and explicit.	(2) 若对数 40 613 进行四舍五入使得精确到 2 位有效数字,那么,根据四舍五入的规则,得到的近似值是 41 000。显然,对于一个给定的数,如果指定的有效数字的位数较多,则所得的近似值的精确度就较高。但是,为了使近似值简单明了,通常指定的有效数字的位数不超过 3. 注:注意 number 的多种含义,the indicated number of significant digits 的 number 在这里要译成"位数"。
(3) There are some other ways to describe the degree of accuracy of an approximate value. For example, given a number 34. 17, we may be asked to find the approximate value ***correct to the nearest integer***, and we obtain 34 after rounding off 34. 17. And the approximate values of the number correct to ***the nearest ten*** and ***tenth*** are 30 and 34. 2 respectively.	(3) 还有一些其他的方法可以描述近似值的精确度。例如,对于给定的数 34. 17,求它**精确到整数位**的近似值,进行四舍五入之后得到 34。而该数精确到**十位**和**十分位**的近似值分别是 30 和 34. 2。 注:ten 和 tenth 在这里分别表示十位(数)和十分位,而 unit 表示个位(数)。
(4) It is known that the result obtained from a measurement is generally different from the ***actual value***. The ***absolute value*** of the difference between the ***measured value*** and the actual value is called the ***absolute error***, or simply the ***error*** of the measurement. Since the actual value is difficult to measure, we may not be able to know the actual value. Hence we often consider the ***maximum error of a measurement***. The maximum error can be defined as half the difference between the *finest markings* on the measuring tool.	(4) 我们知道,一个测量所得的结果常常不同于**准确值**。测量值与准确值之差的**绝对值**称为**绝对误差**,或简称**误差**。由于准确的测量是很难达到的,我们可能无法知道准确值是什么,所以人们常考虑**最大测量误差**。最大测量误差可以定义为所用的测量工具的最精细的两个刻度之差的一半。
(5) It is very important for a measurement to have a better degree of accuracy. For example, when we measure the length of a book with a ruler, the measurement may be asked to be correct to the nearest cm or nearest mm. In this case, the maximum error of a measurement	(5) 对于测量而言,具有较好的精确度是非常重要的。例如,当我们用尺子测量一本书的长度时,可以要求精确到最接近的厘米或毫米。此时,测量的最大误差定义为所要求的**测量单位**的一半。例如,如测量精确到接近的厘米,最

续表

is defined as half the desired ***measure unit***. For examples, when the measurement is correct to the nearest cm, the maximum error is 0.5 cm; and if the unit cm is replaced with mm, then the maximum error is 0.5 mm.	大误差是 0.5 厘米；如厘米换成毫米，则最大误差是 0.5 毫米。
(6) To compare the degree of accuracy of different measured values, the concept of the ***relative error*** is introduced. The relative error is theoretically defined as the ratio of Absolute error to Actual value, i.e. $$\text{relative error}=\frac{\text{Absolute error}}{\text{Actual value}}.$$ But, in practice, "Actual value" is often replaced by the measured value. When a relative error is expressed as a percentage, it is called the ***percentage error***.	(6) 为了比较不同测量值的精确度，人们引进了**相对误差**的概念。相对误差在理论上定义为绝对误差与准确值之比，即 $$\text{相对误差}=\frac{\text{绝对误差}}{\text{准确值}}.$$ 但是在实用中，其中的"准确值"常换成测量值。 若相对误差表示成百分数，则称之为**百分误差**。 **注**：为了表达简洁，公式中的数学术语前的冠词可以省略，有时还把术语的第一个字母改为大写，如 the absolute error 和 the actual value 在公式中分别写成 Absolute error 和 Actual value。

练 习 1.10

1. 把下列专业术语译成英文：

结果(结局)、事件、概率、必然事件、不可能事件、随机问题、样本空间、试验概率；统计、样本、离散数据、频率分布表、平均值、中位数、众数、四分位数、中心趋势、直方图、频率曲线、累计频率多边形、标准差平均偏差；近似、近似值、精确度、有效数字、误差、绝对误差、相对误差、百分误差、四舍五入、精确到整数位。

2. 汉译英：

(1) 除了必然事件和不可能事件，其他事件的概率总是在 0 与 1 之间。

(2) 在一次试验中所有可能出现的结果组成了一个样本空间，任何事件都是样本空间的子集。

(3) 在实际应用中人们还要考虑试验概率，因为理论概率是在理想状态下研究问题，而现实世界的问题比理论问题更复杂。

(4) 以概率论为基础的数理统计学在经济领域得到越来越多的应用。

(5) 中学生都有必要了解统计学的基本知识，他们应首先学会处理离散数据。

(6) 想了解一组数据的中心趋势，最基本的工作是求出这组数据的平均值、

中位数和众数，它们在数据分析中具有重要作用。

(7) 要了解数据的性质和特点，仅仅知道数据的平均值是不够的，因为数据的变化范围可能很大。

(8) 在统计学中，频率分布直方图、频率多边形和曲线、累计频率多边形和曲线是一些常用的图形。

(9) 任何测量都可能产生误差，我们需要了解什么是绝对误差、相对误差和百分误差。

(10) 在作近似计算时，经常要根据精确度(如有效数字的位数)的要求对数据进行四舍五入。

3. 英译汉：

(1) In our everyday life, we can easily find two events such that when one occurs, another cannot occur at the same time. Such two events are called mutually exclusive events.

(2) If two events E and F are mutually exclusive, the probability of the happening of either event E or event F is the sum of the probabilities of the happening of the two events. i.e.

$$P(E \text{ or } F)=P(E)+P(F).$$

(3) If two cards are drawn one after another at random from a pack of 52 playing cards without replacement, find the probability that (a) both cards are black, (b) both cards are kings, (3) one card is a king and the other card is a queen.

(4) The inter-quartile range is defined as the difference between the upper quartile and the lower quartile, i.e. inter-quartile range$=Q_3-Q_1$. In general, a large inter-quartile range indicates a greater dispersion while a smaller inter-quartile range indicates a smaller dispersion.

(5) Round off 4.061 3 to 3 significant digits, round off 4.0613 to 3 decimal places. Round off the numbers in the expression $3456+6785+1243$ to the nearest hundred and find an estimated value of the expression.

第二章　阅读与翻译初步

本章是精读教材，分为16节，每节课文由A，B两部分组成。在数学内容安排上，前面5节的内容主要涉及中学的教材；后面11节主要涉及大学数学的基础课程（因为部分大学教材下放，这里的区分只是一个大概而已）。为了帮助初学者较好地进行阅读理解和翻译，每节都配备了两个辅导栏目："阅读与翻译指导"和"词语与句型学习"。

在"阅读与翻译指导"部分，主要对课文中较难的句子进行注释，并给出译文（放在括号【 】之中）；在"词语与句型学习"部分，我们对出现在课文中的如下内容作了简要介绍或提示：1. 重点专业术语及相关术语，2. 常用动词及其搭配，3. 部分较为重要的形容词、副词、介词短语，4. 部分典型例句与句型（已经在"阅读与翻译指导"中作了讲解的例子通常不再列举或仅给出简要提示）。

此外，每节都安排了一定数量的练习题。为了便于读者自学自查，我们在书末的附录之中附有大部分练习题的参考答案。我们相信认真学习的读者都懂得应该如何正确而有效地利用这些资料。

为了引起读者注意，我们将每节精读课文中需要重点关注（未必是第一次出现）的词语采用特殊字体排版：动词片语排成粗体字，如 **obtain**；其他词语排成斜体加下划线，如*dimensions*。又，将每节第三部分介绍的重点词语和第四部分的重点句型或其中的重点词语排成粗斜体，如 ***ratio***。

在学习这一章之前，建议读者先阅读第一章。因为掌握一定的数学术语之后，要学好精读课文就有了较好的基础。同时，建议读者在学习本章的同时，结合学习或参阅第三章"语法与译法选讲"的有关部分，以便增加对各种语法现象和句型的认识，加深对课文的理解，提高翻译水平。

本章启用的记号说明：

（1）出现在课文中英文标题后的方括号上标连同其中的数字，如[2]，用来说明本段课文的出处是列在书末的参考文献[2]（其中的数字2表示文献排列的序号）；即该段课文是摘自文献[2]或参考该文献进行改编的。

（2）在课文中某个句子末尾的记号，如♣(3)，说明该句子将在"阅读与翻译

指导”中被注释(该条注释将以♣(3)标出),其中圆括号(3)内的数字3表示被注释句子的序号。

(3) 方括号【 】中的汉语是出现在它前面的英文句子或词组的译文。

上述(1)和(3)也适用于后面各章(第四章对【 】的用法另有附加说明)。

§2.1 比、率与比例[注1]
(Ratio, Rate and Proportion)

一、精读课文

Part A Ratio and Comparison [13]

The communication of ideas today is often based upon comparing numbers and *quantities*. When you describe a person as being 6 feet tall, you are comparing his height to that of a smaller unit, called the foot♣(1). When a person describes a commodity as being expensive, he is **referring to** the cost of this commodity as **compared to** other similar or different commodities♣(2). If you say that the *dimensions* of your living room are 18 by 24 feet, a person can judge the general shape of the room by comparing the dimensions. When the taxpayer is told that his city government is spending 42 per cent tax dollar for education purposes, he knows that 42 cents out of every 100 cents are used for this purpose♣(3).

The chemist and the physicist continually compare measured quantities in the laboratory. The housewife is comparing when measuring quantities of ingredients for baking. The architect with his *scale* drawings and the machine draftsman with his working drawings are comparing length of lines in the drawings with the actual corresponding lengths in the finished product♣(4).

Definition. The ratio of one quantity to another like quantity is the quotient of the first divided by the second ♣(5).

A ratio is a fraction and all the rules governing a fraction apply to ratio. We write a ratio either with a fraction bar, a solidus, division sign, or with the

注1:本书英文阅读材料中出现的节段、定义、定理、例题等的编号都是它们在原著中的序号,只有节或小节的标题是我们加的。——编著者

symbol ":" (which is read "is to")♣(6). Thus the ratio 3 to 4 is $\frac{3}{4}$, 3/4, $3\div4$, or 3 : 4. The 3 and 4 are called *terms* of the ratio.

It is important for the students to understand that a ratio is a quotient of like quantities. The ratio of a line segment to an angle has no meaning; they are not quantities of the same kinds. We find the ratio of one line segment to a second line segment or the ratio of one angle to a second angle. This we do by measuring them and then finding the quotient of their measurements. The measurements must be expressed in the same units.

A ratio is always an abstract number; i.e., it has no units. It is a number considered apart from the measured units from which it came♣(7). Unless there is an important reason *to the contrary*, a ratio should be expressed in its simplest form♣(8). In the previous example where the dimensions of a living room are 18 by 24 feet, the final ratio of width to length is 3 : 4, but not 18 : 24.

Part B Rate, Ratio and Proportion[15]

I. A *rate* usually compares two quantities of different kinds. Using rates, the specified amounts of one quantity is compared with one unit of the other quantity.

The following are some common examples:

Consumption rate of petrol: 0.2 liter per kilometer;

Typing rate: 50 words per minute;

Speed of a vehicle: 60 kilometers per hour.

Note: The speed of an object, say a car, is a special kind of rate which we often come across in everyday life. It compares the distance traveled with one unit of time spent. The comparison can be represented by the formula

$$\text{Speed}=\frac{\text{distance}}{\text{time}}.$$

II. A ratio compares two quantities of same kinds by division. The comparison is made by saying how many times one quantity is of the other, and the two quantities must be in terms of the same unit.

Unlike rate, we can compare three or more quantities of the same kind using ratio. If a, b and c represent three quantities of the same kind, then we can compare them using the ratio $a : b : c$. We say then a, b and c are in a *con-*

tinued ratio.

III. A *proportion* is an equality of two ratios. Thus $a:b = 2:9$ is a proportion.

In general, if $a:b$ and $c:d$ are equal ratios, then the relation

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ b\neq 0 \text{ and } d\neq 0$$

describes a proportion. In a proportion, the products obtained by cross-multiplying the numbers are equal, i.e. when $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, then $ad=bc$.

二、阅读与翻译指导

♣(1) When you describe a person as being 6 feet tall, you are comparing his height to that of a smaller unit, called the foot.

翻译时,英文动词进行时未必要译成"正在"。原文多处应用进行时,是为了生动地说明比较的重要性,目的仍在于说明事实。翻译时应根据中文的习惯,重在翻译事实。所以,you are comparing 不宜译成"你正在比较"。(下面各句也有类似情形。)下面是参考译文:

【当你用 6 英尺来描述一个人的高度时,你是把他的高度与英尺这种较小单位的长度作比较。】

♣(2) When a person describes a commodity as being expensive, he is referring to the cost of this commodity as compared to other similar or different commodities.

这里"as compared to sth."是固定用法,意思是"与某物比较起来"。as compared to other similar or different commodities 是过去分词短语作状语;refer to 本意是"参照",可译成"指的是"。全句可意译成:

【有人说某种商品贵,他是就该商品的价格与其他类似的或不同的商品的价格相比较而言的。】

♣(3) When the taxpayer is told that his city government is spending 42 per cent tax dollar for education purposes, he knows that 42 cents out of every 100 cents are used for this purpose.

词组 spend sth. for sth. 意思是"花费…… 用于……"。tax dollar 不应直译为"税收(美)元",只要译成"税收"即可。out of 的意思是"从(某个数)之中",这里用于解释百分数。

【当纳税人被告知当地市政府把税收的百分之四十二花费在教育上时,那他就知道每 100 美分中有 42 美分用于这个目的。】

♣(4) The architect with his scale drawings and the machine draftsman with his working drawings are comparing length of lines in the drawings with the actual corresponding lengths in the finished product.

本句阅读理解主要抓住"动词结构 compare sth. with sth.(把某物与某物比较)"。三个 with 中的前两个 with 引导的短语分别作其中心词的定语。

【使用比例图的建筑师以及绘制生产图纸机械制图员,则是把图纸中的各种线条的长度与最后成品的相应实际长度作比较。】

♣(5) The ratio of one quantity to another like quantity is the quotient of the first divided by the second.

正像 like term 要译成"同类项"一样,like quantity 要译成"同类的量",不能译成"类似的量"。本句作为定义,is 等同于 is defined as。所以最好译成"定义为";因为,如文中 is 直译为"是",就显得不突出。

【一个量与另一个同类的量之比定义为第一个量除以第二个量所得的商。】

♣(6) We write a ratio either with a fraction bar, a solidus, division sign, or with the symbol ":" (which is read "is to").

本句"either with…or with…"连接句中的并列状语。为了明确起见,这句可意译成:

【可以用分数线"—"、斜线"/"、除号"÷"或者冒号":"来表示"比"(这些符号读作"比")。】

♣(7) It is a number considered apart from the measured units from which it came.

这里过去分词 considered 引导一个分词短语作 number 的定语,这个过去分词有被动的意思。副词短语 apart from 原来的意思是"除开",在这里意思是"与……分离"。这句可直译为:"比被看成是与形成它的原来测量单位相分离的数。"而根据比的性质,并考虑本文是教育普及类的课文,本句可以意译为:

【应认识到,比是与其原来的测量单位无关的数。】

♣(8) Unless there is an important reason to the contrary, a ratio should be expressed in its simplest form.

这句的难点是如何理解和翻译"to the contrary",该词组的意思是"相反"。全句可直译为:"除非有不这样做的重要理由,否则,比要用最简的形式表示。"

但这样的译文不太符合中文表达习惯。这句应该意译为:

【比要用最简的形式表示,除非有不这样做的重要理由。】

三、词语与句型学习

下面简要介绍本节出现的重点数学术语,部分常用动词及其搭配,应特别注

意的形容词、副词和介词的用法，同时指出应该注意的常用句型，给出若干应用的例子或学习提示。

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***number*** n. 数

～ axis 数轴；～ theory 数论。

特别要注意，the number of…意思是“(某物的)个数”。如 the number of samples 样本个数；the number of terms 项数。

相关术语：

numerical a. 数值的，数字的：～ analysis 数值分析；～ calculation 数值计算；～ system 数系；～ solution 数值解。

numerically adv. 数值上，用数字方法。

2) ***quantity*** n. 量，数量

～ relation 数量关系。

相关术语：

quantitative a. 定量的：～ analysis 定量分析；～ character 数量特征。

3) ***unit*** n. 单位，单元，可逆元素

～ angle 单位角；～ circle 单位圆；～ area 单位面积；～ element 单位元素，幺元。

4) ***dimension*** n. 维数，尺寸，大小

～ of linear space 线性空间的维数；～ theory 维数定理。

相关术语：

dimensional a. 维数的：例如，3-dimensional 三维的；n-dimensional n 维的。

5) ***length*** n. 长度，长

unit ～ 单位长度；～ of arc 弧长；～ of curve 曲线长；～ of segment 线段长(度)。

6) ***quotient*** n. 商

～ set 商集；～ space 商空间；～ group 商群；～ map 商映射；～ of difference 差商。

7) ***measurement*** n. 测量，测定

～ of area 面积的测量；～ range 测量范围；～ system 测量系统。

相关术语：

(i) measure n. 测度；v. 度量

～ space 测度空间；～ zero 零测度；～ of length 长度的度量；～ func-

tion 度量函数。

(ii) measurable a. 可测的

～ space 可测空间；～ set 可测集；～ function 可测函数；～ transformation 可测变换。

8) ***angle*** n. 角

～ between two straight lines 两直线的夹角；～ between two planes 两平面的夹角；interior～ 内角；exterior～ 外角(其他各种类型的角的术语见§1.5)。

相关术语：

angular a. 角度的，角的：～ bisector 角平分线；～ acceleration 角加速度。

9) ***ratio*** n. 比，比率(单位相同的同类量之商)

～ diagram 比例图；～ of equality 等比；～ of similitude 相似比；～ scale 比例尺度；～ method 比率法；～ of circumference 圆周率；continued ～ 连比。

10) ***rate*** n. 率(用于不同量之比较)，价格

～ of change 变化率；～ of convergence 收敛速率；interest ～ 利(息)率。

相关术语：

speed n. 速率 (注：表示速度(有方向)的单词是 velocity)。

11) ***proportion*** n. 比例，比例式

相关术语：

proportional adj. 成(正)比例的；inverse ～ 反比例的(reciprocal ratio 反比例)。

12) ***corresponding*** adj. 对应的

～ angle 对应角，同位角；～ side 对应边；～ point 对应点。

相关术语：

(i) correspond v. 对应，常用 correspond to sth. 对应于某物；

(ii) correspondence n. 对应。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***compare*** vt. 比较

常与 with 或 to 联用，都表示与某物比较。词组 as compared to sth. 和 compared to sth. 是固定用法，意思是“与某物比较起来”。

对应的名词是 comparison，词组 in (by)comparison with sth. 也表示“与某物比较起来”。相关数学术语如：～ theorem 比较定理；～ operation 比较运算。

(2) ***refer*** v. 论及，参照

词组 refer to sth. 表示“参照……”、“涉及……”等；refer sth. as to sth. 意思是“把某物称为某物”。

对应的名词是 reference，其复数 references 表示“参考书”、“参考文献”。

(3) ***spend*** vt. 花钱，度过(花费时间)

对应的名词是 expense n. 费用，支出；expenditure n. 费用，支出。

对应的形容词是 expensive adj. 贵的。

(4) ***express*** vt. 表达，表示

在数学中，这个动词出现频率很高、应用范围广，主动式和被动式都常用。其中，固定搭配 express in terms of…意思是“用(……语言)来表达”；be expressed as…意思是“表示成……”；be expressed in…form 意思是“表示成……形式”。

对应的名词是 expression n. 表达，表达式，算式，式子。

3. 重要形容词、副词、介词短语

(1) ***apart from*** 主要有两个意思。

1) 脱离，除此之外(表示除去……以外别无)

例 There can be no mathematics ***apart from*** logic.

【离开逻辑就没有数学。】

2) 除去，撇开……来说(表示除去……外尚有)

例 ***Apart from*** zero, the absolute value of each real number is positive.

【除了零之外，每个实数的绝对值都是正的。】

(2) ***out of*** 在数学中主要表示“从(某个数)之中”。

例 Chose one ***out of*** these ten. 【从这十个之中挑选一个。】

out of 常用于解释百分数的含义的句子中，例如“The expression 20% means that 20 out of every 100.”可以译成“式子 20% 指的是每 100 之中占有 20。”

4. 典型例句与句型

(1) ***It is*** important ***for*** the student ***to understand*** that….

这是先行词 it 作为形式主语的一种句型，带逻辑主语的动词不定式短语是真正的主语。关于不定式短语的介绍可参见 § 3.3。

(2) ***Unless*** there is an important reason ***to the contrary***, a ratio should be expressed in its simplest form.

这是一个条件状语从句，译文见♣(8)。有关状语从句的介绍可参见 § 3.6。

练 习 2.1

1. 掌握下列数学术语的含义及应用：

divide, division sign, quotient, number, quantity, like quantity, term, length, width, height, dimension, unit, line segment, angle, percent, percentage, fraction, measurement.

2. 把下面的术语译成英文：

比、比例(式)、利率、速率；除、除法、商；同类量、项、线段、角、长(度)、宽(度)、高(度)；维数(大小)、单位；分数、百分数。

3. 英译汉：

(1) The ratio of a line segment to an angle has no meaning; they are not quantities of the same kinds.

(2) Using rates, the specified amounts of one quantity is compared with one unit of the other quantity.

(3) The comparison is made by saying how many times one quantity is of the other, and the two quantities must be in terms of the same unit.

(4) In a proportion, the products obtained by cross-multiplying the numbers are equal, i.e. when $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, then $ad=bc$.

(5) To solve an equation we must change the terms about until the unknown term stands alone on one side of the equation, thus making it equal to something on the other side.

(6) Some of the best known symbols of mathematics are the Arabic numerals 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0, and the signs of addition"+", subtraction"−", multiplication"×", division"÷" and equality "=".

4. 汉译英：

(1) 测量书桌的长度，实际是把书桌的长度与尺子的长度作比较。

(2) 和那座大楼比起来，我们的教室就不太高了。

(3) 和测量不同，比例是没有单位的；同一本书的长与宽的比不因采用的测量单位的不同而不同。

(4) 比例是一个分数，它是两个具有相同单位的同类量的商。

(5) 某学校的学生中有百分之六十是女生，说明每一百个学生中有六十个是女生。

§2.2 三角函数与解三角形
(Trigonometric Functions and Solution of Triangles)

一、精读课文

Part A Trigonometric Functions[2]

Suppose $\triangle ABC$ is a right-angled triangle with $\angle C=90°$. Then AC and

BC, i.e. the sides of the right angle $\angle C$ are the legs of the right-angled triangle, and the side opposite to right-angle (i.e. AB) is called the *hypotenuse*. Obviously, the hypotenuse is the longest side of the three sides of a right-angled triangle.

Gou-Gu theorem (***Pythagoras theorem***) accurately describes the relations between the sides of a *right-angled triangle*. It is stated as follows:

For a right-angled triangle $\triangle ABC$ we have $AB^2 = AC^2 + BC^2$, where AB is the hypotenuse while AC and BC are the legs.

The *inverse theorem* of Gou-Gu theorem is also valid.

The sides and angles of a triangle are mutually dependent. We know this from geometry. Suppose $\triangle ABC$ is a right-angled triangle with $\angle C = 90°$. Then both $\angle A$ and $\angle B$ are acute angles with $\angle A + \angle B = 90°$. Let $\angle A = \theta$. Then leg BC is the side opposite to angle θ and is called the *opposite side* of θ. And leg AC is the side adjacent to angle θ and is called the *adjacent side* of θ.

Trigonometry begins by showing the exact nature of this dependence between the sides and angles of triangles[♣(1)]. For this purpose trigonometry employs the ratios of the sides. These ratios are called *trigonometric functions*. The six trigonometric functions of any *acute angle* in a right triangle, as A, are denoted as follows:

$\sin A$, read "sine of A"; $\cos A$, read "cosine of A";
$\tan A$, read "tangent of A"; $\csc A$, read "cosecant of A";
$\sec A$, read "secant of A"; $\cot A$, read "cotangent of A".

These trigonometric functions (ratios) are defined as follows (refer to Figure 2.2.1)[♣(2)]:

(i) $\sin A = \dfrac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse}} \left(= \dfrac{a}{c}\right)$,

(ii) $\cos A = \dfrac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}} \left(= \dfrac{b}{c}\right)$,

(iii) $\tan A = \dfrac{\text{opposite side}}{\text{adjacent side}} \left(= \dfrac{a}{b}\right)$,

(iv) $\csc A = \dfrac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite side}} \left(= \dfrac{c}{a}\right)$,

(v) $\sec A = \dfrac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent side}} \left(= \dfrac{c}{b}\right)$,

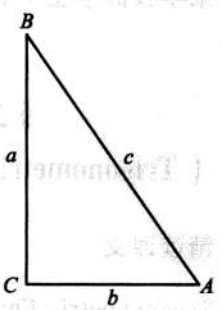


Figure 2.2.1

(vi) $\cot A = \dfrac{\text{adjacent side}}{\text{opposite side}}\left(=\dfrac{b}{a}\right)$.

Regardless of the size of right-angled triangles, trigonometric ratio $\sin\theta$ among different triangles is always the same as long as the acute angle θ remains unchanged. This conclusion is also true for $\cos\theta$, $\tan\theta$ and others. But if the angle θ is changed, then the trigonometric ratios will also change. If the angle θ is considered as a variable, then $\sin\theta$, $\cos\theta$ and the others are all the functions of θ, this is why we call the ratios the trigonometric functions.

These functions (ratios) are of fundamental importance in the study of trigonometry. They must be memorized.

One of the most important applications of trigonometry is the solution of triangles. Let us now take up the solution of right triangles♣(3). A triangle **is composed of** six parts, three sides and three angles. To solve a triangle is to find the unknown parts by the given ones. A triangle may be solved if three parts (at least one of these is a side) are given. A right triangle has one angle, the right angle, always given. Thus a right triangle can be solved when two sides, or one side and an acute angle, are given.

The general directions for solving a right triangle are as follows.

(1) Draw a figure as accurately as possible representing the triangle *in question*.

(2) As one acute angle is known, subtract it from 90° to get the other acute angle.

(3) To find an unknown part, select from (i) to (vi) trigonometric functions (ratios), a formula involving the unknown part and two *known* parts, and solve for the unknown part.

(4) Check the values **found**, when they satisfy relations different from those used in the last step, they are correct♣(4). A convenient numerical check is the relation

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)\text{♣(5)}.$$

Part B The Law of Cosines[24]

In the previous section we solved *a variety of* problems using the trigonometric functions of the acute angles of right triangles. Now we want to **extend**

our problem solving capabilities to the general triangles.♣(6). The triangle that is not a right triangle is called an *oblique triangle*.

In the elementary geometry the concept of *congruence* is studied as it **pertains** to geometric figures. It is known that there are certain conditions to determine the congruence of triangles. For example, the SAS condition states that if two sides and the *included angle* of a triangle are equal *in measure*, respectively, to two sides and the included angle of another triangle, the triangles are congruent♣(7). In other words, knowing the lengths of two sides and the measure of the angle included by those two sides determines the shape and size of the triangle. This idea is proved to be true by the following *Law of cosines*.

In any triangle ABC that has sides of lengths a, b, c, the following relationships are true.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Furthermore, from the law of cosines we see that cos A, cos B and cos C can each be expressed in terms of the lengths of the sides as follows♣(8):

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Therefore, it becomes evident that the law of cosines can also be used to find the size of the angles of a triangle as given the lengths of the sides.

二、阅读与翻译指导

♣(1) Trigonometry begins by showing the exact nature of this dependence between the sides and angles of triangles.

动词 show 的基本含义是“显示”、“展示”及“证明”。结合下一句，知道 showing the exact nature…是建立三角学的目的。

【三角学是在揭示三角形各边、角之间的确切依赖关系的过程中产生的。】

♣(2) These trigonometric functions (ratios)are defined as follows (refer to Figure 2.2.1)。

本句括号(ratios)其实是(trigonometric ratios)的省略形式。在历史上，三角学出现时还没有函数的概念，当时采用的名字就是 trigonometric ratios(三角比)。为了明确起见，翻译时要还原。

【这些三角函数(原称"三角比")定义如下(参见图 2.2.1)。】

♣(3) Let us now take up the solution of right triangles.

take up 有许多含义,这里为"着手"、"讨论"的意思。可译成:

【下面,我们来着手解直角三角形。】

♣(4) Check the values found, when they satisfy relations different from those used in the last step, they are correct.

本句有三个定语值得注意。过去分词 found 作为 values 的定语。固定搭配 different…from 引导的短语作为 relations 的后置定语,其中过去分词 used 引起的短语作 those 的定语。

【检验求得的值。如果它们满足不同于上一步所使用的另外一些关系式,结果就是正确的。】

♣(5) A convenient numerical check is the relation

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b).$$

这句很简单,但如译成"一种方便的数值检验是下列关系:$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$。"就显得不够顺达。应把主、谓语的次序对调,并适当添加一两个合适的词语。

【下列关系式 $a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$ 提供了一种方便的数值检验方法。】

♣(6) Now we want to extend our problem solving capabilities to the general triangles.

句中动词 want 后面常接动词不定式(短语);动词 extend 经常带 to 表示拓广的范围。其中 problem solving capabilities 应作为一个词组翻译成"解决问题的能力",事实上,词组 problem solving 在数学(特别在数学教育学)中已经成为一个术语"问题解决的"或"解决问题的",应注意,词组中的 problem 以单数的形式出现。

【现在,我们要把解决问题的能力拓展到任意三角形。】

♣(7) For example, the SAS condition states that if two sides and the included angle of a triangle are equal in measure, respectively, to two sides and the included angle of another triangle, the triangles are congruent.

注意,be equal in measure, respectively 的意思是"在度量上分别相等"。因为这里既涉及线段的长度,又涉及角度大小,所以不能像下面的句子用 in size。不过,译成汉语时 in measure 可以不译出。此外,在上下文明确的情况下,这类句中的 in measure 或 in size 也可省略。

【例如,条件 SAS(角边角)说明,如果一个三角形的两条边及其夹角分别与

另一个三角形的两条边及其夹角相等，则这两个三角形全等。】

♣(8) Furthermore, from the law of cosines we see that cos A, cos B and cos C can each be expressed in terms of the lengths of the sides as follows.

句子 cos A, cos B and cos C can each be…中的 each 为副词；这个句子通常写成 each of cos A, cos B and cos C can be…，此时 each 为代词。短语 in terms of sth. 意思是“用某种‘语言’”。

【而且，由余弦公式可以推出，cos A, cos B 和 cos C 可以用边长分别表示如下。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***triangle*** n. 三角形

right ～ 直角三角形；isosceles right ～ 等腰直角三角形；oblique ～ 斜三角形；acute ～ 锐角三角形；obtuse ～ 钝角三角形。其他与三角形相关术语见§1.5。

2) ***side*** n. 边，侧

～ of angle 角的边；～ opposite of an angle 角的对边；～ face 侧面；～ of a triangle 三角形的边。

但是，直角三角形的边另有名称：

legs(或 right angled sides)n. 直角边；hypotenuse n. 斜边。

3) ***rotation*** n. 旋转，旋度

～ axis 旋转轴；～ of the coordinate system 坐标系的旋转；～ of coordinates 坐标旋转；～ surface 旋转曲面；～ transformation 旋转变换。

4) ***vertex*** n. 顶点

～ angle 顶角；～ of an angle 角的顶点；～ of a cone 锥顶；～ of a triangle 三角形的顶点。

5) ***solution*** n. 解，解法

～ approach 解题方法；～ by logarithms 对数解法；～ set 解集。

相关术语：

solve vt. 解，解决：～ equation 解方程；～ problem 解题；～ a triangle 解三角形。

6) ***unknown*** n. 未知元，未知数，未知量；a. 未知的

～ function 未知函数；～ number 未知数；～ quantity 未知量；～ term 未知项。

相关术语：

known a. 已知的;given a. 已知的,给定的。

7) ***elementary*** a. 初等的,基本的

～ algebra 初等代数(学);～ geometry 初等几何(学);～ number theory 初等数论;～ transformation 初等变换;～ operator 初等算子;～ event 基本事件。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***denote*** vt. 表示,记作

denote 是数学英语中出现频率较高的动词,多数情况下采用被动式 be denoted as…或 be denoted by….(意思都是"被记作……");作为祈使句的动词 denote 采用主动式。

例 ***Denote*** $S=2\pi r$. 【记 $S=2\pi r$。】(意思是"用 S 表示 $2\pi r$"。)

同义词有 express,designate 等。

(2) ***define*** vt. 定义

该动词可用主动式,但较多用被动式 be defined as…(意思是"被定义为……")。

对应的名词是 definition n. 定义。

(3) ***compose*** vt. 组成

常用 be composed of…表示"由……组成",可用 consist of…代替,其中动词 consist 是主动式。

有关 compose 的同义词,可参见§2.3之三。

(4) ***include*** vt. 包含

be included by…被包含;过去分词短语 included angle 表示"夹角"。

同义词有 contain,involve 等。

3. 重要形容词、副词、介词短语

(1) 形容词 ***inverse*** 和 ***converse*** 都表示"逆的",但是 inverse 通常只放在名词之前作定语,不作表语;而 converse 既可以作表语,也可以作定语,只是作定语修饰的名词比较少,常见的只是 converse theorem(逆定理),converse proposition(逆命题)等(这时 converse 也可以换成 inverse)。而"反函数"只能译成 inverse function,"逆问题"、"逆矩阵"等都用 inverse 来表示。另外,inverse 和 converse 都可以当名词,如 inverse of a number(倒数),inverse of multiplication(乘法的逆运算),converse of relation(逆关系)。

(2) ***a variety of*** 各种各样的。

(3) ***in measure*** 在度量上;***in size*** 在(体积、角度等的)大小上。介词 in 放在这类词前面表示范围或方面。

(4) ***regardless of*** 不管,不顾。其作用相当于一个介词。

(5) ***in question*** 放在名词之后作定语,表示"所讨论的"。

4. 典型例句与句型

(1) This idea ***is proved to be*** true by the following Law of cosines. 【这个想法被下面的余弦定理证明是正确的。】这个被动句是"主+谓+补"句型,其中动词不定式 to be true 是主语 this idea 的补语。其对应的主动句是"主+谓+宾+补"的句型:Mathematicians ***prove*** this idea ***to be*** true by the following Law of cosines. 【数学家用下面的余弦定理证明这个想法是正确的。】

(2) Trigonometry ***begins*** by showing the exact nature of this dependence between the sides and angles of triangles. 本句的句型是"主+不及物动词+状语"。其中 begin 是不及物动词当谓语,by 引导的介词短语作方式状语。本句的译文见♣(1)。

练 习 2.2

1. 掌握下列数学术语的含义及应用:

geometry, elementary geometry, trigonometry; sides, opposite side, adjacent side, hypotenuse, angle, triangle, acute angle, right triangle, initial side, coterminal angles; angle of depression; angle of elevation; be denoted as, be defined as, mutually dependent; trigonometric function, the solution of triangle, solve a triangle, the unknown part, oblique triangle; congruence, the included angle; Gou-Gu theorem/Pythagoras theorem, Law of cosines.

2. 把下面的术语译成英文:

初等几何、三角学、余弦定理、勾股定理/毕达哥拉斯定理;角、锐角、直角、同终边的角、仰角、俯角;全等、夹角;三角形、三角函数、直角边、斜边、对边、邻边、始边、解三角形;互相依赖、表示成、定义为。

3. 汉译英:

(1) 锐角三角函数揭示了直角三角形各边与锐角之间确切的依赖关系。

(2) 如果一个直角三角形有两边为已知,则此三角形就可以解出。

(3) 如果一个斜三角形的两边及其夹角为已知,则可以利用余弦定理求出未知的边和角。

(4) 当已知三角形的三边的长度时,也可以用余弦定理来求该三角形的各个角。

(5) 知道三角形的两边的长度和它们的夹角的大小就可确定这个三角形的形状与大小。也就是说,由这些数据作出的两个三角形全等。

(6) 解直角三角形一般可以按三个步骤进行:首先画图并标出已知量和未知量,接着通过适当的三角函数公式求出未知量,最后还要检验求得的值。

4. 英译汉:

(1) An angle is said to be in standard position if its vertex is at the origin of a Cartesian coordinate system, and its *initial side* is along the positive x-axis.

(2) In general, if the terminal sides of two angles in standard position coincide, the angles are called *coterminal angles*(共终边的角). Thus, coterminal angles differ from each other by a multiple of 360°. Furthermore it follows that the corresponding trigonometric functions of coterminal angles are equal.

(3) Angles of elevation and depression are measured with reference to a horizontal line. If the object being sighted is above the observer, the angle formed by the line of sight and the horizontal line is called an *angle of elevation*(仰角). If the object being sighted is below the observer, the angle formed by the line of sight and the horizontal line is called an *angle of depression*(俯角).

(4) In the previous section we found that that the Law of cosines can be used to solve triangles when the given information fits the SAS or SSS properties. However, the Law of cosines is not useful in the ASA or AAS situations. Instead we need another set of properties that we refer to as the Law of sines.

(5) How do we solve a triangle if we know the lengths of two sides and the measure of an angle opposite one of the two sides? This question is a little more difficult to answer because the given information may determine two triangles, one triangle, or no triangle at all.

(6) Solving a conditional trigonometric equation such as $2\sin\theta=1$ refer to the process of finding the values for the variable θ that will make a true numerical statement. The values are stated in terms of degree or radian.

§2.3 素数与辗转相除法
(Prime Numbers and Euclidean Algorithm)

一、精读课文

Part A Prime Numbers[25]

The following *classification* of the integers according to the integers that they *divide*, or are *divisible by*, will greatly **facilitate** our study♣(1). Zero has

been defined (in Section 1.5) as the *identity* under addition. The integers $+1$ and -1 are called *units* (in Section 2.1). An integer p that is not zero or a unit is said to be *prime* if its only divisors are $\pm p$ and the *units*♣(2). An integer is called *composite* if it has two or more prime divisors (not necessarily distinct). For example, $6=2\cdot 3$ and $121=11^2$ are *composite numbers*. We shall find that every integer belongs to one of four classes: zero, units, prime numbers and composite numbers. Since zero is neither positive nor negative, this will mean that every positive integer belongs to one of three classes and every positive integer greater than one is either prime or composite. In the following discussion, negative prime numbers are **assumed** to be expressed in the form ep, where e is the unit -1 and p is a positive prime. Thus only positive prime numbers need be considered.

We now use these definitions in the proofs of several theorems.

Theorem 1. Every integer greater than one has a *positive prime divisor*.

Let m be any given integer greater than one. Then m is prime if and only if its only positive divisors are m and 1.

If m is not a prime, it has a positive divisor m_1, where $m_1 \neq m$ and $m_1 \neq 1$. Thus if m is not prime, it may be written as the product of two positive integers, $m=m_1 m_2$, where neither m_1 nor m_2 is a unit. If neither m_1 nor m_2 is prime, then $m=m_{11}m_{12}m_{21}m_{22}$ where no m_{ij} is a unit. If no m_{ij}, is a prime, then $m=m_{111}m_{112}m_{121}m_{122}m_{211}m_{212}m_{221}m_{222}$, where no m_{ijk} is a unit. This process will **terminate** if and only if at some step at least one of the m's is a prime number♣(3). We shall now show that for any given positive integer m the process must terminate, i.e., it cannot continue *infinitely*. First, we observe that any positive integer m_2 which is not a unit satisfies the order relation $m_2 > 1$. Then we also have $m=m_1 m_2 > m_1$ and, in general,

$$m > m_1 > m_{11} > m_{111} > \cdots$$

for as many steps as the process continues♣(4). Thus the process terminates if and only if the set of positive integers m, m_1, m_{11}, m_{111}, $\cdots$ is a *finite set*. However, this set is a subset of the finite set m, $m-1$, $m-2$, $\cdots$, 3, 2, 1 and therefore must itself be finite. Thus the above process must terminate after a finite number of steps, and m must have a prime divisor.

We have also **proved** that any given positive integer m can have only a fi-

nite number of positive integral divisors greater than one. Our next theorem indicates which positive integers need to be considered when one seeks the positive divisors of a given integer m.

Theorem 2. If a positive integer m is composite, it has a positive prime divisor $\leqslant I$, where I is the greatest integer whose square is $\leqslant m$.

By Theorem 1, any positive integer m greater than one has a positive prime divisor p, that is, $m=pm_1$. Also, if $m\neq p$, then m_1 has a positive prime divisor $\leqslant m_1$. If Theorem 2 were false, there would exist a number m that was composite and had no positive prime divisor $\leqslant I$[♣(5)]. In this case, we would have $I<p$, $I<m_1$ or $I+1\leqslant p$, $I+1\leqslant m_1$, and $(I+1)^2\leqslant pm_1=m$, *contrary to* the assumption that I is the greatest integer whose square is $\leqslant m$. Thus Theorem 2 must be true.

Before we can use Theorem 2 to determine whether or not a given integer m, say 359, is prime, we need some method for determining the primes $\leqslant I$ where $I^2\leqslant m<(I+1)^2$. For the case $m=359$ we need to know the prime numbers $\leqslant 18$.

The prime numbers bounded by any finite integer N may be found by a method called the *Sieve of Eratosthenes*: Write down the integers from 1 to N, exclude 1 since it is a unit, counting from 2 **strike out** every second number thereafter, counting from 3 strike out every third number, and, in general, counting from any *remaining integer* k which is $\leqslant\sqrt{n}$ (Theorem 2) strike out every kth integer[♣(6)]. For example, the prime numbers ***bounded by*** $N=18$ are 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, and may be found from the array

$$2,\ 3,\ \underline{4},\ 5,\ \underline{6},\ 7,\ \underline{8},\ \underline{9},\ \underline{10},\ 11,\ \underline{12},\ 13,\ \underline{14},\ \underline{15},\ \underline{16},\ 17,\ \underline{18},$$

in which it was only necessary to exclude the unit and multiples of 2 and 3 since the next remaining integer, 5, has a square greater than 18[♣(7)].

We now may use Theorem 2 and **determine** whether or not 359 is a prime by testing 359 *successively* for *divisibility* by 2, 3, 5, 7, 11, 13 and 17[♣(8)]. On this basis we may assert that 359 is a prime number.

Part B Euclidean Algorithm[25]

Let a, b be two integers and $a\neq 0$. We say that a **divides** b or b is *divisible by* a or a is a factor of b, denoted by $a\mid b$, if and only if there exists an integer

m such that $b=ma$♣(9).

Theorem 1 (*Division algorithm*) Let a, b be two integers and $b\neq 0$, then there exist two integers q and r such that

$$a=qb+r.$$

Definition 1 Let a, b be two integers. The positive integer h is said to be the *highest common factor* (H. C. F)or the *greatest common divisor* (G. C. D) of a and b if and only if

(1) h is a factor both of a and b (i.e. h is the common factor of a and b), and

(2) any common factor of a and b is a factor of h.

Theorem 2 (*Euclidean algorithm*) Let a, b be two integers and $b\neq 0$, by division algorithm, $a=qb+r$, where $0\leqslant r<|b|$. Then $(a, b)=(b, r)$, i.e. the H. C. F of a and b is equal to the H. C. F of b and r.

Theorem 3 Let a, b be two integers such that not both zero, then there exist integers m and n such that $(a, b)=ma+nb$.

二、阅读与翻译指导

♣(1) The following classification of the integers according to the integers that they divide, or are divisible by, will greatly facilitate our study.

本句第一个 the integers 和第二个 the integers 所指不是同一个对象。that 引起的限制性定语从句修饰第二个 integers,其中 they 代表第一个 the integers,关联词 that 是从句的宾语,它又代表第二个 integers。词组 A divides B 的含义是"A 整除 B",即"B 除以 A 的余数为 0";而 A is divisible by B 的含义是"A 可被 B 整除"(句中的 they 就是 A,that 就是 B)。

【下面根据能否整除给定的整数或者能否被(给定的整数)整除,来给出对整数分类的方法,这对我们的研究非常有益。】

♣(2) An integer p that is not zero or a unit is said to be *prime* if its only divisors are $\pm p$ and the units.

注意 that is not zero or a unit 相当于 that is neither zero nor a unit。所以本句的 or 要译成"且"。

【一个非零且不是单位元的整数 p 如果只有 $\pm p$ 和单位元是它的因子,就称为素数。】

♣(3) This process will terminate if and only if at some step at least one of the m's is a prime number.

阅读时注意上下文的内容。本句如果译成“这个过程将会结束当且仅当在某一步 m 至少有一个因子是素数。”虽无大错，但与原文不合。事实上，这里m's不是 m，而是指前面列举的那些 $m_{111}, m_{112}, m_{121}, m_{122}, m_{211}, m_{212}, m_{221}, m_{222}, \cdots$因此应对这种数适当补充说明。

【这个过程会结束当且仅当到某一步时，这些带下标的的数(如 m_{212})中至少有一个是素数。】

♣(4) Then we also have $m=m_1m_2>m_1$ and, in general,

$$m > m_1 > m_{11} > m_{111} > \cdots$$

for as many steps as the process continues.

习惯用语 as many as…意思是“和……一样多的”。因此，for as many steps as the process continues 意思是“对于该过程延续的各个步骤都成立”。所以全句可以意译为

【那么，我们也有 $m=m_1m_2>m_1$，并且一般地，不等式

$$m>m_1>m_{11}>m_{111}>\cdots$$

在过程所延续到的各个步骤都成立。】

♣(5) If Theorem 2 were false, there would exist a number m that was composite and had no positive prime divisor $\leqslant I$.

本句是反证法的假设，采用虚拟语气，所以动词都按虚拟语气的要求书写。

【如果定理 2 不成立，则存在这样的合数 m，它没有小于或等于 I 的正素因子。】

♣(6) Write down the integers from 1 to N, exclude 1 since it is a unit, counting from 2 strike out every second number thereafter, counting from 3 strike out every third number, and, in general, counting from any remaining integer k which is $\leqslant\sqrt{n}$ strike out every kth integer.

翻译这句的难度较大，关键是对其中的数学知识要了解，同时能较好地表达 counting from 2 strike out every second number thereafter 的意思。注意 thereafter 意思是“此后”，句子中只出现一次，但译成中文时应次次出现。整句宜采用意译。

【从小到大依次写下从 1 到 N 的整数，首先排除 1，因为 1 是单位元；然后，在 2 的后面逐次删除 2 的倍数，接着在 3 的后面逐次删除 3 的倍数。一般地，在剩下的任意整数 $k\leqslant\sqrt{n}$的后面逐次删除 k 的倍数。】

♣(7) For example, the prime numbers bounded by $N=18$ are 2, 3, 5, 7,

11, 13, 17, and may be found from the array

$$2, 3, \underline{4}, 5, \underline{6}, 7, \underline{8}, \underline{9}, \underline{10}, 11, \underline{12}, 13, \underline{14}, \underline{15}, \underline{16}, 17, \underline{18},$$

in which it was only necessary to exclude the unit and multiples of 2 and 3 since the next remaining integer, 5, has a square greater than 18.

句中 the next remaining integer 应该译成“保留着的下一个整数”或“下一个仍保留着的整数”。bounded by $N=18$ 应明确译为“以 $N=18$ 为上界的”。此外还要注意，multiples of 2 and 3 不包括 2 和 3 本身(multiples 是复数)。

【例如，以 $N=18$ 为上界的素数是 2,3,5,7,11,13,17，并且可以通过如下的一列数求得

$$2,3,\underline{4},5,\underline{6},7,\underline{8},\underline{9},\underline{10},11,\underline{12},13,\underline{14},\underline{15},\underline{16},17,\underline{18},$$

其中只需要排除单位元以及 2 和 3 的多倍数(保留 2,3)，这是因为保留着的下一个整数是 5，它的平方大于 18。】

♣(8) We now may use Theorem 2 and determine whether or not 359 is a prime by testing 359 successively for divisibility by 2, 3, 5, 7, 11, 13 and 17.

理解和翻译这句应注意三个地方：一是副词 successively 修饰动名词 testing；二是 test … for… 意为“从…… 测试……；三是要能理解素数的概念。

【我们现在可以借助于定理 2，通过依次测试 359 能否被 2, 3, 5, 7, 11, 13 和 17 整除来确定 359 是否为素数。】

♣(9) We say that a divides b or b is divisible by a or a is a factor of b, denoted by $a|b$, if and only if there exists an integer m such that $b=ma$.

这句把要定义的三个互相等价的新概念罗列在前，目的是为了强调；把应满足的条件用 if and only if 的形式放在句子的后半部分给出；句子中间插入一个过去分词短语，用于说明采用的记号。翻译时，按汉语的习惯一般把条件放在前面。

【当且仅当存在整数 m 使得 $b=ma$ 时，称 a 整除 b 或者 b 能被 a 整除，或称 a 是 b 的因子，记作 $a|b$。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语的扩展

1) ***division*** n. 除，除法

～ algorithm 辗转相除法；～ by factors 因子除法；～ with remainder 带余除法。

相关术语：

dividend n. 被除数；divisor n. 除数；quotient n. 商；remainder n. 余数。

参见§1.1.1和§1.1.2。

2) ***addition*** n. 加,加法

～ of vectors 向量的加法;～ theorem 加法定理。

相关术语:

sum 和; addend 加数。参见§1.1.1和§1.1.2。

3) ***square*** n. 平方,二次幂,正方形

～ brackets 方括弧,方括号;～ root 平方根,二次根;～ matrix 方阵。

4) ***factor*** n. 因数,因子

the highest common ～ 最大公因数,简记作 H. C. F,有时也写作 the greatest common divisor (最大公约数,简记作 G. C. D)。

5) ***multiple*** n. 倍数,倍式,多重。

～ angles 倍角; ～ arithmetic 多重运算; ～ divisor 重因子;～ integral 多重积分;～ numbers 重数;～ point 重点;～ root 重根;～ valued function 多值函数;the lowest common ～ 最小公倍数,简记作 L. C. M。

6) ***prime*** n. 素数,质数

～ factor 素因数,素因子;～ field 素域;～ ideal 素理想;～ number 素数。

7) ***countable*** a. 可数的

～ axiom 可数公理;～ additivity 可数可加性; ～ set 可数集;～ product 可数积。

相关术语:

(i) countably adv. 可数地:～ infinite 可数无限的。

(ii) uncountable a. 不可数的:～ set 不可数集。

(iii) count v. 计数。

8) ***finite*** a. 有限的

～ additivity 有限可加性;～ basis 有限基;～ covering 有限覆盖;～ dimensional space 有限维空间; ～ element 有限元;～ group 有限群;～ set 有限集。

相关术语:

infinite a. 无限的;infinitely adv. 无限地。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***determine*** vt. 确定

determine 表示经过判断而做出的一种选择行为,在数学英语中经常出现,如表示确定某一种情形或确定某个值等都用 determine 作动词。常见 deter-

mine 后接一个 whether 引导的宾语从句，参见本节♣(8)。

(2) ***terminate*** vt. 结束，使终结

对应的形容词是 terminal a. 终止的；terminal side (角的)终边；有时也用分词 terminating 作形容词构成数学术语，如 terminating decimal 有尽小数。

(3) ***exclude*** vt. 排除

其同义词如 delete, strike out, eliminate 等。exclude 与 from 联用的情形参见§2.8之三。

(4) ***test*** vt./vi. 试验，测试

词组 test … for… 意思为"对…… 测试……"，例子见♣(8)。

3. 重要形容词、副词、介词短语

(1) ***according to*** 根据。类似地，在数学英语中，更常用介词"by"来表示，如 by the theorem 意为"根据该定理"。

(2) ***be divisible by*** 可被……整除的。

(3) ***under addition*** 意为"在加法情况下"，其中 under 意为"在……情况下"、"在……过程中"。

(4) ***if and only if*** 当且仅当，有时简写为"iff"。例子见下面第4条(2)。

(5) ***contrary to*** 和……相反、矛盾。

4. 典型例句与句型

(1) ***If*** neither m_1 nor m_2 is prime, ***then*** $m=m_{11}m_{12}m_{21}m_{22}$ where no m_{ij} is a unit.

【如果 m_1 和 m_2 都不是素数，则 $m=m_{11}m_{12}m_{21}m_{22}$，其中任何 m_{ij} 都不是单位元。】

在数学英语中，if … then…的句型出现频率很高，在叙述定理或在论证的过程，特别是分情况进行讨论时经常采用。这种句型和下一句型的进一步讨论可参见§5.5。

(2) Thus the process terminates ***if and only if*** the set of positive integers m, m_1, m_{11}, m_{111},… is a finite set.

在数学英语中 if and only if 和 when and only when 都译成"当且仅当"，表示它的前后两个数学命题互为充分必要条件。

(3) Then we also have $m=m_1m_2>m_1$ and, in general,

$$m > m_1 > m_{11} > m_{111} > \cdots$$

for ***as*** many steps ***as*** the process continues.

这句的译文见♣(4)。在 as … as…的形式中，前一个 as 是副词，后一个 as

是关系代词，引导一个比较状语从句(从句中有时会省略一些成分)。关于 as 的用法介绍，可参见§3.11。

练 习 2.3

1. 掌握下列数学术语的含义及应用：

classification, divide, be divisible by, divisibility, prime, composite, identity, positive prime divisor, prime divisor, bounded by, Sieve of Eratosthenes, exclude, remaining integer, Division algorithm, Euclidean algorithm, the highest common factor, the greatest common divisor, finite set, infinitely, countably, successively, terminate, contrary to.

2. 把下面的术语译成英文：

素数(质数)、合数、质因数、公倍数、正素因子、除法算式、最大公因数、最小公倍数；整除、整除性、被整除、过程、证明、分类、剩余、辗转相除法、有限集、无限地、可数地、终止、与……矛盾。

3. 汉译英：

(1) 我们需要研究一个整数能被哪些整数整除，即它有哪些因数。特别是，有时要求把一个整数表示成它的质因数的乘积。

(2) 如果整数 b 能整除 a，那么就存在整数 c 使得 $a=bc$，即 a 是 b 的倍数。

(3) 数 1 既非素数，也非合数；合数除了能被 1 和自己整除外，还可以被某个素数整除。

(4) 设正整数 m 是合数，求 m 的一个正素因子 n 使得它的平方小于或等于 m。

(5) 可以用埃拉托色尼筛法的方法来求出以任何一个有限整数 N 为上界的素数的个数。

(6) 根据辗转相除法(又称为欧几里得算法)，对于两个整数 a 和 b，$a>b>0$，a 与 b 的最大公约数等于 b 与 r 的最大公约数，这里 $r>0$ 是 a 除以 b 的余数(remainder)。

4. 英译汉：

(1) One of the important questions in number theory is *Goldbach's conjecture* (哥德巴赫猜想), which is concerning the expression of even numbers as sums of two primes.

(2) Suppose n is an integer greater than one and m is an integer greater than 2, prove that 3^n-1 and, in general, m^n-1 is composite.

(3) A number of the form 2^p-1 that is prime is called a *Mersenne prime*

(梅森素数). Find five such numbers.

(4) To prove Theorem 2.4, suppose there were a largest prime number, say P, then the number $N=P!+1$ must have a prime divisor (Theorem 2.2). But no number $\leqslant P$ divides $P!+1=N$. Thus N has a prime divisor greater than P and there is no greatest prime, i.e., the set of positive prime numbers is *countably infinite*(可数无限的).

(5) Given any integer m and prime p, the only positive divisors of p, and therefore the only possible positive common divisors of p and m, are p and 1. Thus we have conclusion: If p is a prime and m is any integer, then either p divides m or $(p, m)=1$.

§2.4 集合论简介
(Introduction to the Set Theory)

一、精读课文

Part A Introduction to the Set Theory[26]

In discussing any branch of mathematics, be it *analysis*, *algebra*, or *geometry*, it is helpful to use the *notation* and *terminology* of set theory♣(1). This subject, which was developed by Boole and Cantor in the latter part of the 19th century, has had a profound influence on the development of mathematics in the 20th century.

It has **unified** many seemingly disconnected ideas and has helped to **reduce** many mathematical concepts to their logical foundations in an elegant and systematic way. A thorough treatment of the theory of sets would require a lengthy discussion which we regard as outside the scope of this book.

Fortunately, the basic notions are few in number, and it is possible to develop a working knowledge of the methods and ideas of set theory through an informal discussion. Actually, we shall discuss *not so much a new theory as* an agreement about the precise terminology that we wish to apply to more or less familiar ideas♣(2).

In mathematics, the word "set" is used to represent a collection of objects viewed as a single entity. The collections **called** to mind by such nouns as "flock","tribe","crowd","team", and "electorate"are all examples of sets♣(3).

The individual objects in the collection are called *elements* or *members* of the set, and they are said to **belong to** or to **be contained** in the set. The set, in turn, is said to **contain** or be **composed of** its elements.

We shall be interested primarily in sets of mathematical objects: sets of numbers, sets of curves, sets of geometric figures, and so on.

In many applications it is convenient to deal with sets in which nothing special is assumed about the nature of the individual objects in the collection♣(4). These are called *abstract sets*. Abstract set theory has been developed to **deal with** such collections of *arbitrary* objects, and from this generality the theory derives its power♣(5).

Part B Operations of Sets[26]

Let S and T be sets. If every member of T also belongs to S, we say that T is a subset of S and write $T\subseteq S$ or also $S\supseteq T$. Any set S is a subset of itself; this is called an *improper subset* of S *in contrast to* the *proper subsets* of S which are different from S itself♣(6). We write $T\subset S$ or $S\supset T$ to indicate that T is a proper subset of S.

Frequently we describe a subset of S by means of a prepositional function, thus $\{x\in S\mid P(x)\}$ denotes the subset of S consisting of those (and only those) elements x for which $P(x)$ holds. e. g. , if the set of all natural numbers is denoted by $\mathbf{N}$, then the subset of odd numbers may be denoted by $\{x\in\mathbf{N}\mid x$ is odd$\}$♣(7). On the other hand, forms like $\{x\mid P(x)\}$, in which the domain over which x ranges is left unspecified, are best avoided♣(8).

Let S and T be any sets, then the elements which belong to both S and T form a set which is called the *intersection* of S and T and is denoted by $S\cap T$. From two sets S, T we can form another set, the *union*, written $S\cup T$, which consists of all the members of S or T.

In most cases, the sets under consideration in any given case will all be subsets of some given set U, the "universe of discourse" ♣(9). Thus U might be the set of natural numbers, or of triangles in the plane etc. In this situation we can, for any set S, form its *complement*, i.e. , the set of all members of U that are not in S; it is denoted by S'. Thus, if S is the set of all odd numbers, then its complement (in the set of all natural numbers) is the set of all even numbers. This example makes it clear why the complement, to be useful, has to be

taken within a given set as universe♣(10). We also note the following brief way of describing intersection, union and complement, which **brings out** a certain analogy with the rules for combining propositions.

$$S \cap T=\{x\in U \mid x\in S \wedge x\in T\},\quad \bigcap S_i=\{x\in U \mid x\in S_i, \text{ for all } i\},$$
$$S \cup T=\{x\in U \mid x\in S \vee x\in T\},\quad \bigcup S_i=\{x\in U \mid x\in S_i, \text{ for some } i\},$$
$$S'=\{x\in U \mid x\notin S\}.$$

Here U is the universe containing all the objects under discussion.

二、阅读与翻译指导

♣(1) In discussing any branch of mathematics, be it analysis, algebra, or geometry, it is helpful to use the notation and terminology of set theory.

插入句 be it …用倒装的形式表示"例如……"。整句可译成：

【在讨论数学的各个分支，如分析、代数或几何时，使用集合论的符号和术语是有帮助的。】

♣(2) Actually, we shall discuss not so much a new theory as an agreement about the precise terminology that we wish to apply to more or less familiar ideas.

其中 not so much sth. as sth. 是惯用法，意思是"……不像……那么多"。由 that 引导的定语从句修饰 terminology。全句比较长，可分段译成：

【事实上，我们将更多地讨论的不是新的理论本身，而是关于那种准确术语的认同，即我们希望能运用到多少有些熟悉的思想中去的术语。】

♣(3) In mathematics, the word "set"is used to represent a collection of objects viewed as a single entity. The collections called to mind by such nouns as "flock","tribe","crowd","team", and "electorate"are all examples of sets.

第二句主语是 the collections，其后的过去分词短语可以看成定语从句 which are called to mind by such nouns as "flock","tribe","crowd","team", and "electorate"。

【在数学中，"集合"一词通常用来表示由一些作为个体的事物组成的整体。让人容易联想到的，诸如"人群"、"部落"、"伙"、"组"以及"选举团"等名词所表示的集体，都是集的例子。】

♣(4) In many applications it is convenient to deal with sets in which nothing special is assumed about the nature of the individual objects in the collection.

本句 which 引导一个限制性定语从句，虽然与 sets 最靠近，但从数学内容

来理解，该从句是用来说明 applications 的。事实上，collection 是 set 的近义词，在本句 the collection 就是指前面的 sets，所以 which 引导的从句的先行词不是 sets。

【在许多应用中，不对集合中个体的属性作任何特别的假定，这给集合的处理带来方便。】

♣(5) Abstract set theory has been developed to deal with such collections of arbitrary objects, and from this generality the theory derives its power.

本句由两个并列分句组成，第一个分句采用现在完成时，而第二个分句采用一般现在时，翻译时应体现这两种时态。另外，句中不定式短语作目的状语。

【抽象集合论就是为了处理这类由任意对象组成的集合而发展起来的，而研究对象的一般性则使该理论获得了自己独特的威力。】

♣(6) Any set S is a subset of itself; this is called an improper subset of S in contrast to the proper subsets of S which are different from S itself.

成语 in contrast to sth. 意思是“与……相对照”。为了清楚起见，which 引导的限制性定语从句可以分开译出。

【任何集 S 都是自己的子集，称为 S 的非真子集，以区别于 S 的真子集，即不同于 S 自身的那些子集。】

♣(7) Frequently we describe a subset of S by means of a prepositional function, thus $\{x\in S|P(x)\}$ denotes the subset of S consisting of those (and only those) elements x for which $P(x)$ holds. e. g., if the set of all natural numbers is denoted by $\mathbf{N}$, then the subset of odd numbers may be denoted by $\{x\in\mathbf{N} \mid x \text{ is odd}\}$.

注：the set of all natural numbers 或 the set of natural numbers 都表示同一个意思：所有自然数组成的集，不论其中是否出现 all。但是若把定冠词 the 换成不定冠词，a set of natural numbers 却表示“由某些自然数组成的一个集”。

【我们经常借助于命题函数来描述 S 的子集，于是，$\{x\in S|P(x)\}$ 表示由(并且只由)使得 $P(x)$ 成立的那些元素 x 组成的 S 的子集，例如，如果所有自然数组成的集记作 $\mathbf{N}$，则所有奇数构成的子集可记作$\{x\in\mathbf{N} \mid x$ 是奇数$\}$。】

♣(8) On the other hand, forms like $\{x \mid P(x)\}$, in which the domain over which x ranges is left unspecified, are best avoided.

本句两个由 which 引导的从句都是定语从句，后一个套在前一个中间。前一个定语从句是非限制性从句，补充说明条件。其中 range 是动词，在第二个从句中作谓语。

【另一方面，类似于$\{x \mid P(x)\}$的形式当 x 在其中变化的区域仍未指定的情

形下，最好不要使用。】

♣(9) In most cases, the sets under consideration in any given case will all be subsets of some given set U, the "universe of discourse".

句中 the universe of discourse 本意为"论域"，在本文和 universe 一样指全集。本句前后两个 case(s)，前者表示总体情况，后者指具体情形。

【在多数情况下，在任何一种给定的情形下所考虑的集都会是某个给定的称为"全集"的集 U 的子集。】

♣(10) This example makes it clear why the complement, to be useful, has to be taken within a given set as universe.

这里 it 是 make 的形式宾语，其内容由 why 引导的从句表述。to be useful 是插入语，说明 complement。

【此例表明，为什么有用的补集必须取自某个给定的全集。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***composite*** n. 合数；a. 合成的，复合的

～ function 复合函数；～ graph 合成图，复合图；～ mapping 复合映射，合成映射；～vector 合成向量。

2) ***correspondence*** n. 对应

～ analysis 对应分析；～ principle 对应原理。

相关术语：

corresponding a. 对应的：～ angles 同位角，对应角；～ sides 对应边；～ points 对应点。

3) ***symbolic*** a. 符号的

～ logic 符号逻辑；～ calculus 符号演算；～ function 符号函数；～ language 符号语言。

相关术语：

symbol n. 符号：～ computation 符号计算；～ of numeral 数字的符号。

4) ***curve*** n. 曲线；vt. 弯曲

～ of second order 二次曲线(圆锥曲线)；～ segment 曲线段。

相关术语：

curved a. 弯曲的：～ line 曲线；～ surface 曲面。

5) ***set*** n. 集

empty ～(或 null ～)空集；～ theory 集论；the ～ of integers 整数集；open ～ 开集；closed ～ 闭集。

6) ***supplementary*** a. （互）补的

～ angle 补角；～ conditions 补充条件，辅助条件；～ set 补集；～ unknown 补充未知数。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***reduce*** vt. 简化，转化，缩减

常用 reduce to 表示“简化为”、“转化为”、“缩减成”等。又，reduce by 或 be reduced by 用来表示减少的数量或倍数（包括百分比）。如，The price is ***reduced by*** $5.【价钱减少了 $5。】关于数量与倍数的增减的表示法，可参见 §3.10。

(2) ***regard*** vt. 认为，看做

常用 regard sth. as 表示“认为……是”，与 consider sth. as 同义，常用被动式。

(3) ***contain*** vt. 包含

be contained in 意为“包含于”。

其同义词如 include，involve 等。

(4) ***consist*** v. 组成

常用 consist of 表示“由……组成”。例：The right half plane consists of the points (x, y) satisfying $x > 0$.【右半平面由满足 $x>0$ 的点(x, y)组成。】在表示这一意思时，consist of 出现的频率高于 be composed of，be constituted of 等词组。表示“组成”的动词还有 constitute 等（参见 §2.5 之三）。

(5) ***indicate*** v. 指示，指明，表示

在数学英语中，较常作“指明”解；而作“表示”解时与 denote，designate 等同义，但出现的频率远不如 denote。

(6) ***hold*** vi. 有效，成立（在数学英语中）

在数学英语中，更常用“be valid”或“be true”表示“成立”。参见 §2.11 之三。

3. 重要形容词、副词、介词短语

(1) ***under consideration*** 在名词之后作定语，表示“考虑中的”。

(2) ***in advance*** 事先，预先。

(3) ***in contrast to / with*** 意为“与……相对照”。

(4) ***in the nature of*** 具有……性质。

(5) ***in(with) reference to*** 关于，参考。

4. 典型例句与句型

(1) Actually, we shall discuss ***not so much*** a new theory ***as*** an agreement about the precise terminology that we wish to apply to more or less familiar ideas.

惯用法 not so much…as…表示一种比较形式，意思是“……不像……那么多”。译文见♣(2)。

(2) A ***is said to be*** B.

A ***is called*** B.

B ***is defined as*** A.

以上三个被动式句型在数学英语中都常用来给出数学术语的定义。其中，句子 A is said to be B 和 A is called B 表示“(满足某种条件的)A 被称为 B”。因为 say 是不及物动词，所以采用主语补语的形式；call 可以带双宾语，A is called B 采用主动语态时可以改写成“We call A B.”(我们把 A 称为 B)。而 B is defined as A 表示“(新概念)B 定义为(满足某种条件的)A”。关于定义叙述方式的更详细介绍可参见 § 5.5.2。

练 习 2.4

1. 掌握下列数学术语的含义及应用：

set, abstract set, improper subset, proper subsets, complement set, collection; branch, notation, geometric figures, terminology; reduce to, regard as, represent, belong to, be contained in, be composed of, consist of, be denoted by, hold; elements, members, intersection, union, universe of discourse; given case, bounded above, upper bound, least upper bound, the completeness axiom.

2. 把下面的术语译成英文：

集、子集、真子集、全集(论域)、补集、抽象集；并集、交集、元素；组成、包含、属于；术语、概念、上有界、上界、最小的上界、完备性公理。

3. 汉译英：

(1) 集合论已经成了许多数学分支共同的理论基础和重要工具之一。

(2) 我们将讨论的不是新理论的重要意义，而是这种理论在自然科学中的应用。

(3) 集 S 本身是 S 的非真子集；若 T 是 S 的子集且不是 S，则称 T 为 S 的真子集。

(4) 集由一些事物组成，这时不对集合所包含的各个事物所具有的性质作任何假定。

(5) 集 S 的子集 T 经常可以表示为 $\{x\in S \mid P(x)\}$，即 T 是由使得 $P(x)$ 成立的那些元素 x 组成的。

(6) 因为一个集可能是许多不同的集的子集，所以要指定一个集作为全集，才能确定相应的补集。

(7) 这个例子使得如下问题变得清楚起来，即为什么空间中的两条直线可能既不相交也不平行。

4. 英译汉：

(1) Let **N** be the set of all natural numbers. If S is the set of all even numbers, then its complement in **N** is the set of all odd numbers.

(2) In discussing many branches of mathematics, be it analytic geometry, algebra, or differential equations, it is helpful to use vectors, matrixes and determinants.

(3) A nonempty set S is said to be *bounded above*(上有界的)provided that there is a number c having the property that $x \leqslant c$ for all x in S. Such a number c is called an *upper bound* (上界)for S.

(4) *The completeness axiom*(完备性公理)states that for any nonempty set S of real numbers which is bounded, there is a *smallest*, or *least*, *upper bound* (最小的上界)among the set of upper bounds for S.

(5) From any two objects x and y we can form the sequence (x, y); it is called an *ordered pair*(有序对), and of course is different from (y, x), unless $x=y$. If S and T are any sets, we denote by $S \times T$ the set of all ordered pairs $(x, y)$with $x \in S$ and $y \in T$. The set $S \times T$ is called the *Cartesian product*(笛卡儿积) of S and T, after R. Descartes who showed how to describe points of the plane by the Cartesian product of the real line with itself.

§2.5 平面点集与圆锥曲线
(Sets of Points in the Plane and Conic Sections)

一、精读课文

Part A Sets of Points in the Plane[26]

We have already shown that there is a *one-to-one correspondence* between points in a plane and *pairs of numbers* (x, y). Certain sets of points in the plane may be of special interest. For example, we may wish to examine the set of points **comprising** the circumference of a certain circle, or the set of points **constituting** the interior of a certain triangle. One may wonder if such sets of points may be succinctly described in a *compact* mathematical notation.

We may write

$$\{(x, y) \mid y=2x\} \tag{i}$$

to describe the set of *ordered pairs* (x, y), or *corresponding points*, such that the *ordinate* is equal to twice the *abscissas*[♣(1)]. In effect, then, the *vertical line* in (i)is read "such that"[♣(2)]. By "the graph of the set of ordered pairs" is meant the set of all points of the plane corresponding to the set of ordered pairs. The student will readily infer that the set of points constituting the graph lies on a straight line.

Consider the set

$$\{(x, y) \mid y=x^2\}.$$

Consistent with our previous interpretation, this symbol represents the set of ordered pairs (x, y)such that the ordinate is equal to the square of the abscissa. Here, the total graph comprises a simple recognizable geometrical figure, a curve known as a *parabola*.

On the basis of these two examples, one may **be tempted to** believe that any *arbitrarily* drawn curve, which of course determines a set of points or ordered pairs, could be described succinctly by a simple equation[♣(3)]. Unfortunately, this is not the case.

Consider now the set

$$\{(x, y) \mid y>2x\} \tag{ii}$$

to describe the set of points (x, y)whose ordinate is greater than twice its abscissa[♣(4)]. In this case, our set of points constitutes not a curve, but a region of the coordinate plane.

Part B Conic Sections[27]

The general real *quadratic equation* in two variables has the form

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{iii}$$

where the coefficients are **assumed to be** real and $A^2+B^2+C^2\neq 0$. The graphs of equations of the form (iii) are called *conic sections*, since for every set of real coefficients for which (iii) has a *nonvacuous graph*, the graph may be obtained as the intersection of a plane and a right circular cone (possibly degenerate)[♣(5)].

Let Π be an arbitrary real plane and consider the *right circular cone* generated by lines through the fixed point P and a given *nondegenerate* circle with center Q (as shown in Figure 2. 5. 1)[♣(6)]. Let the *constant angle* between the

generating lines and PQ be α. A graph of the quadratic equation (iii) is said to be *degenerate* if and only if it is obtained by passing the plane Π through P[♣(7)]. This condition may also be expressed algebraically as follows: The graph is degenerate if and only if $\Delta = 0$, where Δ is the *determinant* of coefficients in the form

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}.$$

A nondegenerate graph of (iii) is a *hyperbola*, *parabola*, or *ellipse according as* $B^2-4AC >$, $=$, or < 0 (B^2-4AC is called the *discriminant* of the quadratic equation)[♣(8)]. *Geometrically*, these three cases, respectively, arise according as the smallest angle θ between the plane Π and the line PQ is $<$, $=$, $> \alpha$ (Figure 2.5.2). For example, consider the cone $3x^2+3y^2-z^2=0$, with $\alpha=30°$. For any real number k, the plane $z=k$, with θ equal to a right angle, intersects the cone in a circle

$$3x^2+3y^2-k^2=0\text{[♣(9)]};$$

the plane $z=x+k$ with $\theta=45°>\alpha$ intersects the cone in an ellipse

$$2x^2+3y^2-2xk-k^2=0;$$

the plane $z=x\sqrt{3}+k$ with $\theta=30°=\alpha$ intersects the conic in a parabola

$$3y^2-2xk\sqrt{3}-k^2=0;$$

and the plane $z=2x+k$ with $\theta<\alpha$ intersects the cone in a hyperbola

$$3y^2-x^2-4xk-k^2=0.$$

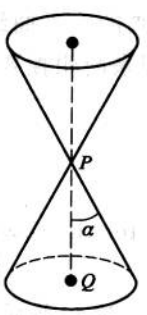
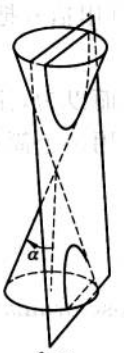
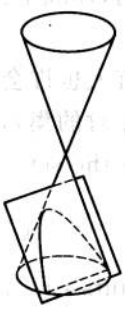


Figure 2.5.1





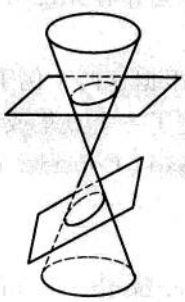


Figure 2.5.2

二、阅读与翻译指导

♣(1) We may write

$$\{(x, y) \mid y=2x\} \tag{i}$$

to describe the set of ordered pairs (x, y), or corresponding points, such that the ordinate is equal to twice the abscissas.

在数学英语的表达中,such that 常作为连接词引起一个状语从句,表示主句中有关对象必须满足的条件。译成中文时可采用多种方式(有时借助于"使得"、"满足"或"其中"等词语)来表达对主句中有关对象的修饰或说明。本句可把条件译成定语:

【我们可以写出

$$\{(x, y) \mid y=2x\} \tag{i}$$

来描述由纵坐标等于横坐标的两倍的有序对(x, y)组成的集或对应的点集。】

♣(2) In effect, then, the vertical line in (i)is read "such that".

因为 such that 很难用简短的中文准确译出。可以写出英文原词,然后附加说明。

【那么,(i)中的竖线在实际应用中就读作"such that"("使得"或"这样的")。】

♣(3) On the basis of these two examples, one may be tempted to believe that any arbitrarily drawn curve, which of course determines a set of points or ordered pairs, could be described succinctly by a simple equation.

成语 on the basis of sth. 的意思为"根据某事"。动词 tempt 的意思是"引诱",be tempted to do sth. 意思是"想要做……"。句中 which 引导的非限制性定语从句作补充说明之用,译成中文时可用括号把它括起来,避免表达不连贯的缺点。

【根据这两个例子,有人也许会因此而以为,任一随意画的一条曲线(它当然就决定了一个点集或有序对的集),都能用一个简单的方程来简明扼要地描述。】

♣(4) Consider now the set

$$\{(x, y) \mid y>2x\} \tag{ii}$$

to describe the set of points (x, y)whose ordinate is greater than twice its abscissa.

句中的动词不定式 to describe 作前面的式子的定语。这句前后出现两个 set,如果采用直译,可能不太顺畅。注意到前一个"集"指的是式(ii),后一个

"集"指的是点组成的几何图形，根据这个情形，可以适当补充一些文字，把动词不定式短语译成分句。

【现在考虑集

$$\{(x, y) \mid y > 2x\}, \tag{ii}$$

它描述的是由纵坐标大于横坐标的两倍的点(x, y)所组成的集。】

♣(5) The graphs of equations of the form (iii) are called conic sections, since for every set of real coefficients for which (iii) has a nonvacuous graph, the graph may be obtained as the intersection of a plane and a right circular cone (possibly degenerate).

在由 since 引起的原因从句中包含了一个由 which 引导的定语从句，用于修饰 coefficients，说明 coefficients 必须满足的条件。其中(iii)has a nonvacuous graph 虽然可以直译成"(iii)具有非空图形"，但通常讲"(iii)的图形非空"。

【形如(iii)的方程的图形称为圆锥曲线，因为对于每一组使得(iii)的图形非空的实系数，该图形都可以用一个平面截取一个正圆锥(可能是退化的)来获得。】

♣(6) Let Π be an arbitrary real plane and consider the right circular cone generated by lines through the fixed point P and a given nondegenerate circle with center Q (as shown in Figure 2.5.1).

句中 generated 引导的过去分词短语作定语修饰 right circular cone，through 引导的介词短语修饰 lines，由于修饰成分比较长，宜译成分句。

【设Π是一个任意的实平面，同时考虑由这样的直线所生成的正圆锥：它们通过固定点 P 和一个给定的以 Q 为圆心的非退化的圆(如图 2.5.1 所示)。】

♣(7) A graph of the quadratic equation (iii)is said to be degenerate if and only if it is obtained by passing the plane Π through P.

根据上下文知，by passing the plane Π through P 中有所省略，翻译时应补充完整。全句可译成：

【二次方程(iii)的图形称为退化的，当且仅当它是由通过正圆锥顶点 P 的平面Π所截取的。】

♣(8) A nondegenerate graph of (iii)is a hyperbola, parabola, or ellipse according as $B^2-4AC>$, $=$, or <0.

词组 according as 类似于 according to，作介词，意思为"根据"或"取决于"等。

【根据 $B^2-4AC>$，$=$或<0，方程(iii)的非退化图形分别是双曲线、抛物线

或椭圆。】

♣(9) For any real number k, the plane $z=k$, with θ equal to a right angle, intersects the cone in a circle

$$3x^2+3y^2-k^2=0.$$

短语 intersect the cone in a circle 意思是"与圆锥的交线是一个圆"。插入语 with θ equal to a right angle 的译文可加括号,以免使译文的句子意思间断。

【对任意实数 k,平面 $z=k$(当相应的 θ 是直角时)与圆锥的交线是一个圆 $3x^2+3y^2-k^2=0$。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***coordinate*** n. 坐标

～ axis 坐标轴;～ transformation 坐标变换;～ of a point 点的坐标;cartesian ～ system 笛卡儿坐标系。

相关术语:

abscissa n. 横坐标;quadrant n. 象限;ordinate n. 纵坐标。

axis n. 轴(复数为 axes):x-axis x 轴;y-axis y 轴; pole axis 极轴。

2) ***intersection*** n. 交、交集

～ point = point of ～ 交点; ～ properly 正常相交;the ～ of sets A and B 集 A 与 B 的交(集)。

3) ***degenerate*** a. 退化(的)

～ conic 退化二次曲线;～ parabola 退化抛物线;～ matrix 退化矩阵;～ differential equation 退化微分方程;～ surface of the second order 退化二次曲面。

4) ***vertical*** a. 竖直的,垂直的

～ line 竖直线;～ opposite angles 对顶角;～asymptote 垂直渐近线。

相关术语:

perpendicular n. 垂线;a. 垂直的,正交的:～ bisector 中垂线;～ line 垂线。

horizontal a. 水平的:～ line 水平线;～ plane 水平面。

5) ***parabola*** n. 抛物线

～ formula 抛物线公式;～method 抛物线法

相关术语:

parabolic a. 抛物线的:～ cylinder 抛物线柱面;～ cylindrical surface 抛物

柱面；～ differential equation 抛物(型)微分方程。

6) ***generating*** a. 生成的

～ circle 母圆；～ curve 母曲线；～ element 生成元(素)；～ function 母函数；～ line 母线，生成线；～ operator 生成算子；～ subset 生成子集。

相关术语：

generator n. 母线、生成元；～ matrix 生成矩阵；～ of cone 锥的母线。

7) ***quadratic*** a. 二次的

～ convergence 平方收敛；～ curve 二次曲线；～ cylinder 二次柱面；～ equation 二次方程；～ form 二次型；～ inequality 二次不等式；～ transformation 二次变换。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***comprise*** vt. 组成

例 The points (x, y)satisfying $x>0$ ***comprise*** the right half plane.【满足 $x>0$ 的点(x, y)组成了右半平面。】也可以用被动式：The right half plane is comprised of the points (x, y)satisfying $x>0$.【右半平面由满足 $x>0$ 的点(x, y)组成。】

(2) ***constitute*** vt. 构成

constitute 和 comprise 是同义词，用法也大致相同。至今我们已经介绍了四个意为"组成或构成"的动词，在表示"由……构成(组成)"短语时，comprise, compose 和 constitute 都用被动语态形式，只有 consist of 采用主动语态形式。参见§2.2 和§2.4 之三。

(3) ***obtain*** vt. 得到

例 Based the above discussion, we ***obtain*** the conclusion.【基于上述讨论，我们得到这个结论。】动词 obtain 是数学英语中表示经计算或证明而"得到"某一结论时，最常用的正式用语。此外，有时也可用它的同义词 derive, arrive at, get 等表示"得到"。

(4) ***mean*** vt. 意思是，指的是

词组 by…is meant…，可译为"所谓……指的是……"。

例 ***By*** "the graph of the set of ordered pairs" ***is meant*** the set of all points of the plane corresponding to the set of ordered pairs.【所谓有序对集的图形，指的是平面上对应于该有序对集的所有的点组成的集。】

3. 重要形容词、副词、介词短语

(1) ***be of special interest*** 具有特殊的意义。这是介词 of 的一种用法。类似的例子如，Equations are of great use.【方程很有用。】

(2) ***one-to-one*** a. 一对一的。术语 one-to-one correspondence 表示“一一对应”。

(3) ***consistent*** a. 一致的,相容的。常与 with 联用,词组 be consistent with 的基本含义是“是与……一致的”,在数学中常表示“是与……相容的”。

(4) ***on the basis of*** 意为“在……基础上”。

4. 典型例句与句型

(1) One may wonder ***if*** such sets of points may be succinctly described in a compact mathematical notation. 【有人也许还想知道,这类点集是否可以用一种简洁的数学记号来简要地描述。】

句中 if 引导一个宾语从句,连接词在这里的意思是“是否”。这时 if 也可以用 whether 来代替。

(2) One ***may be tempted*** to believe that any arbitrarily drawn curve could be described succinctly by a simple equation.

译文可参看♣(3)。这句是含有情态动词的被动句,有关被动语态的介绍可参看 §3.9。

练 习 2.5

1. 掌握下列数学术语的含义及应用:

vertical line, horizontal line, pairs of numbers, ordered pairs, ordinate, abscissas, one-to-one correspondence, corresponding points; nonvacuous graph, conic sections, right circular cone, constant angle, generating lines, hyperbola, parabola, ellipse; quadratic equation, discriminant, determinant; degenerate, nondegenerate, arbitrarily, consistent, geometrically.

2. 把下面的术语译成英文:

竖直线、水平线、数对、有序对、纵坐标、横坐标、一一对应、对应点、圆锥曲线、非空图形、直立圆锥、定值角、母线、双曲线、抛物线、椭圆;退化的、非退化的、任意的、相容的、在几何上;二次方程、判别式、行列式。

3. 汉译英:

(1) 在平面直角坐标系中,人们可以把点和有序数对建立一一对应,把圆锥曲线和二次方程也建立一一对应。

(2) 任一随意画出的一条曲线虽然决定了一个点集,但未必能用一个简单的方程来描述。

(3) 这个符号可用来表示由纵坐标等于横坐标的立方的有序对(x, y)组成的集。

(4) 只要一组实系数使得二次方程具有非空图形，则这个图形可看成一个平面与一个直立圆锥的交。

(5) 根据判别式的取值，可以知道方程(iii)的非退化图形是双曲线、抛物线或椭圆。

(6) 二次方程为退化的当且仅当它的系数行列式 Δ 等于 0.

4. 英译汉：

(1) In Example 1, we solved a system of equations (one equation is a quadric and another is linear) by both graphing and the algebraic method of substitution. The graph of a system of equations gives us information about the solution, and the algebraic solution gives us information about the graph. This interplay between the "algebra" of a system and its analytic "geometry" is attractive and very useful.

(2) A circle may be defined as the locus of points in a plane equidistant from a given fixed point Q of the plane. When there is a coordinate system $(x, y)$and a distance relation in the plane, the circle is the graph of a polynomial $(x-h)^2+(y-k)^2-r^2$, where its center Q has coordinates $(h, k)$and the distance is $r\geqslant 0$. A circle with $r=0$ is called a *point circle*(点圆) and is classified as a degenerate form of the circle.

(3) Consider a nondegenerate real circle with center Q and let $P\neq Q$ be an arbitrary real fixed point on the line that passes through Q and is perpendicular to the plane of the circle. The locus of points on the set of lines joining P to points of the circle is called a right circular cone.

(4) The degenerate cones may be identified algebraically or geometrically. From a geometric point of view, a hyperbola may degenerate into two intersecting lines, a parabola into two coincident lines or two parallel lines (using a right circular cylinder), and an ellipse into a point.

§2.6 空间的向量、直线与平面
(Vectors, Equations of Lines and Planes in Space)

一、精读课文

Part A Vectors in Space[21]

To employ the coordinate system to study *vectors* in space, we use three

unit vectors i, j, and k. The vector i **points** in the direction of the positive x-axis; the vector j points in the direction of the positive y-axis; and the vector k points in the direction of the positive z-axis (Figure 2. 6. 1).

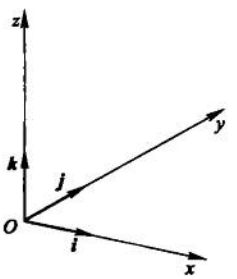


Figure 2. 6. 1

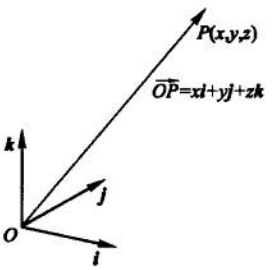


Figure 2. 6. 2

The *POSITION VECTOR* $\overrightarrow{OP}$ of a point (x, y, z) in space is the vector from *the origin* to the point (Figure 2. 6. 2). It can be **expressed** in the form $OP = xi + yj + zk$. We use the symbol $\langle x, y, z\rangle$ for this linear combination of the vectors i, j, and k:

(3) $\overrightarrow{OP} = xi + yj + zk = \langle x, y, z\rangle$ for $P = (x, y, z)$.

Thus, we have $i = \langle 1, 0, 0\rangle$, $j = \langle 0, 1, 0\rangle$, and $k = \langle 0, 0, 1\rangle$.

The *displacement vector* $\overrightarrow{PQ}$ from the point $P = (x_1, y_1, z_1)$ to the point $Q = (x_2, y_2, z_2)$ can be **computed from** the coordinates of the points by the formula

(4) $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$.

The length of $\overrightarrow{PQ}$ is denoted by $|\overrightarrow{PQ}|$, then by Pythagoras theorem we have

(5) $|\overrightarrow{PQ}| = |(x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k| = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{1}{2}}$.

In particular, we have

$$|\overrightarrow{OP}| = |xi + yj + zk| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \text{ for } P = (x, y, z).$$

The sum $A + B$ of two vectors in space and the product aA of a number and a vector are **defined** *geometrically* as in two dimensions[♣(1)]. The sum $A + B$ lies along the *diagonal* of a parallelogram with sides formed by placing A and B with a common *base point*[♣(2)] (Figure 2. 6. 3). If instead we place the base of B at the *tip* of A, the sum runs from the base of A to the tip of B (Figure 2. 6. 4).

The product $a\boldsymbol{A}$ has length $|a|\,|\boldsymbol{A}|$ and the same direction as $\boldsymbol{A}$ if a is positive and the opposite direction if a is negative (Figure 2.6.5).

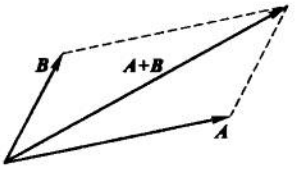


Figure 2.6.3

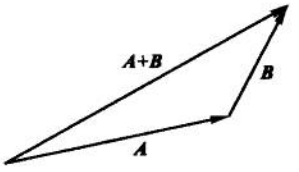


Figure 2.6.4

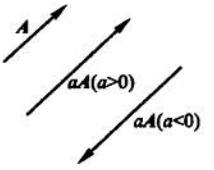


Figure 2.6.5

I. Vector Arithmetic by Components

As with vectors in an xy-plane, we can add vectors in xyz-space and multiply them by numbers by performing the operations on the *components*[♣(3)]. We have

(4) $\langle x_1, y_1, z_1\rangle+\langle x_2, y_2, z_2\rangle=\langle x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2\rangle$,

(5) $a\langle x,y,z\rangle=\langle ax,ay,az\rangle$.

II. The Dot Product

Definition 6.1 The *dot product* between two vectors $\boldsymbol{A}=\langle x_1, y_1, z_1\rangle$ and $\boldsymbol{B}=\langle x_2, y_2, z_2\rangle$ is

(6) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\langle x_1, y_1, z_1\rangle\cdot\langle x_2, y_2, z_2\rangle=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

The proof of Theorem 5.1 in previous section, when applied to the case of three dimensions, gives the formula

(7) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\cos\theta$,

which expresses the dot product in terms of the lengths of the vectors and the *cosine* of an angle θ between them (Figure 2.6.6).

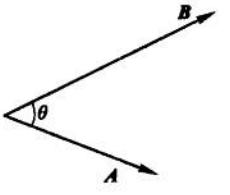


Figure 2.6.6

Part B Equations of Lines and Plane[21]

I. Parametric Equations of Lines

In this section we use vectors to study lines and planes in *three-dimensional space*.

We can describe a line in a coordinate plane by giving a point on it and its slope. The most convenient way to describe a line in space is to give a point on it and a nonzero vector parallel to it[♣(4)]. From this information we obtain *parametric equations* of the line, as described in the next theorem.

Theorem 1 The line through the point $P(x_0, y_0, z_0)$ and parallel to the nonzero vector $\boldsymbol{A}=\langle a, b, c\rangle$ (Figure 2.6.7) has the parametric equations

(1) $x=x_0+at,\ y=y_0+bt,\ z=z_0+ct.$

Proof. The position vector of P is $\overrightarrow{OP}=\langle x_0, y_0, z_0\rangle$. If $Q(x, y, z)$ is another point on the line, then the displacement vector $\overrightarrow{PQ}$ is parallel to $\boldsymbol{A}$ and is of the form $t\boldsymbol{A}$ for some number t (Figure 2.6.7). Therefore the position vector of Q is

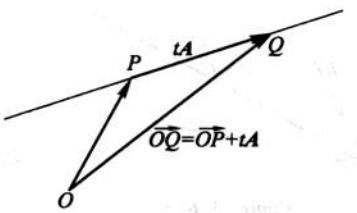


Figure 2.6.7

$$\begin{aligned}\langle x, y, z\rangle=\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+t\boldsymbol{A}\\&=\langle x_0, y_0, z_0\rangle+t\langle a, b, c\rangle\\&=\langle x_0+at, y_0+bt, z_0+ct\rangle.\end{aligned}$$

This gives equations (1) for the coordinates of Q. Q. E. D♣(5).

Example 1 Give parametric equations for the line through the point (6, 4, 3) and parallel to the vector $\langle 2, 0, -7\rangle$.

Solution. By formula (1) with $(x_0, y_0, z_0)=(6, 4, 3)$ and $\langle a, b, c\rangle=\langle 2, 0, -7\rangle$, we obtain the equations

$$x=6+2t,\ y=4+0t\ (\text{i.e. } y=4),\ z=3-7t. \qquad \square$$

II. Equations of Planes

We can describe a plane in space by giving a point on it and a nonzero of planes vector *perpendicular* to it (Figure 2.6.8). The vector is called a *normal vector* to the plane. The next theorem shows how to obtain an equation for the plane from this information.

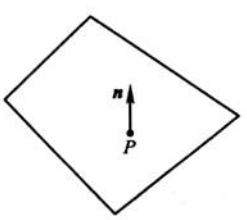


Figure 2.6.8 The plane through P and with normal vector $\boldsymbol{n}$

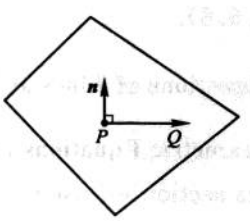


Figure 2.6.9 Q is in the plane if $\overrightarrow{PQ}$ is perpendicular to $\boldsymbol{n}$

Theorem 2 The plane through the point $P(x_0, y_0, z_0)$ and with the nonzero normal vector $\boldsymbol{n}=\langle a, b, c\rangle$ has the equation

(2) $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

Proof. A point $Q(x, y, z)$is on the plane if and only if the displacement vector $\overrightarrow{PQ}=\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle$ is perpendicular to $\boldsymbol{n}$ (Figure 2.6.9). This is the case if and only if the dot product

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=\langle a, b, c\rangle\cdot\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$$

is zero, so we obtain equation (2)♣(6). Q. E. D.

Example 2 Give an equation for the plane through the point (2, 3, 4)and perpendicular to the vector $\langle -6, 5, -4\rangle$.

Solution. By formula (2) with $(x_0, y_0, z_0)=(2, 3, 4)$ and $\langle a, b, c\rangle=\langle -6, 5, -4\rangle$, we obtain the equation

$$-6(x-2)+5(y-3)-4(z-4)=0. \qquad \square$$

We cannot describe a plane by giving a point on it and one vector *parallel* to it because there are an infinite number of such planes♣(7) (Figure 2.6.10). We have to give the point and two *nonparallel* vectors that are parallel to the plane (Figure 2.6.11).

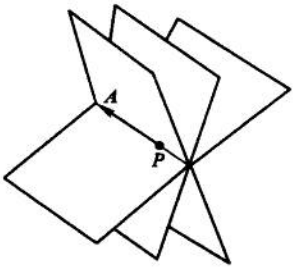


Figure 2.6.10 Planes through P and parallel to $\boldsymbol{A}$

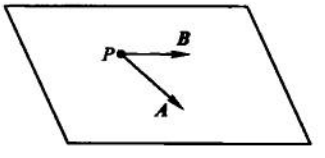


Figure 2.6.11 The plane through P and parallel to $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$

二、阅读与翻译指导

♣(1) The sum $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ of two vectors in space and the product $a\boldsymbol{A}$ of a number and a vector are defined geometrically as in two dimensions.

这句主语较长，由两个并列的名词短语组成。句中 as in two dimensions 是比较短语，可看成 as 引导的一个省略的比较状语从句，翻译时需要适当补充被省略的成分。

【(三维)空间中的两个向量之和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 及数与一个向量的乘积 $a\boldsymbol{A}$ 可以像二维向量那样用几何的方法来定义。】

♣(2) The sum $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ lies along the diagonal of a parallelogram with sides formed by placing $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ with a common base point.

这句的主语和谓语都很简单,但修饰成分(状语和定语)较长,along 引导的介词短语当动词 lies 的状语;第一个 with 引导的介词短语修饰名词 parallelogram;formed 引导的分词短语修饰名词 sides;第二个 with 引导的介词短语修饰动名词 placing。要译好这类句子,关键是要正确分析逻辑关系。本句可以借助于几何图形来理解,翻译时适当调整原文的语序,进行意译。

【把向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的起点重合,则和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 落在以 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的对角线上。】

♣(3) As with vectors in an xy-plane, we can add vectors in xyz-space and multiply them by numbers by performing the operations on the components.

句首 as 引导的一个省略的比较状语从句。主句的动词 add 和 multiply 都是及物动词,介词短语 by numbers 只修饰 multiply,第二个 by 引导的介词短语同时修饰两个动词。

【如同处理平面中的向量那样,我们对 xyz 空间中的向量做加法和数乘时,也可以通过对它们的分量的运算进行。】

♣(4) The most convenient way to describe a line in space is to give a point on it and a nonzero vector parallel to it.

翻译这句时,两个 it 最好都还原成它所指代的名词,即"直线"。

【描述空间直线的最方便的方法是给定直线上的一点及一个平行于该直线的非零向量。】

♣(5) Q. E. D 是结束符,常放在数学证明之后,可译成"证毕";若放在命题叙述之后则不必译出。本文在解题结束时用符号□作为结束符,也不译出。

♣(6) This is the case if and only if the dot product

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=\langle a, b, c\rangle\cdot\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$$

is zero, so we obtain equation (2).

This is the case 指的是上一命题中后面一种情形。这里的 if and only if 固然可以译成"当且仅当",但是如果前一句已经出现 if and only if,则两处的译法可以适当不同,以免显得语言过于单调。全句可译成:

【后面这种情形等价于这两个向量的点乘为零,即

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=\langle a, b, c\rangle\cdot\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

因此得到方程(2)。】

♣(7) We cannot describe a plane by giving a point on it and one vector parallel to it because there are an infinite number of such planes.

本句介词 by 引导的短语表示条件，最好译出；句中两个 it 最好都译成它所指代的名词，即“平面”。

【如果只给定平面上的一点及一个与该平面平行的向量，我们就无法刻画这个平面，因为这样的平面有无数多个。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***vector*** n. 向量

unit ～ 单位向量；normal ～ 法向量；tangent ～ 切向量；position ～ 位置向量；displacement ～ 位移向量。

2) ***geometrically*** adv. 在几何上，用几何方法

相关术语：

geometry n. 几何；geometrical a. 几何的。

3) ***perpendicular*** a. 垂直的

～ line 垂线；～ plane 垂直面；be ～ to 垂直于。

4) ***displacement*** n. 位移

～ vector 位移向量；～ operator 位移算子。

5) ***component*** n. 分量，分支，成分，连通区

～ ideal 支理想；～ of a vector 向量的分量。

6) ***parametric*** a. 参数的

～ equations 参数方程；～ analysis 参数分析。

相关术语：

parameter n. 参数。

7) ***parallel*** a. 平行的

～ lines 平行线；～ planes 平行平面；～ to 平行于。

相关术语：

parallelogram n. 平行四边形；nonparallel a. 不平行的。

8) ***base*** n. 基，底

～ point 基点，起点；～ angle 底角；～ for topology 拓扑基；～ of logarithm 对数的底。

9) ***product*** n. 积，乘积

dot ～ 点积，内积；～ rule 乘积法则；～ measure 积测度；～ metric 积度量；～ of paths 道路的积。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***point*** vt. 使尖锐；vi. 指，指向；n. 点

例 The vector ***i points*** in the direction of the positive x-axis.【向量 $\boldsymbol{i}$ 指向 x 轴的正向。】

(2) ***compute*** vt. 计算

词组 compute from 表示“由(根据)……来计算”。

例 The displacement vector $\overrightarrow{PQ}$ from the point $P=(x_1, y_1, z_1)$ to the point $Q=(x_2, y_2, z_2)$ can be ***computed from*** the coordinates of the points by the formula.【从点 $P=(x_1, y_1, z_1)$ 到点 $Q=(x_2, y_2, z_3)$ 位移向量 $\overrightarrow{PQ}$ 可以根据点的坐标来计算。】

(3) ***add*** vt. 加，增加；vi. 做加法，增添

例 We ***add*** two vectors.【我们把两个向量加起来。】

例 ***Add up*** the figures in this column.【把这栏的数字加起来。】

(4) ***multiply*** vt. 乘，增加；vi. 做乘法

例 ***Multiplying*** the vector $\boldsymbol{A}$ by a positive number t, we obtain a vector $t\boldsymbol{A}$ which has length $|t||\boldsymbol{A}|$ and the same direction as $\boldsymbol{A}$.【把向量 $\boldsymbol{A}$ 乘上一个正数 t，我们得到一个向量 $t\boldsymbol{A}$，其长度为 $|t||\boldsymbol{A}|$，方向与 $\boldsymbol{A}$ 一样。】

3. 重要形容词、副词、介词短语

(1) ***through*** prep. 通过，穿过

例 the line ***through*** the point P.【通过 P 点的直线。】

(2) 介词词组 ***from…to…*** 表示时间或空间间隔：“从……到……”。

例 The position vector $\overrightarrow{OP}$ of a point (x, y, z) in space is the vector ***from*** the origin ***to*** the point.【空间中的点 (x, y, z) 的位置向量就是从原点到该点的向量。】

4. 典型例句与句型

(1) The proof of Theorem 5.1 in previous section, when applied to the case of three dimensions, gives the formula $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$, which ***expresses*** the dot product ***in terms of*** the lengths of the vectors and the cosine of an angle θ between them。本句 applied 引导的过去分词短语前面加 when，相当于一个省略的时间状语从句。关于过去分词短语的介绍，参见 §3.1。句中 which 引导的非限制性定语从句补充说明前面公式的含义。expresses … in terms of 是常用搭配，意思是“通过……来表达”，in terms of 后接用于表达的语言或内容。

(2) It can be ***expressed in the form*** $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 本句 express … in

the form 也是固定搭配的常用成语，主要强调表达的形式。

练 习 2.6

1. 掌握下列数学术语的含义及应用：

vector, unit vector, normal vector, position vector; base point, tip of a vector, component of a vector, dot product; parametric equations, displacement, geometrically, parallel lines, parallel to, parallelogram, nonparallel, perpendicular; point, add, multiply, compute.

2. 把下面的术语译成英文：

向量、单位向量、法向量、位置向量；基点(起点)、向量的尖端、向量的分量、点乘；参数方程、位移、在几何上、平行线、平行于、平行四边形、不平行的、垂直的；指向、点、加、乘以。

3. 汉译英：

(1) 在空间中，任何两个平行的向量是共线的(collinear)；两个向量能确定一个平面当且仅当它们不平行。

(2) 设向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是非零向量。把它们的起点重合，则和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 落在以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的对角线上。

(3) 实数 a 与向量 $\boldsymbol{A}$ 的乘积 $a\boldsymbol{A}$ 是一个向量，它的长度等于 $|a||\boldsymbol{A}|$，若 a 为正数，则它的方向与 $\boldsymbol{A}$ 相同；若 a 为负数，则它的方向与 $\boldsymbol{A}$ 相反。

(4) 点 $Q(x, y, z)$ 在平面上当且仅当位移向量 $\overrightarrow{PQ}$ 垂直于法向量 $\boldsymbol{n}$，即这两个向量的点乘为零。

(5) 给定直线上的一点及平行于该直线的非零向量，可以得到直线的参数方程。直线也可以表示成两个平面方程组成的方程组。

(6) 点 $P=(x_1, y_1, z_1)$ 到点 $Q=(x_2, y_2, z_2)$ 的位移向量 $\overrightarrow{PQ}$ 可以根据这两点的坐标按以下公式来计算。

4. 英译汉：

(1) It is known that Descartes used a pair of number (x, y) to locate a point in the plane, and a triple of numbers (x, y, z) to locate a point in space. When this idea is extended to n-tuple of real numbers $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ for any integer $n \geqslant 1$, the n-tuple is called an n-dimensional point or an n-dimensional vector, the individual numbers $a_1, a_2, \cdots, a_n$ being referred to as coordinates or components of the vector.

(2) Let $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ denote vectors. Any vector expressible in the form

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n(\text{with } \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \text{ scalar})$$

is said to be (expressible as) a *linear combination* of $x_1, x_2, \cdots, x_n$. (In the trivial case $n=1$, where we would be talking about "a linear combination of x_1", that would simply mean a scalar multiple of x_1.)

(3) Vectors $x_1, x_2, \cdots, x_n$ are said to be *linearly dependent* if there exist a set of scalars $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ which are not all zero such that $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n=\mathbf{0}$. Vectors $x_1, x_2, \cdots, x_n$ are said to be *linearly independent* if $x_1, x_2, \cdots, x_n$ are not linearly dependent.

Vectors $x_1, x_2, \cdots, x_n$ with $n\geqslant 2$ are linearly dependent if and only if one of them can be expressed as a linear combination of the others.

(4) Suppose vectors $x_1, x_2, \cdots, x_n$ are linearly independent. If $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ are scalars satisfying $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n=\mathbf{0}$, then $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ are all zero.

This proposition is simply a direct consequence of the definition of the dependence and independence. Indeed, if the conclusion were false, i.e. we would have $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n=\mathbf{0}$ and $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ not all zero, then by the definition, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ are linearly dependent, which *is contradictory to* the hypothesis that $x_1, x_2, \cdots, x_n$ are linearly independent.

§2.7 矩阵与线性变换 (Matrices and Linear Transforms)

一、精读课文

Part A Applications of Matrices[26]

In recent years the applications of matrices in mathematics and in many *diverse fields* have increased with remarkable speed. Matrix theory plays a central role in modern physics in the study of *quantum mechanics*.

Matrix methods are used to solve problems in *applied differential equations*, specifically, in the area of *aerodynamics*, *stress* and *structure analysis*♣(1). One of the most powerful mathematical methods for psychological studies is *factor analysis*, a subject that makes wide use of matrix methods.

Recent developments in *mathematical economics* and in problems of business administration have **led to** extensive use of matrix methods. The biological

sciences, and in particular genetics, use matrix techniques to good advantage♣(2). No matter what the student's field of major interest is, knowledge of the rudiments of matrices is likely to broaden the range of literature that he can read with understanding♣(3).

In this section we will give some elementary examples of how matrices are utilized.

The solution of n simultaneous linear equations in n unknowns is one of the important problems of applied mathematics. Descartes, the inventor of analytic geometry and one of the founders of modern algebraic notation, believed that all problems could *ultimately* be **reduced** to the solution of a set of simultaneous linear equations♣(4). Although this belief is now known to be *untenable*, we know that a large group of significant applied problems from many different disciplines are reducible to such equations♣(5).

Many of the applications require the solution of a large number of *simultaneous linear equations*, sometimes in the hundreds♣(6). The advent of computers has **made** the matrix methods effective in the solution of these *formidable* problems♣(7).

Example 1. Solve the simultaneous equations for x_1, x_2 and x_3.

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+4x_3&=4,\\ 2x_1+x_2+x_3&=-2,\\ -x_1+x_2+2x_3&=2. \end{aligned}$$

Solution. We may rewrite these equations in matrix form

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\\ -2\\ 2 \end{bmatrix} \tag{i}$$

and call the *matrix of coefficients* $\boldsymbol{A}$, the 3×1 matrix of unknowns $\boldsymbol{x}$, and the 3×1 matrix on the right $\boldsymbol{k}$, we may then write Equation (i) in the form

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{k}. \tag{ii}$$

If it were possible to find a 3×3 matrix, which is designated by $\boldsymbol{A}^{-1}$ and is called the *inverse of matrix*, such that

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}, \tag{iii}$$

where $\boldsymbol{I}$ is the identity matrix, then we would multiply both members of Equa-

tion (ii) by A^{-1}♣(8). Equation (ii) would then become

$$A^{-1}Ax=A^{-1}k. \tag{iv}$$

Using Equation (iii), we could rewrite Equation (iv)as

$$Ix = A^{-1}k,$$

$$x = A^{-1}k. \tag{v}$$

Specifically for this case, without telling you how we get it,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 5 & -8 & -6\\ -3 & 5 & 4\end{bmatrix}\text{♣(9)}.$$

Using this in Equation (v), we get

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 5 & -8 & -6\\ -3 & 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ -2\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ 24\\ -14\end{bmatrix}.$$

Thus $x_1=-6$, $x_2=24$, and $x_3=-14$. From the above discussion, we see that the problem of solving n simultaneous linear equation in n unknowns is reduced to the problem of finding the inverse of the matrix of coefficients.

It is therefore not surprising that in books on the theory of matrices the techniques of finding inverse matrices occupy considerable space. Of course, we will not in our limited treatment discuss such techniques♣(10).

Not only are matrix methods useful in solving simultaneous equations, but they are also useful in discovering whether or not the set of equations are *consistent*, in the sense that they lead to solutions, and in discovering whether or not the set of equations are determinate, in the sense that they lead to unique solutions♣(11).

Part B Representation of Linear Transformations by Matrices[24]

Let V be an n-dimensional *vector space* over the field F and let W be an m-dimensional vector space over F. Let $\mathfrak{B}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ be an *ordered basis* for V and $\mathfrak{B}'=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ an ordered basis for W. If T is any *linear transformation* from V into W, then T is determined by its action on the vectors α_j♣(12). Each of the n vectors $T\alpha_j$ is uniquely *expressible* as a linear combination

$$T\boldsymbol{\alpha}_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\boldsymbol{\beta}_i \tag{3-3}$$

of the $\boldsymbol{\beta}_i$, the *scalars* $A_{1j}, \cdots, A_{mj}$ being the coordinates of $T\boldsymbol{\alpha}_j$ in the ordered basis $\mathfrak{B}'$. Accordingly, the transformation T is determined by the mn scalars A_{ij} via the formulas (3-3). The $m \times n$ matrix $\boldsymbol{A}$ defined by $\boldsymbol{A}(i, j) = A_{ij}$ is called the *matrix* of T **relative to** the *pair of ordered bases* $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B}'$. Our immediate task is to understand explicitly how the matrix $\boldsymbol{A}$ determines the linear transformation T. If $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$ is a vector in V, then

$$T\boldsymbol{\alpha} = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{\alpha}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j(T\boldsymbol{\alpha}_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\boldsymbol{\beta}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\beta}_i.$$

If $\boldsymbol{X}$ is the coordinate matrix of $\boldsymbol{\alpha}$ in the ordered basis $\mathfrak{B}$, then the computation above shows that $\boldsymbol{AX}$ is the coordinate matrix of the vector $T\boldsymbol{\alpha}$ in the ordered basis $\mathfrak{B}'$, because the scalar

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j$$

is the entry in the ith row of the column matrix $\boldsymbol{AX}$. Let us also observe that if $\boldsymbol{A}$ is any $m \times n$ matrix over the field F, then

$$T\boldsymbol{\alpha} = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{\alpha}_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\beta}_i \tag{3-4}$$

defines a linear transformation T from V into W, the matrix of which is $\boldsymbol{A}$, relative to $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$. We summarize formally:

Theorem 11. Let V be an n-dimensional vector space over the field F and W an m-dimensional vector space over F. Let $\mathfrak{B}$ be an ordered basis for V and $\mathfrak{B}'$ an ordered basis for W. For each linear transformation T from V into W, there is an $m \times n$ matrix $\boldsymbol{A}$ with entries in F such that

$$[T\boldsymbol{\alpha}]_{\mathfrak{B}'} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathfrak{B}}$$

for every vector $\boldsymbol{\alpha}$ in V. Furthermore, $T \to \boldsymbol{A}$ is a one-one correspondence between the set of all linear transformations from V into W and the set of all $m \times n$ matrices over the field F.

The matrix $\boldsymbol{A}$ which is associated with T in Theorem 11 is called the *matrix* of T **relative to** the *ordered bases* $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$. Note that Equation (3−3) says that $\boldsymbol{A}$ is the matrix whose columns $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$ are given by

$$\boldsymbol{A}_j = [T\boldsymbol{\alpha}_j]_{\mathfrak{B}'}, \quad j=1, \cdots, n.$$

If U is another linear transformation from V into W and $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1, \cdots, \boldsymbol{B}_n]$ is the matrix of U relative to the ordered bases $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, then $c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ is the matrix of $cT+U$ relative to $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$. That is clear because

$$c\boldsymbol{A}_j + \boldsymbol{B}_j = c[T\boldsymbol{\alpha}_j]_{\mathfrak{B}'} + [U\boldsymbol{\alpha}_j]_{\mathfrak{B}'} = [cT\boldsymbol{\alpha}_j + U\boldsymbol{\alpha}_j]_{\mathfrak{B}'} = [(cT+U)\boldsymbol{\alpha}_j]_{\mathfrak{B}'}.$$

Theorem 12. Let V be an n-dimensional vector space over the field F and let W be an m-dimensional vector space over F. For each pair of ordered bases $\mathfrak{B}$, for V and W respectively, the function which assigns to a linear transformation T its matrix relative to $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ is an *isomorphism* between the space $L(V, W)$ and the space of all $m \times n$ matrices over the field F[♣(13)].

Proof. We observed above that the function in question is linear, and as stated in Theorem 11, this function is one−one and maps $L(V, W)$ onto the set of $m \times n$ matrices.

二、阅读与翻译指导

♣(1) Matrix methods are used to solve problems in applied differential equations, specifically, in the area of aerodynamics, stress and structure analysis.

术语 applied differential equations 应译成“应用微分方程”，stress and structure analysis 的意思是“应力和结构分析”。全句可译成：

【矩阵方法被用来解决应用微分方程中的问题，特别是在气体力学以及应力和结构分析领域中的问题。】

♣(2) The biological sciences, and in particular genetics, use matrix techniques to good advantage.

词组 to good advantage 作结果状语，修饰 use，表达应用的效果。

【在生物科学，特别是基因学中，矩阵技巧的使用是很有效的。】

♣(3) No matter what the student's field of major interest is, knowledge of the rudiments of matrices is likely to broaden the range of literature that he can read with understanding.

词组 read with understanding 意思是“读懂”。本句可译成：

【无论学生主要兴趣在于什么领域，矩阵的基础知识都很可能拓宽他所能读

懂的文献的范围。】

♣(4) Descartes, the inventor of analytic geometry and one of the founders of modern algebraic notation, believed that all problems could ultimately be reduced to the solution of a set of simultaneous linear equations.

句子较长，主句与同位语可以译成一句，believed 之后再译成一句。可译成：

【笛卡儿是解析几何的发明者，也是现代代数符号的创立者之一，他曾相信所有问题最终都能归结为求解联立线性方程组。】

♣(5) Although this belief is now known to be untenable, we know that a large group of significant applied problems from many different disciplines are reducible to such equations.

单词 untenable 的意思是“站不住脚的”；reducible to 的意思是“可以转化成……的”。全句可译成：

【虽然这个设想现在已被证实是不可能的，但我们知道，大量来自不同学科的重要应用问题都可转化成这种方程来处理。】

♣(6) Many of the applications require the solution of a large number of simultaneous linear equations, sometimes in the hundreds.

方程组的英文表达有两种方式：一是 system of equations；二是不用 system，而用 simultaneous equations。后者可译成“联立方程”。注意，a large number of 指的是“个数很多”。in the hundreds 意思是“用数百个(组成的)”。全句可译成：

【许多应用问题要求解由大量的方程联立成的线性方程组，有时方程的个数有数百个。】

♣(7) The advent of computers has made the matrix methods effective in the solution of these formidable problems.

单词 formidable 的含义主要有“难以应付的”、“庞大的”；根据上文知道，有的实际问题要求解几百个联立方程，其工作量很大，所以这里应选用“庞大的”。词组 make sth…effective 意思是“使……有效”。全句可译成：

【计算机的出现使得矩阵方法可以有效地用于解决这些计算量庞大的实际问题。】

♣(8) If it were possible to find a 3×3 matrix, which is designated by $\boldsymbol{A}^{-1}$ and is called the inverse of matrix, such that

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \tag{iii}$$

where I is the identity matrix, then we would multiply both members of Equation (ii) by A^{-1}.

这句采用虚拟语气，在假设的基础上进行论证，直译不易表达，可采用意译。

【如果我们能够求出逆矩阵 A^{-1}，它是一个 3×3 矩阵且满足

$$A^{-1}A = I, \tag{iii}$$

其中 I 是恒等矩阵，那么我们可将方程(ii)两边乘上 A^{-1}。】

♣(9) Specifically for this case, without telling you how we get it,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

句中 without telling you how we get it 是插入语，作附加说明。本句可以采用意译。

【特别地，在本例中，

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

这里暂不说明如何求得。】

♣(10) It is therefore not surprising that in books on the theory of matrices the techniques of finding inverse matrices occupy considerable space. Of course, we will not in our limited treatment discuss such techniques.

本句 it 是形式主语，that 引导一个主语从句，其中 in books 意思是“在一些书中”；on the theory of matrices 是修饰 books；in our limited treatment 指的是“我们(只作简单介绍)的有限篇幅中。”

【因此，在一些关于矩阵理论的书中，求逆矩阵的方法占有相当大的篇幅并不奇怪。当然，我们在这里只作有限的处理，将不会去讨论这些方法。】

♣(11) Not only are matrix useful in solving simultaneous equations, but they are also useful in discovering whether or not the set of equations are consistent, in the sense that they lead to solutions, and in discovering whether or not the set of equations are determinate, in the sense that they lead to unique solutions.

术语 consistent 的意思是“相容的”，determinate 的意思是“确定的”。句中两个 in the sense that…都是插入语，分别说明 consistent 和 determinate 的含

义，为了避免译文太长，可把插入语放在括号中，置于它们要说明的术语之后。两个 lead to 的含义都是“导致”，lead to solutions 和 lead to unique solutions 不宜直译，最好采用意译。为了避免头重脚轻，可把 useful 译成动词。

【矩阵不仅可用来解联立方程，而且可以用于发现这组方程是否相容（相容的意义是它们组成的方程组有解），也可用于发现这组方程是否确定（确定的意义是它们组成的方程组的解唯一）。】

♣(12) If T is any linear transformation from V into W, then T is determined by its action on the vectors $\boldsymbol{\alpha}_j$.

句中 action on the vectors $\boldsymbol{\alpha}_j$ 应明确译成“在各个向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 上的作用”。

【如果 T 是 V 到 W 的线性变换，则 T 由它作用在各个向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 上的结果所确定。】

♣(13) For each pair of ordered bases $\mathfrak{B}$, for V and W respectively, the function which assigns to a linear transformation T its matrix relative to $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ is an isomorphism between the space $L(V, W)$ and the space of all $m \times n$ matrices over the field F.

这句的修饰关系比较复杂，翻译时注意理清逻辑关系。其中 which 引导的定语从句修饰 function，该从句中，its matrix relative to $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$是 assign 的直接宾语，它被后置，而被前置的 to a linear transformation T 是 assign 的间接宾语。assign 原来的意思是“指定”，可根据数学内容采用意译。

【对于分别对应于 V 和 W 的每对有序基 $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$，把线性变换 T 映到它关于 $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$的矩阵的函数是空间 $L(V, W)$ 与域 F 上所有 $m \times n$ 矩阵所组成的空间的同构。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***dependent*** a. 相关的

linear ～ 线性相关的；～ linear equations 相关线性方程；～ random variable 相关随机分量；～ variable 因变量。

相关术语：

(i) dependence n. 相关，相关性：linear dependence 线性相关。

(ii) depend v. 与有关，依赖于。

例 The chose of the integer N may depend on ε. 【正整数 N 的选取可能与 ε 有关。】

2) ***scalar*** n. 标量，数量，纯量；a. 标量的，数量的，纯量的

～ multiple 纯量倍数；～ product of vectors 向量的数量积（内积，点

积);～ quantity 数量,纯量;～ matrix 标量矩阵;～ multiplication 标量乘法。

3) ***hypothesis*** n. 假设

～ testing 假设检验;～ proposition 假言命题。

4) ***column*** n. 列

～ count 列计算;～ rank 列秩;～ sum of a matrix 矩阵的列和;～ vector 列向量。

5) ***row*** n. 行

～ vector 行向量;～ rank 行秩;～ sum of a matrix 矩阵的行和。

6) ***simultaneous*** a. 同时的,即时的

～ approximation 联合逼近;～ equations 联立方程;～ linear equations 联立线性方程;～ inequalities 联立不等式;～ velocity 即时速度。

7) ***consistent*** a. 相容的,无矛盾的

～ axioms 相容性公理;～ equations 相容性方程。

8) ***ordered*** a. 有序的

～ basis 有序基;～ pair 有序对。

相关术语:

order n. 次序。

9) ***transformation*** n. 变换

linear ～ 线性变换;～ group 变换群; ～ matrix 变换矩阵;～ of coordinates 坐标的变换。

10) ***isomorphism*** n. 同构

～ class 同构族;～ of algebra 代数的同构;～ of groups 群的同构。

相关术语:

isomorphic a. 同构的:～ group 同构群;～ relation 同构关系。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***call*** vt. 在§2.3已经介绍过,call可以带双宾语。现在要特别指出,当其中一个宾语是符号或公式,尤其是单个字母时要特别留意。例如,课文A中的句子

We may rewrite these equations in matrix form…and ***call*** the matrix of coefficients $\boldsymbol{A}$, the 3×1 matrix of unknowns $\boldsymbol{x}$, and the 3×1 matrix on the right $\boldsymbol{k}$, we then….

其中有三对双宾语,每一对的第二宾语都是字母,它们分别是$\boldsymbol{A},\boldsymbol{x},\boldsymbol{k}$。这段英文可译成:

【我们可以把这些方程改写成……并把系数矩阵称为$\boldsymbol{A}$,把3×1的未知量

矩阵称为 x，把右边 3×1 的矩阵称为 k，于是……。】

(2) ***make*** vt. 这个动词在介绍数学的应用或讨论数学的一般内容时较常应用。它可以带双宾语。例如 make sth… effective 意思是“使……有效”(见♣(7))。一般地，用 make 构成的词组很多。例如：make use of，其作用相当于动词 use 或 utilize，而 make wide use of 意思为“广泛使用”；make sense 意思是“有意义”；2 and 3 make 5 意思是“2 加 3 等于 5”。

(3) ***lead*** vt. 引导，带领

数学英语中常用词组 lead to，意思是“导致”。

3. 形容词、副词、介词短语

(1) ***trivial*** a. 平常的，普通的

词组 trivial result 可意译为“平凡的结论”。

(2) ***contradictory*** a. 矛盾的

常用 be contradictory to 与……矛盾。例子见下面第 4 部分。

(3) ***be reducible to*** 可简化为，可转化为。相应的动词词组为 reduce to。

(4) ***expressible*** a. 可表达的

以-ble 为后缀的形容词，常具有词义“可……的”。这类形容词用作定语时有时可以后置于它所修饰的中心词且带有介词短语。

例 Any vector ***expressible*** in the form $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ (with α_1, α_2, …, α_n scalar)is said to be (***expressible as***)a *linear combination* of x_1, x_2, …, x_n. 【形如 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ 的向量称为(或可表示为)x_1, x_2, …, x_n 的线性组合，其中 α_1, α_2, …, α_n 是标量。】其中 expressible in the form…作 vector 的后置定语。

4. 典型例句与句型

(1) We ***may assume*** $i=1$ ***without loss of the generality***.

【不失一般性，我们可以假设 $i=1$。】

这是在讨论数学问题时常见的一种句型，常用于把讨论的范围进行限制时的说明。有关数学假设的表达方法的进一步介绍，可参加 §5.6。

(2) 这篇课文多处使用插入语，见♣(1)和♣(9)。有关插入语的介绍，可参见 §3.8。

(3) This ***is contradictory to*** the hypothesis that x_1, x_2, …, x_n are linearly independent. 【这与 x_1, x_2, …, x_n 是线性无关的假设矛盾。】这种句型常用作反证法的结束语。参见 §2.9 之三中关于动词 contradict 的介绍。

(4) Each of the n vectors $T\boldsymbol{\alpha}_j$ is uniquely expressible as a linear combina-

tion $T\boldsymbol{\alpha}_j=\sum_{i=1}^{m}A_{ij}\boldsymbol{\beta}_i$ of the $\boldsymbol{\beta}_i$, the scalars $A_{1j},\cdots,A_{mj}$ ***being*** the coordinates of $T\boldsymbol{\alpha}_j$ in the ordered basis $\mathfrak{B}'$. 【这 n 个向量 $T\boldsymbol{\alpha}_j$ 中的每一个都可唯一表示成 $\boldsymbol{\beta}_i$ 的线性组合 $T\boldsymbol{\alpha}_j=\sum_{i=1}^{m}A_{ij}\boldsymbol{\beta}_i$，其中数 $A_{1j},\cdots,A_{mj}$ 是 $T\boldsymbol{\alpha}_j$ 在有序基 $\mathfrak{B}'$ 上的坐标。】其中现在分词 being 以独立结构的形式出现，放在句末对前面的内容作补充说明。有关分词的介绍，可参见 § 3.1.

练 习 2.7

1. 掌握下列数学术语的含义及应用：

vector space, row vector, column vector; matrix, square matrix, inverse matrix, matrix of coefficients, zero matrix, identity matrix; linear combination, linearly dependent, linearly independent, determinant; transformation, onto, isomorphism, isomorphic; applied differential equations, mathematical economics, quantum mechanics; consistent, ultimately.

2. 把下面的术语译成英文：

向量空间、行向量、列向量、线性相关、线性无关、线性组合、数量积；矩阵、方阵、行列式、逆矩阵、单位矩阵、零矩阵；变换、到上的、同构、同构的；应用微分方程、数理经济、量子力学；相容的、最终地。

3. 汉译英：

(1) 线性组合、线性相关和线性无关都是线性空间中的重要概念。

(2) 矩阵由排成矩形阵列的一些数组成。如果矩阵的行数和列数相同，则称为方阵。每个方阵对应一个行列式。

(3) 矩阵不仅可用来解线性方程组，而且可以用于判定这组方程是否有解及解是否唯一。

(4) 计算机的出现使得矩阵方法有效地用于解含数百个线性方程的方程组。

(5) 这个结论是与问题的假设相矛盾的，因此所证的命题成立。

(6) 这个例子使得如下问题变得清楚起来，即为什么空间中的两条直线可能既不相交也不平行。

(7) 设 V 是域 F 上的 n 维向量空间而 W 是域 F 上的 m 维向量空间，$\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{B}'$ 分别是 V 和 W 的有序基。那么从 V 到 W 的任一线性变换 T 由 T 相对于 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{B}'$ 的矩阵所确定。

(8) 可以建立从向量空间 V 到向量空间 W 的所有线性变换组成的集与由域 F 上的所有 $m\times n$ 矩阵所构成的集之间的一一对应。

4. 英译汉：

(1) If V and W are vector spaces over the field F, any ono-one linear transformation T of V onto W is called an isomorphism of V onto W. If there exists an isomorphism of V onto W, we say that V is isomorphic to W.

(2) A matrix is nothing more than a rectangular *array* (阵列) of numbers (for us this means real numbers). An array of numbers with p rows and q columns is called a $p\times q$ matrix ("p by q matrix"), and the numbers themselves are called the *entries in the matrix* (矩阵的元). The number in the ith row and jth column is called the (i, j)-entry. Sometimes *suffixes* (下标) are used to indicate position, so that a_{ij} (or b_{ij}, etc.) may be used for the (i, j)-entry.

(3) A $p\times q$ matrix has only one row when p is 1, and is called a row vector; and when $q=1$, the matrix has only one column, and is called a column vector. The case when both p and q are 1 is rather trivial and need not to concern us here. A column vector with p entries we shall call a p-vector, so a p-vector is a $p\times 1$ matrix.

(4) A matrix with the same number of rows and columns is called a *square matrix* (方阵). And an nth-order square matrix, which is denoted by $\boldsymbol{A}_{n\times n}$, consists of n^2 numbers with n rows and n columns. For any matrix $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ with real numbers entries, there is associated a unique number called *determinant*, designated by $|\boldsymbol{A}|$. Also, is said to be a determinant of order n.

(5) An $m\times n$ matrix has m row vectors and n column vectors. Suppose $\boldsymbol{A}$ is an nth-order square matrix with real numbers entries. Then the n row vectors of $\boldsymbol{A}$ is linearly independent if and only if the determinant $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. Furthermore, the n row vectors of $\boldsymbol{A}$ are linearly dependent if and only if the n column vectors of $\boldsymbol{A}$ are linearly dependent.

(6) A square matrix which consists entirely of 0s is called a *zero matrix*. A square matrix has 1s down the diagonal from top left to bottom right (this diagonal is called the *main diagonal*) and has 0s elsewhere is called an *identity matrix* and denoted by $\boldsymbol{I}$. An identity matrix has the property: If $\boldsymbol{A}$ is a square matrix of the same size as $\boldsymbol{I}$, then we have $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$.

§2.8 函数的概念及其演变
(The Concepts of Functions and Their Evolution)

一、精读课文

Part A The Concept of Function[26]

Seldom has a single concept played so important a role in mathematics as has the concept of *function*♣(1). It is desirable to know how the concept has developed.

This concept, like many others, originates in physics. The physical quantities were the forerunners of mathematical variables, and relation among them was called a *function relation* in the late 16th century♣(2).

For example, the formula $s=16t^2$ for the number of feet s a body falls in any number of seconds t is a function relation between s and t, it describes the way s **varies with** t♣(3). The study of such relations led people in the 18th century to think of a function relation as nothing but a formula.

Only after the rise of modern analysis in the early 19th century could the concept of function be extended♣(4). In the extended sense, a function may be defined as follows: If a variable y depends on another variable x in such a way that to each value of x corresponds a definite value of y, then y is a function of x♣(5). This definition serves many a practical purpose even today.

Not specified by this definition is the manner of **setting up** the correspondence. It may be done by a formula as the 18th century mathematics presumed, but it can equally well be done by a tabulation such as a statistical chart, or by some other form of description♣(6).

A typical example is the room temperature, which obviously is a function of time. But this function admits of no formula representation, although it can be recorded in a tabular form or traced out graphically by an automatic device♣(7).

The modern definition of a function y of x is simply a *mapping* from a space X to another space Y♣(8). A mapping is defined when every point x of X has a definite image y, a point of Y. The mapping concept is close to intuition, and therefore desirable to serve as a basis of the function concept. Moreover,

as the space concept is *incorporated* in this modern definition, its generality contributes much to the generality of the function concept♣(9).

Part B Further Discussion on Functions[28]

I. A Set of Some Special Ordered Pairs

We can use the concepts of ordered pairs to give a new definition of functions as follows. A function is a set of ordered pairs such that for each first coordinate only one second coordinate exists. The *domain* of a function is the set of all first coordinates. The *range* of a function is the set of all second coordinates.

II. Inverse Functions

Let X and Y be sets and suppose $f: X \to Y$ is a function. If $g: Y \to X$ is another function and has the property that

$$y = f(x) \quad \text{if and only if} \quad x = g(y),$$

then we call g the *inverse function* to f. Observe that $x = g(y)$ is what we obtained by solving the equation $y = f(x)$ for x in term of y. However, in the general case, the equation $y = f(x)$ may have no solutions at all or else may have many solutions. Thus, for $f: X \to Y$ to **admit** an inverse function, it is necessary that, for each y in the set Y, the equation $y = f(x)$ has a unique solution x in the set X♣(10). It is clear that if we consider a function $f: X \to Y$ as a mapping, then its inverse function g is just the inverse mapping f^{-1}.

III. Simple Functions and Characteristic Functions

A *complex function* f on a measurable space X whose range consists of only finitely many points will be called a *simple function*♣(11). Among these are the nonnegative simple functions, whose range is a finite subset of $[0, \infty)$. Note that we explicitly exclude ∞ (*infinity*) from the values of a simple function. If $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ are the distinct values of a simple function f, and if we set $A_i = \{x: f(x) = \alpha_i\}$, then clearly

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

where χ_{A_i} is the *characteristic function* of A_i.

二、阅读与翻译指导

♣(1) Seldom has a single concept played so important a role in mathemat-

ics as has the concept of function. It is desirable to know how the concept has developed.

句中连接词 so…as…引起一个比较状语从句。主句是倒装句，主语 concept 后置，把 seldom 放在句首起强调的作用；形容词 single 修饰 concept，突出单独性。翻译时应把这些意思体现出来。

【在数学中，很少有像函数那样，仅仅一个概念，就起着这么重要的作用。因此，很有必要知道这个概念是怎样发展起来的。】

♣(2) The physical quantities were the forerunners of mathematical variables, and relation among them was called a function relation in the late 16th century.

这句涉及物理量和数学变量，分析代词 them 所代表的对象时应注意考察 them 之前的 among，结合上下文推知，relation among them 指的是各种物理量之间的关系，而不是物理量和数学变量之间的关系。翻译时应该明确指出。

【物理量是数学变量的先驱，各种物理量之间的关系在 16 世纪后期称为函数关系。】

♣(3) For example, the formula $s=16t^2$ for the number of feet s a body falls in any number of seconds t is a function relation between s and t, it describes the way s varies with t.

句子 number of feet 表示英尺数，number of seconds 表示秒数。varies with t 意思是“随着 t 而变化”。

【例如，表示一个物体在任意 t 秒中下落的英尺数 s 的公式 $s=16t^2$ 就是 s 和 t 之间的函数关系，它描述了 s 随 t 变化的方式。】

♣(4) Only after the rise of modern analysis in the early 19th century could the concept of function be extended.

这句为倒装句，only 放在句首强调时间。可以按原来的次序翻译为：

【只有在 19 世纪初期现代分析出现以后，函数的概念才可能得到推广。】

♣(5) In the extended sense, a function may be defined as follows: If a variable y depends on another variable x in such a way that to each value of x corresponds a definite value of y, then y is a function of x.

其中 in the extended sense 直译为“按照推广后的意义”。句中 that 引起的从句为 way 的同位语，应注意该从句是倒装句，主语是 a definite value(确定的值)，谓语是 correspond，而 correspond 常与 to 连用。

【推广后，函数可以这样定义：如果一个变量 y 按照如下方式依赖于另一变量 x，即对于 x 的每个值，y 都有一个确定的值与之对应，则 y 就是 x 的函数。】

♣(6) It may be done by a formula as the 18th century mathematics presumed, but it can equally well be done by a tabulation such as a statistical chart, or by some other form of description.

注:It may be done 中 it 指的是上一句的 the correspondence,be done 是 be set up 的意思,应译成"建立"。presume 应译成"采用"。全句可译成:

【它可以像 18 世纪的数学所采用的方法那样,用公式来建立,但同样也可以用如统计表那样的表格或用某种其他的描述方式来建立。】

♣(7) But this function admits of no formula representation, although it can be recorded in a tabular form or traced out graphically by an automatic device.

本句 although 引起一个让步状语从句。admits of no formula 意思为"不可能用公式"。短语 be traced out graphically 意思是"用图形显示踪迹"。全句可译成:

【然而,这个函数不可能用公式来表示,尽管它可以记录在表格中或者用一种自动装置跟踪其变化来画出图形。】

♣(8) The modern definition of a function y of x is simply a mapping from a space X to another space Y.

本句看似很简单,但要译通顺则不易。可译成:

【按现代的定义,y 是 x 的函数只不过是从空间 X 到另一空间 Y 的映射。】

♣(9) Moreover, as the space concept is incorporated in this modern definition, its generality contributes much to the generality of the function concept.

句首 as 引导的是条件从句,主句中 its 指的是 modern definition;其中两个 generality 应根据句子的本意分别译成"推广"和"一般化"。

【此外,由于这个现代的定义中融入了空间概念,所以,这种推广对函数概念的一般化有很大帮助。】

♣(10) Thus, for $f: X \to Y$ to admit an inverse function, it is necessary that, for each y in the set Y, the equation $y=f(x)$ has a unique solution x in the set X.

本句以 it 作为形式主语,that 引起的从句是真正的主语,说明存在反函数的条件。全句可译成:

【因此,$f: X \to Y$ 有反函数的必要条件是,对于集 Y 中的每一个 y,方程 $y=f(x)$在集 X 中有唯一解 x。】

♣(11) A complex function f on a measurable space X whose range con-

sists of only finitely many points will be called a simple function.

根据数学知识知，本句 whose 引起的定语从句修饰 function f，可以译成条件。即译成：

【可测空间 X 上的复函数 f 若其值域仅仅是由有限多个点组成的，则称之为简单函数。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***function*** n. 函数

～ of first degree 一次函数；～ of one variable 一元函数；～ of several variables 多元函数；～ of real variable 实变函数；～ of complex variable 复变函数；～ theory 函数论。

相关术语：

functional a. 函数的；n. 泛函；～ analysis 泛函分析。

2) ***domain*** n. 区域、定义域

～ axiom 域公理；～ of convergence 收敛域；～ of integration 积分区域。

3) ***range*** n. 值域，范围

～ of definition 定义范围；～ of function 函数的值域；～ of integration 积分区域。

4) ***mapping*** n. 映射

one-one ～ 一一映射。

相关术语：

injection n. 单射；surjection n. 满射；bijection n. 双射。

map v. 映射；～ into 映入；～ onto 映上。

5) ***image*** n. 像，像点

inverse ～ 逆像；～ identification 图像识别；～ processing 图像处理。

6) ***statistical*** a. 统计的

～ analysis 统计分析；～ chart 统计图表；～ data 统计数据；～ table 统计表；～ estimation method 统计估计方法；～ hypothesis 统计假设；～ inference 统计推断。

相关术语：

statistics n. 统计(学)。

7) ***measurable*** a. 可测的

～ function 可测函数；～ set 可测集；～ space 可测空间；～ transformation 可测变换。

相关术语：

measure n. 测度，测量；measure vt. 测量

8) ***characteristic*** a. 特征的

～ function 特征函数；～ matrix 特征矩阵；～ vector 特征向量；～ polynomial 特征多项式；～ root 特征根；～ solution 特征解；～ value 特征值。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***vary*** vt. 使变化，改变；vi. 变化

不及物动词 vary 常与 with 或 as 连用，都表示“随……变化”。例如，Variable y ***varies*** directly ***as*** x.【变量 y 随 x 正变。】

对应的名词是 variation n. 变分，变差。

例 The second basic type of ***variation*** is called inverse variation.【第二类型变分称为反变。】

(2) ***admit*** vt. 采用，取值，允许

例子见♣(10)。注意，admit 的否定形式的意思为“不可能”，常与介词 of 搭配。

例 This function ***admits*** of no formula representation.【这个函数不可能用公式来表示。】

(3) ***set*** vt. 设，建立；n. 集

作动词用的 set 在数学英语中常出现在祈使句中，表示“设”；与 up 搭配的词组 set up 意思是“建立”。作名词用的 set 是数学英语中的常用术语，主要表示“集”；而在 a set of numbers(一组数)之类词组中，set 可看做汉语的量词，译成“组”。

(4) ***exclude*** vt. 排除

词组 exclude sth. from sth. 意思是“从某物中把某物排除出去”。

例 Note that we explicitly ***exclude*** ∞ (infinity) ***from*** the values of a simple function.【应注意，我们明显地把∞(无穷大)从简单函数的值中排除出去。】

3. 重要形容词、副词、介词短语

(1) ***proportional*** 成(正)比例的，常接 to+名词(变量)，表示“与……成正比”。

例 The phrase “y is directly ***proportional*** to x” is also to indicate “direct variation”.【术语“y 与 x 成正比”指的也是“正变”】。

(2) ***among*** 介词，在(三个或更多的对象)之间。注意与 between 的区别。

4. 典型例句与句型

(1) 在♣(1)和♣(4)中，我们看到一类表示强调的句型，它们分别把 seldom 和 only 放句首，构成倒装句。有关强调句和倒装句的更多介绍，可参见

§3.12。

(2) It describes the way *s* ***varies with*** *t*.

本句 it 是代词,代替前面提及的公式。句中 *s* ***varies with*** *t* 是同位语从句,省略连接词 that,说明 way。关于同位语和同位语从句的介绍,可参看 §3.8。

(3) ***It is desirable*** to know how the concept has developed.

It 作为形式主语的句子,不定式 to know 引导的短语作为逻辑主语。

It is desirable to do….【做……最好不过了。】

(4) Thus, ***for*** $f:X\to Y$ ***to admit*** an inverse function, it is necessary that, for each y in the set Y, the equation $y=f(x)$ has a unique solution x in the set X. 不定式短语 for $f:X\to Y$ to admit an inverse function 作目的状语,其中 $f:X\to Y$ 是不定式的逻辑主语。主句中 it 作为形式主语,that 引起的从句是主语从句。这句的译文见♣(10)。关于动词不定式的更多讨论,可参见 §3.3。

练 习 2.8

1. 掌握下列数学术语的含义及应用:

function relation, tabulation, inverse function, simple function, characteristic function, composite function, mapping; directly proportional to, direct variation, inverse variation; the extended sense, generality, property, incorporated; maximum value, infinity, measurable space.

2. 把下面的术语译成英文:

函数关系、表格、反函数、简单函数、特征函数、复合函数、映射;定义域、值域、像;与……成正比、正变、反变;性质、按推广的意义、普遍化、并入;无穷大、最大值、可测空间。

3. 汉译英:

(1) 因为函数的概念起源于物理,所以在 17 世纪,人们曾认为函数关系只是一个公式而已。

(2) 气温和时间的关系是一个函数,但它只能用表格或图形来表示。

(3) 对于变量 x 的每一个值,如果变量 y 有一个确定的值与之对应,则变量 y 是变量 x 的函数。

(4) 把函数看成是从一个空间到另一个空间的映射,这种现代数学观点对于推广函数的概念很有价值。

(5) 如果 f 是从空间 X 到空间 Y 的映射,g 是从空间 Y 到空间 Z 的映射,我们就可以定义一个复合映射 $h=g\circ f$,它是从 X 到 Z 的映射。

4. 英译汉:

(1) Functions provide a means of studying quantities that vary with one another, that is, when a change in one quantity causes a corresponding change in another.

(2) It is important to realize that equations (i) and (ii) are merely two different ways of expressing precisely the same relations, one the exponential way, the other the logarithmic. Above all it is necessary to keep in mind the fact that a logarithm is an exponent.

(3) For a function $f: D \to \mathbf{R}$, we define $f(D) = \{y \text{ in } \mathbf{R} \mid y = f(x) \text{ for some } x \text{ in } D\}$ and call $f(D)$the image of f. We say $f: D \to \mathbf{R}$ attains a maximum value provided that the image $f(D)$ has a maximum; that is, there is a point x_0 in D such that

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

(4) For functions $f: D \to \mathbf{R}$ and $g: U \to \mathbf{R}$ such that $f(D)$ is contained in U, suppose that $f: D \to \mathbf{R}$ is continuous at a point x_0 in D and $g: U \to \mathbf{R}$ is continuous at the point $f(x_0)$. Then the composite function $g \circ f: D \to \mathbf{R}$ is continuous at the point x_0.

(5) To graph a new function $y = f(x)$, that is, one we are unfamiliar with, we can use some of graphing suggestions as follows:

(a) Determine the domain of the function.

(b) Determine any types of symmetry that the equation possesses. If $f(-x) = f(x)$, then the function exhibits y-axis symmetry. If $f(-x) = -f(x)$, then the function exhibits origin symmetry.

(c) Find the y-intercept by evaluating $f(x)$. Find the x-intercept by finding the value of x such that $f(x) = 0$.

(d) Set up a table of ordered pairs that satisfy the equation $y = f(x)$.

(e) Plot the points associated with the ordered pairs and connect them with a smooth curve. Then, if appropriate, reflect this part of the curve according to any symmetry possessed by the graph.

§2.9 变量的极限
(Limits of Variables)

一、精读课文

Part A Variables and Their Limits[29]

I. Limits of General Variables

A quantity that can **take on** *successively* different numerical values is called a *variable* ♣(1). It should be remembered that, although it is common for the *successive* values of the variable to be *related to* each other *in accordance with* some law, these values need not have had any definite relations one to another♣(2). As stated before, a variable is commonly represented by a letter such as x, y, or z.

If a variable V takes on successively *a series of* values which approach closer and closer, to a fixed number L in such a manner that the *absolute value* of $V-L$ becomes and remains less than any finite number *however small*, then V is said to approach the limit L♣(3). This may be written as $\lim V=L$. The symbol $\rightarrow$ gives us the equivalent notation $V \rightarrow L$, which is read V approaches L as a limit.

II. Limits of Functions

For a function $y=f(x)$, we often consider the limits of $f(x)$ according to the changing tends of x. To describe the limits accurately, we use the *ε-δ language* in the following.

Suppose $y=f(x)$ is a real function defined on a finite interval (a, b). If for any $\varepsilon>0$, there exists a number $\delta>0$ (which may **depend on** ε) such that $|f(x)-A|<\varepsilon$ for all x in $(a, b)\cap(b-\delta, b)$, where A is a constant, then we say $f(x)$ has the *left limit* A at point b♣(4). In this case we write $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=A$. If the *intersection* $(a, b)\cap(b-\delta, b)$ above is replaced by $(a, b)\cap(a, a+\delta)$, then A is called the *right limit* of $f(x)$ at point a and denoted by $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$. For example, we have $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$ and $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$.

If $y=f(x)$ is defined on $(a, b)\cup(b, c)$, then we may try to find both the

left limit and right limit of $f(x)$ at point b. If $f(x)$ has both the left limit and right limit at b and $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$, then we say $f(x)$ has limit A at point b and denote this fact by $\lim\limits_{x\to b} f(x)=A$. For example, the function $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ is defined on $(-1, 0)\cup(0, 1)$, since $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ we have $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

According to the definition, a function $f(x)$defined on $(a, b)\cup(b, c)$has no limit at point b if one of the following cases occurs:

(1) $f(x)$ has neither the left limit nor the right limit at point b, for example, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$at $b=0$ is in this case;

(2) $f(x)$ has only the left limit or right limit at point b, for example, $f(x)=\left|\sin\frac{1}{x}\right|-\sin\frac{1}{x}$ has only the right limit at $b=0$;

(3) $f(x)$has both the left limit and right limit at b, but they are not equal, for example, the function $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$ has the unequal left limit and right limit at $b=0$ since $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=-1$ and $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=1$.

If $y=f(x)$ is defined on certain infinite intervals, we may consider the limits of $f(x)$ as $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ or $x\to\infty$. The special function defined on the positive integer set **N** is called the *sequence* and denoted by $\{f(n)\}$, for which we only consider the limit as $n\to\infty$. (Refer to the Exercises at the end of this section.)

Part B Sequences and Their Limits

I. Monotonic Sequences of Real Numbers[26]

A *sequence* $\{f(n)\}$ is said to be *increasing* if

$$f(n)\leqslant f(n+1)\quad \text{for all}\quad n\geqslant 1.$$

We indicate this briefly by writing $f(n)\nearrow$. If, on the other hand, we have

$$f(n)\geqslant f(n+1)\quad \text{for all}\quad n\geqslant 1,$$

we call the sequence *decreasing* and write $f(n)\searrow$. A sequence is called *monotonic* if it is increasing or if it is decreasing.

The convergence or divergence of *monotonic sequences* are particularly easy to **determine**. In fact, we have the following simple criterion.

Theorem A monotonic sequence *converges* if and only if it is *bounded*.

Note: A sequence $\{f(n)\}$ is called bounded if there exists a positive number M such that $|f(n)| \leqslant M$ for all n. A sequence that is not bounded is called *unbounded*♣(5).

Proof. It is clear that an unbounded sequence cannot converge. Therefore, all we need to prove is that a bounded monotonic sequence must converge♣(6).

Assume $f(n)\nearrow$ and let L denote the *least upper bound* of the set of function values. (Since the sequence is bounded, it has a least upper bound by Axiom 10[注2] of the *real-number system*.) Then $f(n) \leqslant L$ for all n, and we shall prove that the sequence converges to L.

Choose any positive number ε. Since $L-\varepsilon$ cannot be an *upper bound* for all numbers $f(n)$, we must have $L-\varepsilon < f(N)$ for some N. (This N may depend on ε.) If $n \geqslant N$, we have $f(N) \leqslant f(n)$ since $f(n)\nearrow$. Hence, we have $L-\varepsilon < f(n) \leqslant L$ for all $n \geqslant N$, as illustrated in Figure 2.9.1. From these inequalities we find that

$$0 \leqslant L-f(n) < \varepsilon \quad \text{for all} \quad n \geqslant N$$

and this means that the sequence converges to L, as asserted.

If $f(n)\searrow$, the proof is similar, the limit in this case being the *greatest lower bound* of the set of function values.

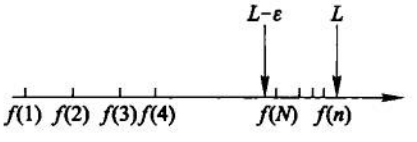


Figure 2.9.1 A bounded increasing sequence converges to its least upper bound

II. Cauchy Sequence[28]

Definition A sequence $\{a_n\}$ is called a *Cauchy sequence* if and only if for each $\varepsilon > 0$ there exists $n^* \in \mathbf{N}$ such that $|a_m - a_n| < \varepsilon$ for all m and $n \geqslant n^*$.

There is very little difference in the appearance of this definition and the definition of the convergence of the sequence $\{a_n\}$ given in previous section♣(7). However, the meaning and the consequence of the two are quite different. One can see this especially when studying more advanced *real analysis*.

注 2：本段英文摘自文献[26]（我们已经在本段英语标题之后加了标注），所以这里的 Axiom 10 所指的是在原著中此前出现的内容。本书其他处也有类似情形，不再另加说明。

At our level, that is, in the context of real numbers, *Cauchy sequences* are *equivalent* to convergent sequences. This equivalency will be proven in next section. Note that knowledge of the limit of the sequence is unnecessary in determining whether or not the given sequence is Cauchy♣(8). We need to show only that the difference between any two terms of the sequence tends to zero. It is, however, not enough to show that the difference between the successive terms tends to zero. In other words, for an arbitrary $\varepsilon>0$, even if there exists $n^* \in \mathbf{N}$ such that $|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$ for all $n\geqslant n^*$, the sequence may diverge. Exercise 8 is an example of this situation. It is important to realize that to show that a given sequence is Cauchy, the indices m and n must keep entire independent of one another. On the other hand, to prove that a given sequence is not Cauchy, we need to exhibit a particular relationship between m and n that *contradicts* the condition $|a_m-a_n|<\varepsilon$♣(9). For example, $\{a_n\}$ with $a_n=(-1)^n$ is not a Cauchy since in the case $m=n+1$, for all n, we have

$$|a_m-a_n|=|a_{n+1}-a_n|=2.$$

Hence $|a_m-a_n|$ is certainly greater than some positive number ε, say $\varepsilon=1$.

二、阅读与翻译指导

♣(1) A quantity that can take on successively different numerical values is called a variable.

关联词 that 引起的定语从句修饰它前面的 quantity。副词 successively 可译成“接连不断地”。相应的形容词 successive 在一些词典里译成“连续的”。应注意，作为数学术语的连续函数不译成“successive function”，而应译成“continuous function”。

【可以接连不断地取不同数值的量称为变量。】

♣(2) It should be remembered that, although it is common for the successive values of the variable to be related to each other in accordance with some law, these values need not have had any definite relations one to another.

在 that 引起的主语从句中包含了复合句，其中 although 引起的让步状语从句用 it 作形式主语，for…to be…形式的短语是实质上的主语。应注意，need not have done 表示“本来不必”(过去已经发生的事，实际上没有必要)。根据上下文及数学的内容，句中的 the variable 最好译成“有的变量”，并作适当补充。

【应该记住，虽然常见到有的变量逐次所取的值之间依照某种规律相互关联，但是(作为变量，)这些值之间本来未必要有确定的相互关系。】

♣(3) If a variable V takes on successively a series of values which approach closer and closer, to a fixed number L in such a manner that the absolute value of $V-L$ becomes and remains less than any positive number however small, then V is said to approach the limit L.

全句为主从复合句,其中 if 引起的条件状语从句中包含了 which 引起的定语从句,后者再包含一个以 such …that 为连接词的结果状语从句。短语 however small 作它前面的 positive number 的定语,意思是"不论多么小的"。a series of 在这里相当于一个形容词,意思是"一系列";而 series 作为数学术语时,其含义是"级数"。

【如果变量 V 接连不断地取一列数值,而这些数值以如下的方式越来越接近于一个固定的数 L,即 $V-L$ 的绝对值变成且保持小于事先任意给定的不论多小的正数,则称 V 趋于极限 L。】

♣(4) If for any $\varepsilon>0$, there exists a number $\delta>0$ (which depend on ε) such that $|f(x)-A|<\varepsilon$ for all x in $(a, b)\cap(b-\delta, b)$, where A is a constant, then we say $f(x)$ has the left limit A at point b.

这是用 ε-δ 语言定义极限的一种常用基本句型,今后会看到一些衍生的句型。句子前后出现两个 for,翻译时应注意逻辑次序。

【如果对任意 $\varepsilon>0$ 都存在正数 $\delta>0$(它与 ε 有关)使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 对于区间 $(a, b)\cap(b-\delta, b)$ 中的所有 x 都成立,其中 A 是一个常数,则称 $f(x)$ 在点 b 有左极限 A。】

♣(5) A sequence $\{f(n)\}$ is called bounded if there exists a positive number M such that $|f(n)|\leqslant M$ for all n. A sequence that is not bounded is called unbounded.

注意,bounded 是作为形容词的过去分词,意思是"有界的"。第一句先定义"有界的";第二句再用"有界的"这个概念来给出"无界"的定义。常有人把第二句译成"一个数列是无界的则称为无界的。"这是明显的逻辑错误,这也是对英语句子缺乏细致分析的缘故。

【称序列 $\{f(n)\}$ 为有界的,如果存在正数 M 使得对于所有的 n 都有 $|f(n)|\leqslant M$。不是有界的序列称为是无界的。】

♣(6) Therefore, all we need to prove is that a bounded monotonic sequence must converge.

定语从句 we need to prove 修饰主句的主语 all,that 引起的从句是表语从句。

【因此,我们只要证明:有界的单调序列必收敛。】

♣(7) There is very little difference in the appearance of this definition and

the definition of the convergence of the sequence $\{a_n\}$ given in previous section.

句中 very little difference 意思是“没什么不同”。in the appearance of …意思是“在……表面上”。整句可译成：

【这个定义和在上一节给出的序列$\{a_n\}$收敛的定义在表面上似乎没有什么不同。】

♣(8) Note that knowledge of the limit of the sequence is unnecessary in determining whether or not the given sequence is Cauchy.

虽然 knowledge 的主要含义是“知识”和“知晓”等，但根据数学知识，knowledge of sth. 在这里应理解为“知道某物”。这句和下面的一些句子里，Cauchy 代表 Cauchy sequence。全句可直译成：“应注意的是，知道序列的极限对于判断给定的序列是否为 Cauchy 列不是必要的。”但更明确的译文是

【应注意的是，判定给定的序列是否为 Cauchy 列不需要事先知道该序列的极限。】

♣(9) On the other hand, to prove that a given sequence is not Cauchy, we need to exhibit a particular relationship between m and n that contradicts the condition $|a_m-a_n|<\epsilon$.

句中 to prove 带一个宾语从句构成不定式短语，作表示目的的状语。后面的 that 引导的定语从句修饰 relationship。

【反之，要证明一个给定的序列不是 Cauchy 列，只需要展示 m 与 n 之间的一种与 $|a_m-a_n|<\epsilon$ 相矛盾的特殊关系即可。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***sequence*** n. 序列

～of number 数列；～ of real number 实数序列；～ of points 点序列；infinite ～ 无穷序列；finite ～ 有限序列；convergence ～ 收敛序列。

2) ***limit*** v. 限制；n. 极限，界限

～ condition 极限条件；～ function 极限函数；～ of function 函数的极限；left ～ 左极限；right ～ 右极限。

相关术语：

limiting a. 极限的：～ point of a sequence 极限点；～ value 极限值。

limited a. 有限的，局限的：～ variation 有界变差

3) ***converge*** v. 收敛

～ almost everywhere 几乎处处收敛；～ criterion 收敛判别式；～ do-

main 收敛区域；～ in measure 依测度收敛；～ in mean 平均收敛；～ property 收敛性质；～ uniformly 一致收敛。

相关术语：

convergent a. 收敛的；convergence n. 收敛性。

4) ***diverge*** v. 发散

～ infinite series 发散无穷级数；～ integrals 发散积分；～ series 发散级数。

相关术语：

divergence n. 发散(性)；divergent a. 发散的。

5) ***bound*** n., 界，限；v. 界定

upper ～上界；lower ～下界；least upper ～ 最小上界、上确界(等同于 supremum n. 上确界)；greatest lower ～最大下界、下确界(等同于 infimum n. 下确界)。

相关术语：

bounded a. 有界的：～ function 有界函数；～ sequence 有界序列；～set 有界集。

unbounded a. 无界的：～ domain 无界域；～ solution 无界解；～ function 无界函数。

6) ***continuous*** a. 连续的

～ function 连续函数；～ mapping 连续映射；～ on the left 左连续的；～ on the right 右连续的；～ at point x_0 在点 x_0 连续的。

相关术语：

continuity n. 连续性。

7) ***definite*** a. 定的，确定的。

～ integral 定积分；～ quadratic form 定二次型；～ quantity 定量。

8) ***increasing*** a. 递增的

～ function 增函数；～ sequence 递增序列；～ series 递增级数。

相关术语：

increase v. 增加。

9) ***decreasing*** a. 递减的

～ sequence 下降序列；～ sequence 递减序列；～ sequence of sets 递减集序列。

相关术语：

decrease v. 减少。

10) ***monotonic*** a. 单调的

～ function 单调函数；～ sequence 单调序列。

11) ***successive*** a. 逐次的，累次的

～ term 逐项，邻项；～ integration 逐次积分。

相关术语：

successively adv. 相继地，接连不断地。

12) *ε-δ language* ε-δ 语言(常用于描述函数的极限)

相关术语：

ε-*N* language ε-*N* 语言(常用于描述数列的极限)。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***converge*** v. 收敛

若要指明收敛的对象，converge 需与介词 to 联用，如 converge to 0【收敛于 0】。动词 converge 与 diverge v. 互为反义词。

(2) ***approach*** vt. 接近，趋近

词组 to approach closer and closer some number 意为“越来越趋近于某数”。approach 和词组 tend to 同义，注意，tend 为不及物动词。

(3) ***contradict*** vt. 与……矛盾

例 This conclusion ***contradicts*** the hypothesis.【这个结论与假设矛盾。】

contradict 的同根词构成的如下词组在数学英语中也常使用：

in contradiction to 与……矛盾；be contradictory to 与……矛盾；be contrary to 与……相反。

(4) ***illustrate*** vt. 说明，阐明，给……加插图

短语 illustrate *B* with *A* 意思是“用 *A*(图或例子)说明 *B*”。常用 as illustrated，意为“正如……所示”。类似地，as asserted 意为“正如……所说的”；as stated 意为“正如……所述”。

3. 重要形容词、副词、介词短语

(1) ***in accordance with*** 根据；accordance 的同根词 according 的词组 according to，according as 也表示“根据”，而且更经常使用。

(2) ***in the appearance of*** 在……表面上。

(3) ***arbitrary*** a. 任意的

应注意它与 any 的区别。实际上，any 的意思很多，作形容词用时在数学英语中也可表示“任意的”，经常放在介词 for 之后，如 for any point on the plane【对平面上任意的一个点】，这时有强调个体与整体的关系的意思；而 arbitrary 着重强调任意性。注意，在下面两个句子中，arbitrary 不能换成 any。

(i) *A* is an ***arbitrary*** point on the plane.【*A* 是平面上任意一点。】

(ii) The constant C is ***arbitrary***. 【常数 C 是任意的】。

4. 典型例句与句型

(1) Therefore, all we need to prove is ***that*** a bounded monotonic sequence must converge.

本句的译文见♣ (2)。句中由 that 引导的从句是表语从句，属于名词从句之一。关于名词从句的介绍可参见 § 3.7。

(2) One can see this especially when ***studying*** more advanced real analysis. 这句的时间状语是 when studying more advanced real analysis，它是一个现在分词短语。有关分词短语的介绍，可参考 § 3.1。

练 习 2.9

1. 掌握下列数学术语的含义及应用：

variable, limit, left limit, right limit, absolute value; sequence, series, Cauchy sequence; increasing, decreasing, monotonic, bounded, unbounded; upper bound, least upper bound, greatest lower bound; approaches, converge, converge uniformly, successively; bounded subset, real-number system; equivalent, contradicts, criterion; ε-δ language.

2. 把下面的术语译成英文：

变量、极限、左极限、右极限、绝对值；序列、柯西列、级数；递增的、递减的、单调的、有界的、无界的；上界、最小上界、最大下界；有限区间、无穷区间、有界集、实数系；趋近、收敛、一致收敛；判别法、等价、逐次地、与……矛盾、ε-δ 语言。

3. 汉译英：

(1) 如果一序列是单调上升或单调下降的，则称之为单调的。

(2) 如果存在正数 M 使得对于所有的 n 都有 $|f(n)|\leqslant M$，则称序列 $\{f(n)\}$ 为有界的。

(3) 如果一序列 $\{a_n\}$ 收敛，则对任意正数 ε，存在一个正整数 N，使得对所有的 $n\geqslant N$，有 $|a_n|<\varepsilon$。

(4) 函数 $f(x)$ 在点 c 有极限 A 当且仅当 $f(x)$ 在该点的左极限与右极限都存在且二者都等于 A。

(5) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 有定义。如果对任意 $\varepsilon>0$ 都存在正整数 K 使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 对所有 $x\geqslant K$ 成立(其中 A 是常数)，则称当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 收敛于 A。如果当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)=-f(x)$ 收敛于 A，则称当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)$ 收敛于 A。如果当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时 $f(x)$ 都收敛于 A，则称当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 收敛于 A。

4. 英译汉：

(1) A sequence $\{a_n\}$ is said to have a limit L if, for every positive number ε, there is another positive number N (which may depend on ε) such that

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{for all} \quad n \geqslant N.$$

A sequence which does not converge is called divergent.

(2) A complex-valued sequence $u_n = a_n + \mathrm{i}\, b_n$ converges to $L = a + \mathrm{i}b$ if and only if both the real part a_n and the imaginary part b_n converge separately, i.e. $a_n \to a$ and $b_n \to b$, in which case we have

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(3) The phrase "convergent sequence" is used only for a sequence whose limit is finite. A sequence with an infinite limit is said to diverge. There are, of course, divergent sequences that do not have infinite limits. Examples are defined by the following formulas:

$$f(n) = (-1)^n, \quad f(n) = \sin\frac{n\pi}{2}, \quad f(n) = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad f(n) = \mathrm{e}^{\frac{n\pi}{2}\mathrm{i}}.$$

(4) A functions $f: D \to \mathbf{R}$ is said to be continuous at the point x_0 in D provided that whenever $\{x_n\}$ is a sequence in D that converges to x_0, the imagine sequence $\{f(x_n)\}$ converges to $f(x_0)$. The functions $f: D \to \mathbf{R}$ is said to be continuous provided that it is continuous at every point x in D.

(5) **Lemma** Suppose the sequence $\{d_n\}$ converges to the number d, and that $d_n \geqslant 0$ for every natural number n. Then we have $d \geqslant 0$.

The proceeding lemma asserts that a convergent sequence of nonnegative numbers has a limit that is also nonnegative. It is not always true that a convergent sequence of positive numbers has a limit that is also positive. For instance, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ is a sequence of positive numbers that converges to 0.

§ 2.10 导数、微分与不定积分
(Derivative, Differential and Indefinite Integral)

一、精读课文

Part A The Concept and Definition of a Derivative[30]

There were two problems that led to the discovery of the derivative. The

old one of defining and representing the tangent line to a curve at one of its points had **concerned** early Greek *philosophers*[♣(1)]. The other problem of representing the *instantaneous velocity* of an object whose motion was not constant was *much more* a problem of the seventeenth century. At the end of the century, these problems and their relationship were **resolved**. *As is usually the case*, many mathematicians contributed, but it was Isaac Newton and Gottfried Wilhelm Leibniz who *independently* put together organized bodies of thought upon which others could build[♣(2)].

The *tangent* problem **provides** a *visual interpretation* of the derivative and can be **brought to** mind *no matter* what the complexity of a particular application[注3]. It leads to the definition of the derivative as the limit of a difference quotient in following way (see Figure 2.10.1).

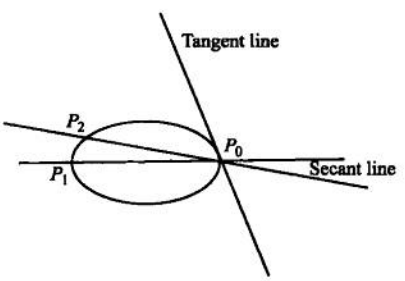


Figure 2.10.1

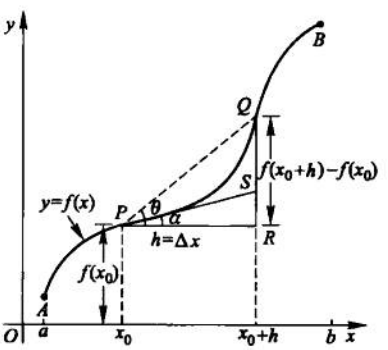


Figure 2.10.2

Let $P(x_0)$ be a point on the graph of $y=f(x)$. Let $P(x)$ be a nearby point on this same graph of the function f. Then the line through these two points is called a *secant line*. Its slope, m_s, is the difference quotient

$$m_s=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

where Δx and Δy are called the *increments* in x and y, respectively. Also this slope maybe written

$$m_s=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

注 3:本句的语法分析见下面第三部分之 4(词语与句型学习)。

where $h=x-x_0=\Delta x$ (see Figure 2.10.2).

We can imagine a sequence of lines formed as $h\to 0$. It is the limiting line of this sequence that is the natural one to be the tangent line to the graph at P_0[♣(3)].

To make this mode of reasoning precise, the limit (when it exists), is formed as follows:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\text{[♣(4)]}.$$

As indicated, this limit is given the name $f'(x_0)$. It is called the *derivative* of the function f at its *domain value* x_0. If this limit can be formed at each point of a *subdomain* of the domain of f, then f is said to be *differentiable* on that subdomain and a new function f' has been constructed.

Part B Differentials and Indefinite Integral[30]

I. Differentials

Let $\Delta x=\mathrm{d}x$ be an *increment* given to x. Then

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \tag{i}$$

is called the increment in $y=f(x)$. If $f(x)$ is continuous and has a continuous *first derivative* in an interval, then

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x=f'(x)\mathrm{d}x+\varepsilon\mathrm{d}x,$$

where $\varepsilon\to 0$ as $\Delta x\to 0$. The expression

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x \tag{ii}$$

is called the *differential* of y or $f(x)$ or the principal part of Δy, while the quantity $\mathrm{d}x$ is called the differential of x[♣(5)]. Note $\mathrm{d}y$ need not be small and $\Delta y\neq\mathrm{d}y$ in general. However if $\Delta x=\mathrm{d}x$ is small, then $\mathrm{d}y$ is a close approximation of Δy[♣(6)].

Because of the definitions (i) and (ii), we often write

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

It is emphasized that $\mathrm{d}x$ and $\mathrm{d}y$ are not the limit of Δx and Δy as $\Delta x\to 0$, since the limits are zero whereas $\mathrm{d}x$ and $\mathrm{d}y$ are not necessarily zero. Instead, given

dx we determine dy from (ii), i.e., dy is a *dependent* variable determined from the *independent variable* dx for a given x[♣(7)].

II. Indefinite Integral

Suppose $f(x)$, $F(x)$ and $G(x)$ are functions defined on an *interval* $[a, b]$. If $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ for all $x\in[a, b]$, then $F(x)$ is called a *primitive function* (or *antiderivative*) of $f(x)$. It is clear that if $F(x)$is a primitive function of $f(x)$, then $G(x)$ is a primitive function of $f(x)$when and only when there exists a constant C such that $G(x)=F(x)+C$ for all x in $[a, b]$. Hence, if C varies on the set of real numbers, then we obtain the family of primitive functions of $f(x)$. This family is called the *indefinite integral* of $f(x)$ and denoted by $\int f(x)dx$, i.e.

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

where the symbol $\int$ is called the *integral sign*, the function $f(x)$ is called the *integrand* and C is an arbitrary constant **named** *integral constant*.

The process to find the indefinite integral of a give function $f(x)$ is considered as the *reverse process* of differentiation. As usually, the reverse process is much more difficult than the process of differentiation. Besides directly applying the basic integral formulas rewritten by differential formulas, there are some important methods to find indefinite integrals, among them are the *method of substitution*, *integration by parts*, but they are *available* only for a smaller kind of continuous functions[♣(8)].

Recall that according to the *chain rule*, the derivative of $g[u(x)]$ is $g[u(x)]u'(x)$. Then we can obtain the following theorem.

Theorem 2 (Integration by substitution) Let f and g be continuous function and u be *differentiable functions* of x so that

$$f(x)=g[u(x)]u'(x).$$

Then

$$\int f(x)dx=\int g(u)du=G[u(x)]+C,$$

where G is the antiderivative of g.

With some complex integrals, like $\int xe^x dx$, both methods of inspection and the method of simple substitution can not be used. A new method must be derived to handle these types of problems. The *product rule* of differentiation is as follows:

$$[f(x)g(x)]' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'.$$

If we substitute u for $f(x)$ and v for $g(x)$, we have $(uv)' = u'v + uv'$. We can reverse the product rule to be a statement about antiderivatives:

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv.$$

This equation can then be manipulated to produce the following formula.

Theorem 3 (Integration by Parts) Let u and v be differentiable functions of x, then we have the *formula for integration by parts*:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (*)$$

There are several steps one must go through in order to properly use the formula. For example, to find $\int xe^x dx$, we may let $u = x$ and $dv = e^x dx$, then $v = e^x$, $du = dx$, by the formula we have

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = x\,e^x - e^x + C.$$

二、阅读与翻译指导

♣(1) The old one of defining and representing the tangent line to a curve at one of its points had concerned early Greek philosophers.

这句用过去完成时表示此前很久的事(过去的过去)。句中 one 是代词,代替前面谈及的"问题";短语 the tangent line to a curve 表示"曲线的切线"。全句可译成:

【其一是如何确定并表示曲线上某一点的切线这一古典问题,它涉及古希腊哲学家的研究。】

♣(2) As is usually the case, many mathematicians contributed, but it was Isaac Newton and Gottfried Wilhelm Leibniz who independently put together organized bodies of thought upon which others could build.

本句是并列复句，前一分句中 as is usually the case 是插入语。后一分句是 it was…who 型的强调句，其中 which 引起的宾语从句修饰 bodies。词组 put together organized bodies of thought 可意译成“总结出有机的思想体系”。

【和通常的情形一样，许多数学家都作出贡献，但是正是由于 I. 牛顿和 G. W. 莱布尼茨各自独立地总结出有机的思想体系，才使得其他学者能在这基础上进行工作。】

♣(3) It is the limiting line of this sequence that is the natural one to be the tangent line to the graph at P_0.

本句是 it is…that 型的强调句，强调的对象 the limiting line of this sequence 是主语，is the natural one to be the tangent line to the graph at P_0 是系表结构(to be the tangent line to the graph at P_0 是定语，修饰 one)。按这样的结构，这句可以翻译成

【这一列直线的极限直线很自然地就成了图形在 P_0 点的切线。】

或者

【很自然地，这一列直线的极限就成了图形在 P_0 点的切线。】

♣(4) To make this mode of reasoning precise, the limit (when it exists), is formed as follows:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

动词不定式短语作目的状语，mode 和 precise 是动词 make 的双宾语。这里的被动语态汉译时宜转为主动语态。

【为了使这种推理模式精确化，我们把上述极限(当它存在时)确切地表述如下：

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}。】$$

♣(5) The expression

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x \tag{ii}$$

is called the differential of y or $f(x)$ or the principal part of Δy, while the quantity $\mathrm{d}x$ is called the differential of x.

注意这里两个 or 在句子结构中的层次不同，即第一个 or 连接 y 和 $f(x)$，用于修饰 the differential，第二个 or 连接 the differential 和 the principal part。为了清晰起见，可译成：

【表达式

$$dy=f'(x)dx \tag{ii}$$

称为 y 的微分或 $f(x)$ 的微分，也称为 Δy 的主部，而量 dx 则称为 x 的微分。】

♣(6) However if $\Delta x=dx$ is small, then dy is a close approximation of Δy.

这里 small 指的是“很小的”，而 close 指的是“很接近的”。

【但是，如果 $\Delta x=dx$ 很小，则 dy 是 Δy 的一个很接近的近似值。】

♣(7) Instead, given dx we determine dy from (ii), i.e., dy is a dependent variable determined from the independent variable dx for a given x.

句中 dependent variable 和 independent variable 分别是“自变量”和“应变量”。插入语 instead 在这里有否定上一句相关论点的意思。全句可译成：

【相反地，当 dx 取定时可由式(ii)确定 dy，即对于给定的 x，dy 是由自变量 dx 确定的一个应变量。】

♣(8) Besides directly applying the basic integral formulas rewritten by differential formulas, there are some important methods to find indefinite integrals, among them are the method of substitution and integration by parts, but they are available only for a smaller kind of continuous functions.

这句由三个简单句构成并列复句；在第一个句中，介词 besides 引导的短语作状语，在肯定句中，besides 的含义是“除了……还有”。全句可译成：

【除了直接应用由微分公式改写的基本积分公式之外，还有一些重要的方法用来求不定积分，其中包括变量替换法和分部积分法，但是它们仅适合于一小类连续函数。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***derivative*** n. 导数，微商

～ of first order 一阶导数；～ of higher order 高阶导数；～ on the left 左导数；～ on the right 右导数；partial ～ 偏导数；total ～ 全导数，全微商；directional ～ 方向导数。

相关词语：

antiderivative n. 反导数(即原函数，现在通常用 primitive function 表示原函数)。

2) ***differential*** n. 微分；a. 微分的

～ calculus 微分学，微分；～ equation 微分方程；～ quotient 微商；～ of

a function 函数的微分；～ value 微分值。

相关术语：

differentiable a. 可微的：～ function 可微函数；～ manifold 微分流形。

differentiate vt. 求微分，求导数。

differentiation n. 微分法。

3) ***interval*** n. 区间

open ～ 开区间；closed ～ 闭区间；finite ～ 有限区间；infinite ～ 无限区间；～ estimation 区间估计；～ of convergence 收敛区间。

4) ***integral*** a. 积分的，整数的；n. 积分，整体

～ calculus 积分学；definite ～ 定积分；indefinite ～ 不定积分；～ curve 积分曲线；～ constant 积分常数；～ multiple 整数倍；～ rational expression 有理整式。

相关术语：

integration n. 积分，积分法：～ by parts 分部积分法；～ by substitution 换元积分法；successive ～ 累次积分。

5) ***constant*** n. 常数，常项

～ coefficient 常系数；～ curvature 常曲率；～ function 常值函数；～ mapping 常值映射；～ multiple 常数倍；～ of integration 积分常数；～ quantity 常量；～ term 常数项。

6) ***independent*** a. 独立的，无关的

～ equation 独立方程；～ event 独立事件；～ increment 独立增量；～ solutions 无关解；～ set 无关集；～ solutions 无关解；～ variable 自变量。

相关术语：

independence n. 无关(性)：linear ～ 线性无关。

7) ***approximate*** a. 近似；v. 逼近

～ analysis 近似分析；～ computation 近似计算；～ evaluation 近似估计；～ number 近似数；～ value 近似值。

8) ***directed*** a. 有向的

～ angle 有向角；～ distance 有向距离；～ graph 有向图；～ line 有向直线；～ number 有向数。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***concern*** vt. (事情)与……有关，使有关

例 The tangential problem had ***concerned*** early Greek philosophers. 【切线问题与古希腊哲学家的研究有关。】

(2) ***resolve*** vt. 下决心，作决议，解决

词组 resolve problem 的意思是“解决问题”，这时，resolve 与 solve 及 settle 是同义词。

(3) ***bring to mind*** (整个词组可看成一个及物动词)使人想起

其同义词如：call to mind；recall。

(4) ***construct*** vt. 建立，构成

例 ***Construct*** a new function.【构造一个函数。】

(5) ***name*** vt. 给……命名(单宾语)，把……命名为……(双宾语)

例 Here C is an arbitrary constant ***named*** integral constant.【这里 C 是一个称为积分常数的任意常数。】句中过去分词 name 引导的短语作定语修饰 constant。

3. 形容词、副词、连词、介词短语

(1) ***as is usually the case*** 意为“和通常的情形一样”。

(2) ***when and only when*** 与 if and only if 同义，参见 §3.6。

(3) ***available*** a. 有用的，有效的

常作表语，词组 be available for 意思是“对……有用的”，“对……有效的”。

(4) ***whereas*** con. 然而，却，反之

用于引导对比的从句时，可译成“而”。

(5) ***clockwise*** 和 ***counterclockwise*** 既是形容词，也是副词，分别表示“按顺时针的(地)”和“按反时针的(地)”。词组 in the clockwise sense 和 in the counterclockwise sense 分别表示“按顺时针的意义”和“按反时针的意义”。

4. 典型例句与句型

(1) The tangent problem ***provides*** a visual interpretation of the derivative and can be ***brought to*** mind ***no matter*** what the complexity of a particular application.【切线问题为导数提供了可视化的解释，而且，不论具体应用的情况是如何复杂都会使人想起这种直观性。】

这是一个主从复合句，主句有两个并列的谓语动词，前者 provides 是主动语态，后者 can be brought 是带情态动词的被动语态(其后不定式 to mind 作状语)；no matter 引导一个让步状语从句(修饰后一个谓语动词)，其中省略了谓语 is(部分状语从句经常可以省略谓语动词或其他成分，参见 §3.12)。

(2) 本文有多个强调语句，♣(2)中是 ***It is*** (***was***)… ***who***…型的强调句，强调的对象是人；♣(3)是 ***It is*** (***was***)…***that*** 型的强调句，强调的对象是物。有关强调句型的介绍，可参见 §3.7。

练 习 2.10

1. 掌握下列数学术语的含义及应用：

derivative, differential, tangent line, difference quotient, increment; instantaneous velocity, independent, visual interpretation, subdomain, approximation, primitive function, antiderivative, indefinite integral, integrand, arbitrary constant, integral constant, the reverse process, integral formulas, the integration by substitution, the integration by parts; continuous function, differentiable function.

2. 把下面的术语译成英文：

导数、微分、切线、即时速度、差商、可视化的解释；子区域、逼近、原函数、反导数；不定积分、被积函数、任意常数、积分常数、积分公式、逆过程、替换法积分、分部积分；连续函数、可微函数。

3. 汉译英：

(1) 人们关于曲线的切线以及物体运动的即时速度的研究导致了导数概念的产生。

(2) I. 牛顿和 G. W. 莱布尼茨各自独立地建立了微积分的理论基础，其他数学家才得以在这基础上工作。

(3) 切线问题为导数提供了可视化的解释，它导致了人们把导数定义为差商的极限。

(4) 如果函数 f 在它的定义域的某个子区域中的每一点都有导数，则称 f 在这子区域可导。

(5) 如果 $f(x)$在一个区间具有一阶导数 $f'(x)$，则可以用它来定义 $f(x)$ 的微分。

(6) 求原函数是求导数的逆过程，运用基本积分公式、替换法积分、分部积分等都是求不定积分的重要方法。

4. 英译汉：

(1) Examples of derivatives

EXAMPLE 1 **Derivative of a constant function** Suppose f is a constant function, say $f(x)=c$ for all x. The difference quotient is

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0.$$

Since the quotient is 0 for all $h\neq 0$, its limit, $f'(x)$ is also 0 for every x. In the

other words, a constant function has a zero derivative everywhere.

EXAMPLE 2 **Derivative of a linear function** Suppose f is a linear function, say $f(x)=mx+b$ for all real x. If $h\neq 0$, we have

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h}=\frac{mh}{h}=m.$$

Since the difference quotient does not change when h approaches 0, we conclude that

$$f'(x)=m \quad \text{for every } x.$$

Thus, the derivative of a linear function is a constant function.

(2) These three numbers, i.e., $f'_-(a)$, $f'(a)$ and $f'_+(a)$ are called, respectively, the derivative on the left, the derivative on the right of $f(x)$ at $x=a$. For example, if $f(x)=|x|$, then $f'(0)$ does not exist, but $f'_-(0)=-1$ and $f'_+(0)=1$.

(3) **Directed derivate** We now introduce a natural generalization of *partial derivatives*(偏导数). In the definition of $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, the numerator of the difference quotient used involves the value of $f(x, y)$ at two points $(x_0+\Delta x, y_0)$ and (x_0, y_0). As Δx approaches zero, the first point approaches the latter along the line $y=y_0$. For $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ a point $(x_0, y_0+\Delta y)$ approaches (x_0, y_0) along the line $x=x_0$.

(4) Indefinite integration, also known as *antidifferentiation* (反微分), is the reversing of the process of differentiation. Given a function f, one finds a function F such that $F'=f$. Finding an antiderivative is an important process in calculus. It is used as a method to obtain the area under a curve and to obtain many physical and electrical equations that scientists and engineers use everyday.

(5) **Antiderivatives differ by a constant** If F is an antiderivative of the continuous function f, then any other antiderivative must have the form

$$G(x)=F(x)+C.$$

This says that two antiderivatives of the same function differ by the value of the constant of integration, which could be zero.

(6) Often, integrals are too complex to simply use a rule. One method for

solving complex integrals is the method of substitution, where one substitutes a variable for part of the integral, integrates the function with the new variable and then plugs the original value in place of the variable. This is the integration version of the chain rule.

§2.11 定积分的性质与应用
(Properties and Applications of Definite Integral)

一、精读课文

Part A The Basic Properties of the Definite Integral[26]

From the definition of the integral, it is possible to **deduce** the following properties. Proofs are given in section 2.13.

Theorem 1 (Linearity with respect to the integrand) If both f and g are *integrable* on $[a, b]$, then so is $c_1 f+c_2 g$ for every pair of constants c_1 and c_2. Furthermore, we have

$$\int_a^b [c_1 f(x)+c_2 g(x)]\,\mathrm{d}x=c_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+c_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Note: By use of *mathematical induction*, the *linearity property* can be *generalized* as follows: If f_1, f_2, $\cdots$, f_n are *integrable* on $[a, b]$, then so is $c_1 f_1+c_2 f_2+\cdots+c_n f_n$ for all real constants $c_1, c_2, \cdots, c_n$, and

$$\int_a^b \Big[\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)\Big]\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_a^b c_k f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Theorem 2 (*Additivity* with respect to the interval of integration) If two of the following three integrals exist, the third also exists, and we have

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Note: In particular, if f is monotonic on $[a, b]$ and also on $[b, c]$, then both integrals $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ and $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ exist, so $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ also exists and is equal to the sum of the other two integrals.

Theorem 3 (Invariance under translation) If f is integrable on $[a, b]$, then for every real c we have

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\mathrm{d}x.$$

Theorem 4 (Expansion or contraction of the interval of integration) If f is integrable on $[a, b]$, then for every real $k\neq 0$ we have

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\mathrm{d}x.$$

Note: In both Theorems 3 and 4, the existence of one of the integrals **implies** the existence of the other. When $k=-1$, Theorem 4 is called the *reflection property*.

Theorem 5 (*Comparison theorem*) If both f and g are integrable on $[a, b]$ and if $g(x)\leqslant f(x)$ for every x in $[a, b]$, then we have

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

An important special case of Theorem 5 **occurs** when $g(x)=0$ for every x. In this case, the theorem states that if $f(x)\geqslant 0$ everywhere on $[a, b]$, then $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$. In other words, a nonnegative function has a nonnegative integral. It can also be shown that if we have the *strict inequality* $g(x)<f(x)$ for all x in $[a, b]$, then the same strict inequality **holds** for the integrals, but the proof is not easy to give at this stage[♣(1)].

In Chapter 5 we shall discuss various methods for calculating the value of an integral *without the necessity of* using the definition in each case. These methods, however, *are applicable to* only a relatively small number of functions, and for most integrable functions the actual numerical value of the integral can only be **estimated**[♣(2)]. This is usually done by approximating the integrand above and below by step functions or by other simple functions whose integrals can be **evaluated** exactly[♣(3)]. Then the comparison theorem is used to obtain corresponding *approximations* for the integral of the function in question.

Part B Applications of Integration to the Calculation of Volume[26]

Next we show that the volume of a *right cylindrical solid* is equal to the area of its *base* multiplied by its altitude. By a right cylindrical solid we **mean** a

set *congruent to* a set S of the form

$$S=\{(x,\ y,\ z)\mid (x,\ y)\in B,\ a\leqslant z\leqslant b\},$$

where B is a bounded plane *measurable set*. The areas of the cross sections of S perpendicular to the z-axis determine a *cross-sectional area function* m_S which takes the constant value $m(B)$ on the interval $a< z < b$, and the value 0 outside $[a,\ b]$[♣(4)].

Now let T be a box with cross-sectional area function m_T equal to m_S[♣(5)]. Axiom 5 tells us that $v(T)=m(B)(b-a)$, where $m(B)$ is the area of the *base* of T, and $b-a$ is its *altitude*. *Cavalieri's principle*[♣(6)] **states** that $v(S)=v(T)$, so the volume of S is the area of its base, $a(B)$, **multiplied** by its altitude, $b-a$. Note that the product $m(B)(b-a)$ is the integral of the function m_S *over* the interval $[a,\ b]$. In other words, the volume of a right cylindrical solid is equal to the integral of its cross-sectional area function,

$$v(S)=\int_a^b m_S z\,\mathrm{d}z.$$

We can **extend** this formula **to** more general *Cavalieri solids*. Let R be a measurable solid with measurable crosssections perpendicular to a given line L. Introduce a coordinate axis along L (call it the u-axis), and let $m_R(u)$ be the area of the cross section **cut** by a plane perpendicular to L at the point u. The volume of R can be computed by the following theorem[♣(7)].

Theorem 2.7. Let R be a *measurable solid* with a cross-sectional area function m_R which is *integrable* on an interval $[a,\ b]$ and zero outside $[a,\ b]$[♣(8)]. Then the volume of R is equal to the integral of the cross-sectional area:

$$v(R)=\int_a^b m_R(u)\,\mathrm{d}u.$$

Proof. Choose step functions s and t such that $s< m_R< t$ on $[a,\ b]$ and define s and t to be zero outside $[a,\ b]$. For each *subinterval* of $[a,\ b]$ on which s is constant, we can imagine a cylindrical solid (for example, a right circular cylinder)**constructed** so that its cross-sectional area on this subinterval has *the same* constant value *as* s[♣(9)]. The union of these cylinders over all intervals of constancy of s is a solid S whose volume $v(S)$ is, by *additivity*, equal to the integral $\int_a^b s(u)\,\mathrm{d}u$[♣(10)]. Similarly, there is a solid T, a union of

cylinders, whose volume $v(T)=\int_a^b t(u)\mathrm{d}u$. But $m_S(u)=s(u)\leqslant m_R(u)\leqslant t(u)=m_T(u)$ for all u in $[a, b]$, so Cavalieri's principle **implies** that $v(S)\leqslant v(R)\leqslant v(T)$. In other words, $v(R)$ satisfies the inequalities

$$\int_a^b s(u)\mathrm{d}u\leqslant v(R)\leqslant\int_a^b t(u)\mathrm{d}u$$

for all step functions s and t satisfying $s\leqslant m_S\leqslant t$ on $[a, b]$. Since m_S is integrable on $[a, b]$, it follows that $v(R)=\int_a^b m_S(u)\mathrm{d}u$.

Example (Volume of a *solid of revolution*) Let f be a function which is nonnegative and integrable on an interval $[a, b]$. If the *ordinate set* of this function is **revolved** about the x-axis, it **sweeps out** a solid of revolution♣(11). Each cross section cut by a plane perpendicular to the x-axis is a circular disk. The area of the circular disk cut at the point x is $\pi f^2(x)$, where $f^2(x)$ **means** the square of $f(x)$. Therefore, by Theorem 2.7, the volume of the solid (if the solid is measurable) is equal to the integral $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$, if the integral exists. In particular, if $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ for $-r<x<r$, the ordinate set of f is a semicircular disk of radius r and the solid swept out is a sphere of radius r. The sphere is convex. Its volume is equal to

$$\int_{-r}^{r}\pi f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^r(r^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

More generally, suppose we have two nonnegative functions f and g which are integrable on an interval $[a, b]$ and satisfy $f<g$ on $[a, b]$. When the region between their graphs is **rotated about** the x-axis, it sweeps out a solid of revolution such that each cross section **cut** by a plane perpendicular to the x-axis at the point x is an *annulus* (a region bounded by two concentric circles) with area $\pi g^2(x)-\pi f^2(x)$♣(12). Therefore, if g^2-f^2 is integrable, the volume of such a solid (if the solid is measurable) is given by the integral

$$\int_a^b\pi[g^2(x)-f^2(x)]\mathrm{d}x.$$

二、阅读与翻译指导

♣(1) It can also be shown that if we have the strict inequality $g(x)<$

$f(x)$ for all x in $[a, b]$, then the same strict inequality holds for the integrals, but the proof is not easy to give at this stage.

应注意 show 的多种含义，它在数学中常用的意义是展示和证明，应根据上下文来确定；由下面的 the proof 知道，它在这里的含义是“证明”(prove)。

【还可以证明，如果对于每个 $x\in[a,b]$ 有严格不等式 $g(x)<f(x)$ 成立，则对于积分也有严格不等式成立，但是，要在现阶段给出它的证明是不容易的。】

♣(2) These methods, however, are applicable to only a relatively small number of functions, and for most integrable functions the actual numerical value of the integral can only be estimated.

其中 relatively small number of functions 的意思是“相对少量的函数”。第二句宜译成主动句。

【然而，这些方法仅适用于相对少量的函数，并且对于多数可积函数来说，我们只能对其准确的积分数值作出估计。】

♣(3) This is usually done by approximating the integrand above and below by step functions or by other simple functions whose integrals can be evaluated exactly.

其中 above and below 修饰动名词 approximating，表示“从上和从下逼近”。

【通常采用阶梯函数或其他可准确求出积分的简单函数从上和从下逼近被积函数。】

♣(4) The areas of the cross sections of S perpendicular to the z-axis determine a cross-sectional area function m_S which takes the constant value $m(B)$ on the interval $a< z < b$, and the value 0 outside $[a, b]$.

本句 which 引导的定语从句较长，可以译成分句；主句中 of S 和 perpendicular to the z-axis 都是修饰 the cross sections，翻译时要理清逻辑次序。

【S 的垂直于 z 轴的横截面的面积确定了截面积函数 m_S，它在区间 $a< z < b$ 上取常数值 $m(B)$ 而在区间 $[a, b]$ 之外取值为 0。】

♣(5) Now let T be a box with cross-sectional area function m_T equal to m_S.

这里 box 指的是“长方体”。全句可译成：

【现在考虑一个其截面积函数 m_T 等于上述 m_S 的长方体 T。】

♣(6) Cavalieri's principle.

【卡瓦列里原理】 指的是，两个横截面积处处相等的卡瓦列里立体(Cavalieri solid)的体积相等，而卡瓦列里立体指的是每个横截面都是可测集的立体；后面所说的可测立体(measurable solid)必定为卡瓦列里立体。

♣(7) Introduce a coordinate axis along L (call it the u-axis), and let

$m_R(u)$ be the area of the cross section cut by a plane perpendicular to L at the point u. The volume of R can be computed by the following theorem.

第一句中的两个分句都是祈使句，第二句是在前面假定之下立即得出的结论。翻译时可采用意译，对第一句补充主语并把它们融合成一句。

【我们沿着直线 L 引入坐标轴(称之为 u 轴)，设 $m_R(u)$ 是该立体在点 u 的垂直于 L 的截面面积，那么 R 的体积可以由下一定理来计算。】

♣(8) Let R be a measurable solid with a cross-sectional area function m_R which is integrable on an interval $[a, b]$ and zero outside $[a, b]$.

这里所说的 measurable solid(可测立体)指的是其截面面积函数 m_R 为可测的立体。

【设 R 是一个可测立体，并且它的截面面积函数 m_R 在区间$[a, b]$上可积，在$[a, b]$之外取值为 0。】

♣(9) For each subinterval of $[a, b]$ on which s is constant, we can imagine a cylindrical solid (for example, a right circular cylinder) constructed so that its cross-sectional area on this subinterval has the same constant value as s.

这里应先了解阶梯函数 s 的含义与此前的有关论证方法，才能理解好数学内容。连词 so that 引导一个状语从句，词组 the same…as…是惯用法，意思是“和……一样的……”。

【在每个使得 s 取常数值的$[a, b]$的子区间上，可以设想已构造一个这样的柱体(比如是直圆柱体)，它在该子区间上的截面面积等于 s 在该处所取的常数值。】

♣(10) The union of these cylinders over all intervals of constancy of s is a solid S whose volume $v(S)$is, by additivity, equal to the integral $\int_a^b s(u)\mathrm{d}u$.

这句紧接上一句作进一步论证，intervals of constancy of s 指的是上一句所说的，使阶梯函数 s 在该处取常数值的子区间。插入语 by additivity 可译成前置状语。

【由可加性，在 s 取常数值的所有子区间上的这些柱体的并构成一个立体 S，它的体积 $v(S)$等于积分 $\int_a^b s(u)\mathrm{d}u$。】

♣(11) If the ordinate set of this function is revolved about the x-axis, it sweeps out a solid of revolution.

这里 ordinate set 可直译成“纵坐标集”，因为这个术语很少用，为便于读者阅读，可另加括号补充说明。sweep out 原意是“扫出”，这里可译成“形成”。

【如果这个函数的纵坐标集(译者注：这里指的是“函数图形下方的曲边梯

形")绕 x 轴旋转一周,就形成了一个旋转体。】

♣(12) When the region between their graphs is rotated about the x-axis, it sweeps out a solid of revolution such that each cross section cut by a plane perpendicular to the x-axis at the point x is an annulus (a region bounded by two concentric circles) with area $\pi g^2(x)-\pi f^2(x)$.

这个句子比较长,特别是对 solid of revolution 的修饰成分比较复杂,翻译时宜采用意译,译成多个分句。其中 their graphs 最好明确指出是"两个函数的图形"。

【对这两个函数的图形之间的区域绕 x 轴旋转所形成的旋转体,在点 x 处用垂直于 x 轴的平面去截时,所得截面是一个圆环(两个同心圆所形成的区域),它的面积为 $\pi g^2(x)-\pi f^2(x)$。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***strict*** a. 严格的

～ inequality 严格不等式;～ implication 严格蕴涵。

相关术语:

strictly adv. 严格地:～ convex 严格凸的;～ increasing 严格递增的;～ monotone 严格单调的;～ decreasing 严格递减的;～ speaking 严格说来。

2) ***invariance*** n. 不变性

～ of differential forms 微分形式不变性;～ principle 不变原理。

3) ***definite*** a. 定的,确定的

～ integral 定积分;～ operator 有定算子;～ quadratic form 定二次型。

相关术语:

indefinite a. 不定的,不确定的:～ integral 不定积分。

4) ***step*** n. 阶段,级,步骤,步长

step-by-step integration 逐步积分;～ curve 阶梯曲线;～ function 阶梯函数。

5) ***cylindrical*** a. 圆柱形的

right ～ solid 直立柱体;～ coordinates 柱面坐标。

6) ***integrable*** a. 可积的

～ function 可积函数; ～ representation 可积表示。

7) ***subinterval*** n. 子区间

相关术语:

interval n. 区间:open ～ 开区间;closed ～ 闭区间;finite ～ 有穷区间;infinite ～ 无穷区间。

8) ***additivity*** n. 可加性

～ of measure 测度的可加性；～ of probability 概率的可加性。

9) ***congruent*** a. 全等的

～ triangels 全等三角形；～ figures 相似形；～ with 全等于(注意与 similar 比较)。

相关术语：

similar a. 相似的：～ triangels 相似三角形；～ to 相似于。

10) ***cross-sectional*** a. (横)截面的

～ area 截面积。

相关术语：

cross-section n. (横)截面

11) ***convex*** a. 凸的

～ set 凸集；～ space 凸空间；～ linear combination 凸线性组合。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***extend*** vi. 扩展

extend…to… 把……推广到……。

(2) ***deduce*** vt. 推论，演绎

词组 deduce A from B 表示“从 B 推出 A”。

和 conclude (vt.) imply (vt.) 是同义词。

(3) ***approximate*** vt. 近似，逼近；a. 近似的，大概的

常与 to 搭配，approximate to 表示“(正在)接近”，“近似于”。

词组 approximate above and below 的意思是“从上和从下逼近”。

对应的名词是：approximation n. 逼近，近似值：～ by rational functions 有理函数逼近；～ formula 近似公式。

(4) ***evaluate*** vt. 评价，估计，计算

对应的名词是：evaluation n. 赋值，计算：～ of determinants 行列式的求值。

evaluate 与 estimate (vt.) 是同义词；二者同用时，前者表示准确的计算，后者强调估计和概算。

(5) ***revolve*** vt. 使旋转；vi. 旋转

revolve 的同义词是 rotate。revolve about the x-axis = rotate about the x-axis 绕 x 轴旋转。

对应的名词是：revolution n. 旋转：solid of ～ 旋转体。

(6) ***imply*** vt. 蕴含，推出。

对应的名词是:implication n. 蕴含。

3. 形容词、副词、介词短语

(1) ***over*** prep. 在(位置)之上

一般说来,"在区间上"采用介词短语 on the interval 来表示;当强调"在区间的上方"时,则用 over the interval 来表示。本文有两处采用后者。

(2) ***valid*** a. 成立的,有效的

例　The conclusion is ***valid***. 【这个结论成立。】其中 valid 可以换成 true。动词 hold 也用来表示"成立",这个例子可改写成:The conclusion holds.

(3) ***applicable*** a. 可适用的,可应用的

常与 to 搭配,applicable to 表示"适用于……"、"对……适用"。applicable 对应的动词为 apply。

(4) ***without the necessity of using*** …　不必应用于……。

4. 典型例子与句型

(1) ***By*** a right cylindrical solid we ***mean*** a set congruent to a set S of the form

$$S=\{(x,\ y,\ z)\mid (x,\ y)\in B,\ a\leqslant z\leqslant b\},$$

where B is a bounded plane measurable set.

句型 By…we mean…用于介绍一个上面已经提及的概念的含义,起补充说明的作用。关于定义的介绍可参见 § 5.5。

【一个直圆柱体指的是全等于如下集 S 的集:$S=\{(x,\ y,\ z)\mid (x,\ y)\in B,\ a\leqslant z\leqslant b\}$,其中 B 是平面上的有界可测集。】

(2) In other words, $v(R)$ satisfies the inequalities $\int_a^b s(u)\mathrm{d}u\leqslant v(R)\leqslant\int_a^b t(u)\mathrm{d}u$ for all step functions s and t satisfying $s\leqslant m_s\leqslant t$ on $[a,\ b]$.

本句虽然是简单句,语法也相对简单,但是翻译时不可依照原文的语序逐个成分翻译,而应按照汉语的习惯,把 for 引导的介词短语提前。

【换言之,对所有在区间$[a,\ b]$满足 $s\leqslant m_s\leqslant t$ 的阶梯函数 s 和 t,$v(R)$都满足如下不等式 $\int_a^b s(u)\mathrm{d}u\leqslant v(R)\leqslant\int_a^b t(u)\mathrm{d}u$。】

(3) 本文多处运用过去分词短语,见♣(9)、♣(12)。有关分词短语的介绍,参见 § 3.1。

练　习　2.11

1. 掌握下列数学术语的含义及应用:

definite integral, invariance, additivity, expansion, contraction, comparison, establishment; hold; nonnegative function, step function, strict inequality; cylindrical, right cylindrical solid, subinterval, solid of revolution; measurable, integrable, monotonic, congruent, cylindrical, cross-sectional, convex, valid。

2. 把下面的术语译成英文：

定积分、不变性、可加性、唯一性、阶梯函数、非负函数；放大、压缩、建立、比较、成立(动词)；严格不等式；阶梯函数、直立柱体、子区间、旋转体；圆柱形的、单调的、可测的，可积的、全等的、截面的、凸的、有效的。

3. 汉译英：

(1) 定积分满足关于被积函数的线性性质、关于积分区间的可加性和平移不变性。

(2) 非负函数的积分是非负的。还可以证明，如果对于每个 $x\in[a,b]$ 有严格不等式 $g(x)>0$ 成立，则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分也是大于 0 的。

(3) 可采用阶梯函数或其他简单函数从上或从下逼近被积函数，以便求出所讨论函数的积分的近似值。

(4) 如果两个可测的立体在 L 轴上的每一点的横截面积相等，则它们的体积相等。

(5) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 非负，那么该函数的纵坐标集绕 x 轴旋转所得的立体就是一种旋转体，其体积可以用函数 $\pi[f(x)]^2$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分来计算。

(6) 假定 $s=s(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的阶梯函数，$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=b$，则 s 可以用子区间 $\Delta_i=[a_{i-1}, a_i]$，$i=1,2,\cdots,n$ 上的特征函数 χ_{Δ_i} 的线性组合来表示，即 $s(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{\Delta_i}(x)$，于是积分 $\int_a^b s(u)\mathrm{d}u=\sum_{i=1}^{n}c_i(a_i-a_{i-1})$。

4. 英译汉：

(1) The *fundamental theorem of calculus* specifies the relationship between the two central operations of calculus: differentiation and integration.

The first part of the theorem, sometimes called the *first fundamental theorem of calculus*, shows that an indefinite integration can be reversed by a differentiation. The first part is also important because it guarantees the existence of antiderivatives for continuous functions.

The second part, sometimes called the *second fundamental theorem of calculus*, allows one to compute the definite integral of a function by using any one of its infinitely many antiderivatives. This part of the theorem has invalua-

ble practical applications, because it markedly simplifies the computation of definite integrals.

(2) **Theorem** (*First Fundamental Theorem of Calculus*) A real-valued function F is defined on a closed interval $[a, b]$ by setting, for all x in $[a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, where f is a real-valued function continuous on $[a, b]$. Then, F is continuous on $[a, b]$, differentiable on the open interval (a, b), and $F'(x) = f(x)$ for all x in (a, b).

By the theorem, antiderivatives of f always exist when f is continuous.

(3) **Corollary** The fundamental theorem is often employed to compute the definite integral of a function f for which an antiderivative F is known. Specifically, if f is a real-valued continuous function on $[a, b]$, and F is an antiderivative of f in $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

The corollary assumes continuity on the whole interval. This result is strengthened slightly in the following theorem.

(4) **Theorem** (*Second Fundamental Theorem of Calculus* or the *Newton-Leibniz Axiom*)

Let f be a real-valued function defined on a closed interval $[a, b]$ that admits an antiderivative F on $[a, b]$. That is, f and F are functions such that for all x in $[a, b]$, $F'(x) = f(x)$. If f is integrable on $[a, b]$ then $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Because it does not assume that f is continuous, the Second Fundamental Theorem of Calculus is slightly stronger than the Corollary.

§2.12 函数项序列与级数
(Sequences and Series of Functions)

一、精读课文

Part A A Sufficient Condition for Uniform Convergence[26]

Let $\{f_n\}$ be a sequence which **converges pointwise** on a set S to a limit

function f. By the definition of limit, this means that for each x in S and for any $\varepsilon>0$ there is an integer N, which depends on both x and ε, such that $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ whenever $n\geqslant N$♣(1). If the same N **serves** equally well for all points x in S, then the convergence is said to be *uniform* on S♣(2). That is, we have the following.

Definition A sequence of function $\{f_n\}$ is said to **converge uniformly** to a function f on a set S if for every $\varepsilon>0$ there is an integer N (depending only on ε) such that $n\geqslant N$ implies

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{for all } x \text{ in } S.$$

Weierstrass developed a useful test for showing that certain series are *uniformly convergent*. The test is applicable whenever the given series can be **dominated** by a convergent series of positive constants.

Theorem 11.5. The Weierstrass M-Test. Given a series of functions $\sum u_n$ which converges point wise to a function f on a set S. If there is a convergent series of positive constants $\sum M_n$ such that

$$0\leqslant|u_n(x)|\leqslant M_n \quad \text{for every } n\geqslant 1 \text{ and every } x \text{ in } S,$$

then the series $\sum u_n$ converges uniformly on S.

Proof The *comparison test* shows that the series $\sum u_n(x)$ **converges absolutely** for each x in S. For each x in S, we have

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}|u_k(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k.$$

Since the series $\sum M_k$ converges, for every $\varepsilon>0$ there is an integer N such that $n\geqslant N$ implies

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k<\varepsilon.$$

This shows that

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|<\varepsilon$$

for all $n\geqslant N$ and every x in S. Therefore, the series $\sum u_n$ converges uniformly to f on S.

Term-by-term differentiation of an arbitrary series of functions is even

less *promising* than *term-by-term integration*♣(3). For example, the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ converges for all real x because it is dominated by $\sum \frac{1}{n^2}$. Moreover, the convergence is uniform on the whole real axis. However, the series obtained by differentiating term by term is $\sum \frac{\cos nx}{n}$, and this **diverges** when $x=0$. This example shows that term-by-term differentiation may destroy convergence, even though the original series is uniformly convergent. Therefore, the problem of justifying the interchange of the operations of differentiation and *summation* is, in general, more serious than in the case of integration♣(4). We mention this example so the reader may realize that familiar manipulations with finite sums do not always carry over to infinite series, even if the series involved are uniformly convergent♣(5). We turn next to special series of functions, known as *power series*, which can be **manipulated** in many respects as though they were finite sums.

Part B Power Series and Its Circle of Convergence[26]

An infinite series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

is called a power series in $(z-a)$. The numbers z, a, and the coefficients a_n are complex. With each power series there is associated a circle, called the *circle of convergence*, such that the series converges absolutely for every z *interior to* this circle, and diverges for every z outside this circle♣(6). The center of the circle is at a and its radius r is called the *radius of convergence*. (See Figure 2.12.1.)

In extreme cases, the circle may **shrink to** the single point a, in which case $r=0$, or it may consist of the *entire complex plane*, in which case we say that $r=+\infty$. The existence of the circle of convergence is shown in Theorem 11.7.

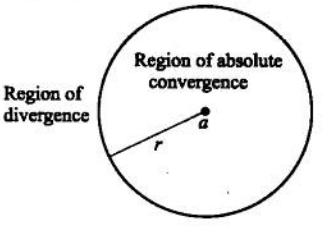


Figure 2.12.1

The *behavior* of the series at the *boundary points* of the circle cannot be **predicted** in advance. Examples show that there may be conver-

gence at none, some, or all the boundary points.

For many power series that occur in practice, the radius of convergence can be determined by using either the ratio test or the root test, as in the following examples.

Example 1. To find the radius of convergence of the power series $\frac{z^n}{n!}$, we apply the ratio test. If $z\neq 0$, the ratio of *consecutive terms* has absolute value[♣(7)]

$$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{z^n}\right|=\frac{|z|}{n+1}.$$

Since this ratio tends to 0 as $n\to\infty$, we **conclude** that the series converges absolutely for all complex $z\neq 0$. It also converges for $z=0$, so the radius of convergence is $+\infty$.

Since the general term of a convergent series must tend to 0, the result of the foregoing example proves that

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z^n}{n!}=0$$

for every complex z. That is, $n!$ "grows faster" than the nth power of any fixed complex number of convergence for every complex z as $n\to\infty$.

Example 2. To test the series $\sum n^2 3^n z^n$, we use the root test. We have

$$(n^2 3^n |z|^n)^{\frac{1}{n}}=3|z|\ n^{\frac{2}{n}}\to 3|z| \quad \text{as } n\to\infty,$$

since $n^{\frac{2}{n}}=\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^2$ and $n^{\frac{1}{n}}\to 1$ as $n\to\infty$. Therefore, the series converges absolutely if $|z|<\frac{1}{3}$ and diverges if $|z|>\frac{1}{3}$. The radius of convergence is $\frac{1}{3}$. This particular power series diverges at every boundary point because, if $|z|=\frac{1}{3}$, the general term has absolute value n^2.

Example 3. For each of the series $\sum\frac{z^n}{n}$ and $\sum\frac{z^n}{n^2}$, the ratio test tells us that the radius of convergence is 1. The first series diverges at the boundary point $z=1$ but converges at all other boundary points (see Section 10.19). The second series converges at every boundary point since it is dominated by $\sum\frac{1}{n^2}$.

We **conclude** this section with a proof that every power series has a circle of convergence. The proof is *based on* the following theorem.

Theorem 11.6. Assume the power series $\sum a_n z^n$ converges for a particular $z \neq 0$, say for $z = z_1$. Then we have:

(a) The series converges absolutely for every z with $|z| < |z_1|$.

(b) The series converges uniformly on every circular disk with center at 0 and radius $R < |z_1|$.

Proof. Since $\sum a_n z_1^n$ converges, its general term tends to 0 as $n \to \infty$. In particular, $|a_n z_1^n| < 1$ from some point on, say for $n \geqslant N$[8]. Let S be a circular disk of radius R, where $0 < R < |z_1|$. If $z \in S$ and $n \geqslant N$, we have $|z| \leqslant R$ and

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n < \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leqslant \left|\frac{R}{z_1}\right|^n = t^n, \qquad \text{where } t = \left|\frac{R}{z_1}\right|.$$

Since $0 < t < 1$, the series $\sum a_n z^n$ is dominated by the convergent *geometric series* $\sum t^n$. By Weierstrass M-test, the series $\sum a_n z^n$ converges uniformly on S. This proves (b). The argument also shows that the series $\sum a_n z^n$ converges absolutely for each z in S. But since each z with $|z| < |z_1|$ lies in some circular disk S with radius $R < |z_1|$, this also proves part (a).

Theorem 11.7. Existence of a circle of convergence. Assume that the power series $\sum a_n z^n$ converges for at least one $z \neq 0$, say for $z = z_1$ and that it diverges for at least one z, say for $z = z_2$. Then there exists a positive real number r such that the series converges absolutely if $|z| < r$ and diverges if $|z| > r$.

Proof. Let A denote the set of all positive numbers $|z|$ for which the power series $\sum a_n z^n$ converges. The set A is not empty since, by hypothesis, it contains $|z_1|$. Also, no number in A can exceed $|z_2|$ (because of Theorem 11.6). Hence, $|z_2|$ is an *upper bound* for A. Since A is a *nonempty set* of positive numbers that is *bounded above*, it has a *least upper bound* which we denote by r. It is clear that $r > 0$ since $r \geqslant |z_1|$. By the definition of r, no number in A can exceed r. Therefore, the series diverges if $|z| > r$. But it is easy to prove that the series converges absolutely if $|z| < r$. If $|z| < r$, there is a positive number x in A such that $|z| < x < r$. By Theorem 11.6, the series $\sum a_n z^n$ converges absolutely.[9] This completes the proof.

There is, of course, a corresponding theorem for power series in $z-a$ which may be deduced from the case just treated by introducing the change of variable $Z=z-a$. The circle of convergence has its center at a, as shown in Figure 2.12.1[♣(10)].

二、阅读与翻译指导

♣(1) By the definition of limit, this means that for each x in S and for any $\varepsilon>0$ there is an integer N, which depends on both x and ε, such that $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ whenever $n\geqslant N$.

这类描述极限定义的句子宜按数学的表达习惯进行部分意译，其中 which 引导的非限制性定语从句可以放在括号中，whenever(只要)引导的条件从句可提前来译。

【根据极限的定义这意味着，对 S 上的每个 x，以及任意 $\varepsilon>0$，存在整数 N(与 x 和 ε 有关)，使得只要 $n\geqslant N$ 就有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$。】

♣(2) If the same N serves equally well for all points x in S, then the convergence is said to be uniform on S.

本句动词 serves 要作意译，词组 serves equally well 的意思是“具有同等作用”。

【如果有同一个 N 能使上式对 S 中所有的 x 一致成立，那么这种收敛就称为“在 S 上一致收敛”。】

♣(3) Term-by-term differentiation of an arbitrary series of functions is even less promising than term-by-term integration[♣(3)].

词组 even less promising 的意思是“更加没希望”，可转译成“更加难以实现”。形容词 arbitrary(任意的)在这里的意思类似于 any，可以理解为“一般的”。因为汉语不加定语地讲“函数项级数”就代表一般的函数项级数，因此 arbitrary 可以不译出。

【函数项级数的逐项可微性要比逐项可积性更加难以实现。】

♣(4) Therefore, the problem of justifying the interchange of the operations of differentiation and summation is, in general, more serious than in the case of integration.

本句是比较句，than 后面的许多成分被省略，翻译时应适当补充。

【因此，判别求和与求微分运算的可交换问题，一般说来要比判别求和与求积分的可交换问题困难得多。】

♣(5) We mention this example so the reader may realize that familiar manipulations with finite sums do not always carry over to infinite series, even if

the series involved are uniformly convergent.

这句 so…that 引导一个原因状语从句；even if 引导一个让步状语从句。词组 carry over to 的意思是“照样搬到”或“移植到”；单词 mention 的原意是“提及”，这里采用意译。

【我们介绍这个例子是为了让读者能够认识到，对于有限和的一些熟悉的运算并非总能移植到无穷级数，即使所考虑的函数项级数是一致收敛的也是如此。】

♣(6) With each power series there is associated a circle, called the circle of convergence, such that the series converges absolutely for every z interior to this circle, and diverges for every z outside this circle.

句中的分词短语 called the circle of convergence 很短，可以直接译成前置定语；interior to this circle 和 outside this circle 都是后置定语，读者应注意 interior 的用法(参见本节第三部分)。

【每个幂级数都对应着一个称为收敛圆的圆，级数在这个圆内的每一个 z 处都绝对收敛，在这个圆外的每一个 z 处级数都发散。】

♣(7) If $z\neq 0$, the ratio of consecutive terms has absolute value….

这句很简单，若把它直译成“如果 $z\neq 0$，那么连续两项的比值有如下绝对值……”，则欠准确。其中 consecutive 的意思不是“连续的”，而是“相邻的”；此时动词 have 不宜译成“有”。全句可译作：

【如果 $z\neq 0$，那么相邻两项之比的绝对值为……。】

♣(8) In particular, $|a_n z_1^n| < 1$ from some point on, say for $n \geqslant N$.

本句 from some point on 意思是“从某个时刻起”，这里的 some point 指的是某个自然数 N。

【特别地，从某个时刻起，比如说，对所有 $n \geqslant N$ 恒有 $|a_n z_1^n| < 1$。】

♣(9) But it is easy to prove that the series converges absolutely if $|z| < r$. If $|z| < r$, there is a positive number x in A such that $|z| < x < r$. By Theorem 11.6, the series $\sum a_n z^n$ converges absolutely.

这个定理的证明多采用简短的句子来阐述。上述三句话事实上讲的是同一件事：第一句给出结论，接下来两句是补充论证。翻译时要体现其中的逻辑关系，适当增添词语，以免句子之间的关系松散。

【但容易证明，对于 $|z| < r$，级数绝对收敛。事实上，如果 $|z| < r$，那么 A 中存在一个正数 x，使得 $|z| < x < r$。于是由定理 11.6 可知，级数 $\sum a_n z^n$ 绝对收敛。】

♣(10) There is, of course, a corresponding theorem for power series in

$z-a$ which may be deduced from the case just treated by introducing the change of variable $Z=z-a$. The circle of convergence has its center at a, as shown in Figure 2.12.1.

这两句关系密切,宜合译成一个句子。

【当然,关于 $z-a$ 的幂级数也有相应的定理,我们可以对刚才处理的情形作变量替换 $Z=z-a$ 而得到,这时收敛圆以 a 为圆心,如图 2.12.1 所示。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***test*** n. 测试,判别法

Weierstrass M- ~ Weierstrass M-判别法;comparison ~ 比较判别法;ratio ~ 比值判别法;root ~ 根式判别法。

2) ***term*** n. 项,术语

general ~ 通项;the first n ~s 前 n 项; consecutive ~s 相继项;term-by-term 逐项; term-by-term integration 逐项积分。

3) ***series*** n. 级数;串

geometric ~ 几何级数;power ~ 幂级数; function ~ 函数项级数。

相关术语:

sequence n. 序列,数列。作为日常用语,sequence 与 series 是同义词,都表示"一连串"。

4) ***boundary*** n. 边界

~ points 边界点;~ of a domain 区域的边界。

5) ***bound*** n. 界

upper ~ 上界;least upper ~ 最小上界(即 supremum 上确界);lower ~ 下界;greatest lower ~ 最大下界(即 infimum 下确界)。

相关术语:

bound v. 界定。

bounded a. 有界的:~ function 有界函数;~ above 上有界;~ lower 下有界。

6) ***empty*** a. 空的

~ set 空集。

相关术语:

nonempty a. 非空的:~ set 非空集;~ closed set 非空闭集。

7) ***behavior*** n. 性质,性状,作用

课文中 the behavior of the series 意思是"幂级数的性质状况"。这个单词

虽然不是纯粹的数学专业用语，但在数学专业英语中经常出现。其近义词是property(性质)。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***conclude*** vt. 推导出，结束

这个动词的上述两个常用的意思相差较大，具体使用时要注意分析和鉴别，不可混淆。

例 1 Since this ratio tends to 0 as $n\to\infty$, we ***conclude*** that the series converges absolutely for all complex $z\neq 0$. 【因为当 $n\to\infty$ 时这个比值趋于 0，所以推出，对于复平面内任意 $z\neq 0$，幂级数是绝对收敛的。】

例 2 We ***conclude*** this section with a proof that every power series has a circle of convergence.

本句 conclude… with…的意思是"以……来结束……"。

【在本节结束之前，我们要证明：每一个幂级数都有一个收敛圆。】

或译成

【我们以对以下结论的证明来结束本节：每一个幂级数都有一个收敛圆。】

(2) ***dominate*** vt. 控制

该动词可用主动式，但较多用被动式 be dominated by…，意思是"被……所控制"。

例 The test is applicable whenever the given series can be ***dominated*** by a convergent series of positive constants.

【这个方法适用于被一个收敛的正的常数项级数所控制的函数项级数。】

(3) ***manipulate*** vt. 操作，进行(运算)

本节多次使用这个动词来描述对运算的操作。

例 Power series can be ***manipulated*** in many respects as though they were finite sums. 【幂级数在许多方面的运算可以像有限和那样进行。】

(4) ***justify*** vt. 判断，判别

3. 重要形容词、副词、介词短语

(1) ***consecutive*** a. 相邻的

～ numbers 相邻数；～ even numbers 相邻偶数；～ terms 相邻项。

(2) ***interior*** 内部的(作前置定语)；而 interior to＋名词，意思是"在……内部的"，作后置定语用。interior 作为名词的意思是"内部"。它与 exterior(外部的，外部)都是来自拉丁语；exterior to 的意思和作用与 interior to 类似。

(3) ***absolutely*** adv. 绝对地

converge ～ 绝对收敛；～ convergent 绝对收敛的。

相关术语：

absolute a. 绝对的：～ value 绝对值。

(4) ***uniformly*** adv. 一致地。

converge ～ 一致地收敛；～ convergent 一致收敛的。

相关术语：

uniform a. 一致的，均匀的：～ velocity 均速；～ cross section 均匀截面。

(5) ***though*** conj. 虽然，纵然

as ～ 似乎，好像；even ～ 尽管。

4. 典型例句与句型

(1) Assume that the power series $\sum a_n z^n$ converges for at least one $z \neq 0$, say for $z=z_1$ and that it diverges for at least one z, say for $z=z_2$.

本文多处使用插入语，并常用 say 引导，意思是“例如”。

【假定幂级数 $\sum a_n z^n$ 至少在某个 $z \neq 0$，例如在 $z=z_1$ 处收敛，又设该级数至少在某个 z，例如在 $z=z_2$ 处发散。】

有关插入语的介绍，参见 § 3.8。

(2) We turn next to special series of functions, known ***as*** power series, which can be manipulated in many respects as though they were finite sums. 本文有许多句子中都出现功能词 as，它在不同场合的意思和作用不同。例如本句中，在 known as(称为)中，as 是介词，意思是“作为”；在 as though(尽管)中，as 没有自己的含义。关于 as 的进一步介绍，可参见 § 3.11。

练 习 2.12

1. 掌握下列数学术语的含义及应用：

converges pointwise, converges absolutely, converge uniformly (uniformly convergent); Weierstrass M-test, comparison test, ratio test, root test; term-by-term differentiation, term-by-term integration; summation, geometric series, power series; general term, circle of convergence, radius of convergence; upper bound, bounded above, least upper bound; consecutive terms, empty set, interior to; dominated, manipulate.

2. 把下面的术语译成英文：

点状收敛、绝对收敛、一致收敛、一致收敛的；Weierstrass M－判别法、比较判别法、比值判别法、根式判别法；逐项微分、逐项积分；求和法、几何级数、幂级数；收敛圆、收敛半径，通项；上界、上有界、最小上界(上确界)；相邻项、空集、在内部；控制、操作。

3. 汉译英：

(1) 在开区间(a, b)上一致收敛的函数列必定在该区间的每一点都收敛；但是在(a, b)上点状收敛的函数列未必一致收敛。

(2) 如果定义在区域D上的函数列$\{f_n\}$不一致收敛于函数f，则存在数$\varepsilon_0>0$，使得对任意自然数N总存在某个$n\geqslant N$和某个$a\in D$满足$|f_n(a)-f(a)|>\varepsilon_0$。

(3) 任何一个幂级数$\sum a_n z^n$至少在点$z=0$收敛；如果它在整个复平面收敛，则它的收敛半径为$+\infty$。

(4) 对于有限和的一些熟悉的运算并非总能推广到无限级数，但是幂级数具有许多和有限和一样的运算性质。

(5) 收敛级数的通项总是趋于0，由此得到级数收敛的一个必要条件。但是它不是充分的，因为通项趋于0的级数未必收敛。

(6) 一个实数集若有上界，则必有最小上界；另一方面，一个实数集若有下界，则必有最大下界。于是，一个有界的实数集既有上确界，也有上确界。

4. 英译汉：

(1) This particular power series diverges at every boundary point of the circle of convergence because, if $|z|=r$, the general term has absolute value n.

(2) The convergence of a power series at the boundary points of the circle cannot be predicted in advance by ratio test or root test. We must use other finer test to justify them.

(3) A series $\sum a_n$ is said to be absolutely convergent if $\sum|a_n|$ converges. It is called *conditionally convergent* if $\sum a_n$ converges but $\sum|a_n|$ diverges.

(4) Both the root test and the ratio test are, in reality, special cases of the comparison test. In fact, when $(a_n)^{\frac{1}{n}}\to R<1$ or $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L<1$ as $n\to\infty$, convergence is deduced from the fact that the series in question can be dominated by a suitable geometric series $\sum x^n$.

(5) Now we consider sequences $\{f_n\}$ whose terms are real-valued or complex-valued functions having a common domain S on the real line or in the complex plane. Assume f_n converges uniformly to a function f on S. If each function f_n is continuous at a point P in S, then the limit function f is also continuous at P.

(6) Assume a function f is represented by the power series $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ in an open interval $(a-r, a+r)$. Then $f(x)$ is continuous on

this interval, and its integral over any closed subinterval may be computed by integrating the series term by term.

§ 2.13 常微分方程
(Ordinary Differential Equations)

一、精读课文

Part A Introduction to Differential Equations[31]

A *differential Equation* is an equation that **involves** one or more derivatives of an unknown function. These equations may **range from** the fairly simple **to** the extremely complex. In following examples, it is understood that each y is a function of t.

Examples (a) $y'=t^2$ [or $y'(t)=t^2$].

(b) $y''+y=0$ [or $y''(t)+y(t)=0$].

(c) $y'=-\dfrac{t}{y}$.

(d) $e^{2t^2}y^{(5)}+\sin(ty)y''-\cos y=t^7$.

The *order of a differential equation* is equal to the order of the *highest derivative* that appears in the equation. For instance, (b) above is a *second-order differential equation* and (d) is a *fifth-order equation*.

A function ϕ is said to be a *solution* of a differential equation on an interval (α, β) if for each $t\in(\alpha, \beta)$, substitution of $\phi(t)$ and the appropriate derivatives of ϕ in the given equation **yields** the desired equality♣(1).

For example, $\phi(t)=\dfrac{t^3}{3}+13$ is a solution of (a) since $\left(\dfrac{t^3}{3}+13\right)'=t^2$, and this solution is valid for each $t\in\mathbf{R}^1$. Similarly, the functions $\phi_1(t)=\sin t$ and $\phi_2(t)=\cos t$ are easily seen to be solutions of the equation given in (b); again these solutions are *valid* for the *entire real line* $\mathbf{R}^1$. A solution of (c) is given by $\phi(t)=\sqrt{4-t^2}$, but any open interval for which this solution is valid cannot contain the points $|t|\geqslant 2$. The solution of (d) will be discussed later.

Example (b) serves to illustrate that solutions need not be *unique* (this is also true in (a)) since $\phi(t)=\dfrac{t^3}{3}-6$ is clear another solution. However, if ad-

ditional conditions are **imposed**, then in certain instances *uniqueness* may be obtained[♣(2)]. For example in (a) if, *a priori*, it is **stipulated** that $y(1)=2$, then it can be shown that the only solution satisfying this equation (and this condition) is given by $\phi(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{5}{3}$[♣(3)]. Similarly, in (b) if it is required that $y(\pi)=2$ and $y'(\pi)=3$, then it will follow that $\phi(t)=3\sin t-2\cos t$ is the unique solution. The conditions that we have imposed are called *initial conditions*.

In (d) it is not even clear that there is a solution, much less what initial conditions would be necessary to ensure its uniqueness[♣(4)]. Establishment of existence and uniqueness of solutions is *frequently* of considerable importance. It is not difficult to see why it would be useful to know that a given differential equation either has a solution or fails to have a solution. The reasons for dealing with uniqueness are perhaps not so *transparent*[♣(5)]. Consider, though, a differential equation that **purports** to describe some physical or biological system (examples will be forthcoming shortly). A solution of such an equation can be used to give the state of the system at varying times t. If there were more than one solution to the given equation, then it would be *meaningless* to talk about the solution as actually describing the true physical reality of the situation[♣(6)]. If the solution is known to be unique, this problem does not arise.

Part B The Nonhomogeneous Problem[23]

In the previous sections of this chapter we have discussed the general theory of second order linear *homogeneous* differential equations, and in the case of constant coefficients have shown how to construct solutions. We will now **turn** our attention to solving the *nonhomogeneous* differential equation

$$L[y]\equiv y''+p(x)y'+q(x)y=g(x). \tag{1}$$

Throughout the discussion we will assume that the functions p, q, and g are continuous on the interval of interest.

In modern engineering the problem of solving Eq. (1) is often **referred** to as an *input-output problem*. Supposing for the moment that the differential equation (1) represents a certain mechanical or electrical system, it is natural to refer to the solution $y=\phi(x)$ as the output of the system. The coefficients p

and q are determined by the physical mechanism. The problem of solving Eq. (1)for different nonhomogeneous terms g, input functions, **corresponds** to determining the output of the system for different input functions♣(7).

Before considering particular cases of Eq. (1), we will **prove** several simple but very useful general results which will **simplify** our *succeeding* work.

Theorem 3. 10. The difference of any two solutions of the differential equation (1),

$$L[y]\equiv y'' + p(x)y' + q(x)y= g(x),$$

is a solution of the corresponding homogeneous differential equation

$$L[y]\equiv y'' + p(x)y' + q(x)y= 0. \tag{2}$$

To prove this theorem suppose that the functions u_1 and u_2 are solutions of Eq. (1). Then

$$L[u_1]= g,$$

and

$$L[u_2] = g.$$

Subtracting the second equation **from** the first equation gives

$$L[u_1]-L[u_2]= 0,$$

or, since L is a linear operator,

$$L[u_1 - u_2]= 0,$$

which is the desired result♣(8). With the aid of this theorem we can prove the following important theorem.

Theorem 3. 11 Any solution $y=\phi(x)$ of the nonhomogeneous linear differential equation (1)

$$L[y]=y''+ p(x)y' + q(x)y=g(x)$$

can be expressed as

$$\phi(x)=y_p(x)+ c_1y_1(x)+ c_2y_2(x), \tag{3}$$

where y_p is any solution of the nonhomogeneous equation and y_1 and y_2 are linearly independent solutions of the corresponding homogeneous equation.

To prove this theorem, **observe** that according to Theorem 3.10, $\phi-y_p$ is a solution of the homogeneous equation. Thus, according to Theorem 3.4 of Section 3.2, $\phi-y_p$ can be **expressed** as a linear combination of y_1 and y_2, which **establishes** the theorem.

It is customary to refer to the linear combination (3)as the *general solution* of Eq. (1).

Consequently, to find the general solution of Eq.(1)we must find the general solution of the homogeneous equation (2)and then find any solution of the nonhomogeneous equation♣(9). As we could have **anticipated** (see Section 3.1) the general solution of Eq.(1)**involves** two arbitrary constants, and hence to **specify** a unique solution of Eq. (1)it is necessary to specify two *additional conditions*, namely, the *initial conditions* $y(x_0)=y_0$ and $y'(x_0)=y_0'$♣(10).

The general solution of the homogeneous equation (2)is often referred to as the *complementary solution* and denoted by y_c. Thus $y_c(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$. A solution of the nonhomogeneous equation y_p is usually called a *particular solution*. Notice that y_p is not *uniquely* **determined** since if Y is a solution of the nonhomogeneous equation then Y plus any multiple of y_1 or y_2 is still a solution of the nonhomogeneous equation. It follows from Theorem 3.11 that the general solution of the nonhomogeneous equation (1)is

$$y=y_c(x)+y_p(x). \tag{4}$$

二、阅读与翻译指导

♣(1) A function ϕ is said to be a solution of a differential equation on an interval (α, β) if for each $t\in(\alpha, \beta)$, substitution of $\phi(t)$ and the appropriate derivatives of ϕ in the given equation yields the desired equality.

这句 if 引导的条件从句比较长，可按英文的语序译成中文。单词 yield 作为及物动词，含义为“产生”或“推出”，但翻译时可据实际情况适当采用意译。

【函数 ϕ 称为一个微分方程在区间(α, β)上的解，如果对每一个 $t\in(\alpha, \beta)$，用 $\phi(t)$和 ϕ 的适当导数代入该方程时，能够使它成为所要的等式。】

♣(2) However, if additional conditions are imposed, then in certain instances uniqueness may be obtained.

单词 impose 的含义是“强加”，在这里可译成“增设”。这篇课文广泛应用被动式，读者可根据中文表达习惯的需要译成主动式。全句可译成：

【但是，如果增设一些附加条件，则在一定情况下可以得到唯一性。】

♣(3) For example in (a)if, a priori, it is stipulated that $y(1)=2$, then it can be shown that the only solution satisfying this equation (and this condition) is given by $\phi(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{5}{3}$.

词语 a priori 既可以当形容词,也可以当副词,其含义是"先验的(地)"、"推理的(地)"、"假定的(地)"、"在先的","事先"。这里应译成"事先",全句可译成:

【例如在(a)中,若事先规定 $y(1)=2$,则可以证明,满足方程(连同这个条件)的解只有一个,即 $\phi(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{5}{3}$。】

♣(4) In (d)it is not even clear that there is a solution, much less what initial conditions would be necessary to ensure its uniqueness.

句中 that 引起的从句与 what 引起的从句都是先行词 it 所代表的实际内容,即前后两件事都不清楚。词组 much less 用于否定句的意思是"更不用说",在它的前面用 not even,联合起来表示"连……都不"或"更不用说……"。全句可译成:

【对于方程(d),甚至连是否有解我们都不清楚,更不用说必须采用什么样的初始条件来保证解的唯一性。】

♣(5) It is not difficult to see why it would be useful to know that a given differential equation either has a solution or fails to have a solution. The reasons for dealing with uniqueness are perhaps not so transparent.

虽然字母 a 放在名词前有时有表示"一"的意思,但在短语 either has a solution or fails to have a solution 中,a 作为不定冠词是泛指"有解或无解",不能译成"一"。比如,译成"有一个解或不能有一个解"则与原文不合。全句可译成:

【不难看到,为什么了解一个给定的微分方程是否有解或无解是很有用的。而为什么要处理唯一性的理由可能不太明晰易懂。】

♣(6) If there were more than one solution to the given equation, then it would be meaningless to talk about the solution as actually describing the true physical reality of the situation.

本句采用虚拟语气说明,在假定解不唯一的情况下可能出现的结果。不定式 to talk about the solution as…意思是"把……说成"。全句可译成:

【如果该方程的解不止一个,那么要把那个解说成是准确地描述了真正的物理实际状态,就将会是没有意义的了。】

♣(7) The problem of solving Eq. (1)for different nonhomogeneous terms

g, input functions, corresponds to determining the output of the system for different input functions.

本句动名词 solving 和 determining 的后面分别连接一个宾语，分别充当句子的主语和宾语。动词词组 correspond to 相当于一个及物动词，意思是“对应于”。

【对不同的非齐次项 g（即输入函数），解方程(1)的问题对应于根据不同的输入函数确定该系统的产出的问题。】

♣(8) Subtracting the second equation from the first equation gives $L[u_1]-L[u_2]=0$, or, since L is a linear operator, $L[u_1-u_2]=0$, which is the desired result.

注意，subtract A from B 的意思是“B 减去 A”。句子 or 作插入语，其意思是“也就是说”，在这里也可以不译出。

【把第一个方程减去第二个方程得到 $L[u_1]-L[u_2]=0$，因为 L 是线性算子，所以 $L[u_1-u_2]=0$，这是所要的结果。】

♣(9) Consequently, to find the general solution of Eq. (1)we must find the general solution of the homogeneous equation (2)and then find any solution of the nonhomogeneous equation.

这句大部分内容不难理解和翻译，只是要注意 any solution 的译法，如果译成“任意解”，很容易被误以为是“每一个解。”而根据数学知识知，这里指的是“只要其中任选一个即可”。

【因此，为了求方程(1)的通解，我们必须先求齐次方程(2)的通解，然后再求出非齐次方程的某个任意解。】

♣(10) As we could have anticipated (see Section 3.1) the general solution of Eq. (1)involves two arbitrary constants, and hence to specify a unique solution of Eq. (1)it is necessary to specify two additional conditions, namely, the initial conditions $y(x_0)=y_0$ and $y'(x_0)=y'_0$.

本句是由 and 连接的两个并列句组成的。第一句是主从复合句，句首用 as 引导一个比较从句，采用虚拟语气；第二句是简单句，第一个不定式短语是目的状语，第二个不定式短语是真正主语(it 是形式主语)。

【正像我们可能期待的那样(见 3.1 节)，方程(1)的通解包含了两个任意常数。因此，为了确定方程(1)的唯一解，必须指定两个附加条件，即初始条件 $y(x_0)=y_0$ 和 $y'(x_0)=y'_0$。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***equation*** n. 方程，等式

～ of plane 平面方程；～ of curve 曲线方程；～ of straight line 直线方程；～ of higher degree 高次方程；～ of *n*th order *n* 次方程；～ with constant coefficient 常系数方程；ordinary differential ～ 常微分方程；partial differential ～ 偏微分方程；quadratic ～ 二次方程。

2) ***homogeneous*** a. 齐次的

～ equation 齐次方程；～ polynomial 齐次多项式。

相关术语：

non-homogeneous a. 非齐次的：～ equation 非齐次方程；～ problem 非齐次问题。

3) ***initial*** a. 初始的

～ condition 初值条件；～ distribution 初始分布；～ function 初始函数。

4) ***solution*** n. 解，解法

complementary ～ 补充解；general ～ 通解；particular ～ 特解；～ curve 解曲线；～ by logarithm 对数解法；～ of differential equation 微分方程的解；linearly independent ～ 线性无关解。

5) ***uniqueness*** n. 唯一性

～ theorem 唯一性定理；～ of solution 解的唯一性。

相关术语：

unique a. 唯一的；uniquely adv. 唯一地。

6) ***existence*** n. 存在性：～ theorem 存在性定理；～ of solution 解的存在性。

相关术语：

exist vi. 存在：通常出现在如下句型：there exist(s)…中。

7) ***input*** n. 输入

～ function 输入函数；～ data 输入数据；～-output n. 输入输出，投入产出。

8) ***output*** n. 输出：～ function 输出函数。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***range*** vi. 变化；n. 范围，值域

range from…to… 从……变化到……。

(2) ***impose*** vt. 强加

例子参看♣(2)。

(3) ***yield*** vt. 产生，给出，推出

表示“给出”时与 give 同义；表示“推出”时与 conclude 同义。

(4) ***refer*** vt. 论及，参照

应注意，以下两个词组的含义不同：(i) refer to 意思是“参照”、“参考”；而

refer to as 的意思是“称为”。

(5) ***turn*** vt. 转变

词组 to turn our attention to… 的意思是“把我们的注意力转向……”。

(6) ***specify*** vt. 指定,明确地陈述

(7) ***anticipate*** vt. 预期,期待

(8) ***purport*** vt. 宣称,声称

purport to… 据称是……。

(9) ***stipulate*** vt. 规定,载明

它的同义词是 provide,prescribe。

3. 形容词、副词、介词短语

(1) ***succeeding*** a. 后续的

(2) ***transparent*** a. 明显的,透明的

(3) ***meaningless*** a. 没意义,无益的

(4) ***throughout*** prep. 整个……期间,从头到尾

(5) ***much less*** 用于否定句的意思是“更不用说”

(6) ***a priori*** adj./adv. 先验的(地),假定的(地),推理的(地),在先的,事先(例子见♣(3)。)

4. 典型例子与句型

(1) ***Substitution of*** ϕ (t)and the appropriate derivatives ***of*** ϕ in the given equation ***yields*** the desired equality.

译文参见♣(1)。这句采用“主+谓+宾”这一基本句型。其中主语 substitution 是一个表示动作的名词(意思是“代人”或“替换”),动作的对象 $\phi(t)$and the appropriate derivatives of ϕ 成了它的定语。substitution 与相应的动词 substitute 一样,常与 in 或 into 搭配,用介词宾语表示代人的位置或被替换的对象。

(2) In (d)it is not even clear that there is a solution, ***much less*** what initial conditions would be necessary to ensure its uniqueness.

译文见♣(4)。这是一个并列复句,第一个分句说明现实,第二个复句用虚拟语气进一步指出“更不必提及”的事情,两个分句都用否定的形式。关于否定形式的进一步了解,可参看 §3.12。

练 习 2.13

1. 掌握下列数学术语的含义及应用:

equation, homogeneous, complementary solution, general solution, particular solution; initial condition, the order of a differential equation; existence,

unique, uniquely, uniqueness; yield, range; input, output, a priori.

2. 把下面的术语译成英文：

方程、齐次方程、齐次的、非齐次的；存在性、唯一性、唯一的、唯一地；微分方程的阶、初始条件；通解、特解、补解；产生(动词)、在……变化；输入、输出、先验的(事先)。

3. 汉译英：

(1) 微分方程的阶定义为出现在该方程中的最高阶导数的阶。

(2) 微分方程的解未必唯一。但是，如果增设一些像初始条件之类的附加条件，则有可能得到唯一性。

(3) 微分方程的存在性与唯一性的研究是非常重要的，因为实际问题需要我们回答，在什么条件下，有关的微分方程才有解且具有唯一解。

(4) 要求二阶齐次线性微分方程的通解，必须首先求出它的两个线性无关解，那么它们的线性组合就是所要求的通解。

(5) 非齐次方程的通解具有如下形式：$y=y_c(x)+y_p(x)$，其中 $y_c(x)$ 是相应的齐次方程的通解，$y_p(x)$ 是非齐次方程的一个特解。

(6) 一个正整数加上另一个正整数，它们的和仍是正整数；但是，一个正整数减去另一个正整数，所得的差未必是正整数。

4. 英译汉：

(1) The general second order differential equation is an equation of the form $F(x, y, y', y'')=0$. The theory associated with such an equation is quite complicated. We will therefore begin by restricting our attention to equations which can be solved for y'', that is, equations which can be written in the form $y''=f(x, y, y')$.

(2) For the first order differential equation $y'=f(x, y)$ we found that there is a solution containing one arbitrary constant. Since a second order differential equation involves a second derivative and hence, roughly speaking, two integrations are required to find a solution, it is natural to expect to find solutions of the equation containing two arbitrary constants.

(3) If the functions p and q are continuous on the open interval $a<x<b$, then there exists a fundamental set of solutions of the differential equation $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, on the interval $a<x<b$. The set $\{y_1, y_2\}$ is a fundamental set of solutions of the equation if and only if both y_1 and y_2 are the solutions of the equation and every solution of the equation can be expressed as a linear combination of y_1 and y_2.

(4) Two functions f and g are said to be linear dependent on an interval $a<x<b$ if there exist two constant c_1 and c_2, not both zero, such that $c_1 f(x)+ c_2 g(x)= 0$ for all x in $a<x<b$. Two functions f and g are said to be linearly independent on an interval $a <x<b$, if they are not linear dependent. The same definitions apply on any interval, open or not.

(5) Much study has been devoted to the solution of ordinary differential equations. In the case where the equation is linear, it can be solved by analytical methods. Unfortunately, most of the interesting differential equations are non-linear and, with a few exceptions, cannot be solved exactly. Approximate solutions can be obtained by using computer approximations.

§2.14 期望、方差与中心极限定理
(Expectation, Variance and the Central Limit Theorem)

一、精读课文

Part A Expectation and Variance [26]

The mass interpretation of *probability distributions* may be carried a step further by introducing the concepts of *expectation* and *variance*♣(1). These play the same role in probability theory that "*center of mass*" and "*moment of inertia*" play in mechanics. Without the *Stieltjes integral* we must give separate definitions for the *discrete* and *continuous* cases♣(2).

Definitions of expectation and variance. Let X be a one-dimensional *random variable*. The expectation of X and the variance of X are real numbers denoted by $E(X)$and $\mathrm{Var}(X)$respectively, and are defined as follows:

(a) For a continuous random variable with *density function* f_X,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{Var}\,(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [t - E(X)]^2 f_X(t)\mathrm{d}t.$$

(b) For a discrete random variable with mass points x_1, x_2, … having probabilities $p_k = P(X = x_k)$, we define

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k,$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{(x)} [x_k - E(X)]^2 p_k.$$

Note: We say that $E(X)$ and $\mathrm{Var}(X)$ exist only when the integral or series in question is *absolutely convergent*. It is understood that the series is a finite sum when the sample space is finite; in this case $E(X)$ and $\mathrm{Var}(X)$ always exist♣(3). They also exist when f_X is 0 outside some finite interval.

The mathematical expectation $E(X)$ is a *theoretically* computed value *associated with* the random variable X. In some respects, the distribution acts as though its entire mass were concentrated at a single point, $E(X)$♣(4). The true significance of mathematical expectation in probability theory will be discussed in Section 14.29 in connection with the so-called "*laws of large numbers*".

In mechanics, a knowledge of the center of mass alone gives no indication of how the mass is *spread* or *dispersed* about its center. A measure of this *dispersion* is provided by the "*second moment*" or "moment of inertia." In probability theory, this second moment is the variance. It measures the tendency of a distribution to **spread out** from its expected value. In Section 14.28 we shall find that a small variance indicates that large deviations from the expected value are unlikely ♣(5).

Although the expectation $E(X)$ may be positive or negative, the variance $\mathrm{Var}(X)$ is always nonnegative. The symbol σ^2 is also used to denote the variance. Its positive *square root* is called the *standard deviation* and is denoted by σ. The standard deviation is a *weighted average*; in fact, σ is a weighted *root mean square* of the distance of each value of X from the expected value $E(X)$♣(6). The analogous concept in mechanics is the "*radius of gyration*."

Part B The Central Limit Theorem[26]

In many applications of probability theory, the random variables of interest are sums of other random variables. For example, the *financial* outcome after several *plays of a game* is the sum of the winnings at each play♣(7). A surprising thing **happens** when a large number of independent random variables are added together. Under general conditions (applicable in almost every situation that occurs in practice) the distribution of the sum tends to be normal, *regardless of* the distributions of the individual random variables that make up the sum♣(8). The precise statement of this remarkable fact is known as the

central limit theorem of the calculus of probabilities. It *accounts for* the importance of the normal distribution in both theory and practice. A thorough discussion of this theorem **belongs to** the advanced study of probability theory. This section will merely describe what the theorem asserts.

Suppose we have an infinite sequence of random variables, say X_1, X_2, $\cdots$, with finite expectations and variances. Let

$$m_k = E(X_k) \quad \text{and} \quad \sigma_k^2 = \operatorname{Var}(X_k), \ k=1,2,\cdots.$$

We form a new random variable S_n by adding the first n differences $X_k - m_k$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m_k). \tag{14.52}$$

We add the differences *rather than* the X_k alone so that the sum S_n will have expected value 0[♣(9)]. The problem here is to determine the limiting form, as $n \to \infty$, of the distribution function of S_n.

If X_1, X_2, $\cdots$, X_n are *independent*, then [by Exercise 4(c) of Section 14.27] we have

$$\operatorname{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(X_k - m_k) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

Ordinarily, $\operatorname{Var}(S_n)$ will be large even though the *individual* variances σ_k^2 may be small. Random variables with a large variance are not fruitful objects of study because their values tend to be widely dispersed from the expected value[♣(10)]. For this reason, a new random variable T_n is introduced by the equation

$$T_n = \frac{S_n}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}}. \tag{14.53}$$

This new variable has expectation 0 and variance 1 and is called a *standardized* random variable. The standardized variable T_n is meaningful even if the random variables X_1, X_2, $\cdots$, X_n are not independent. We now introduce the following definition:

Definition of the central limit property. Let

$$X_1, X_2, X_3, \cdots \tag{14.54}$$

be a sequence of random variables (not necessarily independent), where each

X_k has a finite expectation m_k and a finite variance σ_k^2. Define S_n and T_n by (14.52) and (14.53). The sequence in (14.54) is said to satisfy the central limit property if, for all a and b with $a<b$, we have

$$\lim_{n\to\infty} P(a<T_n<b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}}du. \tag{14.55}$$

In other words, the random variables in (14.54) satisfy the central limit property if the distribution of the standardized variable T_n approaches a standard normal distribution as $n\to\infty$. [Equation (14.55) is to hold also if $a=-\infty$ or $b=+\infty$.]

Laplace was the first to realize that this property is **shared** by many sequences of random variables, although a special case (random variables describing a Bernoullian sequence of trials) had been known earlier by De Moivre. Laplace stated a general central limit theorem which was first completely proved by the Russian mathematician A. Lyapunov in 1901. In 1922, J. W. Lindeberg **generalized** Laplace's result by showing that the property is satisfied if the variables are independent and have a common distribution giving them the same expectations and variables♣(11).

Fortunately, many independent random variables that **occur** in practice automatically satisfy the Lindeberg condition and therefore also have the central limit property. Up to now, the theory for dependent random variables is incomplete. Only a few special cases have been treated. Much of the contemporary research in probability theory **centers about** the search for general theorems dealing with dependent variables♣(12).

二、阅读与翻译指导

♣(1) The mass interpretation of probability distributions may be carried a step further by introducing the concepts of expectation and variance.

这句是被动语句，翻译时应译成主动句，并把 by 引导的方式状语放在前面。其中 mass interpretation 可译成“质量意义”或“质量解释”。

【通过引入期望和方差的概念可以对概率分布的质量意义作进一步的阐述。】

♣(2) Without the Stieltjes integral we must give separate definitions for the discrete and continuous cases.

介词 without 引导的短语通常作为条件状语，这里根据需要可以译成原因

状语。give separate definitions 的意思是“分别给予定义”。

【由于没有采用斯蒂尔切斯积分，我们就得按离散和连续这两种情形分别给予定义。】

♣(3) It is understood that the series is a finite sum when the sample space is finite; in this case $E(X)$ and $\mathrm{Var}(X)$ always exist.

本句 it 是形式主语，that 引导了一个主语从句；it is understood 可译成插入语“不言而喻”或“显然”。

【显然，当样本空间有限时，级数为有限和，此时 $E(X)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$ 总是存在。】

♣(4) In some respects, the distribution acts as though its entire mass were concentrated at a single point, $E(X)$.

本句 as though 引导一个行为方式状语从句，其中动词采用虚拟语气。主句的动词 act 可以转译成名词。

【在某些方面，分布的作用好像是把它的整个质量都集中于一个单点，即 $E(X)$ 上。】

♣(5) In Section 14.28 we shall find that a small variance indicates that large deviations from the expected value are unlikely.

这句第一个 that 引导宾语从句(以 indicate 为谓语动词)作为 find 的宾语，第二个 that 引导宾语从句作为 indicate 的宾语。deviation from…意思是“偏离……的偏差”。

【在 14.28 节中，我们将发现，小的方差表示不太可能出现偏离期望值的大偏差。】

♣(6) The standard deviation is a weighted average; in fact, σ is a weighted root mean square of the distance of each value of X from the expected value $E(X)$.

第二个分句 square 之后用了三个 of 和一个 from 来逐次修饰，square 之前有一个形容词和两个名词作定语，翻译时要注意逻辑关系和数学术语的表达习惯。

【标准差是一个带权平均值；事实上，σ 是从期望值 $E(X)$ 到 X 的每个值的距离的带权均方根。】

♣(7) For example, the financial outcome after several plays of a game is the sum of the winnings at each play.

由 financial outcome 和 game(博弈)知道，这个例子说的是结果为金钱的博弈，即赌博。这句用直译不易表达，如下译文虽然译出基本意思，但不够专业，也

不够简洁：

【例如，在赌博中经过若干次比赛的最后结果是在每一次比赛中获胜结果的和。】

应注意，play 在这里是专业术语，意思是“局”。作为改进，整句可意译为：

【例如，一次多局博弈的获利结果是其中每一局的获利之和。】

♣(8) Under general conditions (applicable in almost every situation that occurs in practice) the distribution of the sum tends to be normal, regardless of the distributions of the individual random variables that make up the sum.

括号中的内容属于插入语，补充说明适用范围，相当于后置定语。词组 tends to be normal 等同于 tends to the normal distribution，所以句中 normal 意思是“正态的”。整句宜意译。

【在一般条件下(这几乎可适用于实际生活中的各种事件)，和的分布趋于正态分布，而与构成和的各随机变量的分布无关。】

♣(9) We add the differences rather than the X_k alone so that the sum S_n will have expected value 0.

句中 so that 引导原因状语从句，意思是“为了”、“以便”；rather than 的意思是“而不”；the differences 指的是 X_k-m_k，翻译时可进一步明确化，以便与后面的 X_k 形成对照。

【这里把差 X_k-m_k 相加而不是只把 X_k 相加，是为了使得 S_n 的期望值为 0。】

♣(10) Random variables with a large variance are not fruitful objects of study because their values tend to be widely dispersed from the expected value.

这句 because 引导的是原因状语从句，句中谓语动词 tend(不及物)+ to be + 表语，表示“很容易出现的一种状态”，如采用直译，则难以表达清楚。可意译为：

【以具有很大方差的随机变量作为研究对象是不能取得较好的成果的，这是因为它们的值很可能大范围地偏离期望值。】

♣(11) In 1922, J. W. Lindeberg generalized Laplace's result by showing that the property is satisfied if the variables are independent and have a common distribution giving them the same expectations and variables.

这句分析见下面“词语与句型学习”部分。

【1922 年，J. W. 林德伯格推广了拉普拉斯的结果，证明了这样的随机变量满足中心极限定理，如果它们是独立的且具有能给出相同的期望和方差的同一分布。】

♣(12) Much of the contemporary research in probability theory centers

about the search for general theorems dealing with dependent variables.

这句的谓语动词是 center，固定搭配 center about 的意思是“集中在”。

【概率论近期的许多研究都集中在寻求用以处理相关随机变量的一般定理。】

三、词语与句型学习

下面简要介绍本节出现的重点数学术语，部分常用动词及其搭配，应特别注意的形容词、副词和介词的用法，同时指出应该注意的常用句型，给出若干应用的例子或学习提示。

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***distribution*** n. 分布

probability ～ 概率分布。

2) ***expectation*** n. (数学)期望

～ value 期望值

3) ***variance*** n. 方差

～ analysis 方差分析；～ estimation 方差估计；～ of random variable 随机变量的方差。

4) ***deviation*** n. 偏差，离差，变差

standard ～ 标准差；～ from mean 平均偏差

5) ***dispersion*** n. 离差

～ analysis 离差分析；～ method 离差法。

相关术语：

disperse vt. 使分散；vi. 散开。

6) ***mass*** n. 质量，大量，块

center of ～ 质心；～ point 质点。

7) ***random*** a. 随机的

～ variable 随机变量；～ measure 随机测度；～ integration 随机积分。

8) ***moment*** n. 矩

～ of inertia 惯性矩；second ～ 二阶矩。

9) ***discrete*** a. 离散的

～ random variable 离散随机变量；～ mathematics 离散数学。

相关术语：

continuous a. 连续的：～ function 连续函数。

10) ***individual*** a. 个别的，个体的；n. 个体

～ element 个体元素；～ ergodic 个体遍历的。

11) ***game*** n. 博弈

相关术语：

play n. 局。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***spread*** vt. 散布，使扩张

词组 spread out from 的意思是“由……向外扩散”。

例 It measures the tendency of a distribution to ***spread out from*** its expected value.【它(方差)可以测量分布从它的期望值向外扩散的趋势。】

(2) ***generalize*** vt. 推广，使一般化

例子见♣(11)。

(3) ***provide*** v. 提供

例 A measure of this dispersion is ***provided*** by the “second moment” or “moment of inertia”.【“二阶矩”，即“惯性矩”提供了测量这种离差的一种方法。】

(4) ***account*** vt. 把 认为

account for 说明，足以说明。

例 It ***accounts for*** the importance of the normal distribution in both theory and practice.【这足以说明正态分布在理论或实际应用中的重要性。】

(5) ***center*** v. 集中；n. 中心

～ about 集中；～ of circle 圆心。

对应的形容词是 central a. 中心的：～ limit theorem 中心极限定理。

相关术语：

concentrate vt./vi. 集中，汇合，致力于。

(6) ***tend*** vi. 趋于，有……倾向

这个动词在数学表示变量趋于某个对象(极限)时，通常采用词组“tend to + 对象(介词宾语)”来表示；本课则采用“tends to be + 对象(形容词表语)”的形式。

例子见♣(8)。

3. 重要形容词、副词、介词短语

(1) ***alone*** 单独的；只有，仅仅(置于名词或代词之后)

例 In mechanics, a knowledge of the center of mass ***alone*** gives no indication of how the mass is spread or dispersed about its center.

其中，词组 gives no indication of 的作用相当于 does not indicate，即“没有指明(说明)”。

【在力学中，仅仅有关质心的知识并没有说明质量是如何从它的质心向外扩散或传播的。】

(2) ***unlikely*** a. 不太可能的

例子见♣(5)。

(3) ***normalized*** a. 正规化的

它和 generalized(广义的，推广的)等都是由形容词转化的动词的过去分词形式。

对应的名词：norm n. 模，范数；normal n. 法线；normalization n. 正规化。

对应的形容词：normal adj. 正规的，法线的，正态的。

(4) ***without*** prep. 无，没有，若无

without 作介词用时所引导的介词短语常作条件状语或方式状语，但在一些情况下也可译成原因状语，参见♣(2)。

4. 典型例句与句型

(1) In 1922, J. W. Lindeberg generalized Laplace's result ***by*** showing that the property is satisfied if the variables are independent and have a common distribution giving them the same expectations and variables.

这句的主要成分很简短，但状语很长。事实上，by 引导的介词短语作方式状语，作为介词宾语的动名词 showing 带了一个宾语从句，从句中还有一个条件从句，后者又含有分词短语。这类状语可以采用分句的形式译出。译文见♣(11)。

(2) In some respects, the distribution acts ***as though*** its entire mass were concentrated at a single point, $E(X)$.

数学文献中很少采用虚拟语气，一般只用在采用比喻手法来描述一个概念或性质时。本句就是这种情形，它在 as though 引导的方式状语从句中采用了虚拟语气；连词 as though 的意思是“好像”、“仿佛”等。译文见♣(4)。

练 习 2.14

1. 掌握下列数学术语的含义及应用：

random variable, density function, variance, dispersion, standard deviation, weighted average, square root, root mean square, normal distribution; Stieltjes integral, laws of large number, absolutely convergent; mass point, center of mass, second moment, moment of inertia, radius of gyration; spread, dispersed; discrete, continuous, theoretically.

2. 把下面的术语译成英文：

随机变量、密度函数、方差、偏差、标准差、带权平均、平方根、均方根、正态分布；斯蒂尔切斯(Stieltjes)积分、大数定律；质点、质心、二阶矩、惯性矩、旋转半径；散布、使散开；离散的、连续的、理论上。

3. 英译汉：

(1) One dictionary definition of probability is "The extent to which an event is likely to occur, measured by the ration of the favorable cases to the whole number of cases possible".

(2) In the language of set functions, probability is a special kind of function (to be denoted here by P) defined on a special Boolean algebra B of sets.

(3) In order to generalize this idea so that it could be applied to any set of data consisting of a sample of values of one variable for a number of "individuals", the following statistical notation is found to be useful.

(4) In a normal distribution, almost all of the population lies between the values of variable that are four standard deviation (4σ) either side of the arithmetic mean (μ) of the distribution.

(5) In many applications of probability theory, the random variables of interest are sums of other random variables. For example, the financial outcome after several plays of a game is the sum of the winnings at each play.

(6) A random variable is nothing but a vector-valued function defined on a set. The term "random" is used merely to remind us that the set in question is a sample space. Because of the generality of the above definition, it is possible to have many random variables associated with a given experiment.

4. 汉译英：

(1) 数学期望 $E(X)$ 和方差 $\mathrm{Var}(X)$ 都是关于随机变量 X 的理论可计算值。

(2) 在概率论中，数学期望的真正意义与所谓"大数定律"有关。

(3) 对于每个随机变量，都可以定义一个标准化随机变量，其期望值为 0 而方差为 1。

(4) 如果当 $n\to\infty$ 时标准化随机变量 T_n 的分布趋于一个标准正态分布，则所考虑的随机变量列就满足中心极限性质。

(5) 拉普拉斯(Laplace)是第一位认识到许多随机序列满足中心极限定理的数学家，尽管之前少数别的数学家已知道某些特殊的随机序列具有这种性质。

(6) 在概率论中，惯性矩或二阶矩就是方差。方差可以测量分布从它的期望值向外扩散的趋势。

§2.15 数理逻辑入门
(Elementary Knowledge of Mathematical Logic)

一、精读课文

Part A Translation Sentences into Logical Expression[33]

In Section 1.1 we illustrated the process of translating English sentences into *logical expressions* **involving** *propositions* and *logical connectives*. Now that we have discussed *quantifiers*, we can express a wider variety of English sentences using logical expressions. **Doing so eliminates** ambiguity and makes it possible to **reason with** these sentences. (Section 3.1 covers rules of inference for reasoning with logical expressions.)

The following examples show how to use *logical operators* and *quantifiers* to express English sentences, *similar to* the kind that occur frequently in *mathematical statements*, in *logic programming*, and in *artificial intelligence* ♣(1).

Example 7 Express the statements "Some student in this class has visited Mexico" and "Every student in this class has visited either Canada or Mexico" using quantifiers.

Solution: Let the *universe of discourse* for the variable x be the set of students in the class. Let $M(x)$ be the statement "x has visited Mexico" and $C(x)$ the statement "x has visited Canada." The statement "Some student in this class has visited Mexico" can be written as $\exists x M(x)$. The statement "Every student in this class has visited either Canada or Mexico" can be **written as** $\forall x(C(x) \vee M(x))$ (assuming that the *inclusive*, rather than the *exclusive*, *or* is what is meant here)♣(2).

Example 8 Express the statement "Everyone has exactly one best friend" as a logical expression.

Solution: Let $B(x, y)$ be the statement "y is the best friend of x." To translate the sentence in the example, note that it says that for every person x there is another person y such that y is the best friend of x and that if z is a person *other than* y, then z is not the best friend of x♣(3). Consequently, we can translate the sentence as

$$\forall x \exists y \forall z(B(x, y) \wedge ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z))).$$

Example 9 Express the statement "If somebody is female and is a parent, then this person is someone's mother" as a logical expression.

Solution: Let $F(x)$ be the statement "x is female", let $P(x)$ be the statement "x is a parent", and let $M(x, y)$ be the statement "x is the mother of y". Since the statement in the example pertains to all people, we can write it *symbolically* as

$$\forall x((F(x) \wedge P(x) \rightarrow \exists y M(x, y)).$$

Example 10 Use quantifiers to express the statement "There is a woman who has taken a flight on every airline in the world".

Solution: Let $P(w, f)$ be "w has taken f" and $Q(f, a)$ be "f is a flight on a". We can express the statement as

$$\exists w \forall a \exists f \ (P(w, f) \wedge Q(f, a)),$$

where the universes of discourse for w, f, and a consist of all the women in the world, all airplane flights, and all airlines, respectively.

The statement could also be expressed as

$$\exists w \forall a \exists f R(w, f, a),$$

where $R(w, f, a)$ is "w has taken f on a". Although this is more compact, it somewhat obscures the relationships between the variables. Consequently, the first solution is usually preferable.

As mentioned earlier, quantifiers are often used in the definition of mathematical concepts. One example that you may be *familiar with* is the concept of limit, which is important in calculus[♣(4)].

Example 11 Express the definition of a limit using quantifiers.

Solution: Recall that the definition of the statement

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

is: For every real number $\varepsilon > 0$ there exists a real number $\delta > 0$ such that $|f(x) - L| < \varepsilon$ whenever $0 < |x - a| < \delta$. This definition of a limit can be **phrased** *in terms of* quantifiers by

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon),$$

where the universe of discourse for the variables ε and δ is the set of positive real numbers and for x is the set of real numbers.

This definition can also be expressed as

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ (0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon),$$

where the universe of discourse for the variables ε and δ is the set of all real numbers, rather than the set of positive real numbers.

Part B The Truth Values of Logical Propositions[33]

A *simple proposition* is a simple statement (i.e. a statement contains one subject and one verb) which has a definite meaning and it is either true or false, but not both. The *truth value* of a *true proposition* is "true", denoted by "T", while that of a *false proposition* is "false", denoted by "F".

Thus $p \leftrightarrow q$ is true if both p and q are true or if both p and q are false. The following are English-language equivalents to $p \leftrightarrow q$: "p if and only if q", "p is a necessary and sufficient condition for q", and "p precisely if q"♣(5).

It is worth **emphasizing** that the compound proposition $p \rightarrow q$ and its converse $q \rightarrow p$ are quite different; they have different truth tables.

Two *compound propositions* P and Q are **regarded as** *logically equivalent* if they have the same truth values for all choices of truth values of the variables p, q, etc♣(6). In other words, the final columns of their truth tables are the same. When this occurs, we write $P \Leftrightarrow Q$. Since the table for $P \leftrightarrow Q$ has truth values true precisely where the truth values of P and Q agree, we see that

$$P \Leftrightarrow Q \text{ if and only if } P \leftrightarrow Q \text{ is a } \textit{tautology}\clubsuit(7).$$

We are typically **faced with** a set of hypotheses $H_1, \cdots, H_n$ from which we want to infer a conclusion C♣(8). One of the most natural sorts of proofs is the *direct proof* in which we show

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C.$$

Many of the proofs that we gave in Chapter 1 — for example, proof about *greatest common divisors* and *lowest common multiples* — were of this sort.

Proofs that are not directive are called *indirect*. The first type of indirect proof is *proof of the contrapositive*:

$$\neg C \Rightarrow \neg (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n).$$

Another type of indirect proof is a *proof by contradiction*:

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \wedge \neg C \Rightarrow \text{a contradiction}^{\clubsuit(9)}.$$

二、阅读与翻译指导

♣(1) The following examples show how to use logical operators and quantifiers to express English sentences, similar to the kind that occur frequently in mathematical statements, in logic programming, and in artificial intelligence.

动词 show 在这里的意思是“告诉”、“说明”。根据上下文知道，词组 similar to the kind 指的是“类似于数学中采用 logical operators and quantifiers 来表达数学内容的方法”。

【下面例子将说明，如何利用逻辑运算和量词来表示英语的语句，这与频繁出现在数学语句中、逻辑编程中和人工智能中的那种表示方法相似。】

♣(2) The statement “Every student in this class has visited either Canada or Mexico” can be written as $\forall x(C(x) \vee M(x))$ (assuming that the inclusive, rather than the exclusive, *or* is what is meant here).

括号中现在分词 assuming 引导一个宾语从句，用以补充说明写出逻辑式 $\forall x(C(x) \vee M(x))$ 的根据。该宾语从句由两个并列句组成，其中第一句应为 the meaning of $\vee$ is the inclusive(兼容的), rather than the exclusive(互斥的)，但省略了主语和谓语。第二句是 *or* is what is meant here，其中 *or* 是主语，what is meant here 是表语从句，这句的含义是“*or* 在这里就是这种意思”(即 *or* 也是“兼容的”，指“允许有的学生既访问过加拿大，又访问过墨西哥”)。

【语句“该班的每个学生访问过加拿大或墨西哥”可用逻辑符合记为 $\forall x(C(x) \vee M(x))$ (据假定，逻辑式中的“或”的意思是兼容的而不是互斥的，而 *or* 在这里指的就是这种兼容的意思)。】

♣(3) To translate the sentence in the example, note that it says that for every person x there is another person y such that y is the best friend of x and that if z is a person other than y, then z is not the best friend of x.

句中 to translate 引导的不定式短语作目的状语，其中省略了 into logic expression，翻译时应补上。主句是祈使句，that it says…是 note 的宾语从句，says 又有两个并列的宾语从句，其中第二个宾语从句是条件复合句。翻译时应注意句中的逻辑结构。

【为了将本例中的语句翻译成逻辑表达式，应注意该语句的意思是：对于每个人 x，存在另一个人 y，这个 y 是 x 的最好的朋友；而且，如果 z 不是 y，那么 z 就不是 x 最好的朋友。】

♣(4) One example that you may be familiar with is the concept of limit, which is important in calculus.

注意 calculus 主要含义有两个，一是“计算”，二是“微积分学”(The differential and integral calculus 的简称)。前者少用，常用于表示计算的英语单词很多，如 calculation, computation, counting 等。根据上下文易知，这里谈论的极限是微积分学中的概念。

【一个你可能相当熟悉的例子是极限的概念，它在微积分学中很重要。】

♣(5) The following are English-language equivalents to $p \leftrightarrow q$: "p if and only if q", "p is a necessary and sufficient condition for q", and "p precisely if q".

形容词 equivalent 后常接 to sth. 意思为“等价于某物”。作名词时 equivalents to sth. 相当于 equivalents of sth.。

【下面几个都是英语中与 $p \leftrightarrow q$ 等价的句子：“p 当且仅当 q”，“p 是 q 的一个充分必要条件”和“p 恰如 q”。】

♣(6) Two compound propositions P and Q are regarded as logically equivalent if they have the same truth values for all choices of truth values of the variables p, q, etc.

句中 truth values 的意思是“真值表中的值”，因为该值可“真(true)”可“假(false)”，不宜直译成“真值”(参见下条注释)，应译成“真假值”或“逻辑值”；“they have the same truth values”意思是：对同一变量的某个取值，它们同时取真值或同时取假值。为明确化，全句可译成：

【两个复合命题 P 与 Q 被认为是逻辑等价的，如果对于变量 p, q 等的逻辑值的所有选取，P 与 Q 取的逻辑值都相同。】

♣(7) Since the table for $P \leftrightarrow Q$ has truth values true precisely where the truth values of P and Q agree, we see that

$$P \Leftrightarrow Q \quad \text{if and only if} \quad P \leftrightarrow Q \quad \text{is a tautology.}$$

术语 tautology 译成“重言式”，即“永真式”、“恒真式”。词组 has truth values true 的意思是“取逻辑值真”，即“取真为值”，true 是 truth values 的同位语，就像在句子“A number is composed of digits 2 and 3”中，2 和 3 都是 digits 的同位语一样，只不过这里 truth values 的名称和它所代表的值 true 与 false 与通常

不一样而已。这句可译成：

【因为 $P \leftrightarrow Q$ 在它的真值表中取值为真的时候正好 P 与 Q 所取的真假值相同，所以 $P \Leftrightarrow Q$ 当且仅当 $P \leftrightarrow Q$ 是重言式。】

♣(8) We are typically faced with a set of hypotheses H_1, …, H_n from which we want to infer a conclusion C.

副词 typically 在这里修饰全句，意思为“普通”或“一般”。全句可译成：

【我们常会遇到一组假设 H_1, …, H_n，并要由它们推出结论 C。】

♣(9) Proofs that are not directive are called indirect. The first type of indirect proof is proof of the contrapositive:

$$\neg C \Rightarrow \neg (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n).$$

Another type of indirect proof is a proof by contradiction:

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \wedge \neg C \Rightarrow \text{a contradiction.}$$

根据数学上的习惯，术语 proof of the contrapositive 可译成“逆否(命题的)证明”(在逻辑学中也译作“通过对换句证明”)，proof by contradiction 可译成“反证法”。这两句可译成：

【非直接的证明称为间接证明。第一类的间接证明是逆否证明：

$$\neg C \Rightarrow \neg (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n)。$$

另一种间接证明是反证法：

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \wedge \neg C \Rightarrow \text{矛盾}。】$$

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***propositional*** a. 命题的

～ calculus 命题演算；～ connectives 命题连词；～ function 命题函数；～ inference 命题推演；～ variable 命题变元。

相关术语：

proposition n. 命题；true ～ 真命题；false ～ 假命题。

2) ***statement*** n. 语句

～ function 语句函数；～ in programming 程序设计中的语句；～ number 语句编号。

3) ***compound*** n. 复合，合成；a. 复合的，合成的

～ function 复合函数(更常用 composite function)；～ interest 复利；～ statement 复合语句；～ proposition 复合命题。

4) ***proof*** n. 证明

～ by consistency 一致性证明；～ by contradiction 反证法；～ by induction 归纳证明；～ of theorem 定理证明；direct ～ 直接证明；indirect ～ 间接证明。

相关术语：

prove v. 证明，证实。

5) ***inference*** n. 推理，推论

～ formula 推理公式；～ of immediate 直接推理；～ of mediate 间接推理；～ procedure 推理过程；～ rules 推理法则。

6) ***translation*** n. 平移、翻译

～ formula 平移公式；～ invariant 平移不变；～ principle 平移原理；～ transformation 平移变换；～ of programs 程序的翻译。

相关术语：

translate vt. 翻译：～ from A into B 把 A(种语言)翻译成 B(种语言)。

7) ***logical*** a. 逻辑的

～ calculus 逻辑演算；～ combination 逻辑组合；～ connective 逻辑连词；～ expression 逻辑表达式；～ law 逻辑定律；～ addition 逻辑加法；～ operator 逻辑算子。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***phrase*** vt. 叙述(文语)

词组 phrase in terms of…意思是“用……语言来叙述”。

例 This definition of a limit can be ***phrased in terms of*** quantifiers by…. 【极限的定义可以用量词的语言叙述为……。】

(2) ***regard*** vt. 认为

regarded… as… 把……视为……。

(3) ***eliminate*** vt. 消除，排除

词组 eliminate A from B 的意思是“把 A 从 B 中排除(消除)”，即 A 与 B 换位。同义词是 exclude(见 § 2.4 之三)。

对应的名词是 elimination n. 消除：method of elimination 消元法。

3. 重要形容词、副词、介词短语

(1) ***similar*** a. 类似的，相似的

similar triangles 相似三角形；similar to 意为“类似于”，“与……相似”，similar to 可作独立成分的引导词，例子见♣(1)。

(2) ***rather than*** 意为"而不"。例子见♣(2)。

(3) ***other than*** 作介词,用于否定句,意为"除了……","除了……之外"。例子见♣(3)。

4. 典型例子与句型

(1) ***Doing so*** eliminates ambiguity and makes it possible to reason with these sentences.

本句 doing so 是主语部分,由动名词 doing 和修饰它的副词 so 组成;eliminates 和 makes 是两个并列的谓语。全句可译成:

【这样做可以消除模糊性并使得可能用这些语句来作推理。】

(2) It is worth ***emphasizing*** that the compound proposition $p\rightarrow q$ and its converse $q\rightarrow p$ are quite different; they have different truth tables.

本句 it 是形式主语,真正的主语是动名词 emphasizing,它带一个由 that 引导的宾语从句。全句可译成:

【值得强调的是,复合命题 $p\rightarrow q$ 与它的逆命题是完全不同的,它们具有不同的真值表。】

(3) In Section 1.1 we illustrated the process of translating English sentences into logical expressions ***involving*** propositions and logical connectives.

【在 1.1 节,我们说明了把英文语句翻译成包含命题和逻辑连词的逻辑表达式的过程。】

这句 involving 是及物动词 involve(包含)的现在分词,它带了宾语构成分词短语充当 logical expressions 的定语。

动名词与现在分词具有同样的形式,动名词具有名词性而现在分词具有形容词性。关于动词的这两种非限定形式的介绍,可参考 §3.1 和 §3.2。

练 习 2.15

1. 掌握下列数学术语的含义及应用:

statement, mathematical statement, logical expression, logical connective, logical operator, quantifier, logic programming; artificial intelligence, universe of discourse; inclusive, exclusive, symbolically, obscure; truth value, proposition, true proposition, false proposition; compound proposition; necessary and sufficient condition, logically equivalent; tautology, hypotheses, direct proof, indirect proof; proof of the contrapositive, proof by contradiction.

2. 把下面的术语译成英文:

逻辑表达式、逻辑连词、逻辑算子、用符号、量词;语句、数学语句、逻辑编程、

人工智能；论域、兼容的、互斥的、充分必要条件、逻辑等价、不清楚的、逻辑值(真假值)；命题、真命题、假命题、复合命题、重言式(恒真命题)；假设、直接证明、间接证明、逆否命题的证明、矛盾证明(反证法)。

3. 汉译英：

(1) 借助于量词和逻辑连词，可以用逻辑表达式来表示更多形式的英语语句。

(2) 用逻辑表达式可以消除语句的模糊性并有可能使得用这些语句来作推理。

(3) 用量词表示语句"集 A 的每一个点都在该曲线 C 上而不在图形 D 中"。

(4) 命题指的是一个语句，它具有确定的意义且要么是真的，要么是假的，但是不可以二者兼有。

(5) 两个复合命题 $P(x, y)$与 $Q(x, y)$称为是等价的，如果对于变量 x，y 的任何逻辑值，P 与 Q 具有相同的逻辑值。

(6) 由一个或一组假设推出结论的过程就是证明，直接证明是一种最自然的证明。必要时我们采用间接证明来代替直接证明。

4. 英译汉：

(1) Mathematical logic (also known as symbolic logic) is a subfield of mathematics with close connections to computer science and philosophical logic. The field includes both the mathematical study of logic and the applications of *formal logic*(形式逻辑)to other areas of mathematics.

(2) The statement "x is greater than 3" has two parts. The first part, the variables, is the subject of the statement. The second part—the predicate, "is greater than 3" —refers to a property that the subject of the statement can have. We can denote the statement "x is greater than 3" by $P(x)$, where P denotes the predicate "is greater than 3" and x is the variable. The statement $P(x)$is also said to be the value of the propositional function P at x. Once a value has been assigned to the variable x, the statement $P(x)$ becomes a proposition and has a truth value.

(3) Let $Q(x, y)$ denote the statement "$x=y+3$". What are the truth values of the propositions $Q(1,2)$and $Q(3,0)$?

Solution: To obtain $Q(1, 2)$, set $x=1$ and $y=2$ in the statement $Q(x,y)$. Hence, $Q(1, 2)$ is the statement "$1=2+3$", which is false. The statement $Q(3, 0)$is the proposition "$3= 0+3$", which is true.

(4) Consider the statement

if $x>0$ then $x:=x+1$.

When this statement is encountered in a program, the value of the variable x at that point in the execution of the program is inserted into $P(x)$, which is "$x>0$". If $P(x)$ is true for this value of x, the assignment statement $x:=x+1$ is executed, so the value of x is increased by 1. If $P(x)$ is false for this value of x, the assignment statement is not executed, so the value of x is not changed.

(5) Many mathematical statements assert that a property is true for all values of a variable in a particular domain, called the universe of discourse. Such a statement is expressed using a universal quantification. The universal quantification of a prepositional function is the proposition that asserts that $P(x)$ is true for all values of x in the universe of discourse.

(6) Many mathematical statements assert that there is an element with a certain property. Such statements are expressed using existential quantification. With existential quantification, we form a proposition that is true if and only if $P(x)$ is true for at least one value of x in the universe of discourse.

§2.16 组合分析与数值分析 (Combinatorial Analysis and Numerical Analysis)

一、精读课文

Part A Some Basic Principles of Combinatorial Analysis [26]

Many problems in *probability theory* and in other branches of mathematics can be **reduced to** problems on counting the number of elements in a *finite set*. Systematic methods for studying such problems form part of a mathematical discipline known as *combinatorial analysis*. In this section we **digress** briefly **to** discuss some basic ideas in combinatorial analysis that are useful in analyzing some of the more complicated problems of probability theory♣(1).

If all the elements of a finite set are displayed before us, there is usually no difficulty in counting their total number. *More often than not*, however, a set is **described** in a way that **makes** it impossible or undesirable to display all its elements♣(2). For example, we might ask for the total number of distinct bridge hands that can be **dealt** . Each player is dealt 13 cards from a 52-card

deck[♣(3)]. The number of possible distinct hands is *the same as* the number of different subsets of 13 elements that can be formed from a set of 52 elements [♣(4)].

Since this number **exceeds** 635 billion, a direct *enumeration* of all the possibilities is clearly not the best way to **attack** this problem; however, it can readily be solved by combinatorial analysis[♣(5)]

This problem is a special case of the more general problem of counting the number of distinct subsets of k elements that may be formed from a set of n elements (when we say that a set has n elements, we mean that it has n *distinct elements*. Such a set is sometimes called an n-element set), where $n > k$[♣(6)]. Let us denote this number by $f(n, k)$. It has long been known that

$$f(n, k) = \binom{n}{k}, \tag{12.1}$$

where, as usual $\binom{n}{k}$ denotes the *binomial coefficient*,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}.$$

In the problem of bridge hands we have $f\ (52, 13) = \binom{52}{13} = 635\,013\,559\,600$ different hands that a player can be dealt.

There are many methods known for proving (12.1). A *straightforward approach* is to form each subset of k elements by choosing the elements one at a time. There are n possibilities for the first choice, $n-1$ possibilities for the second choice, and $n-(k-1)$ possibilities for the kth choice[♣(7)]. If we make all possible choices in this manner we obtain *a total of*

$$n(n-1)\cdots\ (n-k\ +1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

subsets of k elements. Of course, these subsets are *not all distinct* [♣(8)]. For example, if $k=3$, the six subsets

$$\{a, b, c\},\ \{b, c, a\},\ \{c, a, b\},\ \{a, c, b\},\ \{c, b, a\},\ \{b, a, c\}$$

are all equal. In general, this method of enumeration counts each k-element subset exactly $k!$ times[♣(9)]. Therefore we must divide the number $\frac{n!}{(n-k)!}$ by

$k!$ to obtain $f(n, k)$. This gives us $f(n, k)=\binom{n}{k}$, as asserted.

Part B Numerical Analysis[33]

Numerical analysis is the study of *algorithms* that use numerical *approximation* (as opposed to general *symbolic manipulations*) for the problems of *continuous mathematics* (as distinguished from *discrete mathematics*)♣(10).

Numerical analysis naturally finds applications in all fields of engineering and the physical sciences, but in the 21st century, the life sciences and even the arts have adopted elements of scientific computations♣(11).

The field of numerical analysis **predates** the invention of modern computers by many centuries. *Linear interpolation* was already in use more than 2 000 years ago. Many great mathematicians of the past were **preoccupied** by numerical analysis, *as is obvious* from the names of important algorithms like *Newton's method*, *Lagrange interpolation polynomial*, *Gaussian elimination*, or *Euler's method*.

Direct methods such as Gaussian elimination, compute the solution to a problem in a finite number of steps. In practice, *finite precision* is used and the result is an approximation of the true solution.

In contrast to direct methods, *iterative methods* are not expected to terminate in a number of steps. Starting from an initial guess, iterative methods form successive approximations that **converge to** the exact solution only in the limit. A *convergence test* is specified in order to decide when a sufficiently accurate solution has (hopefully) been found. Even using infinite precision arithmetic these methods would not reach the solution within a finite number of steps (in general). Examples include Newton's method, the *bisection method*, and *Jacobi iteration* ♣(12). In computational matrix algebra, iterative methods are generally needed for large problems. Iterative methods are more common than direct methods in numerical analysis.

Furthermore, continuous problems must sometimes be **replaced** by a discrete problem whose solution is known to approximate that of the continuous problem; this process is called *discretization*. For example, the solution of a *differential equation* is a function. This function must be represented by a finite amount of data, for instance by its value at a finite number of points at its

domain, even though this domain is a *continuum*.

二、阅读与翻译指导

♣(1) In this section we digress briefly to discuss some basic ideas in combinatorial analysis that are useful in analyzing some of the more complicated problems of probability theory.

单词 digress 译为"偏离主题",briefly 译为"短暂地",词组 digress briefly to 的意思是"暂时偏离主题转来"。全句可译成:

【本节将暂时偏离主题转来讨论组合分析中一些基本思想,它们将用来分析概率论中一些较复杂的问题。】

♣(2) More often than not, however, a set is described in a way that makes it impossible or undesirable to display all its elements.

短语 more often than not 是成语,作副词用,意思是"往往"。主句采用被动语气,其中 in a way 的意思是"采用一种方式";关联词 that 引导一个定语从句。全句可译成:

【然而,情况往往是,所采用的描述集合的方式使得不可能或难以列出它的所有元素。】

♣(3) For example, we might ask for the total number of distinct bridge hands that can be dealt. Each player is dealt 13 cards from a 52-card deck.

动词 deal 在这里的意思是"发(牌)",它可以带两个宾语 deal sb. sth. 意思是"把牌发给某人"。bridge hand 意思是"一手牌",即 13 张牌的一种形式。can be dealt 意思是"可能收到"。全句可译成:

【例如,我们可求出可能收到的不同的一手牌的总数。而每个参赛者从一副即 52 张牌中收到的牌数是 13 张(即一手牌含 13 张)。】

♣(4) The number of possible distinct hands is the same as the number of different subsets of 13 elements that can be formed from a set of 52 elements.

这里的 hands 是上面 bridge hands 的省略。句中词组 the same as…意思是"与……一样"。关系代词 that 引导的定语从句修饰 subsets。整句可译成:

【那么,所有可能的不同的一手牌的总数,与由含有 52 个元素的集所构成不同的、具有 13 个元素的子集的个数一样。】

♣(5) Since this number exceeds 635 billion, a direct enumeration of all the possibilities is clearly not the best way to attack this problem; however, it can readily be solved by combinatorial analysis.

名词 enumeration 的意思是"枚举"、"列举"。词组 to attack this problem 意思是"处理(或解决)这个问题"。全句可译成:

【由于这个数超过6 350亿，直接列举出所有可能性显然不是处理这个问题的最好办法；然而，通过组合分析却能够很容易地解决它。】

♣(6) This problem is a special case of the more general problem of counting the number of distinct subsets of k elements that may be formed from a set of n elements (when we say that a set has n elements, we mean that it has n distinct elements. Such a set is sometimes called an n-element set), where $n > k$.

这句动名词 counting 形成的短语作它前面 problem 的定语，由于短语包含一个定语从句，显得较长，所以应分段译出。其中的插入语可移到句末，仍然放在括号中。

【这个问题是如下更一般问题的特殊的情形：计算由含 n 个元素的集可以构成的含 k 个元素的不同子集的个数，其中 $n > k$（当我们说一个集有 n 个元素时，指的是它有 n 个不同的元素。这样的集有时也称为 n 元集）。】

♣(7) A straightforward approach is to form each subset of k elements by choosing the elements one at a time. There are n possibilities for the first choice, $n-1$ possibilities for the second choice, and $n-(k-1)$possibilities for the kth choice.

词组 one at a time 的意思是“每次一个地”，修饰现在分词 choosing。因为前面已经定义过，可把 subset of k elements 译成“k 元子集”，较为简练。这两句可译成：

【一种直接的方法是通过逐一挑选元素来形成每个 k 元子集。那么，第一次选取时有 n 种可能，第二次选取有 $n-1$ 种可能，而第 k 次选取就有 $n-(k-1)$ 种可能。】

♣(8) Of course, these subsets are not all distinct.

句中 not all distinct 属于局部否定形式。可译成：

【当然，这些子集并非都是不同的。】

♣(9) In general, this method of enumeration counts each k-element subset exactly $k!$ times.

动词 count 意思是“(逐个)数”或“(逐个)计算”。全句可意译成：

【一般地，用这种枚举方法时，每个 k 元子集恰好数了 $k!$次。】

♣(10) Numerical analysis is the study of algorithms that use numerical approximation (as opposed to general symbolic manipulations) for the problems of continuous mathematics (as distinguished from discrete mathematics).

本句中两个括号都是“as＋过去分词”的形式，as 在这里是关系代词，引导了

一个省略了 is 的定语从句。be opposed to sth. 意思是“与某物对抗”。全句可译成：

【数值分析运用数值逼近的方法(它与一般的符号操作各执一端)来研究连续数学(不同于离散数学)的问题的算法。】

♣(11) Numerical analysis naturally finds applications in all fields of engineering and the physical sciences, but in the 21st century, the life sciences and even the arts have adopted elements of scientific computations.

本句 arts 不是指艺术，因为上下文谈到的都是学科应用领域，所以指的是人文科学；同时，elements 在这里的意思不是“元素”，而是“原理”。所以译成：

【数值分析很自然地在工程与物理科学的所有领域中获得应用，但是在 21 世纪，生命科学甚至人文科学，也采用了科学计算的原理。】

♣(12) Even using infinite precision arithmetic these methods would not reach the solution within a finite number of steps (in general). Examples include *Newton's method*, the *bisection method*, and *Jacobi iteration*.

第一句采用虚拟语气，even 在这里是连词，与现在分词短语 using infinite precision arithmetic 一起作状语。these methods 是主语，指的是迭代法，翻译时应明确指出。第二句如采用直译，则显得不太连贯；最好改变原来的语序，并添加适当的文字。这两句可译成：

【即使采用无限精度算术，迭代法(一般)也不会在有限的步骤中获得真解。牛顿法、对分法和雅可比迭代都是这种方法的例子。】

三、词语与句型学习

1. 重点数学术语及其扩展

1) ***probability*** n. 概率

～ coefficient 概率系数；～ distribution 概率分布；～ event 概率事件；～ function 概率函数；～ space 概率空间；～ theory 概率论。

2) ***enumeration*** n. 枚举，计数

～ algorithm 枚举算法；～ problem 计数问题，枚举问题；～ theory 计数理论。

3) ***algorithm*** n. 算法，规则系统

～ algebra 算法代数；～ approach 算法逼近；～ reducibility 算法可归约性。

4) ***approximation*** n. 逼近，近似，近似法，近似值

～ accuracy 逼近精度；～ by interpolation 插值逼近；～ error 逼近误差；～ formula 近似公式；～ in the mean 平均逼近；～ by rational functions 有理函

数逼近。

5) ***discrete*** a. 离散的

～ distribution 离散分布；～ topology 离散拓扑；～ mathematics 离散数学；～ metric 离散度量；～ space 离散空间；～ random process 离散过程。

6) ***interpolation*** n. 插值(又称"内插")，插值法，内插(法)，内推法

～ formula 插值公式；～ condition 插值条件；～ by proportional parts 比例插值法；～ knot 插值节点；～ theorem 插值定理。

7) ***polynomial*** n. 多项式

～ equation 多项式方程；～ expansion 多项式展开；～ interpolation 多项式插值；～ extrapolation 多项式外插法；～ of degree n n 阶多项式。

2. 常用动词、相关词语及其搭配

(1) ***replace*** vt. 替换，代替

与介词联用时，replace…by…，replace…with…都表示"用……代替……"。作为日常用语与 take place 是同义词。而数学式子的"替换"用的动词是"substitute"，词组 substitute A into B 表示"把 A 代入 B"。

(2) ***describe*** vt. 描述

该动词与 in … way 连用时意思是"用……方法来描述"。

(3) ***deal*** vt. /vi. 处理，讨论，涉及，论述，分给，分配

常见词组是 deal with 意思是"处理"、"讨论"、"涉及"；词组 deal cards 意为"发牌"。

(4) ***exceed*** vt. 超过，超越

例 The speed ***exceeds*** the average speed by a factor of 3.5.【该速度超过平均速度 2.5 倍。】

(5) ***chose*** vt. / n. 选择

同义词是 select。

3. 形容词、副词、介词短语

(1) ***more often than not*** 副词短语，意为"情况往往是"。

(2) ***a total of*** … 后面常接数量，例如，a total of 30 的意思是"总量为 30"。

(3) ***one at a time*** 一次一个地，逐一地。例子见♣(7)。

(4) ***distinct*** a. 不同的，互异的。distinct 与 different 是同义词，但 distinct 更强调所修饰的对象之间的差异性。例如，distinct elements 指"两两不同的元素"。

4. 典型句子与句型

(1) This gives us $f(n, k)=\binom{n}{k}$, ***as asserted***.

句末 as asserted 是非限制性定语从句(其中谓语 is 被省略,as asserted = which is asserted before),补充说明该等式和前面宣称的内容一致。全句可译成:【这样就得到 $f(n, k)=\binom{n}{k}$,这就是所要求证的。】

类似的例子见♣(10)。

(2) Many great mathematicians of the past were preoccupied by numerical analysis, ***as is obvious*** from the names of important algorithms like Newton's method, Lagrange interpolation polynomial, Gaussian elimination, or Euler's method.

这句 as 引导的从句也是非限制性定语从句,但修饰(补充说明)的是整个主句。

【数值分析曾吸引了以往的许多大数学家去作专门的研究,这从诸如牛顿法、拉格朗日插值多项式、高斯消元法及欧拉法等重要算法的名字就可以明显看出。】

(3) The number of possible distinct hands is ***the same as*** the number of different subsets of 13 elements that can be formed from a set of 52 elements.

这句的译文见♣(4)。the same as… 已经成为惯用法,as 在这里起介词的作用。

有关 as 的用法和定语从句的介绍可以参见 § 3.11 和 § 3.5。

练 习 2.16

1. 掌握下列数学术语的含义及应用:

probability theory, combinatorial analysis, combinatorics, pure mathematics, numerical analysis, continuous mathematics, discrete mathematics; finite set, binomial coefficient, enumeration, distinct elements; straightforward approach; algorithms, approximation, symbolic manipulation, infinite precision; bisection method, linear interpolation, Newton's method, Jacobi iteration, discretization, continuum.

2. 把下面的术语译成英文:

概率论、组合分析、组合学、纯数学、数值分析、连续数学、离散数学;有限集、二项式系数、枚举、不同的元素;逼近、符号运作、线性插值、无限精度;直接方法、算法、二分法、收敛判别法、牛顿法、拉格朗日插值多项式、柯西消元法、欧拉消元法、雅可比迭代、离散化、连续统。

3. 汉译英:

(1) 人们所采用的描述集的方式常常使得不可能列举该集的所有元素。

(2) 由含 10 个元素的集来构成不同的、含有 7 个元素的子集的个数是 C_{10}^{7}。

(3) 直接列举出一个集的所有元素不是处理这个问题的最好办法；然而，通过组合分析却能够很容易地解决它。

(4) 这个问题是如下更一般问题的特殊情形：如何求出一个等差数列的前 n 项之和。

(5) 数值分析运用数值逼近的方法来研究连续数学的问题的算法。

(6) 虽然可以采用高斯消元法用有限的步骤就算出某些问题的解，但人们只能采用有限精度且所得的结果只是真解的一种近似。

4. 英译汉：

(1) Combinatorics is a branch of pure mathematics concerning the study of discrete (and usually finite)objects. It is related to many other areas of mathematics, such as algebra, probability theory, ergodic theory and geometry, as well as to applied subjects in computer science and statistical physics.

(2) Combinatorics is as much about problem solving as theory building, though it has developed powerful theoretical methods, especially since the later twentieth century. One of the oldest and most accessible parts of combinatorics is graph theory, which also has numerous natural connections to other areas.

(3) An example of a simple combinatorial question is the following: What is the number of possible orderings of a deck of 52 distinct playing cards? The answer is 52! (52 factorial), which is equal to about 8.0658×10^{67}.

Combinatorics is used frequently in computer science to obtain estimates on the number of elements of certain sets.

(4) Combinatorial analysis is a branch of mathematics devoted to the solution of problems of choosing and arranging the elements of certain (usually finite) sets in accordance with prescribed rules. Each such rule defines a method of constructing some configuration of elements of the given set, called a combinatorial configuration. One can therefore say that the aim of combinatorial analysis is the study of combinatorial configurations.

(5) Numerical analysis continues this long tradition of practical mathematical calculations. Much like the Babylonian approximation of $\sqrt{2}$, modern numerical analysis does not seek exact answers, because exact answers are often impossible to obtain in practice. Instead, much of numerical analysis is concerned with obtaining approximate solutions while maintaining reasonable

bounds on errors.

(6) Before the advent of modern computers numerical methods often depended on hand interpolation in large printed tables. Since the mid 20th century, computers calculate the required functions instead. The interpolation algorithms nevertheless may be used as part of the software for solving differential equations.

第三章　数学专业英语常用语法和译法选讲

为了帮助读者夯实数学英语的基础，提高阅读、翻译和写作的能力，本章根据数学英语的特点，选出部分常用语法与译法进行讲解。限于篇幅，这种讲解主要着眼于实用的需要，即只是选择其中要点（特别是初学者容易出错的地方）进行阐述，同时尽可能通过具体例子来作说明（例子的译文都放在括号【】之中）。

本章的编写主要参考了书末所列的文献[4]、[5]、[6]、[7]、[8]、[9]。

§3.1　分　　词

为了简练起见，数学英语中大量地使用动词的非谓语形式，即非限定动词。非限定动词包括三种形式：分词、动名词和动词不定式。本节先介绍分词。

分词虽然不是谓语动词，但仍然具有动词的许多特征，它可表示与句子的谓语相伴随的动作或行为，因此具有充当状语的副词性质；同时分词还具有形容词性质。所以，分词在句中的语法功能[注1]主要是作定语和状语，此外，它也可作表语和补足语。

分词分为现在分词和过去分词。二者的区别很大。现在分词的形式和动词进行时的形式一样，后缀都是-ing。现在分词表示的伴随动作具有**主动的**性质，有时还有**进行中状态**的含义。过去分词的形式和动词被动语态时的形式一样。过去分词表示的伴随动作具有**被动的**性质，有时还有表示**动作完成**或**所处状态**的含义。初学者务必了解和逐步掌握现在分词与过去分词的这些重要区别。

分词作定语的情形将在§3.4中介绍。下面选讲分词和分词独立结构作状语的用法和译法。

一、分词或分词短语作状语

分词或分词短语作状语时，通常其表示的动作的逻辑主语就是该句子的主语本身，但有时也有不一致情况，如当它在句尾作状语时，其逻辑主语还可能是

注1：我们介绍分词的用法或译法时，通常也包含了相关的分词短语的用法或译法。对于只涉及分词本身的命题，读者不难从上下文加以识别，必要时我们会特别指明。

分词前面的整个句子的概念或暗指“人们”或“我们”。

例 1　Compared with the infinity $\sqrt{n}$ (as $n\to\infty$), any constant C is very small indeed.

【与无穷大$\sqrt{n}$(当 $n\to\infty$时)相比,任何常数 C 事实上都很小。】

constant C 是 compared 的逻辑主语。本句 compared 是 compare 的过去分词,具有被动的含义,整句描述的是当人们把常数 C 与无穷大作比较时,可能得出的结果。

例 2　These points are plotted and joined, thus forming the curve which represents the function.

【把这些点描出来并连在一起,这样就构成了表示该函数的曲线。】

本句现在分词 forming 的逻辑主语是前面整个句子的意思,forming 具有主动语态的含义。

分词作状语时,常处于句首或句尾,一般用逗号与句子其他部分分开;有时也可位于主谓之间,这时其前后必有逗号。现在就这三种不同位置介绍其译法。

1. 分词或分词短语作状语放在主语前的情形

在数学英语中,分词短语表示时间和条件者居多,分别译为“当……时候”和“如果”;其次表示原因,可译为“因为”、“由于”;个别表示让步,译为“虽然”;有时,还可对主语作附加说明,起插入语的作用。阅读时可参照上述四种情形依次逐项考虑。

分词或分词短语作状语放在主语前时,一般可以把它们的译文放在前面。翻译时要注意现在分词和过去分词的基本差异。

例 3　Based on theoretical investigation and practical measured data, a new and more effect computation method is proposed to replace the old one.

【基于理论研究和实际测量的数据,人们提出了一个新的有效的计算方法来代替旧的方法。】

“based on theoretical investigation and measured data”为分词短语作行为方式状语,用 based on ～引导的这种状语在科技文中用得很普遍。

例 4　Beginning with Chapter 4, simple differentiation and integration are introduced.

【从第四章开始,介绍简单的微积分。】

本句分词短语作地点状语。

2. 分词或分词短语作状语放在句中的情形

此时分词或分词短语大多放在主谓语之间,类型与译法与放在主语前的情况类似。

例 5 The complex numbers which stand on the two sides of this equation, being equal, must have the same modulus.

【由于处在该方程两边的复数是相等的，所以必定具有相同的模。】

本句"being equal"是处于主谓之间的分词短语，作原因状语。being 引导的短语常作原因状语，也可以放在句首或句末，见例 8。

3. 分词或分词短语作状语放在句末的情形

此时分词短语主要表示伴随状况或进一步说明，有时还可表示结果(可译为"因此"、"从而"或"这样就"，有时分词前还出现表示结果的副词 thus，thereby，so，therefore 等)。

例 6 Σ is the Greek letter sigma, meaning "the sum of ".

【Σ是希腊字母"西格马"，它的意思是"……之和"。】

句中"Σ"是 meaning 的逻辑主语。分词短语进一步说明"Σ"的含义。

例 7 In these graphs the horizontal axis measures time, increasing toward the right away from the vertical axis.

【在这些曲线图中水平轴表示时间，在垂直轴的右方，离该轴越远则时间值越大。】

本句分词短语进一步说明水平轴表示时间的方法。Increasing 还表示变化状态。

例 8 The function $y=\cos x$ is graphically symmetrical at y-axes, therefore being an even function.

【函数 $y=\cos x$ 的图形关于 y 轴对称，因而是偶函数。】

句中"being an even function"为分词短语，处于句尾作结果状语。

例 9 The values of the function $f(x)$ change irregularly as $x\to\infty$, confined in a finite interval.

【当 $x\to\infty$ 时，该函数的值无规则地变化，但局限于一个有限的区间。】

本句分词短语作方式状语，起补充说明的作用。

4. 分词前面附加引导连词的情形

(1) 分词或分词短语作状语时，有时可在分词前加一个引导该状语的连词，常见的有 when，while，if，though 等几个词。

例 10 When calculating the weight of a body, we have to multiply its specific gravity by its volume.

【当我们计算物体的重量时，必须用其比重乘其体积。】

本句 when 引导分词作时间状语。

(2) 综上所述，分词或分词短语作状语常带有时间、条件、原因、结果、方式、

补充说明等含义，至于它该属于什么类型的状语，只能靠上下文来判断。

二、分词独立结构

上面所介绍的分词或分词短语作状语的情形，其逻辑主语通常是句子的主语，有时是整个主句的意思。此外，分词或分词短语作状语时也允许有别的逻辑主语，这时，只要在分词前加上它自己的逻辑主语即可。这样的分词短语就叫"分词独立结构"（又称"独立主格结构"）。分词独立结构的逻辑主语一般为名词（个别情况下为代词），该结构在句中只能作状语，通常放在句首或句末，并用逗号与句子分开。分词独立结构的作用相当一个从句或分句。

分词独立结构的译法与普通分词作状语相似，常可采取顺译法。一般地，该结构作时间、原因、条件等状语时可译成汉语的状语从句，并可视情况增补适当的连接词；而当该结构作状语表示方式或伴随情况时，若与句子的谓语较不密切，则可译成独立句子或者并列句。

例 11　This(having been)done, the function becomes much simpler.

【这样处理以后，该函数变得简单多了。】

句中分词 done 的逻辑主语是指示代词 this，其中 having been 用来表示时态和语态，可以省略。

例 12　The integrand being always positive, we see that the action is positive.

【因为被积函数总是正的，所以这个作用力也是正的。】

本句分词独立结构放在句子主语前作原因状语，the integrand 为 being 的逻辑主语。翻译时增补了"因为"和"所以"。

例 13　The sign of the integral depends on the direction of the path taken, a counter-clockwise direction being taken as positive.

【积分符号取决于所取路径的方向，反时针方向被取为正向。】

本句第一个"taken"为过去分词单独作后置定语修饰"the path"；"a counter-clockwise direction being taken as positive"为分词独立结构处于句尾作状语，表示一种附加说明。

值得注意的是，在分词独立主格结构中系动词 be 的分词 being 常被省略。如，

例 14　The two values of the function can be grouped so as to give two functions, each analytic within this circle.

【该函数的两个值可以各归一组以构成两个函数，每个函数在这个圆内是解析的。】

本句"each analytic within this circle"为分词独立结构，处于句尾作附加说明，在"each"后面省去了分词"being"。

例 15　This formula possesses a variety of forms, all of them equivalent,

provided that the proper units are used for wavelength and frequency.

【这个公式有好几种形式，它们都是等效的，条件是对波长和频率使用的单位要合适。】

本句"all of them equivalent"为分词独立结构，处在句尾作附加说明用，实际上在"them"后省去了分词"being"。

练 习 3.1

1. 把下列句子译成汉语，并指出其中下划线部分的分词或分词短语的作用：

(1) If one of the trigonometric ratios of the acute angle is known, we can determine the other trigonometric ratio of the angle, using the Pythagoras theorem and the definitions of the trigonometric ratios.

(2) When proving the fundamental mathematical theorem, we can only use the axioms and the basic concepts given in last paragraph.

(3) Compared to x^n with any given positive integer n, the function e^x is a infinity with higher order as $x\to+\infty$.

(4) Given that the system of linear equations $\begin{cases} x-y=k, \\ 4x+hy=1 \end{cases}$ has infinitely many solutions, find the values of h and k.

(5) The prescribed value is called an initial condition, and the problem of determining such a solution is called an initial-value problem.

(6) New types of numbers, called complex numbers, have been introduced to provide to solutions to such equation.

2. 用分词或分词短语，把下列句子译成英文：

(1) 在方程的两边同时除以未知数的系数，就得到了该方程的解。

(2) 利用数学归纳法，我们可以证明许多与自然数有关的命题。

(3) 由于这个被积函数在该区间总是取负值，所以积分值是一个负数。

(4) 基于代数方程的根的研究，一个新的理论 —— 群论在 19 世纪诞生了。

§3.2 动 名 词

一、对动名词的基本认识

英语中的动名词是三种非限定动词之一。动名词可以当名词使用，但又具有动词的特征，这就是它称为动名词的原因。

动名词与现在分词的形式完全一样，只能通过分析其在句中的语法功能才能区分开来。实际上，动名词在句中主要起名词的作用，可单独使用或引导短语[注2]充当主语、宾语(包括在数学英语中很常见的介词宾语)以及名词性的表语和定语(见下一段)；而现在分词具有形容词性和副词性，常用于作定语和状语，也当形容词性的表语和定语(见§3.1)。

动名词的动词特征体现在

(1) 及物动词的动名词可以带宾语(见例1、例4等)；

(2) 系动词(常见be)的动名词可以带表语(见例3)；

(3) 动名词可以用状语修饰(见例9)；

(4) 动名词有时态(一般式与完成式)和语态(主动语态与被动语态)的区分，其一般式所表示的动作通常没有明确的时间界限，其完成式则强调动名词所表示的动作发生在谓语动词所表示的动作之前。在数学英语中，以一般式的主动形式最常见，有时也见到一般式的被动形式，而完成式则极少出现。

例1 Multiplying a and b together to give e may be written $a\times b=e$.

【把 a 和 b 相乘得到 e，可以写成 $a\times b=e$。】

其中 multiplying 是一般式的主动形式，在句中当主语。

例2 **On** being differentiated with respect to the variable x, the function $f(x, y)$ is performed as a function depending only on x, that is, the variable y is considered as a constant.

【在关于变量 x 求导时，对函数 $f(x, y)$ 的运算如同对单个自变量 x 的函数一样进行，即把变量 y 看成常数。】

句中"being differentiated"为被动形式的动名词，作介词"on"的宾语。

二、动名词充当句子成分

1. 动名词或动名词短语作介词宾语

动名词作介词宾语时放在介词后面，主要表示一种动作，这时动名词前面不能有任何冠词、形容词、代词等。如，

例3 These angles are not necessarily restricted **to** being acute.

【这些角不一定限于锐角。】

动名词短语"being acute"作介词"to"的宾语。

例4 We are accustomed **to** measuring angles in degrees.

【我们习惯于以"度"来度量角度。】

注2：介绍动名词的用法或译法时，通常也包含了相关的动名词短语的用法或译法。对于只涉及动名词本身的命题，读者不难从上下文加以识别，必要时我们会特别指明。

"be accustomed to"等同于"be used to",译为"习惯于";此时动名词短语"measuring angles in degrees"作介词"to"的宾语;"in"在此表示"以"、"用"的意思。

"介词+动名词"型的介词短语在数学英语中出现频繁。介词 by, on 和 in 与动名词构成的介词短语常用作状语;而介词 of, for 等构成的介词短语则常用作定语。

(1) by+动名词,译为"通过……"。如:

例 5 **By** finding two points on the straight line, we can draw the line.

【通过求出直线上的两点,我们就能把这直线画出来。】

本句介词短语作方式状语。

(2) on/upon+动名词,译为"在……以后","一当……(就)","在……时"。如:

例 6 **On** integrating this equation, we obtain a formula whereby the exponent of the cosine factor is unchanged.

【对这个方程积分后,我们得到了一个公式,据此可知,余弦因子的指数并不改变。】

本句"integrating this equation"为动名词短语作介词"on"的宾语,构成的介词短语作时间状语。另外,关系副词"whereby"引导的定语从句修饰"formula"。

(3) in+动名词,译为"在……时候(期间)"、"在……方面"、"在……过程中"。如:

例 7 We often group certain terms together **in** writing algebraic expressions.

【在写代数式时,我们经常把某些项归并在一起。】

这里,"in+动名词"型的介词短语作时间状语。

(4) of +动名词与 for +动名词,常译为"……的……"。

例 8 The general method **for** solving differential equations with higher order is to reduce the order by substitution of variables.

【解高阶微分方程的一般方法是利用变量替换进行降阶。】

这里,"for +动名词"型的介词短语作定语。

2. 动名词或动名词短语充当主语

动名词充当主语时,表示的是一个概念或一件事,句子的谓语必定为单数第三人称形式。这一点,与动词不定式当主语的情形是一样的。

例 9 Merely considering x as the real part of the complex number z does not help in this problem.

【只把 x 看成复数 z 的实部并不能有助于解这个题。】

本句的动名词短语当主语。

动名词有时在 it 为形式主语的句型中当主语，但这种现象不如动词不定式普遍。

例 10　It is worthwhile attempting to use Lagrange interpolation method for this computation.

【用 Lagrange 插值法进行这种计算的想法值得一试。】

句中的动名词短语当主语。

3. 动名词或动名词短语充当宾语

动名词可位于某些及物动词后作宾语，如

例 11　In the following section we shall **use** completing the square to develop a formula which also may be used to solve any quadratic equation.

【下一节我们将使用配方法来导出一个也可用于解二次方程的公式。】

本句的动名词短语当动词 use 的宾语。

例 12　These problems **require** finding a maximum or minimum value of some function.

【这些题目需要求出某个函数的最大值或最小值。】

本句的动名词短语当动词 require 的宾语。

注：有些动词对充当宾语的非谓语动词的类型有特定的要求，也就是说，有的动词(如 avoid)要求用动名词作其宾语，有的动词(如 attempt)则要求用动词不定式作其宾语，还有的动词(如 stop)对这两种类型的非谓语动词都可以接受，但二者的含义有很大不同。在数学英语中，常见的要求用动名词作其宾语的动词是：suggest(建议、暗示、启发)，finish(完成)，avoid(避免)，require(需要)，consider(考虑)，involve(涉及)，imagine(设想)，facilitate(便于、有助于)等。

4. 动名词或动名词短语充当表语

动名词位于系动词 be(一般为 is)之后作表语时，属名词性表语(注：现在分词作定语主要体现形容词性)。这时主语多是抽象名词，如 use(用途)，propose(目的)，task(任务)，difficulty(困难)等，有时也可能是另一动名词。

例 13　The difficulties which arise in these problems **are** not merely dealing with the relationship between variables x and y.

【在这些问题中出现的困难不仅仅在于处理变量 x 与 y 之间的关系。】

句中动名词短语当表语。

5. 动名词或动名词短语充当补足语

动名词作补足语是名词性的，在数学英语中较常见到的是动词 call 的句型

中，且以主语补足语多见。如：

例 14 This method of factorization is **called** grouping terms.

【这种因式分解方法称为分组分解法。】

句中动名词短语当主语补足语。

例 15 Finding the possible values of the known quantities is **called** solving the equation.

【求出这些未知量的所有可能值的过程，就称为解方程。】

句中动名词短语当主语补足语。

6. 动名词作定语(只能是动名词单独作前置定语)

动名词单独作定语只表示一种目的或用途。其特点是它所修饰的名词并不是动名词的动作发出者，这是它与现在分词单独作定语的关键性区别。如下是动名词单独作定语的例子：

Working conditions 即 conditions for working 工作条件("条件"并不会"工作")。

Modeling fundamentals 即 fundamentals for modeling 建模原理("原理"并不会"建模")。

三、动名词或动名词短语的复合结构

可以把动名词的逻辑主语放在它的前面，构成的短语叫做动名词的复合结构。在数学英语中，动名词的逻辑主语大多是名词(普通形式)，有时也用物主代词(its，their，our 等)或名词所有格(即名词＋'s)来表示。

例 16 Again we see a case **of** the Fourier series having only cosine term.

【我们再次看到了傅氏级数只具有余弦项的情况。】

这句的动名词复合结构作介词"of"的宾语，动名词 having 的逻辑主语是名词 Fourier series。

例 17 The successful application of integral by part is **depending upon** its constructing a pair of suitable functions $u(x)$and $v(x)$.

【成功应用分部积分法的关键在于构造一对合适的函数 $u(x)$ 和 $v(x)$。】

这句的动名词复合结构当宾语，用 its 体现动名词 constructing 的逻辑主语。

练 习 3.2

1. 判断下列句子中的下划线部分是分词短语还是动名词短语，指明它们在句中充当什么成分，并把句子译成汉语：

(1) Knowing the lengths of two sides and the measure of the angle includ-

ed by those two sides determines the shape and size of the triangle.

(2) The translation transformation is achieved by adding a constant vector to x.

(3) The Cauchy-Schwarz inequality is an important tool for proving a wide variety of inequalities.

(4) Applying this result to $f(x)$, we can deduce the desired identity.

(5) Applying this result to $f(x)$ gives the desired identity.

(6) The new computational method suggests avoiding the operations on powers of variables.

2. 应用动名词短语,把下列句子译成英语:

(1) 求这类方程组的解,需要借助于电子计算机。

(2) 数学建模的原理看起来很简单,但实际的建模过程是很复杂的。

(3) 求这些积分的困难不仅仅在于要做大量的计算。

(4) 解决一个重大的数学难题不仅依赖于计算技术的发展,而且需要新理论的建立。

§3.3 动词不定式

一、动词不定式概述

动词不定式是英语的三种非限定性动词之一,在数学英语中出现的次数较为频繁。它的一般形式是"to+动词原形",如 to be, to do, to have 等。这里的 to 只是表示动词不定式的符号(不是介词),没有词义,有时也可省略(见下面例 22)。

动词不定式既具有动词的特征和作用,又具有名词、形容词或副词的作用。在句子中,其名词性作用[注3]体现在可以充当主语、宾语、表语等;形容词性与副词性作用分别体现在可以充当定语和状语。此外,不定式还可以与一些助动词一起作谓语。前面已经介绍过分词和动名词这两种非限定性动词,它们除了具有动词性外,只能分别起形容词和名词的作用,所以动词不定式的作用范围比它们更大些。

动词不定式具有动词的以下特征:

(1) 及物动词的不定式可以有宾语、宾语补足语(见例 1、例 18 等);

(2) 有的动词的不定式可以有表语(见例 9);

注 3:我们介绍动词不定式的用法或译法时,通常也包括了相关的动词不定式短语的用法或译法。

(3) 不定式可以用状语来修饰(见例 11);

(4) 不定式有时态和语态的变化,在数学英语中通常只用一般式主动态,有时也用一般式被动语态(见例 12),很少涉及其他时态。

二、动词不定式及其短语充当句子成分

1. 不定式或不定式短语充当主语

不定式充当主语的特点是:谓语用第三人称形式。

例 1 To solve an equation means to find the value of the unknown term.

【解方程就是求未知项的值。】

不定式短语 to solve an equation 作主语,to find the value of the unknown term 作宾语。这两个不定式短语都是由不定式与它们的宾语构成。

为了使句子清楚,在很多情况下(特别是当主语的不定式短语很长时),可使用形式主语"it"(注:it 无任何词义)作为先行词,而把当主语的不定式短语放在句尾,以免"头重脚轻"。

不定式短语常在如下用"it"作形式主语的句型中充当主语。

(1) It is(或 seems)+表语(由形容词、名词或介词短语充当)+主语(不定式)

例 2 It seems impossible to solve these systems of equations in more than 100 unknowns without using electronic computers.

【不用电子计算机,要解这些超过 100 个未知数的方程组似乎是不可能的。】

例 3 It is our purpose in this section to introduce the basic method of solving differential equations of second order.

【本节的目的是介绍求解二阶微分方程的基本方法。】

(2) It+谓语(个别及物动词)+宾语+主语(不定式)

这类及物动词中最常用的是 take 和 require,其次是 make,do 等。

例 4 It **requires** three variables to express the relationship among those data.

【需要用三个变量来表示这些数据之间的关系。】

(3) It+谓语(个别不及物动词)+主语(不定式)

这类不及物动词常见的是 remain,help,suffice,occur,work 等。

例 5 Based on the calculations above, it **remains** to estimate the relative error.

【基于上述计算,只要再估计相对误差即可。】

例 6 Since the sufficient condition is obvious valid, it **suffices** to verify that the necessary condition is also true.

【由于充分条件显然成立，只要验证必要条件也成立就够了。】

(4) It＋谓语(个别及物动词的被动语态)＋(状语或主语补足语)＋主语(不定式)

这类动词常见的有 desire，find，leave，propose 等。

例 7　It is **found** convenient to express angles in radians rather than in degrees.

【我们发现用弧度而不用度数来表示角度是比较方便的。】

句中 convenient 为主语补足语。

2. 不定式或不定式短语充当宾语

许多及物动词后可以接动词不定式作为它们的宾语。这时，根据句子的主语是不定式所表示的动作的发出者或接受者来决定采用不定式的主动式或被动式。

例 8　You can **attempt** to show that the two triangles are similar.

【你可以试证这两个三角形的相似性。】

本句不定式作动词 attempt 的宾语。

注：若不定式在句中作 find 或 make 等动词的宾语，则常有宾语补足语，这时一定要用带有形式宾语 it 的句型。此句型为：

主＋谓＋形式宾语 it＋宾语补足语＋宾(不定式)，

其中的宾语补足语通常是形容词，如：possible，difficult 等，有时是“of＋抽象名词”。

例 9　By means of calculus we will find it **possible** to calculate the area of an irregular graph closed by a continuous curve on the plane.

【利用积分学我们将看到，计算由连续曲线围成的不规则平面图形的面积是可能的。】

本句带有形式宾语 it，宾语补足语是 possible。

3. 不定式或不定式短语充当表语

动词不定式作表语时起名词作用，属名词性。这时，不定式只能以主动语态的形式出现。见例 1 及如下：

例 10　The first step in factoring any algebraic expression should be to abstract any common monomial factor that may exist.

【对代数表达式进行因式分解的第一步应该是提出可能存在的任何单项公因式。】

句中不定式短语作句子的表语；另外，“that may exist”为定语从句，修饰其前面的名词。

例 11　This mathematical conjecture appeared to be true, but it has been

proved to be false.

【这个数学猜想看上去似是对的，但是已经被证明是错的。】

这是一个并列句，第一个分句中不定式 to be true 作表语，其中 true 又是不定式 to be 的表语。第二分句的主语 it 代表第一句的主语，to be false 也作表语。

注：在动词"be"后出现的动词不定式未必作表语，因为"be＋不定式"还可能表示"将"、"打算"、"想要"、"可能"、"必须"、"要"、"应该"等的强调之意。

例 12 The following steps are to be taken in computing its value.

【在计算其数值时一定要采取以下步骤。】

4. 不定式或不定式短语充当定语

不定式作定语时位于被修饰词之后，其一般式常表示"将来"或"能力"，往往含有"要"、"能"、"会"、"需"、"该"的意思。不定式与被修饰词之间常见的有三种逻辑关系：(1) 主谓关系(见例 13,14)，(2) 动宾关系(见例 15)，(3) 纯修饰关系(见例 16)。

例 13 Chapter 1 offers a preview of things to come.

【第一章概述了后面要讲的内容。】

本句被修饰词 things 是动词不定式所表示的动作的逻辑主语，同时是动作 come 的发出者，所以不定式为主动式。

例 14 This is the new scientific method to have been used in production.

【这是已用于生产的新的科学方法。】

本句被修饰词 method 是动词不定式所表示的动作的逻辑主语，同时也是已完成动作 use 的承受者，所以该不定式采用完成时被动式。这类不定式可以改成从句，如本例不定式可改成 which have been used in production。

例 15 "Weight"is a concept difficultly to define(相当于 that one can define).

【"重量"是一个难以定义的概念。】

在逻辑上，concept 是动作 define 作用的对象；在语法上，不定式 to define 是 concept 的定语，副词 difficultly 修饰不定式。

例 16 The commonly used unit to measure the length of a classroom is meter.

【测量教室长度的常用单位是米。】

这句的不定式 to measure 修饰 unit，但是它们之间没有主谓关系或动宾关系，被称为是纯修饰关系。

5. 不定式或不定式短语充当状语

在数学英语中，不定式充当状语时主要表示目的，可以放在句首（译成“为了……”、“要……”）或句末（译成“来……”或“以便于……”）；放在句末时也可能表示结果（译成“从而……”，“以至于……”）或作附加说明。不定式形成一批固定词组用以充当状语，如 in order to (do)（为了……），too…to (do)（太……以至于不能……），enough to (do)（足以……），such…as to (do)（这样的……以至于……）等。

例 17　To solve an equation, we must change the terms about until the unknown term stands alone on one side of the equation.

【为了解方程，我们必须对各项作变形，直到未知项单独放在方程的一边。】

本句不定式短语作目的状语，其中 to solve 可改成 in order to solve。

例 18　The limits of integration must be chosen so as to include the entire surface.

【所选的积分限必须把整个曲面都包括进去。】

本句可直译为“积分限必须这样选取，使它把整个曲面都包括进去”，句中“so as to include the entire surface”作结果状语。

注：下面两种形式的不定式状语很难区别其所属类型，翻译时也常采用特殊的方式。

例 19　All of the foregoing tests fail to establish either the convergence or the divergence of this integral.

【前面所有的检测，均未能确定这个积分到底是收敛还是发散。】

本句不定式放在不及物动词 fail 之后作状语，fail to establish 可合在一起译成谓语。

例 20　We must be careful to express the resulting radical in simplest form.

【我们必须小心地用最简形式来表示最终的根式。】

不定式短语放在形容词 careful 之后当状语，指出“在……方面要小心”；这里 express 与 must 可合译成谓语。

6. 不定式或不定式短语充当补足语

补足语分为主语补足语与宾语补足语两种，是某些及物动词要求的，它与被修饰词（主语或宾语）之间必有逻辑上的“主谓关系”（可以是主动的或被动的）。

例 21　The new integration theorem allows us to find the integral of such discontinuous function as Dirichlet function.

【新的积分理论使我们有可能求出像 Dirichlet 函数这样的不连续函数的

积分。】

本句不定式短语作宾语 us 的补足语，“我们”是“求出……”的逻辑主语。这句可改成被动语态：Based on the new integration theorem, we are allowed to find the integral of such discontinuous function as Dirichlet function. 这时不定式短语当主语 we 的补足语。

例 22 Let x be the area of the triangle.

【设 x 是三角形的面积。】

不定式短语充当 let(设，令)，make(使得)，have(使得)等动词的宾语补足语时，必须省略不定式标志“to”。但不定式作主语补足语时 to 不能省去。

三、动词不定式复合结构

动词不定式带有自己的逻辑主语时，采用如下固定形式：for ＋逻辑主语＋不定式，其中，逻辑主语是名词或人称代词宾格，这时 for 没有任何词义。这种形式称作“动词不定式复合结构”。这种结构作为不可分割的一个整体在句中起语法作用。

动词不定式复合结构在句中的语法功能，与普通不定式基本相同，只是不可以作补足语。在数学英语中，该结构主要充当主语、状语和定语。如，

例 23 It is not necessary for each root of an equation to be different from the others.

【一个方程的根不一定是各不相同的。】

不定式复合结构作句子的真正主语。

例 24 Another principal topic for the students to study in this course is that of finding a function when its rate of change is known.

【学生在本课程要学习的另一个主要内容是，从已知的变化率求函数。】

本句用不定式复合结构作定语；翻译时，把不定式 to allow 的逻辑主语 the students 译成主语。

例 25 What conditions are needed for the equation to have solutions which are positive integers.

【需要什么条件才能使这个方程具有正整数解？】

这个不定式复合结构作目的状语。

练 习 3.3

1. 把句子译成汉语，并指明其中不定式短语所充当的句子成分：

(1) This idea is proved to be true by the following Law of cosines.

(2) To solve a triangle is to find the unknown parts of the triangle.

(3) The aim of this paper is to investigate the situations of mathematical education in middle schools and give some suggestions to improve the teaching effects.

(4) It is necessary for college students who study mathematics to understand modern set theory and its applications.

(5) We find it is convenient to express subtraction by adding the negative: $x-y=x+(-y)$.

(6) Often one abbreviates the expression $a_1+\cdots+a_n$ by writing down the general term a_v with a capital sigma, $\sum$, to show that the sum is to be taken, with some indication of the range over which the terms are to be summed (unless this is clear from the context).

2. 应用不定式短语，把下列句子译成英语：

(1) 你可以试证这样的命题：三个连续偶数的和不等于 56。

(2) 很容易看出这是一种等价关系。

(3) 把有界区间[0,1]替换成无界区间$(-\infty,+\infty)$显然是很有意义的。

(4) 为了证明这种分解的存在性，我们首先必须引入一个新的概念。

§3.4 定　　语

一、对定语的基本认识

定语是句子的一个成分，主要用于修饰名词和名词性代词。在英语中，定语位置大致如下：单个词作定语一般前置(即位于所修饰词之前，这与汉语相似，称为前置定语)；短语及从句作定语要后置(即位于被修饰词之后，称为后置定语)。

在数学英语中，定语的形式有以下两大类：

(1) 单个词当定语，可以是：名词、形容词、数词、形容词性物主代词、分词等。

(2) 短语、从句当定语，可以是：介词短语、形容词短语、分词短语、动词不定式、定语从句、同位语从句等。

鉴于单个词作定语的情形多数读者已较熟悉，本节只涉及其中单个分词当定语的情形，把大部分篇幅用于介绍介词短语、形容词短语及分词短语作定语的情形。至于从句作定语的情形，我们将在下一节介绍。

根据汉语的语法，前置的定语一般采用“的”字结构，即在定语后加“的”字，放在被修饰词之前(如“这个人的眼睛”)。所以，翻译那些作为前置定语用的单词或短语时，也常用“的”字结构。下面我们通过实例说明基本译法。

二、介词短语充当定语

介词短语的主要构造形式是:介词+宾语(其中宾语可以是名词、代词、动名词、名词性不定式、介词宾语从句)。英语作定语的介词短语比较短时,可译为汉语的前置定语且英语的介词常略去不译。

例 1　The **architect** with his scale drawings and the machine **draftsman** with his working drawings are the technicians who know elementary geometry very well.

【使用比例图的建筑师和绘制生产图纸的机械制图员都是通晓初等几何的技术员的例子。】

这里介词短语 with his scale drawings 和 with his working drawings 作后置定语分别修饰 architect 和 draftsman。

例 2　The vector represents the **velocity** of the ball at point *A*.

【这个向量表示该球在 *A* 点的速度。】

这里 of 引导的介词短语修饰 velocity。本句与上一句的定语很短,所以译成前置定语。

三、形容词短语作定语

形容词短语的主要构造形式:(1)形容词+介词短语;(2)形容词+状语从句(尤其是比较状语从句)。

例 3　A base of logarithm must be a positive **number**, not equal to one.

【对数的底必须是一个不为 1 的正数。】

形容词短语"not equal to one"的结构是"not +形容词+介词短语",原来的后置定语译成汉语的前置定语。

例 4　Another Laplace **transform** important to the solution of a differential equation is the transform of the derivative of a function.

【解微分方程的另一种重要的拉氏变换是对函数的导数进行变换。】

形容词短语"important to the solution of a differential equation"作后置定语,译成汉语的前置定语。

注:作定语的形容词短语在个别情况下(如在 there be 的句型中)可不译成定语。例如,

例 5　In this case there is no positive **root** larger than 1.

【在这种情况下,没有一个正根大于 1。】

这句译文是汉语的兼语句,"正根"既是前半句的宾语,又是后半句的主语,原文的后置定语 larger than 1 译成后半句的谓语部分。

四、分词及其短语作定语

不论是单一的(即单独使用的)分词或分词短语,当它充当定语来修饰句中的某个对象(称为中心词)时,都在一定程度上具有动词性(特征):

(1) 现在分词一般具有主动的意思,表示中心词发出的动作,有时动作是在进行中的。

(2) 及物动词的过去分词一般具有被动的意思,表示中心词所接受的动作,有时还表示该动作是完成了的;不及物动词的过去分词则常体现中心词所处的状态。

1. 单一的分词作定语

单一的分词作定语时,多数为前置定语;这时它在形式上类似于形容词(见下面(1));单一的分词作后置定语时则分词的特征更明显。

(1) **单一的分词作前置定语时,前面可加上副词状语。**

例 6　The methods of substitution and elimination is the commonly used **methods** to solve the systems of linear equations in two unknowns.

【代入法和消元法是解二元一次方程的常用方法。】

过去分词 used 有被动的含义,作定语,前面加上 commonly 作它的状语。

例 7　The continually changing **secant lines** approach the tangent line at A to the curve as x tends to x_0.

【当 x 趋于 x_0 时,不断变化的割线趋于该曲线在 A 点的切线。】

本句现在分词 changing 有主动的含义,作定语,前面加上 continually 作它的状语。

(2) 过去分词单独作后置定语时,通常强调分词表示的动作已经结束。

例 8　Check the **values** found, if they satisfy the equations, then they are the solution(s).

【检查所求得的值,如果它们满足方程,则它们就是解。】

句中过去分词 found 作定语,在这里译作"所求得",体现"求"的动作已经完成。

2. 分词短语作定语

分词短语的主要构造形式是:现在分词+宾语,过去分词+介词短语。短语中除了主要结构,还可能有其他附加成分。作定语的分词短语一般按照"短紧译定、长松译变"的原则进行翻译,即短的或与被修饰词关系紧密且译文条理较清楚者,则译成定语;长的或与被修饰词关系较松散者,则采用其他变通的方法译出。

(1) "短紧"的现在分词短语作定语,可译成前置定语,把"现在分词+宾语"

译成动宾关系。

例 9　A ratio is a fraction and all the **rules** governing a fraction apply to ratio.

【比是一个分数，所有支配分数运算的法则都适用于比。】

句中 rules 是行为 govern 的发出者，现在分词短语 governing a fraction 译成中文“支配分数运算”时仍然为动宾关系。

(2) “短紧”的过去分词短语作定语时，可译成前置定语。这时“过去分词＋介词短语”通常译成“状语＋动词”(见例 10)的形式，有时也可译为主谓关系，省译介词(见例 11)。

例 10　The range of a characteristic function is a set composed of only two number, i.e. 0 and 1.

【特征函数的值域是一个仅由两个数，即 0 和 1 组成的集。】

分词短语作 set 的定语。该分词短语译成“状语＋动词”的形式。

例 11　The special **solution** determined by the conditions is unique.

【该条件所确定的特解是唯一的。】

“该条件”与“确定”在逻辑上是主谓关系；determined by the conditions 是 solution 的定语，可以改写成一个定语从句。

(3) 若分词短语(后置)与另一个分词(前置)都作定语修饰同一个中心词，翻译时应注意定语次序的排列；若把它们都译成前置定语时，通常先译短语而后译分词。

例 12　We are trying to determine an unknown function from prescribed **information** expressed in the form of an equation.

【我们试图由以方程的形式表述的给定信息来确定未知函数。】

这里，前置的分词 prescribed(被指定的)和后置的分词短语 expressed in the form of an equation 都是 information 的定语，其中短语译为“状语＋动词”的形式，即“以方程的形式＋表述”，放在“指定的”之前。

(4) “长松”的分词短语，特别是包含从句时，一般不译成前置定语，常看成定语从句，采用分译法、溶合法或其他合适的形式译出(即未必译成定语)。

例 13　To prove the sequence $\{a_n\}$ does not converge to 2 we must find a positive **number** ε_0 satisfying that for any natural number N there exists an integer $n>N$ such that $|a_n-2|\geqslant\varepsilon_0$.

【要证明序列$\{a_n\}$不收敛于 2，我们需求出一个正数 ε_0，它满足：对任意的自然数 N，存在一个整数 $n>N$ 使得 $|a_n-2|\geqslant\varepsilon_0$。】

原文 satisfying 可改成 which satisfies，就变成定语从句。这里把分词短语

译成分句，也可以把后半部分译成“需求出一个满足如下条件的正数 ε_0：对任意的自然数 N……”。

例 14　**Visual aids** of this type, called Venn diagrams, are useful for testing the validity of theorems in set theory or for suggesting methods to prove them.

【这类直观的辅助手段称作文氏图，它可用来检验集论中定理的正确性或对证明的方法给出提示。】

原文 called 可以改成 which is called，转化为定语从句。这里采用溶合法，译成两个分句，called Venn diagrams 译成第一句的谓语部分。

最后，我们指出，英语作定语的分词（尤其是过去分词）在汉译时有时不译成定语。例如，有时可把分词译成名词、动词或其他。

例 15　Speed is the **distance** moved divided by the time elapsed.

【速度等于运动的距离除以所花的时间。】

本句采用所谓“顺译法”，把过去分词 divided 译成动词。

练　习　3.4

1. 把下列句子译成汉语，并指明其中的定语由何种词语充当：

(1) Then we conclude an important formula $E=V+F$, named Euler formula.

(2) We treat $f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ as a symbol for the derivative of the function $f(x)$ with respect to x.

(3) This result tells us that the velocity is decreasing at the rate of 32 meters per second every second.

(4) The procedure used to define the derivative has a geometric interpretation which leads in a natural way to the idea of a tangent line to a curve.

(5) The quotient itself is referred to as the average rate of the change of f in the interval joining x to $x+h$.

(6) We could try to compute the position of a moving particle from a knowledge of its velocity or acceleration.

2. 把下列句子译成英语，特别注意其中定语的正确表达：

(1) 每个连续函数在它有定义的闭区间上达到其最小的上界，即上确界。

(2) 这条曲线在 P 点的法线垂直于在该点的切线。

(3) 对任意 $\varepsilon>0$，求一个使得对任何 $n>N$ 满足 $|a_n-A|<\varepsilon$ 的最小正整

数 N。

(4) 这个函数的值域是一个由所有大于 2 且小于 5 的有理数组成的集。

§3.5 定语从句

一、定语从句概述

定语从句通常由**关联词**(关系代词或关系副词)引导,置于它所修饰的对象之后。定语从句分为限制性定语从句和非限制性定语从句。

定语从句可用来修饰主句中的某个名词或代词(称为**先行词**)。限制性定语从句对先行词的意思有明显限制作用,如果把它删掉,则原句的意思就有明显改变,甚至不完整或不成句。非限制性定语从句对先行词的意思没有明显限制作用,只是对它作补充说明而已;此外,有的非限制性定语从句不修饰先行词,而用于修饰整个主句或其一部分。

因此,区别非限制性定语从句和限制性定语从句非常重要。在书写上,这种区别的主要标志是"有无逗号分隔":非限制性定语从句与其修饰对象之间要用逗号隔开,即在引导从句的关联词之前有一个逗号;而限制性定语从句与其修饰对象之间不用逗号隔开。

例 1 A right triangle is a **triangle** two of whose sides are perpendicular.

【直角三角形是有两个边相互垂直的三角形。】

原文下划线部分为限制性定语从句,通过描述直角三角形的特征来限制所定义三角形的范围。

例 2 We also note the following brief **way** of describing intersection, union and complement, which brings out a certain analogy with the rules for combining propositions.

【我们同样注意到如下描述交、并和补的简要方式,它引出了关于组合命题的运算法则的某种类似物。】

原文下划线部分为非限制性定语从句,用来补充说明主句中的名词 way。

引导定语从句的关系代词和关系副词统称"关联词",它们出现在定语从句的开头,直接或间接地作为从句的修饰对象的代表,充当从句的某个句子成分(见下面的例子)。认识关联词对于辨别和分析定语从句具有很大作用。

(1) 在数学专业英语中,定语从句常见的关系代词是:

that:所代表的被修饰对象可以是人、物或事,在从句中主要充当主语和宾语,有时(少见)作介词宾语(此时介词置于从句末)。

which:所代表的被修饰对象通常是主句中的事物,有时也可以是整个主句

或其一部分；它在从句中主要充当主语、宾语和介词宾语。

whose：所代表的被修饰对象可以是人、物或事，在从句中只能当定语，常译为“其”。

who 与 whom：所代表的被修饰对象是人，在从句中 who 当主语，whom 作宾语或介词宾语。

as：所代表的被修饰对象通常是主句中的事物，有时也可以是整个主句或其一部分。as 本身有词义，常译成“正如……的那样”。关于 as 用法的进一步介绍，可参见 § 3.11。

例 3　Such **solutions** as we need must be integrable and not equal to zero almost everywhere on $[a, b]$

【像我们所需要的那种解必须是在 $[a, b]$ 可积的且几乎处处不等于零。】

本句 as 引导的定语从句修饰主句中的 solutions，而 solutions 有 such 修饰；as 在从句中充当宾语。

(2) 数学英语中定语从句常见关系副词是：

where：被修饰对象常是表示地点、场合、情况等的名词(如 place，case，situation 等)，where 常可用 in which 来代替；在数学英语中，where 常出现在表达式和公式之后(这时 where 一般可译成“其中”或“这里”)。

when：被修饰对象通常是表示时间或与时间有关的名词(time，moment，instant，point，cycle，occasion 等)；when 有时可用 at which 或 on which 来代替。

why：被修饰对象常是表示理由的名词(主要是 reason)；当该名词是 reason 时，why 可以看做 by which 或 according to which。

例 4　This is the **reason** why the arbitrary constant in the general solution is not equal to zero.

【这就是该通解中的任意常数为什么不等于零的理由。】

why 引导的定语从句修饰 reason，但 why 在从句中的意思不是 reason，而是 by the reason。

注：1) (上述两类)关系词在定语从句中一定要充当句子成分。

2) 除 as 外，关联词无固定的词义。当分句的修饰对象是名词或代词时，关系代词通常具有被修饰词的词义；关系副词如理解成“适当的介词＋which”，也可通过介词和被修饰词(先行词)来体现它的词义(参见例 4 的说明部分)。

二、定语从句的基本译法

(1) **合译法**：在限制性定语从句较短，或非限制性定语从句较短且与主句关系密切的情况下，可将定语从句译为“的”字结构，即“……的”，放在先行词之前

作定语(见上面例 1)。

(2) **分译法**:当定语从句较长或与所修饰名词间关系不密切时,可将定语从句译成与主句并列的分句放在先行词之后,必要时可在译文中重复先行词的含义,还可增加"它"、"这些"等指示代词,或把关系代词译成"它"或"它们"(见上面例 2 及下面例 6)。

非限制性定语从句通常采用分译法,有时甚至可以译成独立句。

例 5 Now the assertion that n^2 is even is proved, from which it follows that n is even.

【现在,关于 n^2 是偶数的断言已经得到证明,由此可推出 n 是偶数。】

本句 which 引导的定语从句修饰它的主句。

例 6 The other scale in general use nowadays is the **binary** in which numbers are expressed by combinations of only two digit 0 and 1.

【目前通用的另一种进位制是二进制,在二进制中,数只用 0 和 1 这两个数字的各种组合来表示。】

本句 which 引导的限制性定语从句修饰主句的主语 binary,因定语从句较长而采用分译法,并把其中先行词 binary(二进制)重复译出。

(3) **溶合法**:即打破原文中的主句与定语从句的界限,译者不拘泥于字面意思,把它们溶合起来处理,按照汉语的表达方式进行意译或部分意译。例如,对"there be +主语+定语从句"这一句型,就常采用这种译法,整个句子往往按词序译下去,此时定语从句的关联词经常不译(见例 7);又如,一些叙述数学命题的句子为了强调条件,也采用此法(见例 8)。

例 7 There are some **quantities** that have direction as well as magnitude.

【有些量既有大小又有方向。】

这句采用溶合法译出,整个句子一气呵成。

例 8 Any **triangle** that is not a right triangle is called an oblique triangle.

【一个三角形如果不是直角三角形,则称为斜三角形。】

此句把定语从句译成条件,也可以直译为:任何一个不是直角三角形的三角形称为斜三角形。

三、定语从句的进一步讨论

(1) 定语从句的关系代词有时可以省略,特别是在从句中当宾语的关系代词常被省略。

例 9 We now have half the information we need to describe a vector.

【我们现在得到了描述向量所需的一半信息。】

在 information 和它后面的 we 之间的 which 省略,因为关系代词 which 充

当从句中动词 need 的宾语，所以可以省略。

(2) 一个句子中不同的定语从句的译法可能不同，如：

例 10　On the other hand, forms like $\{x \mid P(x)\}$, in which the domain over which x ranges is left unspecified, are best avoided.

【另一方面，类似于$\{x \mid P(x)\}$的形式当 x 在其中变化的范围仍未指定时，最好不要采用。】

这里，第一个定语从句用分译法，第二个定语从句用合译法。

(3) 定语从句有时当成状语从句或同位语从句来翻译。一般地，可以根据上下文逻辑意义和表达的方便来决定译文的形式，关键是首先要做到“信、达”。

例 11　Any set S is a subset of itself; this is called an improper subset of S in contrast to the proper subsets of S which are different from S itself.

【任何集 S 都是自己的子集，称为 S 的非真子集，以区别于 S 的真子集，即不同于 S 的那种子集。】

原文的定语从句译成同位语从句。

(4) 定语从句与先行词之间有可能被状语、谓语或其他成分隔开，阅读和翻译时应认真分析它们之间的关系。

例 12　According to Gödel theory, no **method** is known by which it is possible for a system of axioms to verify whether the system itself is complete or not.

【根据 Gödel 理论，根本没有什么方法让一个公理系统验证其自身是否完备。】

本句定语从句的先行词是 method，它被主句的谓语 is known 隔开。

例 13　Yet there exist mathematical **conjectures** proposed by famous mathematicians before 19th century which people are unable to solve.

【到目前为止，还存在一些由 19 世纪之前的著名数学家提出的数学猜想是人们不能解决的。】

本句定语从句的先行词是 conjectures，它被当定语的分词短语 proposed by famous mathematicians before 19th century 隔开。

练　习　3.5

1. 把下列句子译成汉语，注意其中定语从句的译法：

(1) It is sometimes useful to know the conditions under which equality can hold in an inequality.

(2) The adjoint matrix of $\boldsymbol{A}$, denoted by adj$\boldsymbol{A}$, is the transpose of the square matrix whose elements are the cofactors of the corresponding elements of $\boldsymbol{A}$.

(3) We also say that $P(A)$is the probability that the event A occurs when the experiment is performed.

(4) Its history began in the 17th century when Newton, Leibniz, and the Bernoullis solved some simple differential equations arising from problems in geometry and mechanics.

(5) Among these are the so-called linear differential equations which occur in a great variety of scientific problems.

(6) In this chapter we shall begin our study with first-order equations which can be solved for y' and written as follows: $y'=f(x,y)$, where the expression $f(x,y)$on the right has various special forms.

2. 用定语从句把下列句子译成英语:

(1) 这就是解分式方程时需要验根的理由。

(2) 长期以来人们在小学期间学习算术,在算术中,只考虑正数的加、减、乘、除四则运算。

(3) 现在,关于这两个三角形相似的命题已经得到验证,由此可推得所要的结论:AB 是 CD 的三分之二。

(4) 在上一段,我们引用了几个实际例子,其中数据的收集和整理对于建立数学模型是至关重要的。

§3.6 状语从句

状语从句的种类很多,这里我们主要介绍数学英语中常见且具有特色的状语从句,它们是:条件状语从句、时间状语从句、原因状语从句、结果状语从句及让步状语从句。英语中的状语从句出现在句中的位置较灵活,可位于主句前、主句中或主句后;一般由从属连词引导,也可以由起连词作用的短语引导。

英语的状语从句通常可译成汉语的状语或状语从句,但是应注意:

(1) 状语从句汉译后应放在句中的适当位置(下面把从句放在主句的前面者称为"前置",从句放在主句的后面者称为"后置")。

(2) 在一些情况下,英语的连词译成汉语时可省略或部分省略(如 when,if,since 等未必每次都译出),以使句子更简练(见例 1、例 10)。

(3) 有时状语从句要转译成句子的其他成分或不同类型的分句(见例 10、

例 12)。

一、条件状语从句

在数学英语中条件状语从句的引导词主要是如下几个连词:if(如果),其次是 provided(若),unless(除非);也可由如下连词或短语引导:supposing(假设),in case(假如),only if(仅当),if and only if(当且仅当),so(as)long as(只要),so(as)far as(就……来说,据),in so far as(就……来说,至于),except that(除了……之外)等。它们绝大多数有词义,但在从句中不充当句子成分

英语的条件状语从句通常译成条件。因为汉语的习惯是先讲条件,后给结论,所以汉译后常把条件放在结论的前面。特别,对 If…then…的句型,可译成"若……则(就)……"的形式。对于原文的某些特殊句型(如例 2 和例 3)或后置的条件从句较长的情形,汉译时也可以把条件后置。

例 1　An integer is called composite **if** it has two or more prime divisors (not necessarily distinct).

【一个整数若有两个或以上的素因子(二者未必不同),则称为合数。】

例 2　Thus the process terminates **if and only if** the set of positive integers m, m_1, m_{11}, m_{111}, … is a finite set.

【这个过程会结束当且仅当由 $m, m_1, m_{11}, m_{111}, \cdots$ 组成的正整数集是有限集。】

本句用 if and only if 引导的从句,表示充分必要条件,通常按英语原来的次序译出。

例 3　**Unless** there is an important reason to the contrary, a ratio should be expressed in its simplest form.

【比要用最简的形式表示,除非有不这样做的重要理由。】

unless 引导的从句一般译成前置,译成"除非……否则……"。但本句 unless 引导的从句用于补充说明,所以译成后置。

例 4　The constant A may have any value **as far as** the differential equation **is concerned.**

【就该微分方程而论,常数 A 可以具有任何数值。】

句中"as far as…is concerned"为条件状语从句,常译成"就……而论"。

二、时间状语从句

在数学英语中时间状语从句的常用引导词是 when(当),也可由如下连词或短语引导:before(在之前),after(在之后),as(当),whenever(每当),when and only when(当且仅当),till(直到),until(直到),since(自从)等。

时间状语从句翻译后通常放在主句的前面。when 和 when and only when

常译成条件，分别等同于 if 和 if and only if。

例 5 The quadric equation $ax^2+bx+c=0$ has two different real roots **when** $b^2-4ac>0$.

【当 $b^2-4ac>0$ 时，二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不同的实根。】

例 6 The function $f(x)$approaches to ∞ **as** x tends to 0.

【当 x 趋于 0 时，函数 $f(x)$趋于∞。】

例 7 **Before** we can use Theorem 2 to determine whether or not a given integer m is prime, we need some method for determining the primes $\leqslant I$ where $I^2\leqslant m<(I+1)^2$.

【在我们使用定理 2 来确定一个给定的整数 m 是否为素数之前，需要用某个方法来确定$\leqslant I$ 的素数，其中 $I^2\leqslant m<(I+1)^2$。】

三、原因状语从句

在数学英语中，引导原因状语从句最常见的连词是 since(由于，因为，既然)，从句中陈述的原因通常是已经知道(包括已设定或已证明)的事实；而 because(因为)和 as(因为)则不常用，其中 because 多数用于特别强调原因的情形。至于 now that (既然，由于)，in that (由于，在于)等短语也偶然用到。翻译原因状语从句通常采用前置法，但若从句的意义在于对结果补充说明，也可采用后置法。

例 8 **Since** $\boldsymbol{a}$ is a vector, we must also determine its direction.

【由于 $\boldsymbol{a}$ 是一个向量，所以还得确定的它的方向。】

例 9 The measurement of angles is unique **in that** the unit is dimensionless.

【角的测量是独特的，因为其单位是没有量纲的。】

本句的原因从句译在后面，作为解释用。

例 10 **Since** zero is neither positive nor negative, this will mean that every positive integer belongs to one of three classes and every positive integer greater than one is either prime or composite.

【0 既不是正数也不是负数，这就意味着每个正数属于其他三种分类中的一种，并且每个大于 1 的正数不是素数就是合数。】

这句 since 不必译出。

注：1. since，because 等引导原因从句，不像汉语要与“所以”、“因此”之类词搭配，即不与 therefore，hence 等连用(它们在英文中是副词)；但汉译时“因为”可省，而“所以”或“因此”等却常需补上。

2. 在英语中，连词 since，because 等引导原因从句，而连词 for 也可以引导

表示原因的分句(不是从句),放在另一个句子的后面(用逗号分开),对前面的句子所陈述的事情说明原因;在语法上它与前面的句子是并列关系。

例 11　From above discussion follows that conclusion is valid for the case $x \leqslant 0$ and so for all real numbers x, **for** the case $x>0$ has been verified in previous section.

【由上述讨论得出,对于该结论 $x \leqslant 0$ 的情形成立,从而对所有实数 x 都成立,这是因为 $x>0$ 的情形已经在前面一节得到验证。】

四、结果状语从句

结果状语从句常用连词 so…that(如此……以至于),so that(以至于),such…that(这样的……以至于),such that(这样的以至于,使得)等引导,其中 such that 在表示数学内容的结果状语从句中最常用。

结果状语从句一般用于表示事实,汉译后常后置。为避免洋味太浓,翻译连词的含义时并不照套"如此……以至于"之类译文,而常采用较灵活的形式译出。

例 12　Suppose $f(x)$ is a function on a domain D **such that** $|f(x)|<M$ for all $x \in D$, where M is a constant.

【假定 $f(x)$ 是区域 D 上的一个函数使得对所有 $x \in D$,不等式 $|f(x)|<M$ 成立,此处 M 是一个常数。】

本句 such that 之后是结果状语从句,译后常放在主句之后。本句 such that 译成"使得",但也可改成其他形式,如,假定 $f(x)$ 是区域 D 上的这样一个函数:对某个常数 M 和所有 $x \in D$ 满足不等式 $|f(x)|<M$。

例 13　The use of logarithms has decreased the labor of computing to **such** an extent **that** many calculations, which would require hours without the use of logarithms, can be performed with their aid in a small fraction of that time.

【对数的使用把计算的劳动量减少到这样的程度,即许多计算当未采用对数时需耗费数个小时,而现在由于借助对数只要用原来的很少一部分时间就能完成。】

本句由"such…that"引导的从句是结果状语从句,用于修饰主句。由 which 引导的从句是非限制性定语从句,修饰"many calculation"。

五、让步状语从句

常用如下连词或短语引导让步状语从句:although(虽然),though(虽然),even though 或 even if(即使),no matter what = whatever(无论什么),no matter which(无论哪个(些)),no matter how = however(无论如何),no matter whether(无论是否)等。让步状语从句译成汉语后一般前置。

例 14 **Although** the intuitive meaning of expressions may seem clear, in a careful treatment of the real-number system it is necessary to give a more precise definition of the positive integers.

【虽然这些说法的直观意思似乎是清楚的，但是在认真处理实数系统时必须给出一个更准确的关于正整数的定义。】

这句话中的 although 引导一个让步状语从句，其中主句中 it 是形式主语。

例 15 **No matter how** small is the positive number ε, there exists a positive number δ such that $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ for each $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

【无论正数 ε 多么小，总存在正数 δ 使得 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 对每一个 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 都成立。】

No matter how 引导的让步状语从句，在这里译成“无条件”的条件分句。

练 习 3.6

1. 把下列句子译成中文，注意其中状语从句的译法：

(1) When no confusion may result, the expression "line segment AB" is often replaced by segment AB or, simply, line AB.

(2) A set A is said to be a subset of a set B, and we write

$$A\subseteq B,$$

whenever every element of A also belongs to B.

(3) If a variable y depends on another variable x in such a way that to each value of x corresponds a definite value of y, then y is a function of x.

(4) In any sequence the essential thing is that there be some function f defined on the positive integers such that $f(n)$ is the nth term of the sequence for each $n=1,2,3,\cdots$.

(5) The concept of a set has been utilized so extensively throughout modern mathematics that an understanding of it is necessary for all college students.

(6) Although these special tricks are applicable in relatively few cases, they do enable us to solve many differential equations that arise in mechanics and geometry, so their study is of practical importance.

2. 用状语从句把下列句子译成英文：

(1) 除非 $x=y$，否则该不等式中的等号就不可能成立。

(2) 确定直线方程 $y=2x+C$ 中的常数 C，使得该直线经过点(1，2)。

(3) 因为这个二次方程 $f(x)=0$ 没有实根，所以函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴不相交。

(4) 不论正数 A 多么大，总存在整数 N 使得 $|a_n| > A$ 对每一个 $n > N$ 都成立。

§3.7　名词性从句与 It 的用法

本节主要介绍名词性从句，因为有的名词性从句常采用 it 作为形式成分(主语或宾语)，所以我们也简要地介绍 it 的用法。

§3.7.1　名词性从句

一、名词性从句的基本特征

名词性从句指的是在句子中起名词作用的从句，即主语从句、宾语从句(包括介词宾语从句)、表语从句和同位语从句。名词性从句由关系词引导并通过关系词与主句进行联系。

这里的关系词有三类：从属连词、连接代词和连接副词。它们的功能和译法如下：

1) 从属连词在从句中不作语法成分。其中，

that：本身无词义，只起语法作用。

whether：可译为“是否”(**注**：whether 引导让步状语从句时常表示“无论”)。

if：可译为“是否”(**注**：if 引导的状语从句时意思为“如果”)。

2) 连接代词具有词义，并且在从句中充当句子成分。其中，

what：意思是“什么”，“……的(内容)”；which：意思是“哪个”，“哪些”。

who/whom：意思是“谁”；whose：意思是“谁的”(这两种情形在数学英语中少用)。

3) 连接副词具有词义，在从句中一般作状语。其中，

how：意思是“如何”(以什么样的方式或据何种原理)。

why：意思是“为什么”(有什么理由(或原因))。

where：意思是“在哪里”(在什么地方)。

when：意思是“何时”(在什么时间)。

二、主语从句的句型与基本译法

在普通句型中，主语从句置于谓语动词之前，这时谓语动词必为单数第三人称形式。

例 1　How this kind of equations is solved is the central task of the subject.

【如何求解这类方程是课题的中心任务。】

但是，上述句型并不太常用，更常用的句型是用 it(无词义)作形式主语，把真正的主语或主语从句放在动词后面(动词不定式作主语时也有相似的情况)。这样做可以使句子结构清楚、明了，避免“头重脚轻”，也便于中心内容的叙述。若按照谓语结构的差异进行分类，这种句型有以下四种常见形式，其中第一种出现最频繁。

(1) It ＋系动词＋表语(形容词/名词/个别介词短语)＋主语从句

其中，表语以“形容词”为最常见，而“个别介词短语”主要指 of 引导的短语，其作用等效于一个形容词(见例 4)。

例 2 It is clear that the sum, the difference, and the product of two polynomials are polynomials.

【显然，两个多项式之和、差、积仍为多项式。】

例 3 It is not difficult to see why it would be useful to know that a given differential equation either has a solution or fails to have a solution.

【不难看到，为什么了解一个给定的微分方程是否有解是很有用的。】

例 4 It is of interest that every function can be approximated by simple functions.

【有趣的是，每个函数均可用一些简单函数来近似表达。】

其中 of interest ＝interesting。

其他常用的例子如：

It is necessary/essential/imperative that… 必须……，有必要……

It is important that… 重要的是……

It is possible that… 能够……，……是可能的

It is impossible that… 不能够……，……是不可能的

It is likely that… 很可能……

It is evident/obvious/apparent that… 显然……，很清楚……

(2) It ＋被动语态(be/get 等＋过去分词)＋主语从句

例 5 It can also be shown that if we have the strict inequality $g(x)<f(x)$ for all x in $[a, b]$, then the same strict inequality holds for the integrals.

【还可以证明，如果对于每个 $x\in[a,b]$有严格不等式 $g(x)<f(x)$成立，则对于积分也有严格不等式成立。】

类似的常用的例子如：

It is known that… 我们(大家)知道……

It is well known that… 众所周知……，大家知道……

It is said that… 人们说……，据说……

It is reported that…　据报道……

It is believed that…　据信……

It can be seen that…　可以看出……

It has been shown that…　已经表明……

It has been found that…　人们已发现……

It must be remembered that…　必须记住……

It must be pointed out that…　必须指出……

It should be noted that…　应当注意……

(3) It ＋不及物动词(如 follow/happen/appear/seem/matter/occur)＋主语从句

例 6　It may happen that numerator and denominator have a common factor.

【可能会发生这样的情况:分子和分母具有一个公因子。】

例 7　From the discussion above it follows that $(x+3)$is the highest common factor of $f(x)$and $g(x)$.

【由上面讨论知道,$(x+3)$是 $f(x)$和 $g(x)$的最大公因式。】

(4) It ＋(个别)及物动词＋宾语＋主语从句

例 8　It makes no difference which integral variable is chosen in the definite integral.

【在定积分中,选择哪个积分变量都没区别。】

三、其他名词性从句简介

宾语从句一般紧跟在及物动词或及物动词短语后面,与公共英语的用法没什么不同,这里不作介绍(译法的例子可见 § 3.11.2 的例 10)。同位语从句将在 § 3.8 介绍。下面仅举例说明表语从句和介词宾语从句。

(1) 表语从句总是放在主句的系动词后面,较容易辨认,它通常译成后置的表语。

例 9　The importance of this theorem is that it shows that any analytic function can be expanded into a power series.

【这个定理的重要性在于它证明了任一解析函数都可以展开成幂级数。】

句中第一个"that"引导表语从句(译文相当于把 is 译成"在于"),第二个"that"引导表语从句中的宾语从句。

例 10　The most important property of the continuous function f on a closed interval $[a, b]$ is that f takes every value between the values $f(a)$ and $f(b)$ when they are not equal.

句中 that 引导的是表语从句，整句较长，汉译时应在主句与从句之间加上冒号。

【闭区间[a, b]上的连续函数 f 的最重要性质是：当 $f(a)$ 与 $f(b)$ 不相等时，f 可以取到这两个值之间的每一个值。】

(2) 介词宾语从句是由连词引导并位于介词后的名词性语句，一般也可根据介词和连接词的特征把它辨认出来。

例 11 The definitions of the left-limit and right-limit of a function $f(x)$ at a point $x_0 \in (a, b)$ are not different in their fundamental property **except** that the sign of $\Delta x = x - x_0$ is negative on the procedure where left-limit is considered and that is positive for the right-limit.

【函数 $f(x)$ 在点 $x_0 \in (a, b)$ 的左、右极限的定义在本质上没什么差别，只是在考虑左极限的过程中 $\Delta x = x - x_0$ 取负值，而在考虑右极限时 Δx 取正值。】

句中 that 引导的宾语从句作介词宾语时只适用于介词 except 和 in。

例 12 The integral of any continuous function on a finite interval always exists, **regardless of** whether we can find out its primitive function.

【有限区间上的任何连续函数的积分总是存在的，不管我们能否求出它的原函数。】

"whether we can find out its primitive function"为"regardless of"的介词宾语从句。

§3.7.2 It 的用法

it 是常用多功能词之一，在数学英语中使用得比较频繁，读者有必要进一步了解。

1. It 充当无人称句的主语

英语的无人称句的表达形式与汉语完全不同，它要用 it 当主语，表示天气、时间、距离等，但不必译出。

例 1 It is about two kilometers from our school to the library.

【从我们的学校到图书馆大约 2 千米。】

这里 it is 表示句型，不用译出。

在数学英语中很少出现无人称句，这里列出，只是为了与形式主语作比较。

2. It 充当形式主语和形式宾语

在 it 充当形式主语的句型中，真正的主语通常是动词不定式或主语从句，

有时也可用动名词(见§3.2例10)。由于这种句型也是动词不定式和主语从句的重要形式,在数学专业英语中出现得很频繁,所以我们已经把它们的基本语法及常用句型的译法分别放在§3.3和§3.7.1介绍。有需要了解的读者请参阅该处。

下面进一步介绍it充当形式宾语的情形。

像find,make等一类可以带双宾语的动词,当第一个宾语太长时,可以用it作形式宾语放在第二个宾语之前,然后在第二宾语之后给出真正的第一宾语。it作形式宾语时没有词义,不必译出。

例2　The development of electronic computers made it possible to calculate the integral values of many functions according the specified accurate degree.

【电子计算机的发展使得有可能按照指定的精确度计算出许多函数的积分值。】

本句it作形式宾语放在第二个宾语possible之前,真正的宾语是后面的不定式短语。

例3　We find it easier using the differentiation method to find the maximum or minimum values for this kind of functions.

【我们认为,用微分法去求这类函数的最大值或最小值更容易。】

本句it作形式宾语放在第二个宾语easier之前,真正的宾语是后面的动名词短语。

在形式宾语的句中,真正的宾语也可以是宾语从句。

3. It引导强调句型

这种句型是英语常用的强调句型之一[注4],具体形式是

It is (或 was)＋被强调的成分(事物)＋ that(或 which)…

It is (或 was)＋被强调的成分(人)＋ who(或 whom)…

译作"正是……才……",它可以强调句子的主语、宾语或状语(强调状语时要用that)。

例4　It is **this type of correspondence between the geometry and the algebra** that gives rise to remarkable geometrical applications of complex numbers.

【正是几何与代数之间的这种对应,才产生了复数在几何方面的重大应用。】

本句this type of correspondence between the geometry and the algebra是句子要强调的成分,本句强调的是主语。

注4:另一种常用的强调句型是倒装,参见§3.12。

例 5 It is **the set theory** that mathematicians use to establish modern probability theory.

【数学家们正是利用集合论来建立现代概率论的。】

本句强调 the set theory，that 在从句中当宾语，所以，本句强调的是宾语。

注：当被强调的对象是名词或名词性词组时，可以按如下办法判断这类句子强调的是主语或宾语：把 that 引导的句子看成定语从句，若 that 在其中充当主语，则强调主语；若 that 在其中充当宾语，则强调宾语。

例 6 It was **in 1900** that D. Hilbert, the greatest mathematician in our times offered the famous 23 mathematical problems.

【就在 1900 年，当代最伟大的数学家 D. Hilbert 提出了著名的 23 个数学问题。】

本句强调 in 1900，强调的是状语。

这个例子适当改写一下，就可以强调主语或宾语。

例 6' It was **D. Hilbert, the greatest mathematician in our times** who offered the famous 23 mathematical problems in 1900.

【正是当代最伟大的数学家 D. Hilbert 在 1900 年提出了著名的 23 个数学问题。】

本句强调 D. Hilbert, the greatest mathematician in our times，强调的是主语。

4. It 作为人称代词

it 作为人称代词的现象在语法上较简单，所以下面仅简单介绍其译法。

(1) 人称代词 it 可以代替前文提及的事物，常译作“它”。

例 7 A variable is very different from any constant, it may change its values continually.

【变量不同于任何常量，它可以不断地改变其值。】

(2) it 有时要译成它所代替的名词(常见于后置的原因状语从句中的 it)。

例 8 The straight line does not have a definite slope since it is parallel to the y-axis.

【因为该直线平行于 y 轴，所以它没有确定的斜率。】

在本例中，后置的原因状语从句含有人称代词 it，而 it 所代替的名词 straight line 在主句，由于汉译时需要把该状语前置，所以把 it 改译成“直线”，而原来 straight line 反而译成“它”。在一般情况下，it 所代替的名词未必要译成“它”，而是据需要而定。

(3) it 代替前文的事物或前文的句子时，有时要译成“这”、“这一点”等。

例 9 What does an imaginary number mean? Historically, it had puzzled the mathematicians for a long time.

【虚数的含义是什么？这个问题在历史上很长的一段时期内一直困扰着数学家们。】

这里的 it 代表前文整句的意思，根据实情，这里翻译成“这个问题”。

注：关于人称代词的上述译法，在一定程度上也适用于物主代词 its, their 等。

练 习 3.7

1. 用名词性从句，把下列句子译成汉语，注意其中名词从句或 it 句型的译法：

(1) This is a good place to explain what it means to solve a differential equation, to explain the distinction between specific and general solutions and to describe and illustrate initial-value problems.

(2) From any two objects x and y we can form the sequence (x, y); it is called an ordered pair, and of course is different from (y, x), unless $x=y$.

(3) The last example makes it clear that the notion of bijection is too restrictive to account for such simple functions as x^2.

(4) Further we note that if we had written mappings on the left, (2) would read: $(fg)x = g(fx)$. It is to avoid this reversal of factors that we put mappings on the right of their arguments.

(5) On the other hand, it takes a little time to familiarize oneself with the abstract notions; here the (more or less concrete) model on which the axiomatic system was based will help, although it is not strictly necessary and certainly no part of the theory.

(6) It can happen that an examination of the characteristic values of a matrix will not reveal whether or not a basis of characteristic vectors can be found.

2. 用名词性从句或 it 语句，把下列句子译成英语：

(1) 由分配律推出 $x\cdot 0=0$ 对所有 x 成立。(提示：用 It follows from… 句型。)

(2) 正是由于无限集在数学中的存在才需要有更为精细的分析(学)。

(3) 重要的是要把集$\{x\}$和事物 x 区分开来(x 本身也可以是一个集)。

(4) 这证明了当 A 和 B 都是“真”时，$A \wedge B$ 也是“真”；而在其他情况下 $A \wedge B$是“假”。

§3.8 同位语与插入语

§3.8.1 同位语与同位语从句

一、同位语

同位语是对某一名词作出附加说明的句子成分。它通常位于被说明的名词之后，与该名词一起表达同一事物或同一个人，且在句中的语法作用相同或类似(这是它与定语之间的最大区别)。在数学英语中，同位语主要由名词(包括算式)、名词性短语、代词和同位语从句充当，也可以是多个并列的同类词语一起当同位语(见下面例 2)，有时也用形容词和不定式短语充当同位语。类似于定语从句，同位语也分为限制性同位语与非限制性同位语；非限制性同位语与其说明的名词的关系较不密切，它们之间通常用逗号隔开。

名词和代词作为同位语时，可以直接跟在被说明的名词之后，或在它与被说明的名词之间加上破折号、冒号、逗号或引出词语，具体形式如下图所示：

被说明的名词
- (直接)＋同位语(如例 1)
- ＋破折号＋同位语(如例 4)
- ＋冒　号＋同位语(如例 2)
- ＋逗　号＋同位语(如例 3)
- ＋引出同位语的词或短语＋同位语(如例 6)

(1) 以上前三种情形，常可以采用与原文同样的形式译成汉语。如

例 1 The functions $f(x)$ and $g(x)$ have a common factor $(x-3)$.

【函数 $f(x)$和 $g(x)$有一个公因式$(x-3)$。】

在原文中，$(x-3)$是紧跟 factor 的同位语，译成紧跟“因式”后面的同位语。同样，$f(x)$ and $g(x)$也是 the functions 的同位语，汉译时也保持原来的同位语关系。

例 2 We shall be interested primarily in sets of mathematical objects: sets of numbers, sets of curves, sets of geometric figures, and so on.

【我们主要感兴趣的是数学对象构成的集合：如数集、曲线族、几何图形集等。】

原文冒号之后的部分作 sets 的同位语，译成中文时仍接在冒号之后，可以适当加上“如”等。

(2) 与被说明的名词之间用逗号隔开的同位语，多属于非限制性同位语，

译法比较多样。

例 3 Arithmetic, the science of numbers, is the base of mathematics.

【算术是一门关于数的科学,它是数学的基础。】

同位语 the science of numbers 说明 arithmetic,译文全句分成两个并列的分句,在第一句中,被说明的中心词译成主语,同位语译成谓语。

例 4 Now let us learn the other algebraic method of solution —— that of addition and subtraction.

【现在让我们来学习另一种代数解法 —— 加减法。】

这句 that 是代词,代替 method,它引导的同位语补充说明 method,由于同位语部分用词简练,所作的补充说明直截了当,因此原文用破折号,译文也采用破折号连接。

例 5 The derivative $x'(t)$ of this function is the velocity of the particle, a quantity usually denoted by v.

【这个函数的导数 $x'(t)$ 就是该质点的速度,这个量通常用 v 表示。】

同位语 a quantity usually denoted by v 说明 velocity;其中 denoted by v 是过去分词短语作后置定语修饰 quantity。在这里把同位语短语译成了一个并列的分句。

(3) 同位语放在引出的词或短语后的情形,常可以采用与原文同样的形式译成汉语。

英语中引出同位语的词或短语的是 namely, i.e., that is 等。

例 6 If x_0 is a zero point of $f(x)$, i.e. $f(x_0)=0$, then x_0 is a root of the equation $f(x)=0$.

【若 x_0 是 $f(x)$ 的零点,即 $f(x_0)=0$,那么 x_0 是方程 $f(x)=0$ 的一个根。】

这里只要把 i.e. 译成“即”就可以了。

二、同位语从句

当同位语由句子充当时,称为同位语从句。它常用来补充说明抽象名词的含义,少数同位语从句在逻辑概念上是它说明的那个名词的“宾语从句”,也就是说,当那个名词具有及物动词的含义时,则同位语的作用类似于宾语从句(见下面(3)及例 9)。

在数学英语中,同位语从句中所说明的抽象名词常见的有:fact, statement, requirement, idea,除此外还有 suggestion, assurance, doubt, advantage, evidence 等。同位语从句一般用 that 作为引导词。这时 that 称为从属连词,在从句中不作句子成分,本身无词义。

依照同位语从句与被修饰词的关系，常分为三种译法：

(1) **分开翻译**：对纯属说明抽象名词的具体内容的同位语从句，翻译时，可在抽象名词后加冒号或破折号，再接同位语从句的内容；冒号或破折号也可以换成“即”或“也就是”等连词。

例 7 This equation has the **advantage** that the proportionality constant is equal to 1.

【这个等式的优点是：比例常数等于 1。】

或

【这个等式有个优点，即比例常数等于 1。】

(2) **译成定语**：当同位语从句对被修饰的抽象名词有明显的修饰作用时，可译成定语，必要时在前面加上“这一”、“那个”、“一种”等词。

例 8 An equation is an algebraic **statement** that two algebraic expressions are equal.

【方程式就是“两个代数式相等”的一种代数陈述。】

例 9 In this case, the **condition** that the function must exist is not satisfied.

【在这种情况下，函数必须存在这一条件并没有满足。】

(3) **译成动宾关系**：若同位语从句说明的抽象名词含有动作的意义，一般可将该名词译成动词，把同位语从句译成它的宾语从句。

例 10 The **assumptions** that $p^2 = 2$ holds leads to the **conclusion** that both m and n are even.

【假设 $p^2 = 2$ 成立，则可导致这样的结论：m 和 n 均为偶数。】

抽象名词 assumptions 含有动作的意义，所以把第一个同位语从句译成宾语，其中表达式 $p^2 = 2$ 相当于一个名词，在从句中作主语；第二个同位语从句 that both m and n are even 说明 conclusion 的内容。

三、关于同位语从句的进一步讨论

(1) 在 there be 的句型中，that 引导的同位语从句常以如下三种形式出现：

Ⅰ. There is evidence that…译成：“有证据表明……”。

有时 evidence 作为宾语出现于…have/has evidence that…，译法同上。

Ⅱ. There is no doubt that…译成：“毫无疑问……”。

Ⅲ. There is every possibility that…译成：“完全有可能。完全能够……”。

(2) 同位语从句有时还可由“破折号 + that”或由冒号引出(不出现 that)。如，

Finding the solution of systems of equations by graphical methods has one

difficulty: the results are usually approximate.

【用图解法求方程组的解会遇到一个困难:其结果通常是近似的。】

(3) 同位语从句有时用来说明一个句子。

例 11　The system of equations $\begin{cases}2x-y=1,\\4x-2y=5\end{cases}$ has no solution —— that the lines $2x-y=1$ and $4x-2y=5$ do not intersect on the coordinate plane.

【方程组$\begin{cases}2x-y=1,\\4x-2y=5\end{cases}$无解,即直线 $2x-y=1$ 与 $4x-2y=5$ 在坐标平面上不相交。】

本句 that 引导的同位语从句说明前面一句话。

§3.8.2　插入语

插入语是句子的一种独立成分,它与句子的其他部分没有任何语法关系,只起某种附加说明,或承上启下的作用,也常用来表示作者的态度和看法等。插入语可位于句首、句中或句尾;译成汉语时一般要放在句子的主语或谓语前。

1. 数学英语中常见的插入语的组成

1) 某些副词:however, therefore, thus, though, then 等等。

2) 某些固定的介词短语:in fact, for example, for instance, of course 等等。

3) 少数固定词组:generally speaking, roughly speaking(大致说来),to begin with, to be exact(exactly)等等。

4) 个别形容词(一般位于句首):true, more important 等。

5) 个别动词及一些具有主谓结构的短语(也称"插入句"):say(比如说)= let us say, remember, we think, we hope, he notices, you will remember, they claim, it will be found, it will be noticed 等等。

2. 插入语的译法简介

(1) 许多插入语可以按原来的语序译出,标点也类似。

例 1　A Boole variable, say A, can take on only two values.

【任何一个布尔变量,譬如说 A,只能取两个数值。】

例 2　Moreover, as the space concept is incorporated in this modern definition, its generality contributes much to the generality of the function concept.

【此外,由于现在的这个定义中体现了空间概念,所以,它的普遍性对函数概

念的推广有很大贡献。】

例 3 The six trigonometric functions of any acute angle in a right triangle, as A, are denoted as follows.

【在一直角三角形中,任一锐角,例如 A,其六个三角函数表示如下。】

(2) 有些插入语翻译时可提到句首或从句的开头。

例 4 This, it will be noticed, is a real function due to the fact that the time function is an even one.

【我们将注意到,由于时间函数是个偶函数,所以这是一个实函数。】

例 5 In effect, then, the vertical line in (1)is read "such that".

【那么,(1)中的竖线在实际上就被读作"such that"。】

例 6 Determining the indefinite integral is called integration, which we can see is essentially the same as finding an antiderivative.

【求不定积分就称为求积,我们会看到,这本质上与求反导数是相同的。】

这个插入句出现在 which 引导的非限制性定语从句中,翻译时把插入语放在从句的开头。

例 7 The mapping concept is close to intuition, and therefore desirable to serve as a basis of the function concept.

【这种映射概念接近于直观,因此很适合作为函数概念的一个基础。】

(3) 有时插入语的翻译要根据需要作适当处理。

例 8 On the basis of these two examples, one may be tempted to believe that any arbitrarily drawn curve, which of course determines a set of points or ordered pairs, could be described succinctly by a simple equation.

【根据这两个例子,人们也许会试图相信,任意一条随意画出的曲线(它当然就决定了一个点集或有序对的集),都能用一个简单的方程来简洁地描述。】

插入语 of course 的前后都没有逗号,译后作为状语放在从句的动词之前。因为原来句子的结构太松散,所以把这个从句的译文放在括号中。

例 9 Geometrically, these three cases, respectively, arise according as the smallest angle θ between the plane Π and the line PQ is $<$, $=$, $>\alpha$.

【在几何上,这三种情形的出现分别取决于平面 Π 与直线 PQ 的最小夹角 θ 是小于、等于还是大于 α 这三种前提。】

插入语 respectively 前后都有逗号,这里译成句子的状语。

练 习 3.8

1. 把下列句子译成英文,注意同位语、同位语从句和插入语的译法:

(1) For example, if f is a linear function, say $f(x)=mx+b$, then the difference quotient (8.4)has the value m, so m is the slope of the line.

(2) Thus in $81=3^4$, the given number is 81, the base is 3, and the logarithm is 4; that is, $\log_3 81=4$.

(3) This terminology originated in mechanics where, as in the above example, the prescribed value represents the displacement at some initial time.

(4) Unless otherwise specified, all sequences in this chapter are assumed to have real or complex terms.

(5) Ordinarily we do not talk about area by itself, instead, we talk about the area of something.

(6) We might, for instance, consider that the sentence "In a year from now I shall be in Paris" is neither true nor false and has a third, undetermined value, which can be symbolized as "1/2".

2. 用同位语、同位语从句或插入语,把下列句子译成英文:

(1) 没有无穷极限的发散序列当然是存在的。

(2) 实际上,如果这个结论不成立,那么就可推出 n 是奇数,这与原来的假设矛盾。

(3) 要使该定理成立,函数 $f(x)$ 是连续的这一条件只是充分的而不是必要的。

(4) 分形几何这门新数学分支在科学和技术的多个领域得到广泛的应用。

§3.9 被动语态

一、英语被动语态概述

英语中被动语态(简称被动态)的用法和译法是初学者应该关注的重点之一。科技英语(包括数学英语)主要用以叙述事实和阐明原理,往往不需说出动作的发出者,或者对受动者比主动者更关心;此外,科技英语为了体现所述事理的客观性,尽量避免使用第一人称。因此被动语态在科技英语中得到广泛的应用,成为科技英语的主要特点之一。汉语则是经常使用主动句,很少使用被动句,因此初学者要多花工夫熟悉英文的被动语态;同时,在汉译时要按汉语的习惯,必要时把英语的被动句正确地译成汉语的主动句。

英语被动语态的句型(简称被动式)是:

主语+be 的各种时态形式+实义动词的过去分词(+by 短语)。

应注意的是,(1) 只有及物动词或相当于及物动词的短语动词作句子的谓

语时，才有可能构成被动语态；(2) 其中 be 为助动词，无任何词义；被动式的时态完全用 be 的时态来体现，如 They are used 和 It has been used 分别表示一般现在时和现在完成时；(3) 句型中的 by 短语，即“by +动作发出者”，往往不出现在句中。

被动式虽然有各种时态，但在数学英语中叙述数学内容时通常采用一般现在时，有时也用到现在完成时和与情态动词联用的被动语态(如 it can be used 等)。但在介绍数学历史和数学实际问题的应用时，则可根据实际需要采用各种时态。

二、英语被动语句的翻译

英语被动句汉译时通常按如下四种形式译出。

1. 译成汉语的主动句

英语被动句译成主动句时，常见的有下几种情形。

(1) 英文句子的主语仍然译成主语。

当原文的主语为无性命的名词且不出现“by+动作发出者”时，可以采用这方法：句中的主要成分可按照原文的语序译出，且常不必译出“被”字。

例 1 Since the existence of the solution to the differential equation has been proved, it remains to prove the uniqueness.

【因为该微分方程的解的存在性已经证明，只要再证唯一性即可。】

(2) 把原文的主语译成宾语，而把行为主体或相当于行为主体的介词宾语译成主语。

例 2 A knowledge of statistics is required by every type of scientists for the analysis of data.

【想要分析数据的各类科学家都需要具有统计学知识。】

本句把 by 之后的行为主体译成了主语。

例 3 Recently, The International Congress of Mathematicians 2010 was held in India.

【最近，印度举办了 2010 年国际数学家大会。】

本句介词宾语 India 译成了主语。

注：如下带有双宾语动词的英文被动式句型也可采用本法译出(见例 4)：

主语 + 被动语态谓语 + by 短语 + 保留宾语 +(其他成分)。

例 4 You are told by this formula that energy is proportional to mass.

【这个公式告诉你，能量是与质量成正比的。】

句中 that 引导的从句是保留宾语，译成宾语。

(3) 增译适当的主语，如“我们”、“人们”、“大家”等。

例 5 The Riemann surjection has not been proved.

【人们至今尚未证得 Riemann 猜想。】

译文增补“人们”作主语。

例 6 It is well known that any equation $f(x)=0$ of degree n with real coefficients has n-complex roots.

【大家知道，任何 n 阶实系数方程都有 n 个复根。】

原文的主句是 it 作形式主语的被动句型，译成一个主句（增补“大家”作主语），而把原来的主语从句译成宾语。

2. 译成汉语的无人称句

如果英语被动句中未体现动作的发出者，而谓语部分含有情态动词或类似意义的动词（如 need 等），特别当句中的内容有提醒注意的含义时，常可译成汉语的无人称句。如：

例 7 What additional conditions are needed to make the solutions of the kind of equations unique?

【需要附加什么条件可使该类方程的解是唯一的?】

例 8 Account should be taken of the relationship between the variables and parameters.

【应该考虑到变量与参数之间的关系。】

动词短语 take of 的被动语态在原文句中作谓语，可译成无人称句；关于其他动词短语的被动语态，可参见下面的例 14、15。

3. 译成汉语的判断句

强调过程或状态等的被动句可译成“……是……的”句型。一些倒装的被动句也可以采用这种办法译出。

例 9 The area is measured in square centimeter, but not in centimeter.

【面积是以平方厘米计量的，而不是以厘米计量的。】

本句把分词 measured 译成形容词。

例 10 How are these values of the polynomials computed?

【多项式的这些值是如何计算出来的?】

问句在英语中采用倒装句，可用此法译出。

4. 译成汉语的被动句

英语侧重于强调被动的动作的被动句，汉译时常不宜采用上述三种方式，应译成汉语的被动句，但是未必都要用“被”字来表达，而可用多种形式，如采用“由”、“给”、“加以”、“为……所”、“使”、“把”、“让”等含有被动意思的词语来表达。

例 11 Matrix method is used widely in various fields of science and technology.

【矩阵被广泛地应用于科学技术的各个领域。】

例 12 The definitions of the trigonometric functions were given in Section 3.2.

【三角函数的定义已在 3.2 节中给出。】

三、动词短语的被动句句型

这里的动词短语指的是由"动词＋介词"这种配搭形式得到的成语，当它们可以看做一个及物动词时，也可以构成被动语态；这样构成的被动式语句的翻译仍可参照上段介绍的方法来进行。

1. "不及物动词＋介词"(相当于及物动词)的被动式

主语 ＋ be 的时态 ＋ 过去分词 ＋ 介词(＋ 其他成分)。

例 13 The topic will be dealt with in the next chapter.

【这个内容将在下一章论述。】

本句采用前面介绍的译法(1)，将原文的主语译成主语，且把 be dealt with 意译成"论述"。

2. "及物动词＋名词＋介词"(相当于及物动词)的被动句型

在数学专业英语中，最常见的是 make use of (应用，使用)的被动式，其次是 pay attention to(注意)的被动式。它们通常以如下形式出现：

主语(由动词短语中的名词充当)＋ be 的时态 ＋ 过去分词 ＋ 介词短语(＋ 其他成分)。

特别地，make use of 短语的被动形式是 be made use of 的形式；应注意与由 be made of("由……制成")表示的另一句型的区别。

例 14 Full use must be made of the computers available.

【我们必须充分利用现有的计算机。】

这句"我们"也可省略，变成无人称句。

例 15 Attention must be paid to that the function is defined only on the domain where the corresponding series is convergent.

【必须注意，该函数只在其对应级数的收敛区域有定义。】

这类提醒注意的句子常译成无人称句；本句还把原文的介词宾语从句译成了宾语。

练 习 3.9

1. 把下列句子译成汉语，并注意其中被动语态的翻译方法：

(1) There are many ways in which the xy-plane could be transformed.

(2) The points A and B are represented by the complex numbers $-1+i$ and $4-3i$ in the Argand diagram respectively.

(3) The vector equation of the given straight line is given by $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$, where t is a scalar parameter.

(4) The signs may be determined by setting up a chessboard pattern with positive signs separated by negative signs and with positive signs along the principal diagonal.

(5) We have seen how determinant is used to represent the vectors product of two vectors.

(6) when a coin is tossed twice, the outcome of the second toss is not affected by the outcome of the first toss.

2. 用被动语态,把下列句子译成英文:

(1) 体积是以立方米计量的,而不是以米或平方米计量的。

(2) 代数方法已经广泛地应用于纯粹数学与应用数学的各个分支。

(3) 这个实际问题的数学模型已经建立起来了,只要再检验它的有效性即可。

(4) 由于信息科学的迅速发展和电子计算机的广泛应用,所有大学生都需要学习高等数学和计算机知识。

§3.10　数量比较与倍数增减

数学英语中,特别当涉及数学应用时,大量地出现表示数量比较、倍数增减的词语。因为英语的一些表示法与汉语有较大差别,我们在阅读和翻译时要特别认真地加以区别。

一、表示数量及其比较的方法

1. 表示数量达到某个数值

表示达到某个数值时,根据考虑的量的不同而选择不同的形容词或副词。常见的结构为:

(1) as +形容词+as+数词+……;

(2) 动词+ as +副词+数词+……。

当其中的形容词为 large,many,high,heavy 时,分别译成:"大到……"、"多到……"、"高到……"、"重到……"。换成其他形容词和副词时,它们的译法类似。

例 1 The temperature in the room is as high as 35 ℃.

【室内温度高达 35 ℃。】

句中 as high as 35 ℃当表语。

例 2 The artificial earth satellite travels as fast 7 900 km per hour.

【人造地球卫星的运行速度高达每小时 7 900 千米。】

句中 travels as fast 7 900 km per hour 当状语。

2. 用 To 表示达到某值,By 表示数量差额

(1)“表示数量变化的动词 + to(介词)+ 数量值”的结构可表示数量变化后达到的值。

例 3 His debt amounted to 5 000 dollars.

【他的负债额已经达到 5 000 美元。】

介词 to 后面的数值可以是倍数、分数和百分数,这时表示变化后达到的倍数、分数和百分数。

(2)“表示数量变化的动词+ by(介词)+ 差额”表示发生变化的数量差额。

例 4 He is taller than me by three centimeter.

【他比我高三厘米。】

这句可改成:“He is three centimeter taller than me.”

例 5 After some exercises, she lost weight by 1.5 kg in one month.

【她锻炼一个月后,瘦了 1.5 公斤。】

注:这里所说的差额也可以是分数和百分数,但不是指倍数,参见下面例 10。

二、表示倍数及其比较的方法

1.“数、倍数、百分数+名词”结构

这种结构的具体形式为:

分数/倍数/百分数 + the(或物主代词)+名词,

其中“the (或物主代词)+名词”可以换成“that + of 短语”或“what 从句”。这种结构可看成是在第一个“+”号的前后两部分之间省去了 as large/great/…/as(参见下面例 6)。

例 6 The mass of the moon is 1/80 that of the earth.

【月球的质量是地球的 1/80。】

原句可以改写为“The mass of the moon is as large as 1/80 that of the earth.”。

2. A 是 B 的 *n* 倍的一般表示法

表示一个量 A 的大小(长度、重量……)是另一个量 B 的 *n* 倍(*n* 是大于 1 的

整数，以下同此），即 A 比 B 多 $n-1$ 倍时，可以采用以下三种结构：

(1) A is n times as large as B;

(2) A is n times larger than B;

(3) A is larger than B by n times,

上述 large 可以根据需要改换成其他形容词，如 many，long，high，fast 等。

特别应该注意的是，对于结构(2)和(3)采用比较级的表达形式，不要误以为是“A 比 B 多 n 倍”。有人总结这样两句话“英译汉减一倍；汉译英加一倍。”可供参考。重要的是要分清情况，不要混淆。其实，记住一两个例子倒是一个好办法。

例 7　A kilometer is one thousand times longer than a meter.

【一公里等于一千米。】(或直译成：一公里的长度是一米的一千倍。)

例 8　The mass of the earth is larger than that of moon by about 80 times.

【地球的质量大约比月亮大 79 倍。】

注：汉译时系词 is 可以不译。

3. 用 As…as 及 Again 表示 A 是 B 的两倍或一倍半

这类词组的结构为：

(1) A ＋ 动词＋ as many(＋S＋)again as B

或

A ＋动词＋again as much(＋S＋)as B,

表示“A(的某物)是 B 的两倍”或“A(的某物)比 B 多一倍”。

(2) A ＋ 动词 ＋ half as many(＋S＋)again as B

或

A ＋ 动词 ＋ half again as much(＋S＋)as B,

表示“A(的某物)是 B 的一倍半”或“A(的某物)比 B 多半倍”。

注：上述 S 表示比较的内容，即某物(见例 9)；如果比较的内容已经包含在 A 中，则(＋S＋)不再出现(见例 10)。当内容 S 是可数名词时，采用 many；当 S 不可数时，改用 much。many 可以根据需要改换成其他形容词，如 large，long，high，fast 等。

例 9　This year the school has as many new students again as compared with last year.

【今年，这个学校的新生比去年多一倍。】

例 10　The length of line segment AB is half as large again as that of line segment CD.

【线段 AB 的长度比线段 CD 大二分之一。】

4. 表示 A 比 B 少一半的方法

本来,"A 比 B 少一半"或"A 比 B 少二分之一",即"A 是 B 的一半",可以直接表示成 A is half B,但是英语中还有如下两种结构可用来表示这个意思:

(1) A + 动词 + half many(+S+)as + B(+动词),

其中 many 可以改换成其他形容词,如 long,high,fast 等。

(2) A + 动词 + twice less than + B。

例 11 Bus A takes half as much time as Bus B to arrive at the terminate stop.

【巴士 A 到达终点站的时间比巴士 B 少一半。】

例 12 The distance of points A and B is twice less than that of Points C and D.

【点 A 与 B 的距离比点 C 与 D 的距离少二分之一。】

三、表示倍数的增加与减少的一般方法

本段介绍表示倍数增加和减少的一般方法,特殊方法将在下面介绍。应注意这些表示法与中文有较大差别。

1. 表示增加到 n 倍即增加 $n-1$ 倍的方法

这种表示法的具体结构有五种:(1) increase n times;(2) increase to n times;(3) increase by n times;(4) increase by a factor of n;(5) increase n-fold。这里动词 increase 可以替换成它的同义词,如 exceed, set up 等表示"超过"、"升高"、"增加"等意义的动词。

它们的形式虽然不同,但都表示同一个意思,即乘以 n,也就是成为原来的 n 倍,或增加 $n-1$ 倍。

例 13 Consider the function $y=kx$, where k is a positive constant. If x is increased 5 times, then y is increased by $5k$ times.

【考虑函数 $y=kx$,其中 k 是正常数。如果 x 增加 4 倍,则 y 增加$5k-1$ 倍。】

例 14 If the radium of a sphere increases 3 times, then its volume will increase 27 times.

【如果球的半径增加到原来的 3 倍,则它的体积将增加到原来的 27 倍。】

例 15 The area of new garden exceeds that of the old one by a factor 4.5.

【新花园的面积超过旧花园面积三倍半。】

2. 表示倍数减少到原来的 n 分之一的方法

具体结构有七种:(1) reduce n times; (2) reduce to n times; (3) reduce by

n times; (4) reduce by a factor of n times; (5) reduce n times as much (many) as; (6) n-fold reduction; (7) n times less than。其中 reduce 可以替换成 decrease, shorten, cut down 等表示“减少”的同义词。

这七种结构都表示同一个意思，即减少到原来的 n 分之一或减少了 n 分之 $n-1$。注意，这里和上条的(3)、(4)用介词 by 分别接 n times 和 a factor of n，意义完全不同于一般情况，即不表示差额(试把例 13、15、16 与例 4、7 比较)。

例 16　The computing method introduced here will reduce the error probability by six times.

【这里介绍的计算方法的误差概率将降低六分之五。】

例 17　The main advantage of this project over the others is a five-fold reduction in expenditure.

【和其他设计比起来，这个设计的主要优点是费用减少了五分之四。】

四、表示倍数的特殊方法 —— Double 的用法

英语对 2、3、4 这几个简单且常用的数字经常有一些特别的表示方法。比如，二分之一和四分之一可以分别用 half 和 quarter 表示；twice 和 thrice 分别用于表示两次和三次。同样，在表示倍数时，也用 double, treble 和 quadruple 分别表示增加到两倍、三倍和四倍。由于 double 使用的频率很高，treble 和 quadruple 则少用，下面只简要介绍 double 的用法。

double 本身既是形容词、副词、名词，又是动词(可以及物，也可以是不及物)。表示一个量增加一倍时常用它的动词形式。

例 18　That ten is double five is the same as that ten is the double of five.

【“十是两倍的五”和“十是五的两倍”是同样的意思。】

第一个 double 是形容词“两倍的”；第二个 double 是名词“两倍”。

例 19　You must pay double.

【你要双倍付钱。】

这时 double 是副词“两倍地”。

例 20　If the traveling speed of the car is doubled, then the time will reduce by 2 times.

【如果小车运行的速度增加一倍，则运行时间就减少一半。】

这句 double 是及物动词，句子采用被动语态，表示速度一次性增加一倍。

例 21　The amount of the bacteria is doubling every 10 minute.

【细菌的总量每 10 分钟增加一倍。】

这句 double 是不及物动词，句子采用现在进行时，表示细菌逐渐增加到原来的两倍。

五、表示分数和百分数增减的方法

1. 用表示增减的动词表示分数和百分数的变化

以下两种结构表示的增减不直接涉及底数，翻译时只要照原来的数值译成中文即可。

(1) increase(或 decrease)+ to + a%表示“增加(减少)到 a%”；

(2) increase(或 decrease)+ by + a% 表示“增加(减少)了 a%”。

两者的区别仅在于介词 to(到)和 by(了)的不同。把 a%换成分数时情况一样。动词 increase 和 decrease 的替换参见第三种情形。

例 22 The selling price of this type of computers reduces to 80% of the marked price, i.e. the discount is 20%.

【这种类型的计算机的售价降低到标价的 80%，即折扣为 20%。】

例 23 This year the number of books in this library has increased by 15%.

【这个图书馆的藏书量今年增加了 15%。】

2. 用其他动词表示分数和百分数增减

英语中少数没有增减含义的动词出现在以下结构中用来表示增减后的结果，即含底数：

非表示增减的动词 + a% +名词(a%换成分数时的情形一样，亦见例 6)。

例 24 Mr. Zhang deposits a sum of money in a bank on first January this year and will get 112% the sum one year later.

【章先生今年元旦在一家银行存入一笔钱，一年后他将收到那笔钱的 112%(或：那笔钱将增加 12%)。】

练 习 3.10

1. 把下列句子译成汉语，并注意其中倍数增减的翻译方法：

(1) Suppose that 2 times x is subtracted from 200, and then the difference is increased by 20%. If the overall result is equal to decreasing x by 40%, find x.

(2) After a 10% discount, a pen was sold at $5.4. Find its selling price if the discount changes to 20 %.

(3) The weight of the old model of a mobile telephone is 132g. If the weight of the new model of the mobile telephone is decreased by 10%, what is the new weight of the telephone?

(4) A shopkeeper sold a calculator for $330 and the profit percent is

10%. What should be the selling price of the calculator if the shopkeeper wants to increase the profit to three times that of the original profit?

(5) Consider the function $y=\frac{k}{x}$, where k is a positive constant. If x is increased 3 times, then y is reduced by 3 times.

(6) The amount of cereal grain of this year in this province exceeds that of the last year by a factor 1.5.

2. 把下列句子译成英文,注意其中倍数和数量增减的表示方法:

(1) 火车的运行速度高达每小时 120 千米,比汽车每小时快 40 千米。

(2) 这种类型的手机的标价达到本钱的 1.5 倍,当售价是标价的 70%时,求盈利的百分比,即售价比本钱多百分之几?

(3) 如果在实验室中一群总量为 N 的细菌每 8 分钟增加 20%,则 20 分钟后就增加一半以上,30 分钟就能达到原来的两倍。

(4) 现有四个正数 A,B,C,D,其中 A 是 B 的两倍,C 是 B 的四分之三,而 D 是 B 与 C 之和的三分之二,求他们的连比(continued proportion)。

§3.11 常用多功能词

我们已经在§3.7.2 简要介绍了多功能词 it,本节再介绍 as 和 that 这两个常用的多功能词的用法与译法。

§3.11.1 多功能词 As

在数学英语中,as 出现较频繁。由于 as 词义很多,语法作用较复杂。面对一个含 as 短语的语句,初学者若不能断定 as 的词类和词义,必然增加理解上的困难。因此,了解数学英语中 as 常见的用法是很有必要的。

as 在数学英语中常起介词、从属连词、关系代词和副词的作用。以下分别介绍。

一、As 用作介词

as 作为介词可与名词、形容词、分词以及它们的短语等连用构成介词短语,常译成"作为"、"成"(见例 2、3、5),有时转译成"是"或不译出(见例 1 或例 4)。

as 引导的介词短语常与如下动词搭配:

不及物动词 serve, behave, act, function, be 等;

及物动词 define, express, classify, regard, consider, describe, know, think of, look on, represent, use 等。

as 引导的介词短语在句子中可以充当定语、表语、状语、宾语补足语和主语补足语等。

例 1 We consider the L'Hospital rule as a useful method for finding the limits of functions.

【我们认为洛必达法则是求函数极限的有效方法。】

本句 as 引导的介词短语与 consider 搭配，在句子中充当宾语补足语。

例 2 Geometry as an old mathematical branch treats the properties of graphs.

【几何作为一门古老的数学分支，研究的是图形的性质。】

本句 as 引导的短语当定语。

例 3 The earliest use of a computer was only as a counting tool.

【计算机最早的用途只是作为计数工具。】

本句 as a counting tool 当表语。

例 4 The conclusion is accepted as (being)true.

【这个结论被承认是正确的。】

本句 as 引导的短语当主语补足语。

例 5 As a tool, mathematics serves all sciences and techniques.

【作为工具，数学服务于所有的科学和技术。】

本句 as 引导的短语当状语。

二、As 用作从属连词

as 作为连接词时用来引导状语从句。它可以引导以下五种状语从句。

1. As 引导时间状语从句

这时 as 译成“当……时”或“随着”(修饰主句中表示变化的动词)。

例 6 The area under the curve in this interval approaches a limit, namely 1, as x became infinite.

【当 x 变成无穷大时，该曲线下面在这区间内的面积趋于一个极限值，即 1。】

“as”在此引导时间状语从句，其本身的词义是“当……时，随着”。

2. As 引导原因状语从句

这时 as 译成“由于”或“因为”。

例 7 The proofs of these are left to the reader as they follow simply from the properties of series and limits already outlined.

【这些内容的证明留给读者去做，因为这些证明由已概述的级数和极限的性质就可容易得出。】

as 在此作为从属连词引导原因状语从句，补充说明主句陈述的事情发生的原因，所以后置，译文也照样后置。

3. As 引导方式状语从句

这时 as 译成“如同”(这时在 as 前常可用表示程度的副词 just，exactly，much，somewhat 等来修饰它，有时主句中还用 so 作为呼应)。

例 8　Just as various mathematicians specialize in different fields, so are computers specialized for operation in various fields.

【正如各个数学家所专长的领域不同那样，各类计算机也分别专用于不同领域的计算。】

本句 as 引导方式状语从句，其中 as…so…为固定词组，意为“像……那样，……也就……”；为了加强语气，在从句中采用部分倒装。

注：在“not…as…”型的方式状语从句中，as 应译成“不像……那样”。如，

例 9　These functions are not limited in the values they take on, as are the sine and cosine functions.

【这些函数的取值不像正弦和余弦函数那样受限制。】

本句在从句中采用了倒装。

4. As 引导比较状语从句

在 as…as 搭配中，第一个 as 是副词，第二个 as 是连词，引导一个完整的或有部分成分省略的比较从句，后者常直译成“如……那样”，也可据实际情形转译成“是”。

例 10　The function $f(x)$ approaches zero three times as fast as x (approaches zero).

【函数 $f(x)$ 趋于零的速度是 x 的 3 倍。】

本句第二个 as 转译成“是”。

5. As 引导让步状语从句

这时 as 译成“虽然”。

例 11　Useful as the method of substitution in solution of systems of linear equations in two or three variables it is very difficult to solve a systems of equations in four or more variables.

【虽然代入法在解二、三元的线性方程组时是有用的，但是它很难用来解四元或更多元的方程组。】

本句 as 引导让步状语从句时，从句中作表语的形容词及不带冠词的名词等，一定要倒装，放置在 as 之前。

三、As 用作关系词

as 作为关系词时用来引导定语从句，主要作关系代词，有时也作关系副词，可译成“正如……这(那)样的”、“这样(种)的”、“像……之类的”等。

1. As 引导限制性定语从句

这时，as 往往与 such，the same 搭配使用。

例 12 Such number as is produced by the quotient of two integers with nonzero divisor is called rational number.

【这种由除数非零的两个整数的商产生的数称为有理数。】

关系代词 as 在主句中当主语。这里把 as 引导的限制性定语从句译成定语。这时 as 的作用类似于 which。

例 13 A vector multiplied by a positive scalar quantity is a vector in the same direction as the original vector.

【乘正的标量的向量是一个与原向量同向的向量。】

这句 as 是关系副词，其作用类似于 in which，引导一个修饰 direction 的限制性定语从句(其中省略了谓语动词)。

例 14 A more general problem consists in that of joining two fixed points in space by a curve such as will make the following integral a minimum (or a maximum).

【更为一般的问题是这样的情形，即由那种会使诸如下面的积分取到最小值(或最大值)的一条曲线把空间的两个固定点连接起来的情形。】

“consist in”为固定词组，意为“在于”，“是”；“that”在此为代词，代替“problem”，“as”在本句中与形容词“such”搭配，引导一个限制性定语从句，修饰“a curve”；“as”在从句中作主语；“a minimum(or a maximum)”在从句中作宾语补足语。

2. As 引导非限制性定语从句

这时，从句说明整个主句或其中的一部分；从句位置比较灵活，其中常省略一些成分。

例 15 This integral can be transformed by integration by parts, as was done in a similar case in Section 2.

【这个积分可以采用分部积分法加以变换，正如第 2 节中一个类似情况所做的那样。】

本句 as 引导的非限制性定语从句放在主句后面，修饰整个主句，as 在从句中作主语。

例 16 As described above, this kind of differential equations is much

more difficult than other ones.

【如上所述，这类微分方程比其他的微分方程困难得多。】

本句 as 引导非限制性定语从句说明整个主句，它放在句首；该从句主语是 as，动词 is 被省略。

四、As 组成各种固定词组

as 组成各种固定词组很多，在数学英语中常见的有：

as follows(如下)，as long as(只要)，as soon as(一旦)，as if / though (好像)；as for(至于)，as a result of (因此)，as to (关于，至于)，as well(也)，as well as(以及)，as a result(因此)，as usual(照例)，as a matter of fact(事实上)。

§3.11.2 多功能词 That

that 可以起代词、形容词、副词和连词的作用。

例 1 Up that time the imaginary numbers were still considered as the objects which did not exist in the realistic world.

【直到那时，虚数仍然被认为是现实世界中不存在的东西。】

在本句，that 作为指示形容词，用来修饰和限制名词 time。这种用法和汉语较接近，所以下面不再涉及这个方面，只介绍 that 在数学英语中用作指示代词、关系代词、关系副词和连词的情形。

一、That 用作指示代词

1. That 代表前面提及的名词或名词性词组

例 2 In the formula, the unit of length is the centimeter, that of mass is the gram and that of time is second.

这句中的两个 that 都用来代表前面提及的 unit，英语这种避免重复的做法与汉语的习惯不同，汉译时，that 要译成它所代表的名词。

【在这个公式中，长度的单位是厘米，质量的单位是克，而时间的单位是秒。】

这种形式在比较句中很常见。注意，that 的复数形式为 those，类似的例子当所代表的名词是复数时，就要采用 those。

例 3 The solutions of the new equation may be different from those of the original one.

【新方程的解可能与原方程的解不同。】

有关 those 的例子还可参阅 §3.12.2 的例 1.

例 4 To draw a geometric graph in a plane is much simpler than that in space.

这句 that 代表前面的词组 to draw a geometric graph，汉译时本来应译成：

【画平面几何图形比画空间几何图形容易得多。】

但是，由于汉语的表达比较灵活，“画几何图形”这几个字也可以不重复，而译成：

【在平面上画几何图形比在空间中容易得多。】

2. That 代表前面的句子

例 5 The progress of mathematics has led to the development of electronic computer and electronic computer has also helped mathematics to find some new directions. That is why both subjects have achieved great results in the last 30 years.

第二句中的 that 代表的是一个句子的意思，这类句子的 that 通常译成“这”。

【数学的进步导致了电子计算机的开发，同时，电子计算机帮助数学找到新的发展方向。这就是这两个学科近三十年来取得巨大成果的原因。】

二、That 用作关系代词

作为关系代词的 that 用于引导定语从句(通常是限制性的)，它的先行词可以是人或物。定语从句可以与主句合译或分译(见 §3.5)。

例 6 What is the mathematical model that describes the sound waves travelling in this medium?

句中 that 引导的限制性定语从句较短且容易表达清楚，可以采用合译法，把定语从句译成前置定语。

【描述声波在这种介质中传播的数学模型是什么?】

例 7 The straight line in mathematics is a fundamental concept that cannot be defined or described by any other concepts.

句中 that 引导的限制性定语从句虽然不长，但采用分译法较容易表达清楚。这时，把定语从句译成分句，把 that 译成“它”(注：在类似的例子中，有时把 that 译成它的先行词)。

【直线在数学中是一个基本概念，它不能由别的概念加以定义或描述。】

三、That 用作关系副词

作为关系副词，that 可以引导定语从句，而 that 在从句中的作用相当于“介词＋which”所表示的各种状语。

例 8 This section is the right space that we introduce the new concept “differentiate”.

本句定语从句的先行词为 space，that 的作用相当于 in which(在该处)。

【本节正是引入微分这个新概念的合适场合。】

在这类句型中，若定语从句的先行词为表示时间的名词，that 常被省略。

例 9　It is time that we prove the main theorem.

这句的 that 可以省略，变成 It is time we prove the main theorem。

【该是证明主要定理的时候了。】

四、That 用作连词

1. 引导名词性从句

作为连词的 that 可以引导各种名词性从句，包括主语从句、宾语从句、表语从句、同位语从句。在多数情况下，that 不必译出；有时为了译文表达清晰，可在主句与从句之间加上适当的标点符号。

例 10　These examples show that the non-measurable sets and non-measurable functions are far too complex for our comprehension.

句中 that 引导的是较长的宾语从句，可在主句与从句之间加上逗号。

【这些例子说明，不可测集与不可测函数的复杂程度远远超过我们的理解。】

有关名词性从句的更多介绍可见 § 3.7.1 和 § 3.8.1。

2. 引导结果、程度状语从句和目的状语从句

在数学专业英语中最常见的这类句型是，以 such that 引导的结果状语从句（常把 such that 译成“使得”），以 such…that…的形式出现的结果、程度从句（可译成“如此……以至于……”）和以 that，so that 引导的目的状语从句（放在句末时常译成“以便”或“才”）。

例 11　The functions considered must be smooth enough that it may be the solutions of the differential equation.

【所考虑的函数必须足够光滑，才能成为该微分方程的解。】

有关状语从句的例子和更多介绍可见 § 3.6。

3. 用于强调句型

在强调句型 it is (was)…that…(见 3.7.2)中，若强调的对象是状语，that 就是连词。

例 12　It is because the Riemann integration is applicable only to a small kind of functions that Lebesgue developed the new integration, named as Lebesgue integration.

【正因为 Riemann 积分只适用于很小的一类函数，Lebesgue 才开发了一种新的积分，称为 Lebesgue 积分。】

此外，连词 that 还可构成很多固定的词组，例如，now that(既然)，but that (=except that)(除非)，assuming that(假定)，suppose (supposing) that(假定)，provided (providing)that(假定)，on condition that(在……条件下，若……则)等等。

练 习 3.11

1. 把下列句子译成汉语，注意其中 as 或 that 的用法：

(1) The universal set S can then be thought of as the collection of all conceivable outcomes of the experiment, as in the example of coin tossing discussed in the foregoing section.

(2) The event A is called more likely than B if $P(A)>P(B)$, and at least as likely as B if $P(A)\geqslant P(B)$.

(3) In particular, the empty set $\varnothing$ is not the same as the set $\{\varnothing\}$. In fact, the empty set $\varnothing$ contains no elements, whereas the set $\{\varnothing\}$ has one element, $\varnothing$.

(4) Moreover, as the space concept is incorporated in this modern definition, its generality contributes much to the generality of the function concept.

(5) These objects are not to be regarded as real, but rather as abstract models of physical situations.

(6) The slope of the line AB is greater than that of the line CD.

(7) The probability is the set function defined on a Borel ring that satisfies the following conditions.

(8) The volume of a cylinder is proportional to the square of the radius of its base provided that its height remains constant.

2. 用含 as 或 that 的语句把下列句子译成英语：

(1) 如果当 $n\to\infty$ 时序列 $\{a_n\}$ 趋于 $+\infty$，那么不论正数 A 多大，只要自然数 n 充分大，a_n 将大于 A。

(2) 这个方程可以采用因式分解法来求解，正如前面中例 2 所做的那样。

(3) 随机变量的取值不像普通变量那样有规律。

(4) 我们都知道，等腰三角形底边上的高也是顶角的平分线(要求译成主语从句)。

(5) 所采用的条件必须是充分的，才能保证这个微分方程有唯一解。

(6) 这只蒸汽船顺流时的航行速度为每小时 20 千米，而逆流时速度仅是它的三分之二。

§3.12　否定、省略与倒装

§3.12.1　否定

英语的否定形式在用词、语法和逻辑等方面与汉语有很大差别。有的英语句子形式上是肯定而实质上是否定的，反之，有的句子形式上是否定而实际上是肯定的；英语否定词否定的重点和范围有时较难判断；否定词在句中表示强调的方法与汉语有许多不同；某些否定词和词组的习惯用法较难掌握。因此，在阅读和翻译否定形式时，务必特别认真分析，以免落入“陷阱”。

一、局部否定与全部否定的主要特征

在阅读与翻译过程中，当遇到一个否定句时，正确判断其属于局部否定或全部否定，是避免错误的重要一环。

1. 全部否定的基本特征

表示全部否定时通常使用 none，no，neither，nothing 等意为“都不、均不”的否定词。

例 1　The equation has no real roots.

【该方程无实根。】(这里的意思是连一个实根都没有。)

2. 部分否定的基本特征

当 all，every，both 等词在句中与 not 连用时，一般表示部分否定，译为“并非都”，等效于 not all，not every，not both 等的含义。如，

例 2　The solutions to all these problems may not be so easily found.

【并非所有这些问题的解都能如此容易地求出来。】

应注意这种 not 在句中与动词放在一块，而 all 与 not 分开放置的情形，不要误以为是全部否定。

二、形式与实际否定成分的相互转移

分析一个否定句时，要仔细判断否定词究竟否定什么。当否定谓语时，称为**一般否定**；当否定其他成分时，称为**特指否定**。英语的否定常表现在形式上与实际上的不一致性，即常发生所谓“转移”。翻译时需要考虑是否在这两种否定之间进行反向转移。

1. 形式上的一般否定，实际是特指否定

(1) 英语形式上对表示“认为”及“臆想”的谓语动词(如：think，feel，suppose，expect，believe，image 等)的否定，实际上是对其宾语的否定，翻译时应根据中文的表达习惯，按实际否定的情形来表达。

例 3 We do not think that this mathematical model is available for the practical problem.

【我们认为这个数学模型不适用于该实际问题。】

原文实际否定宾语从句，但形式上否定 think，即从宾语转移到谓语；翻译时应作反向转移，即按实际否定的情形翻译。

(2) 形式上否定谓语，实际否定宾语补足语。

例 4 In ancient Greek, Pythagoras did not consider irrational numbers to be realistic existence.

【在古希腊，毕达哥拉斯学派认为无理数不是实际存在的。】

原文形式上否定 consider，实际否定宾语补足语，即否认 realistic existence。翻译时作了这种转移。

(3) 形式上否定谓语，实际否定主语从句。

在 it 作形式主语时，对谓语 seem，appear，happen 等不及物动词的否定，实际上是对主语从句的否定，翻译时要作这个转移。

例 5 At first glance it does not appear that this integral fits any of the forms presented up to this point.

【初看起来，似乎这个积分并不符合直到目前为止所讲过的任何形式。】

原文形式上否定 appear，实际上否定主语从句的 fit。

例 6 It did not seem that such new geometry could have any practical value.

【当时，似乎这种新的几何学不可能有什么实用价值。】

2. 形式上的特指否定，实际是一般否定

例 7 The basic system of Euclidean Geometry has undergone no major change in over 2 000 years.

【2 000 多年来，欧几里得几何的基本体系没有发生任何重大变更。】

原文实际上否定谓语 undergone，转移为形式上否定宾语 change；翻译时作了反向转移。

三、形式上否定而语义上肯定

1. 形式上的极端否定表示肯定

有些句子在形式上是否定的，但因为前后加上某些副词，使词义上接近于否定的否定，从而变成了肯定的意思。常见的是 nothing like(没有什么比得上)，cannot…too(无论怎么也不过分)。把 cannot…too 替换成 impossible…too，can hardly…too，can never…too 等，也有类似意思。

例 8 We cannot be too careful in doing computer programming.

【编计算机程序时越细致越好。】

不可误译成“编计算机程序时不能太小心”。

例 9　It is impossible to overestimate the value of the contribution of the ancient China to the development of mathematics in the world.

【古代中国对世界数学的发展所作的贡献无论怎么估计也不会过高。】

2. 双重否定表示较强的肯定

英语的双重否定和汉语类似，句中用两个否定词来表示肯定的意思。但是，英语有弱化与强化之分。双重否定的弱化形式中，常有一个否定词是“带否定前缀的副词或形容词”(见例 10)；而强化形式则用两个一般的否定词分别否定句子的不同成分(见例 11)。

例 10　The measurement error outside the indicate range are not unlikely.

【测量的误差超过指定的范围并非是不可能的。】

原文由 not 和 unlikely 构成弱化双重否定，其中 unlikely 就是带否定前缀的副词。本句也可译成汉语的肯定句：测量的误差也有可能超过指定的范围。

例 11　No modern scientific and technological branches could be regularly developed without the application of mathematics.

【如果不应用数学，任何现代科学技术分支都不可能得到正常的发展。】

本句由否定词 no 和 without 分别否定不同对象，构成强化双重否定形式。

3. 具有弱肯定意义的形式否定

(1) cannot but + 动词原形，意为“不得不”，“只好”。

例 12　In this case we cannot but determine k first.

【在这种情况下，我们只好先确定 k(的数值)。】

原文的意思虽然是肯定的，但有些勉强。

(2) not + 动词 + until，意为“直到……才……”。这里常用的动词如：leave，come，go，receive，finish，stop 等；其中 not 和 until 也可放在一起。

例 13　This fundamental equation did not receive an adequate answer until little more than a century ago.

【这个基本方程式直到一个世纪以前才获得了合适的答案。】

四、强调否定与含蓄否定

1. 强调否定

由否定词加上 at all，whatever 等，或者 not 与 nearly，half，possibly 等连用，可用来强调否定。not nearly 和 not half 意思是“根本不”或“没有”，not possibly的意思是“无论如何不会”或“根本不会”。

例 14　The convergence rate of series A is not nearly so fast as that of

series B.

【级数 A 的收敛速度远不如级数 B。】

例 15 The function cannot possibly approach a limit as $x\to\infty$.

【当 $x\to\infty$ 时，这个函数根本不可能有极限。】

2. 含蓄否定

当句子以肯定的形式出现，即句子不出现常见的否定词时，也可以采用其他一些含有否定意义的词或词组来表示否定的意思，这种形式称为“含蓄否定”。对于这种形式，翻译时应明确地把否定的意思译出。

(1) 一些动词或词组具有否定的意义，如 fail, lack, refuse, protect … from 等。

例 16 The method fails to be used to deal with the infinite series.

【这个方法不能用来处理无穷级数。】

动词 fail 的词义是“不能”，“没有(做)”。

(2) 一些形容词、副词及词组具有否定的意义，如 little, few, short of, hardly, scarcely, no longer 等。

例 17 In 1850s few people understood non-Euclidean geometry.

【在 1850 年前后，几乎没人理解非欧几何。】

形容词 few 表示否定的意思。

例 18 In this case Eq.(5) no longer has meaning.

【在这种情况下，式(5)已不再有意义了。】

(3) 一些介词、介词短语具有否定的意义，如 above, beneath, beyond, by no means, in no way, at no time, in no case, on no account, under no conditions 等。

例 19 The discussion on this subject is beyond our course.

【关于这个课题的讨论已经超出我们的课程范围。】

(4) 一些连词及某些短语具有否定的意义，如 rather than, but, too…to 等。

例 20 The meaning of the logic conjunction “$\vee$” is assumed to be inclusive rather than exclusive.

【据假定，逻辑连接词“$\vee$”的含义是包含的而不是互斥的。】

§3.12.2 省略

为了叙述精简，科技英语中的句子常作适当的省略。所谓“适当”指的是，省略后句子的意思仍然是清楚而准确无误的，通常由省略句本身或者结合上下文就可以明白其意思。下面介绍数学英语中常见的几种省略形式。

一、重复部分的省略

1. 并列复合句中的省略

在并列复合句中，只有两个分句原本的结构相同时才可能在后一个分句进行省略。

例 1 It is customary to consider x-components which are directed toward the right as positive and those toward the left, negative.

【通常我们把指向右边的 x 分量看做正，而把指向左边的 x 分量看做负。】

在翻译的过程中，必要时应把原文省略的部分补上。

例 2 Let A be a closed subset of $[a, b]$ and χ_A its characteristic function.

【设 A 为一个闭集$[a, b]$，且设 χ_A 为其特征函数。】

原文的第二句是 Let χ_A be its characteristic function 的省略。

2. 比较从句中成分的省略

由 than 和 as 引导的比较状语从句一般均采用省略式(有时整个比较从句也可以省略)。如：

例 3 This computer works better than that one.

【这台计算机的性能比那台好。】

从句省略了 works。

例 4 On the moon you can jump about six times as high.

【你在月球上所能跳的高度，约为在地球上的六倍。】

本句中省略了整个比较状语从句 as you can do on the earth，但这需要上下文的支持。

3. 其他从句中成分的省略

由 as 引导的方式状语从句有时也用省略式，例如，

例 5 The cosine function varies periodically as sine function.

【余弦函数像正弦函数一样作周期性变化。】

从句中省略了 varies periodically。

由 as 引导的限制性定语从句也常用省略式，特别是当它与 the same 和 such 搭配使用时(参见 § 3.11.1 例 13)。

二、特殊句型的省略

1. No matter, However 等引导的部分状语从句的省略

no matter, however 引导的让步状语从句中经常省略主谓语。

例 6 Every measurement, no matter how carefully made, is subject to experimental error.

【每一种测量，不论进行得如何仔细，均存在实验误差。】

这句的主语是单数，状语从句由 no matter 引导，后接过去分词，省略了 it is/was；如果主语是复数，则应省略 they are/were；有时也可以看做省略的动词不是 be，而是 may be。

例 7 A constant number, however large, is never spoken of as infinite.

【一个常数不论有多大，永远不能被称为无穷大。】

状语从句由 however 后接形容词，省略了 it is。

2. Hence 或 Thus 引导表示结果的从句的省略

例 8 This chapter is almost purely mathematical, but the concepts introduced in it are essential for the understanding of Chapter 9, hence its inclusion here.

【这一章节几乎是纯数学内容，但由于它所介绍的概念对理解第 9 章极为重要，所以在此编入了这一章。】

这类句子常省去谓语动词。

3. 从属连词 That 的省略

引导宾语从句、表语从句、带有形式主语 it 的主语从句、某些状语从句的引导词 that(包括强调句型中的 that)有时也会省略。

三、某些固定的特殊的省略形式

由 if, when, whenever, where, wherever 等分别与 necessary 和 possible 的各种组合，以及 if any(如果有的话，即使有，也……)，if so(如果这样的话)，if not(要是不)等，实际上是相应的状语从句省略主语和谓语(或其一部分)的结果。如，

例 9 This differential equation, if necessary, can be converted to a simpler algebraic equation.

【必要时这个微分方程可以转换成一个较为简单的代数方程。】

其中从句可以看成 if it is necessary 的省略。

§3.12.3 倒装

英语句子多数的倒装形式在汉语中没有类似的对应，这常使许多中国学生感到不习惯。因此，虽然倒装在数学英语中使用的频率不是很高，但是仍然有必要加以重视。

一、全部倒装与部分倒装

英语句子一般都采用自然顺序书写，即主语在前、谓语在后；而谓语可能由多个部分组成。如果整个谓语完全提前，就称为**全部倒装**；如果只有一部分谓语

(如助动词、系动词 be 等)提前,就称为**部分倒装**。句子的倒装,或者出于语法上的需要(如疑问句、某些虚拟语气的条件句等),或者由于强调句子某个成分或行文的需要,把某个成分放在句子开头部分。倒装的具体形式多种多样,我们只介绍若干在数学英语中常见的类型。

二、全部倒装的情形

1. 特殊句型 There be 和 There exist(s)产生的倒装

例 1　There exists at least one point x_0 in the interval (a, b) such that $f(x_0)$ attains the maximal value.

【区间(a, b)内至少存在一点 x_0 使得 $f(x_0)$达到最大值。】

本句主语是 point x_0,谓语是 exists。

2. 表达数学概念逻辑关系的需要产生的倒装

例 2　A variable y is a function of another variable x if to each value of x corresponds a definite value of y.

【如果对变量 x 的每个值,变量 y 都有一个确定的值与之对应,那么就称 y 是 x 的函数。】

本句主语是 value of y,谓语是 corresponds。这里为了描述 y 是随 x 而确定对应值,而把句子全部倒装。

3. 在某种强调句型中不及物动词引起的倒装

例 3　It is to this equation that Schwarz inequality is now applied, and thereby results the conclusion.

【正是把 Schwarz 不等式应用于这个方程,才得出这个结论。】

"It is…that"为强调句型,强调状语的介词短语 to this equation;"thereby results the conclusion"属于"状语(副词)+不及物动词+主语"这种全部倒装句型。

4. 某些与介词短语联用的不及物动词引起的倒装

例 4　From this condition follows Euler's Equation.

【由这一条件导出了欧拉方程。】

这句 follow 是不及物动词,from 与 follow 是固定搭配,意思为"由……可以得出"。

三、部分倒装的情形

部分倒装主要有以下两种情况:① 谓语的一部分放在主语前(见例 5、6);② 被强调的成分或较短的成分提前(见例 7、8)。下面是几种常见的部分倒装。

1. 某些否定词(短语)开头的句子引起的部分倒装

这类否定词或短语指的是:never, seldom, not only, not until, not+状语,

含 no 的状语等。

例 5 Seldom has a single concept played so important a role in mathematics as has the concept of function.

【很少有单个概念像函数这样，在数学中起着如此重要的作用。】

本句 seldom 引起的部分倒装为主句，a single concept 为主语；而 as 引导的从句是全部倒装。

2. Only + 状语(或副词、介词短语、状语从句)位于句首的情形

例 6 Only when the two quantities are equal can the inequality become an equality.

【只有当这两个量相等时，该不定式才能变成等式。】

主句中 can 放在主语 the inequality 之前，但其余部分没倒装，故为部分倒装。

3. 其他强调成分提前所产生的部分倒装

最常见的是把强调的成分(主要是宾语或作状语的介词短语)放在主语前。

例 7 Such a set, with its associated rules of combination, we will call a mathematical system.

【我们将把这种集连同其有关的组合规则称为数学系统。】

句子的宾语 such a set 提前到句首，以作强调。

4. 为了使句子平衡而产生的部分倒装

英语为使句子平衡、紧凑，往往把较短的部分前置。最常见的是把宾语补足语(通常是几个形容词或 as 介词短语)和状语(一般是介词短语)放在较长的宾语前。

例 8 This method of deduction helps to make evident the limits of integration.

【这种演绎法有助于使积分限变得很明显。】

本句的宾语补足语 evident 提到宾语 the limits of integration 之前。

练 习 3.12

1. 把下列句子译成汉语，注意其中省略、否定与倒装部分的译法：

(1) However, there may be events with probability zero that are not impossible.

(2) It is possible for a set to contain no elements whatever. This set is called the empty set or the void set, and will be denoted by the symbol $\varnothing$.

(3) There exist certain subsets of **R** which are distinguished because they

have special properties not shared by all real numbers.

(4) The old computing results were not nearly so exactly obtained as the new ones.

(5) Not specified by this definition is the manner of setting up the correspondence.

(6) A set, in this sense, is no more and no less than the totality of its members; no considerations of order or multiplicity enter.

(7) Similarly, the relation "x has the same remainder after division by 2 as y" on **N** groups all the even numbers together and all the odd numbers.

(8) Vector carries the idea of direction, scalar does not.

2. 用省略、否定或倒装语句,把下列句子译成英语:

(1) 一个正数不论有多小,它总是大于任何负数。

(2) 数列的每一项 a_n 都有一个后继项(successor)a_{n+1},因此不存在"最后的"项。

(3) 如果 A 和 B 这两个集中有一个集包含了一个不属于另一个集的元素,就称这两个集不相等并记作 $A\neq B$。

(4) 只有到了 19 世纪初现代分析产生之时,函数的概念才可能得到推广。

(5) 并非所有的矩阵都有逆矩阵。

(6) 通常我们把指向上方的 y 分量看做正,而把指向下方的 y 分量看做负。

第四章　数学专业文献读译指导

本章是阅读理解与翻译的提高课程，所涉及的阅读材料主要来源于专业课和研究生教材，不仅在数学知识的深度、广度，而且在英语语言表达的难度等方面，都超过第二章。为了帮助学生更好地解决在各类数学文献的阅读和翻译中经常遇到的困难，本章采用了与第二章完全不同的编写模式，即以有一定代表性的、容易误读错译的句子为例，针对初学者在学习中可能出现的问题进行剖析，介绍理解与翻译的技巧，给出纠错的有关指导。

考虑到吴炯圻编著的《数学专业英语》中的英文资料主要取材于国外的数学教材和研究文献，该书作为国内教材已经在国内产生一定影响（为普通高等教育“十一五”国家级规划教材），为了使我们的读译指导更有针对性并取得更好的效果，上述所说的例句的原文大多转摘自该教材（主要在第三章）[注1]；所列举的有问题的译文也是大多采用该教材的部分高校的学生作业。

具体地，本章分成8节。第1至第7节每小节列出若干译例，其编排形式一致：

1）先给出有错误或欠妥的译文（简称“误文”，以“㊐【译文】”的形式出现，即在放置译文的方括号【】之前用㊐标识；当误文多于一个时，就附加下标进行分列，如㊐$_1$、㊐$_2$等）。

2）接着作“**讲评**”，指出该误文的存在问题、修改意见，然后给出修改的参考译文（简称“参文”，以“㊣【译文】”的形式出现，即在放置译文的方括号【】之前用㊣标识；当参文多于一个时，就附加下标进行分列，如㊣$_1$、㊣$_2$等）。

3）必要时还附加“词语注释”、句子的语法“分析”。

4）每个小节的末尾还配有若干练习题，为读者提供识别正错和纠错的基本训练。

注1：§4.1至§4.6的例子（英文部分）分别摘录自文献[1]（即《数学专业英语》）第三章§3.1至§3.6（各节对应），每小节开头的英文标题之后都有标注（上标形式，如[23]）指明原文的出处。

第 8 节是对前 7 节出现的误读错译的类型作进一步的分析，并提供纠正错误的若干有效办法。这些办法是作者在长期教学中形成的经验总结，相信能给初学者提供一个有益的帮助或借鉴。

为了便于读者自学自查，本章所有练习在书末附有参考答案。

关于翻译的认识

阅读是翻译的必要前期工作，只有阅读理解做好了，翻译才可能做好。但是仅仅停留在做好阅读理解，未必能保证翻译得好；而翻译的过程则可以加深阅读理解。总之，翻译是比阅读更高层次的工作。

由于本章是阅读和翻译的提高课程，所以在开始对译例讨论和讲评之前，先简要介绍一下翻译的评价标准以及翻译将遇到的困难。

我国近代(19 世纪末 20 世纪初)著名的翻译家严复先生在《天演论》中的“译例言”讲到：“译事三难：信、达、雅。求其信已大难矣，顾信矣不达，虽译犹不译也，则达尚焉。”长期以来，“信、达、雅”被人们奉为评价翻译作品的准则，而“信、达”则是翻译科技文献的最基本要求。

这里的“信”指的是译文要“忠实于原文”，即要准确、不歪曲、不遗漏、也不要随意增减意思；“达”的意思是译文的表达要“通顺明白，不拘泥于原文形式”；“雅”指的是译文要能体现原著的韵味和风格，简明优雅。

伟大的文学家、翻译家鲁迅先生在谈及翻译工作的艰巨性时说过[8]：“我向来总以为翻译比创作容易，因为至少无须构想。但到真的一译，就会遇着难关。譬如一个名词或动词，写不出，创造时候可以回避，翻译却不成，也还得想，一直弄得头昏眼花，好像在脑子里面摸一个急于要开箱子的钥匙，却没有。严又陵说，‘一名之立，旬月踌躇’，是他的经验之谈，的的确确。”

鲁迅所说的严又陵，即严复。这两段至理名言已经得到普遍的认可。那些希望提高自己的阅读能力和翻译水平的读者，应该有不怕困难、百折不挠的决心，勇于攀登专业英语的高峰，朝着“信、达、雅”的目标勇敢地前进。

关于本章教材的使用

本章的编写体例不同于通常的教材，从 §4.1 至 §4.7 都是译例。根据我们的教学经验，如果老师对于每一个译例的教学，都采用从上到下、按部就班的方法，那么其教学效果只能是相当一般；相反地，如果能发挥学生的学习积极性，采用师生互动、读者与教材互动的模式，则教学效果明显提高；更重要的是，学生可以在这种互动模式中锻炼、提高自己的自主学习能力。采用如下步骤来开展教

学就是上述互动模式的一个例子，建议采用本教材的师生和其他读者不妨一试。

第一，学生仔细阅读原文（可以查字典、看注释，但不看该例的误文、参文和讲评部分），然后学生根据自己的理解写出译文。

第二，学生把自己的译文与误文作比较（但不看本例的讲评和参文），看看哪些部分是一样的，哪些部分是不一样的，并进一步分析判断何处正确、何处有错误或欠妥、各自的译文优劣程度如何，同时指出这种判断的根据是什么。

第三，学生对自己的译文进行修改和完善，然后与参文比较（但不看本例的讲评），再看看自己的译文及误文与参文有什么不一样的地方，并进一步分析思考“为什么参文是这样译的”，为什么参文与误文有这么大的差距。

第四，学生阅读本例讲评内容（以◆**讲评**◆标识），看看其中的讲法与自己原来的想法有什么异同之处，从这个例子的学习过程中自己有何收获；并进一步思考自己在日后的学习中特别应该注意什么问题，才能更好提高自己的水平。

第五，学生进一步完善自己的译文。如果学生最后的译文与参文相类似，就值得赞赏；如果写出更好的译文，就值得热烈祝贺。

其中有的环节可以在小班和分组讨论中进行。在整个教学过程中，老师是组织者和评判员，也是辅导员（在学生有困难时给予帮助）和讲解员（最后要作进一步的讲解和总结）。

对于自学者，也可以参照上述步骤进行学习；没有老师帮忙，困难可能会多些，但对自己的锻炼和提高就更大了。

§4.1 数学教材序言和导论的译例评析

本节以出现在两本数学教材序言和一本教材的教学指导中的某些疑难语句为例，分析初学者在阅读和翻译过程中常见的错误，并给出供对照用的参考译文。

§4.1.1 Preface 1 【前言 1】

这篇前言主要介绍作者编写的《调和函数论》一书的特色、写作起因和成书的简单过程。

例 1 At times each of the authors has agreed with Lord Kelvin and Peter Tail, who wrote ([12], Preface)…

㊀【有时每个作者都同意 Lord Kelvin 与 Peter Tail，他们写道（[12]的序

言):】

◆讲评◆ 译文译出了原文的基本意思,但由于采用简单的直译,不符合汉语的表达习惯,也显得不够明白。应把"同意某人"改成"同意某人的说法(意见)"。又,由于英语在书或论文的引言中出现的 the author(s)都指该文的作者,这里最好加以明确化。下面是修改了的译文,其中把从句"who wrote"译成短语。

㊣【有时,本书的每个作者都同意 Lord Kelvin 与 Peter Tail 的如下说法(见文献[12]的序言):】

例 2 For example, we replace the usual tedious calculations showing that the Kelvin transform of a harmonic function is harmonic with some straightforward observations that we believe are more revealing.

㊎【例如,我们用我们认为更有启发性的直接观察来代替通常冗长的计算,这个计算证明了一个调和函数的开尔文变换是调和的。】

[分析] 这句是主从复合句,主句的谓语 replace 与 with 引导的短语配搭,说明"用……来代替……";第一个 that 引导的从句作现在分词短语 showing 的宾语(showing 当 calculations 的定语),第二个 that 引导的从句是定语从句,修饰 observations。

◆讲评◆ 译文反映了原文的基本意思,但内容比较松散,也不够明确。其中 revealing 虽有"启发性的"的含义,但根据上下文(作者强调本书的写作目的是要使读者能更容易地学会调和分析)和动词 reveal 的含义知,这里强调的是"浅显易懂"。此外,文字表达也有待于完善。现修改如下:

㊣【例如,在证明"调和函数的开尔文变换是调和的"这一结论时,我们采用一些更浅显易懂的直接观察法来代替那些通常冗长的计算。】

例 3 The topic of harmonic functions was presented with the intention of moving on to different material after introducing the basic concepts. We did not move on to different material. Instead, we began to ask natural questions about harmonic functions.

㊎【调和函数专题引入的目的是为了在介绍完基本概念之后转向不同的内容。而本书并不转向不同的内容,相反地,本书开始研究调和函数的性质问题。】

◆讲评◆ 这三句都是简单句,大体意思不难理解。但应注意,后两句讲自己的做法,否定第一句所说的他人的做法。翻译时,应体现这个意思。但原译没指出第一句所指事情是他人所为;再者,这里把 natural 译成"性质"不妥,它是形容词,这里可译为"本质性的"。此外,修辞上要适当加工。

㊣【以往,调和函数专题只是为了在介绍其基本概念后转向别的内容而预

备的。但本书不是转向别的内容，而是接着讨论调和函数的一些实质性的问题。】

练 习 4.1.1

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) The only prerequisite for the book is a solid foundation in real and complex analysis, together with some basic results from functional analysis.

㊀【本书的仅有的必要条件是实的和复的分析方面的扎实基础以及泛函分析中的一些基本结论。】

(2) In addition to writing the text, the authors have developed a software package to manipulate many of the expressions that arise in harmonic function theory.

㊀【除了写这本教材外，作者还发展了一个用于处理许多调和函数理论中的表达式的软件包。】

§4.1.2 Preface 2 【前言 2】

这是专著《拓扑向量空间中的反例》一书的前言。下面摘录的前两个例子分别介绍学科的特点和本书内容安排上的一些特点，后一个例子则是作者对有关人员的致谢。

例 1 Many generalizations have been introduced: this was, to a certain extent, due to the curiosity of studying topological vector spaces for which a known theorem of Functional analysis can be proved.

㊀【许多推广被引入，这在某种程度上归功于学习拓扑向量空间的好奇心，在这个空间中可以证明泛函分析中的一个已知的定理。】

[**分析**] 前后两句用冒号":"分开，后一句说明前一句所述事情的原因(从 this was…due to…可看出)；后一句含一个由 which 引导的限制性定语从句。

◆**讲评**◆ 对于较长的句子，采用分段翻译是允许的。但原译把 which 引导的限制性定语从句错译成非限制性的(**注**：有时限制性定语从句也可分开译，但其限制作用仍要体现，不能改变原意)。另外，后半部分译文没有译出原文内在的含义，因为它不能说明人们为什么对这样的空间有好奇心(已知定理是已经证明了的，在新空间也可以证明，这并不奇怪)。之所以错译，多半是不了解数学研究的方法，没读懂上下文，也不了解 known 的另一个意思是"有名的"。

㊁【许多推广的空间被引入了，这在一定程度上要归功于人们研究如下拓扑向量空间的好奇心：在该空间上可以证得泛函分析中的某个著名的定理。】

例 2 To facilitate the reading of this book, some fundamental concepts in vector spaces and ordered vector spaces have been collected in the chapter called 'Prerequisites'.

㊀【为了便于本书的阅读,向量空间和有序向量空间的一些基本概念将收集在称作"预备知识"的章节中。】

◆讲评◆ 词组 have been collected 的意思应是"已收集",把它译成"将收集"是错的(尽管所述的内容出现在序言之后,也不能添加一个"将"字)。另外,把 the Chapter 译成"章节"也容易造成误会,以为出现于好几章。可修改成:

㊁【为了便于本书的阅读,在称作"预备知识"的那一章里汇集了向量空间和有序向量空间的一些基本概念。】

例 3 The author would like to express his deep gratitude to Professor T. Husain, McMaster University, Hamilton, Canada, and Dr. I. Tweddle, University of Stirling, Stirling, Scotland, who have given him both moral and material support during the preparation of this book.

㊀【作者真诚感谢本书准备期间在精神和物质上给予他支持、帮助的加拿大哈密尔顿 McMaster 大学的 T. Husain 教授和苏格兰斯特林 Stirling 大学的 I. Tweddle 教授。】

◆讲评◆ 这句主要涉及如何把中文的长句表达清楚的问题。一般说来,讲"感谢某人做了某事"和"感谢做了某事的某人"都可以,但本句应采用第一种表达方式,而第二种表达法较适用于"某人"之前的修饰语不多且很明确的情形。

㊁【诚挚地感谢加拿大哈密尔顿 McMaster 大学的 T. Husain 教授和苏格兰斯特林 Stirling 大学的 I. Tweddle 教授在作者写作本书期间所给予的精神和物质上的支持和帮助。】

练 习 4.1.2

指出下面各题的译文中所存在的问题,并加以修改:

(1) To justify that a class C_1 of topological vector spaces is a proper generalization of another class C_2 of topological vector spaces, it is necessary to construct an example of a topological vector space belonging to C_1 but not to C_2; such an example is called a counterexample.

㊀【为了证明一类拓扑向量空间 C_1 是另一类拓扑向量空间 C_2 的推广,就必须在拓扑向量空间中构造一个例子,使得它是属于 C_1 的但不属于 C_2,我们称这样的例子为反例。】

(2) Thereafter each Chapter begins with an introduction which presents

the relevant definitions and statements of theorems and propositions with references where their proofs can be found.

㊀【此后每章开头都引入相关定义及定理和命题的陈述，同时指明给出这些定理和命题证明的文献。】

§4.1.3 Instructor's Guide 【教学指导】

这是放在教材《微分方程》开头的、对教师如何安排该书教学内容的指导意见。

例 1 In what follows, we outline the possible of ones semester course following either the traditional study of the nth-order equation with systems being relegated to the background, or a study of systems of linear differential equations through the medium of matrix algebra.

㊀【下面我们概述一学期课程的可能性，或者采用传统的学习 n 阶方程以及系统的方法，把它们移交到背景，或者通过矩阵代数的手段来学习线性微分方程系统。】

[**词语注释**] relegate vt. 移交。

[**分析**] 现在分词 following 及它的两个宾语组成的分词短语作行为方式状语。现在分词短语 being relegated to the background 作为 systems 的定语。

◆**讲评**◆ 原译的主要错误在于把 systems 和 equation 当成并列成分，其实，介词短语 with systems being…是状语。其次，systems 是 systems of differential equations 的省略，应译作"微分方程组"。systems being relegated to the background 意思是"微分方程组被安排为背景知识"。

㊁【下面我们概述一学期课程的安排方式，读者可以按照传统的模式来学习 n 阶方程而把方程组作为它的背景知识，也可以采用以矩阵代数为工具的方法来学习线性微分方程组。】

例 2 For those using a systems approach, we recommend first returning to Chapter 0, Section 4 to review notation, row-reduction, determinants and linear independence. In this regard, the relationship between $\det\boldsymbol{A}=0$ and $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ having nontrivial solutions usually needs special emphasis.

㊀【对于那些使用方程组方法者，我们建议首先回到第 0 章第 4 节复习符号、行化简、行列式与线性无关。关于这一点，$\det \boldsymbol{A}=0$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 之间的关系有非平凡解，通常需要特别强调。】

[**词语注释**] in this regard 关于这一点。

◆**讲评**◆ 第一句基本正确，只是表达不够清楚。第二句错把 $\det\boldsymbol{A}=0$

与 $Ax = 0$ 看成并列成分，这通常是一些不了解有关数学内容的人可能犯的错误。

㊣【对于那些使用方程组方法的人，我们建议他们首先回到第 0 章第 4 节去复习符号、行化简、行列式与线性无关等知识。关于这些知识，通常需要特别强调的是 $\det A = 0$ 与 $Ax = 0$ 有非平凡解之间的关系。】

例 3 We believe that Section 4.6, variation of parameters for systems, is a far more natural method of presentation; first, because it is so similar to variation of parameters for the scalar first-order equation and second, because there is no need to puzzle over the hard-to-motivate equations which comprise the classical approach.

㊀【我们相信，4.6 节关于方程组的参数变易法是一种非常自然的提出方法；首先，因为它非常类似于标量的一阶方程的参数变易法；其次，因为这样就无需困扰于难以诱导的方程，它组成了经典方法。】

[**词语注释**] variation of parameters 参数变易法。

◆**讲评**◆ 中文中没有“标量的一阶方程”的说法。原文 scalar 与 first-order作定语同时修饰 equation，翻译时要注意定语出现的次序（通常在译文中应把它们的次序对调），使它符合汉语的表达习惯。特别地，这里应译成“一阶纯量方程”。此外，which comprise the classical approach 是限制性定语从句，句子不长，不宜译成分句。

㊣【我们相信，4.6 节关于方程组的参数变易法的提出是非常自然的；这首先因为它非常类似于一阶纯量方程的参数变易法；其次，因为这样就无需为那个组成该经典方法的、难以启发引入的（辅助）方程而伤脑筋。】

例 4 For instructors using a systems approach we recommend doing the entire chapter, albeit some of the more theoretical aspects can be done lightly or even skipped.

㊀【对于应用方程组方法的教师，我们建议做完整章，虽然其中更为理论的方面可以轻做甚至可以滑过。】

[**词语注释**] albeit conj. 虽然。

◆**讲评**◆ 译文的主要问题是译者没有认识到本文主要是写给教师的建议，其中词语的选择多处不合适，如 doing the entire chapter 这里指的是“整章都教”，不可直译成“做完整章”；be done lightly 也不宜译作“轻做”。

㊣【对于采用方程组方法的教师，我们建议他们整章都教，虽然其中较为理论化的部分可以只作简略介绍，甚至可以跳过。】

例 5 Besides the expansion of solutions about an ordinary point, we pres-

ent solutions about the regular singular point (the Frobenius series) and a method we call the Wronskian method.

㊎【除了关于一个通常点的解的展开，我们提出解关于正则奇异点的解(Frobenius 级数)和一个我们称为 Wronskian 法的方法。】

[**词语注释**] regular singular point 正则奇异点。

◆讲评◆ 根据上下文应该看出，we present 后面省略了 the expansion of；根据数学知识，幂级数展开都是在一个区间进行的，所以 about…point 指的是"在某个点的邻域"。原译只是直译而已。Besides… 应译成"除了……还……"。

㊊【本章除了介绍在正常点的邻域的解的展开，还给出了在正则奇异点邻域的级数解(Frobenius 级数)以及一个我们称为 Wronskian 法的方法。】

练 习 4.1.3

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) This is a good place to explain what it means to solve a differential equation, to explain the distinction between specific and general solutions and to describe and illustrate initial-value problems.

㊎【这是一个好地方用来解释什么意味着解一个微分方程，解释特殊的和一般的解的不同，以及描述和说明初值问题。】

(2) We begin with the traditional approach to the Laplace transform with applications to sectionally continuous forcing functions (square-wave, saw-tooth, and the like).

㊎【我们从传统的引入拉普拉斯变换的途径以及在分段连续的力函数(方波、锯齿波和类似的东西)上的应用开始。】

[**词语注释**] sectionally continuous functions 分段连续函数；square-wave 方波；saw-tooth 锯齿波。

§4.2 数学基础和数学方法的译例评析

本节以出现在数学基础和数学方法的有关的教材与专业文献中的某些疑难语句为例，分析初学者在阅读和翻译过程中常见的错误，并给出供对照用的参考译文。

§4.2.1 The Basic Concept of Sets[37] 【集的基本概念】

例 1 Many of the objects we shall study are themselves collections of other objects; These collections or sets may be finite or infinite。

㊎【我们要研究的许多对象本身是其他对象的汇集，这些汇集或集合可能是有限的，也可能是无限的。】

◆讲评◆ 在数学教程中常用 collection(日常用语)来解释 set 的专业含义，但又有所区别。因此宜把 collection 译成“集合”或“集体”，把 set 译成“集”。为了清楚起见，应把 collections of other objects 译成“由其他对象组成的集体”。or 在这里的意思是“即”、“也就是”。因此，译文宜修改成：

㊍【我们要研究的许多对象本身是由其他对象组成的集体，这些集体，即集，可能是有限的也可能是无限的。】

例 2 By a set we understand, then, any collection of objects.

㊎【通过集合我们可以理解任意对象的集体。】

◆讲评◆ 译文含糊不清，只是机械地把 by 理解为“通过”。其实“by sth. we understand sth.”的意思是“我们把……理解成……”；类似的结构“by sth. we mean sth.”也具有同样的意思。因此，译文应修改成：

㊍【那么，我们把集理解成由任意对象组成的集体。】

例 3 We see that in some cases it may be difficult to check which objects belong to the set (e. g. (i)above) or whether the set has any members at all ((ii)above).

㊎【我们知道，在一些情况下很难判别哪一个事物属于这个集(如上面的(i))或者是否这个集合在任何情况下都含有元素(如上面的(ii))。】

◆讲评◆ 译文的主要错误是把 at all 错译成“在任何情况下”。只要查一本较完整的字典就知道，at all 的意义是“到底”或“究竟”。再者，把 objects 译成单数也是错的。此外，把 the set 都译成“这个集”未必妥当，这里可据上下文译成“某个集”。因此，译文应修改成：

㊍【我们看到，有时很难判别哪些事物属于某个集(如上面的(i))或者某个集究竟有没有元素(如上面的(ii))。】

例 4 Note that no uniform property of the objects in the set is implied other than that they are grouped together to form the set.

㊎【值得注意的是，这里除了对象被放在一起形成集合，集合中的对象并不蕴含相同的性质。】

◆讲评◆ 译文不符合原文的意思。如何理解“be implied(隐含)”的主体

(在文中未出现)的问题是正确翻译这句的关键。主体应是那个集或集的定义,而不是元素。为了更明确化,可把 imply 转译成"要求",把原文意译成:

㊣$_1$【值得注意的是,只要把对象放在一起就可以形成集,并不要求集的对象具有相同的性质。】

如果要把 imply 译成"蕴含",也可译成:

㊣$_2$【值得注意的是,一个集并不蕴含其中的对象一定要具有相同的性质这样一种意思,只要把一些对象放在一起就可以形成集。】

例 5 We usually denote sets by capitals and their members, also called elements, by lower case letters. However, it will not always be possible to keep to this convention, especially when we are dealing with sets whose members are themselves sets.

㊀【我们经常把集合表示成大写,而且把它的成员,也称为元素,表示成小写字母。然而,始终遵循这样的规定是不可能的,特别当我们要处理这样的集——即它的成员是它自身的集的时候。】

◆讲评◆ 译文把 whose members are themselves sets 译成"它的成员是它自身的集合"显然是错误的,既不合原意,又含糊不清。应译成"它的元素本身也是集"。另外,为了与前一句呼应,句末要作适当补充。故采用意译把译文修改成:

㊣【我们通常用大写字母来表示集,同时把它的成员(也称为元素)用小写字母表示。然而,要始终遵循这样的规定是不可能的,特别当集的元素本身也是集时,就更不可能这样做。】

例 6 The set $S\times T$ is called the Cartesian product of S and T, after Descartes who showed how to describe points of the plane by the Cartesian product of the real line with itself.

㊀【在笛卡儿指出怎样用这条实数轴的笛卡儿积描述平面上的点之后,集 $S\times T$ 就被称作笛卡儿积。】

[**词语注释**] Cartesian product 笛卡儿积;Descartes (人名)笛卡儿。

◆讲评◆ 译文没把 with itself 译出是错误的,它不符合笛卡儿积的数学含义。此外,在文字表达上也有欠妥之处。应注意,after 除了表示"在……之后"外还表示"追随","仿照"等,在这个具体场合也含有对首创人的尊敬和纪念的意思。如果采用原译,则不能体现这层意思。下面对 after 作意译,把译文改成:

㊣【集 $S\times T$ 称作笛卡儿积,这因为笛卡儿首先提出了如何用实轴与它自身的笛卡儿积来描述平面上的点的方法。】

例 7 Illustrate the formulae of Ex.(1) by taking A, B, C to be the set of all quadrilaterals, all regular polygons and all polygons large enough to cover a penny (not necessarily respectively).

㊀【用 A, B, C 表示所有四边形、规则多边形和能够覆盖硬币的多边形的集来解释说明例(1)中的式子(不需要各自说明)。】

◆讲评◆ 译文主要有三处错误。(i) regular 在数学中主要译成"正则的",但放在 polygon,triangle 等表示图形的单词之前则应译成"正(的)",即 regular polygon,regular triangle 分别表示"正多边形"和"正三角形"。(ii) 原文指的是三类图形分别构成一个集(原文在两处省略了 the set of),但原译含糊不清,似乎所说的集只有一个,它由三类图形共同组成。(iii) 括号内的部分译成"不需要各自说明"是错误的。事实上,not necessarily 意思是"未必"而不是"不需要"; respectively 意思是"分别地"。翻译这句时,要注意到 respectively 通常的用法,例如,suppose that E and F denote a polygon and a triangle respectively 就表示"设 E 和 F 分别表示多边形与三角形"。翻译时,为了把问题说明清楚,必要的重复和补充是需要的。因此,译文应修改为:

㊁【取 A,B,C 为下面的集:所有四边形构成的集、所有正多边形构成的集及图形大到能够覆盖一个便士(硬币)的所有多边形构成的集(这里 A,B,C 未必分别表示不同的集),并用它们来说明练习(1)中的公式。】

例 8 If A has α elements and B has β elements, find the number of elements in $A\times B$. If, moreover, A and B are disjoint, find the number of elements in $A\cup B$. What is this number when $A\cap B$ has δ elements?

㊀【如果 A 含有元素 α,B 含有元素 β,找出 $A\times B$ 集合中元素组成的数,而且,若 A 和 B 不相交,找出 $A\cup B$ 中元素组成的数。当 $A\cap B$ 含有元素 δ 时,这个数是什么?】

◆讲评◆ 这个译文有两个初级的错误:(i) 原文的 α elements 和 β elements 分别表示"α 个元素"和"β 个元素"(element α 才表示"元素 α")。(ii) 虽然 the set of real numbers 表示"由一些实数组成的集",但 the number of elements in A 却表示"A 中元素的个数",不可随意套用 the set of…的格式。译者这种误解导致了译文的错误。此外,文字表达也有问题,如 find 在数学中通常不译成"找出",而应译成"求"; 第三句的后半部分译成"这个数是什么",是指代不清的错误。根据数学知识知,第三句是第二句的补充,应把这一点译出,不宜直译。

㊁【如果 A 含有 α 个元素,B 含有 β 个元素,求 $A\times B$ 中元素的个数。进一步,设 A 和 B 不相交,求 $A\cup B$ 中元素的个数。当 $A\cap B$ 含有 δ 个元素时,$A\cup B$ 中元素的个数又是多少?】

练习 4.2.1

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) If S and T are any sets, we denote by $S\times T$ the set of all ordered pairs (x, y) with $x\in S$ and $y\in T$.

㊀【如果 S,T 是任意的集，我们用 $S\times T$ 标记所有 $x\in S, y\in T$ 的有序对 (x,y) 的集。】

(2) The best known of these is Russell's paradox: A set may be a member of itself, e.g., the Union of all Registered Charities may be a Registered Charity.

㊀【众所周知，罗素悖论：一个集合是它本身的一个成员。例如，所有注册过的慈善机构的联盟可能是一个注册过的慈善机构。】

(3) In most cases, the sets under consideration in any given case will all be subsets of some given set U, the "universe of discourse".

㊀【在最多情况下，在任意情况下被考虑的集都是集 U 的子集，这个集 U 称作"论域"。】

§4.2.2 Logic[37] 【逻辑】

例 1 The advantage of this axiomatic method of study is that we can examine the effect on our system of varying the axioms and that the proofs become more transparent the more abstract the system.

㊀【学习这个公理法的好处之一是我们能够检验不同公理的体系的有效性，证明变得更清晰易懂，体系也就更抽象。】

[**分析**] 这是一个主从复合句，两个由 that 引导的从句并列作为表语；其第二个从句中的 more…the more…是副词比较级的特殊用法，可以看成常用句型 the more…the more…(越……越……)的倒装形式，翻译时应注意理清数学内容的逻辑关系。句中 effect on P of Q 是惯用法，表示"Q 对 P 产生的效应"。

◆**讲评**◆ 该译文有如下错误：(1) 把 this axiomatic method of study 当成 the study of this axiomatic method 来译；(2) 把 varying the axioms 当成 different axioms，这里的 varying 是现在分词，该短语的意思是"变更这些公理"；(3) 未能正确译出 effect 短语；(4) 没把第二个从句的作用及 more…the more…的含义正确译出。

㊁【研究中采用这种公理法的好处是：我们能够考察变更这些公理时对我们的系统所产生的效应；而且，当这种系统越抽象时，证明就会变得越清晰。】

例 2 It is therefore important to be fully aware of the rules of logic we need and to realize that these rules can be applied without regard for the actual meaning of the statements on which they are used.

㊎【因此，高度意识到我们所需要的逻辑规则，并认识到这些规则在使用时可以不注重它们的实际含义而加以运用，这一点是很重要的。】

[**分析**] It 是形式主语，两个带 to 的不定式短语当并列主语。其中第一个不定式短语有一个定语从句 we need，修饰 the rules of logic；第二个不定式短语有一个由 that 引导的宾语从句，而宾语从句中又含有定语从句 on which they are used，修饰 the statements。

◆讲评◆ (1) "高度意识到规则"的讲法不通；fully aware of 应译成"充分了解"。(2) the actual meaning of the statements 是"语句的实际含义"，原译文把它译成"它们的实际含义"时，"它们"只能指"规则"，与原文不合。

㊍【因此，充分了解我们所需要的逻辑规则，并认识到这些规则在使用时可以不顾那些运用了它们的语句的实际含义，这一点是很重要的。】

例 3 Of course it is true that even in everyday affairs we can spurn logic only at our peril, but there the patent absurdity of our conclusion usually forces us to abandon a faulty line of reasoning.

㊎【当然，在日常生活中，我们仅在危急关头拒绝逻辑，但是也会因为结论荒谬迫使我们放弃一个有缺陷的推理。】

◆讲评◆ 原文所含 even，can，there，usually 和 line 都没有译出，导致许多含义未能确切表达，两句之间的联系难以体现；a faulty line of reasoning 应泛指某种有缺陷的推理思路，不宜译成"一个"。

㊍【当然，即使在日常生活中，我们也仅在危急关头才会不顾逻辑，但是在那种场合中，结论的明显荒谬常迫使我们放弃某种有缺陷的推理思路。】

练 习 4.2.2

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) Studying these abstract notions is rather like learning a new language; as in that case we shall find that as our knowledge widens we recognize more landmarks; this makes learning much easier.

㊎【学习这些抽象概念好比学习一门新的语言；因为在这种情况下我们将发现，我们认识更多的标记，好像我们的知识面拓宽了；所以使得我们的学习变得简单多了。】

(2) But we will no longer be able to check these conclusions by commonsense.

㊀【但是我们不再用常识检验这些结论。】

§4.2.3 Mappings[37] 【映射】

例 1 Let S be the set of all points in the plane and T the set of lines; the relation of incidence (the point P is incident with the line l if P lies on l) defines a correspondence from points to lines. To each point P correspond all the lines through P and to each line l correspond all the points on l.

㊁【令 S 为平面上所有点的集合，T 为线的集合。投射(关联)关系(若点 P 在直线 l 上，则点 P 是直线 l 上的投射)定义了从点到直线的一个对应。对于每一个点 P 对应于经过点 P 的所有的直线和对于每一条直线对应于在直线上的所有的点。】

[**词语注释**] incidence n. 关联；incident adj. 关联的。

◆讲评◆ 译文有三个错误：(1) 最大错误是把 incidence 译成“投射”(许多字典注明这是它的物理含义)，而它的数学含义是“关联”(在数学中 projection 才表示“投射”或“投影”)；(2) 译文没区别“对应”与“被对应”，一概译成“对应于”；(3) T the set of lines 中被省略的部分未译出，含糊不清，与原意不合。

㊂【设 S 为平面上所有点组成的集，T 为所有直线组成的集合。关联关系(若点 P 在直线 l 上，则称点 P 与直线 l 关联)定义了从点到直线的一个对应。对于每一个点 P，所有经过点 P 的直线都与 P 对应；而对于每一条直线 l，该直线上所有的点都与它对应。】

例 2 The last example makes it clear that the notion of bijection is too restrictive to account for such simple functions as x^2.

㊁【最后一个例子清楚地说明，双射的概念太过于限制以至无法为诸如 x^2 这样简单的函数定义双射。】

◆讲评◆ 译文不符合数学常识及表达习惯，在逻辑上也是错误的。这可能与在一般的字典里，account for 被注释为“说明”有关，即原译把说明理解为“定义”。根据数学知识，account for 在这里应该译成“概括”。

㊂【最后一个例子清楚地说明，双射的概念过于局限以至于无法包括诸如 x^2 这样简单的函数。】

例 3 If $S=(x_\alpha)$ is a family indexed by a set A, then we have a mapping $\alpha \mapsto x_\alpha$ from A to S.

㊁【如果 $S=(x_\alpha)$ 是一个族，以集 A 标记，则我们得到一个从 A 到 S 的映射 $\alpha \mapsto x_\alpha$。】

◆讲评◆　这里关键的是要理解 a family indexed by a set A 的数学含义：以集 A 作为指标集的族，即$(x_\alpha)=\{x_\alpha|\alpha\in A\}$.

㊣【如果 $S=(x_\alpha)$是以集 A 作为指标集的族，则我们得到一个从 A 到 S 的映射 $\alpha\mapsto x_\alpha$。】

例 4　If we had written mappings on the left, (2)would read: $(fg)x=g(fx)$. It is to avoid this reversal of factors that we put mappings on the right of their arguments.

㊀【如果我们把映射写在左边，则(2)记作 $(fg)x=g(fx)$。为了避免因子转换次序，我们把映射放在自变量的右边。】

[**分析**] 第一句采用了虚拟语气，主要说明，当初如果采用另一种符号记法，得到的式子是什么样的(但是实际上我们没那样做)；第二句是强调句(说明我们没那样做的原因)。

◆讲评◆　译文没抓住上述分析所说的两个语法要点，又不理解句子的数学含义，所以译文的第一句不准确，第二句中的短语“为了避免因子转换次序”含混不清，不论怎么理解都与原文的含义不合。

㊣【如果我们当初把映射写在左边，则(2)就要写作 $(fg)x=g(fx)$。正是为了避免因子(两个映射)交换次序时产生混乱，我们才把映射写在自变量的右边。】

练　习　4.2.3

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) Let S be the set of finite sequences of 0s and 1s and define a mapping f of S into itself by the rule: If $a=a_1a_2\cdots a_n(a_i=0 \text{ or } 1)$, then $af=a_1'a_2'\cdots a_n'$, where $0'=01$, $1'=10$. Show that af has no block 000 or 111 and that in $af^2(=aff)$ any block of length at least five contains 00 or 11.

㊀【令 S 为由 0 和 1 构成的有限的集合，而 S 到它本身的映射 f 定义为：若 $a=a_1a_2\cdots a_n(a_i=0 \text{ 或 } 1)$，则 $af=a_1'a_2'\cdots a_n'$，其中 $0'=01$，$1'=10$. 证明 af 中没有块 000 和 111，而在 af^2 中，任何长度至少为 5 的块含有 00 或 11。】

(2) With every set S we can associate the identity mapping I_S which maps each element of S to itself: $x\mapsto x$.

㊀【我们可以使恒等变换 I_S 和每一个集合 S 建立联系，它把 S 的每一个元素映成自己：$x\mapsto x$。】

[**词语注释**] identity mapping　恒等映射，恒等变换。

§4.2.4 Equivalence Relations[37] 【等价关系】

例 1 Let ω be a relation; we write $x\omega y$ to express the fact that x stands in the relation ω to y, i.e. that the pair (x,y) belongs to ω.

㊀【令 ω 为一种关系，我们用 $x\omega y$ 表达 x 处于由关系 ω 与 y 对立的一边的事实，即(x,y)属于关系 ω。】

◆讲评◆ 译者想采用直观的说法来翻译，结果不合数学的表述方式。事实上，stands in the relation ω to y 应译成"依关系 ω 与 y 关联"。

㊁【设 ω 为一种关系，我们用 $x\omega y$ 表示 x 依关系 ω 与 y 关联，即(x,y)属于关系 ω 这一事实。】

例 2 An equivalence on S separates the elements of S into classes, grouping together objects which agree in some particular respect.

㊀【集合 S 上的一个等价关系把 S 的元素分类，把在某特殊方面一致的元素归到一起。】

◆讲评◆ 英语的冠词 a(an)通常不译，译成"一个"反而使译文更不清楚；另外，翻译时要注意前后呼应，句末"归到一起"不如改成"归为一类"。

㊁【可用集合 S 上的等价关系把 S 的元素分类，使得在某特殊方面一致的元素归为一类。】

例 3 Thus the different S_x provide a division of S into non-empty subsets, any two of which are disjoint. This is called a partition of S.

㊀【这样不同的 S_x 就把 S 划分为非空的子集，并且任意两个子集都是不交的，这就称为 S 的一个划分。】

◆讲评◆ 这个句子由于中英文的表达有很大差异，需要根据原文的数学内容与逻辑关系进行意译。原译生硬地"直译"，结果译文的意思模糊不清；译者也没理解这两句之间的关系(先对例子进行归纳，接着给出定义)，把 division 和 partition 都译成"划分"，就犯了"自己用自己来定义"的逻辑错误。

㊁【这样，这些不同的 S_x 就提供了一种把 S 分解为互不相交的非空子集的方法。这种分解法称为 S 的一个划分。】

练 习 4.2.4

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) We then have a mapping $\lambda: S \to S/\sim$ which assigns to each $x \in S$ the block S_x; λ is called the natural mapping from S to $S/\sim$.

㊀【我们有映射 $\lambda: S \to S/\sim$ 使得每一个 $x \in S$ 对应分块 S_x，λ 称为从 S 到

$S/\sim$的自然投射。】

(2) Similarly, the relation "x has the same remainder after division by 2 as y" on **N** groups all the even numbers together and all the odd numbers.

㊒【类似地,关系"x 在除以 2 之后的余数和 y 一样"在 **N** 上把所有偶数和所有奇数归类在一起。】

§4.2.5 Mathematical Methods — Teaching and Learning 【数学方法——教与学】

本节的英文例句摘自世界著名数学教育家 A. 波里亚的名著《如何解题》[38],其中例 1、例 2 和例 3 所在段落的小标题是 How to solve it—Procedure for solving problem(该段通过解题的步骤来说明解题方法);例 3 和例 4 所在段落的小标题是 How to solve it—A dialogue (该段采用对话的方式来帮助读者深化对解题方法的认识。)

例 1 Second. Find the connection between the data and the unknown. You may be obliged to consider auxiliary problems if an immediate connection cannot be found. You should obtain eventually a plan of the solution.

㊒【第二,找出数据与未知数之间的联系。如果一个直接的联系不能找出,你可能不得不考虑辅助问题。你最后要得到一个解的计划。】

◆讲评◆ 这里 the data 与 the unknown 并列,应将前者译成"已知数据";problems 是复数也应体现;在上述否定句中 an immediate connection 意思并非"一个直接的联系",而是"任何直接的联系"。

㊎【第二,找出已知数据与未知量之间的联系。如果未能找出它们之间的直接联系,你可能不得不要考虑一些辅助问题。最后你应该得出一个解题方案。】

例 2 Here is a problem related to yours and solved before. Could you use it? Could you use its result? Could you use its method? Should you introduce some auxiliary element in order to make its use possible?

㊒【这里是一个关系到你的问题而且以前解决过。你能应用它吗? 你能应用它的结果? 你能应用它的方法? 为了使它的应用成为可能,你应该引入某些辅助元素吗?】

◆讲评◆ 代词 yours 在这里的意思是"你的问题";如采用上述句型,应补充为"关系到你的问题的问题"。文字表达上,"吗?"型语句最好改成"是否"语句。再者,可以采用意译,这不但可以避免文字太过呆板,而且可以把意思表达得更清楚。

㊣【假定这里有一个题目与你的题目有关联而且你以前已解答过。你能否应用它？比如，你能否应用它的结果或者应用它的方法？为了能够应用它，你是否需要引入某种辅助元素？】

例 3 If you cannot solve the proposed problem try to solve first some related problem. Could you imagine a more accessible related problem? A more general problem? A more special problem? An analogous problem? Could you solve a part of the problem? Keep only a part of the condition, drop the other part; how far is the unknown then determined, how can it vary? Could you derive something useful from the data? Could you think of other data appropriate to determine the unknown? Could you change the unknown or the data, or both if necessary, so that the new unknown and the new data are nearer to each other?

㊦【如果你不能解决这里提出的问题，请试着先解决某些相关的问题。你能想象一个更容易到达的相关问题吗？一个更一般的问题？一个更特殊的问题？一个类似的问题？你能解决这个问题的一部分吗？保留一部分条件，丢掉一部分条件；那么未知量被决定多远，它可能如何变化？你能从数据得到某些有用的东西吗？你能想到其他可以确定未知量的数据吗？你能改变未知量或数据，或者如果需要时同时改变，使得新的未知量和新的数据是互相接近吗？】

◆讲评◆ 这段每个单句都很容易理解和翻译，但要串成文章，则应细致加工。首先，本段列举这么多问题，其实有新老问题之区别，译文必须把它们明确化；同时，这些问题之间的关系不是都平等的，应按层次译出。其次，段中出现条件从句(省略形式)，应搞清楚相应的主句是什么。第三，分句 how far is the unknown then determined 不能直译成“那么未知量被决定多远”。

㊣【如果你不能解决所提出的问题，请试着先解决某些相关的问题。你能想象一个更容易到达的相关问题吗？如，一个更一般的问题，一个更特殊的问题，或一个类似的问题？你能解决所提出的问题的一部分吗？比如保留一部分条件，丢掉一部分条件之后，这时未知量可以确定到什么程度，它可能如何变化？你能否从已知的数据得到某些有用的东西？你能否考虑其他适合于确定未知量的已知数据？如果必要，你能否改变未知量或已知的数据，或者把两者都改变，以便新的未知量和新的已知数据彼此更为接近？】

例 4 What can I do? Visualize the problem as a whole as clearly and as vividly as you can. Do not concern yourself with details for the moment.

㊦【我可以做什么呢？使问题可视化成像一个整体那样清楚，像您可以做的那样生动。此时不要使自己关心细节。】

[词语注释] as a whole 作为一个整体，就整体来看。

◆讲评◆ (i) 原译把 as a whole as clearly 看成一个词组，并把它与后面的 as vividly as you can 并列；这是错误的，因为 as…as…句型中第一个 as 是副词，它后面不能接名词 a whole。实际上，这里只能把 as a whole 看成一个副词，作为一个状语；把 as clearly 看成与 as vividly 并列(也可以认为 as clearly 后省略了 as you can)，作为另一个状语。(ii) 本段的副标题是“A dialogue(对话)”，如不注意到这个标题，译文就可能使读者感到摸不着头脑。纠正的办法是：

(i) 可以翻译成对话：

㊣$_1$【问：“我能做什么呢?”答：“把整个题目形象化，使它变得尽可能清楚和生动。暂时不要为它的细节操心。”】

(ii) 也可不译成对话，而译成设问。如，

㊣$_2$【你能做什么呢？那就是把整个题目形象化，使它变得尽可能清楚和生动。暂时不要为它的细节操心。】

例 5 What could I perceive? A helpful idea, perhaps a decisive idea that shows you at a glance the way to the very end.

㊀【我能理解什么？一个有助的思想，可能是一个向你展示乍看之下通向末端的方法的决定性思想。】

[词语注释] perceive vt. 发觉，察觉，理解；at a glance 乍看之下，一看就……；very adv. 很；adj. 恰好的，正是的。

◆讲评◆ 根据上文(要你复习一些熟悉的内容，所谓“温故而知新”)，这里 perceive 的意思应是“发觉”。相应的对象 idea 应译成“思路”。the way to the very end 这里的意思应是“恰好通向问题最终解决的途径”。

㊣【你可能发觉什么？你可能发觉一个有益的思路，也许是一个决定性的思路，乍看之下，它向你展示一条恰好可通向问题最终解决的途径。】

练 习 4.2.5

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) Where should I start? Start again from the statement of the problem. Start when this statement is so clear to you and so well impressed on your mind that you may lose sight of it for a while without fear of losing it altogether.

㊀【我应从哪里开始？从问题的表述开始。当这个表述对你是如此清楚且如此良好地在你心中留下印象，以至于你可能短时间忘记它而不怕全部忘记它。】

[词语注释] lose sight of it 没有看见它，没有注意到它。

(2) How can an idea be helpful? It shows you the whole of the way or a part of the way; it suggests to you more or less distinctly how you can proceed? Ideas are more or less complete. You are lucky if you have any idea at all.

㊒【一个思路怎样才能是有益的？它向你展示了整个或部分方法；它多少不同地向你建议如何继续前进？思路是多少完整的。如果你有了任何全部思路，那么你就很幸运了。】

§4.3 代数、几何与函数论的译例评析

本节以出现在“代数、几何与函数论”这三大基础数学分支的教材与专业文献中的某些疑难语句为例，分析初学者在阅读和翻译过程中常见的错误，并给出供对照用的参考译文。

§4.3.1 Integers[37] 【整数】

例 1 Here we have not indicated the precise range of summation, since it is immaterial, but only the indices of summation μ, ν.

㊒【这里我们没有指出求和的准确范围，因为它是不重要的，但是只有求和 μ，ν 的指数。】

[**词语注释**] immaterial adj. 不重要的；summation n. 求和。

[**分析**] 这句由 since 引导的原因从句以插入语的方式出现，把主句分成两半，the indices 之前省略了 indicated。

◆讲评◆ (i) 译文采用直译，没注意到句中省略的成分，导致句子明显不通顺。(ii) 虽然 μ，ν 放在 summation 之后，但是，根据数学知识，我们知道 μ，ν 不是 summation 的同位语，而是 indices of summation 的同位语。(iii) 因为这时没有涉及指数式，indices 不表示指数，其意思是“指标”或“号标”，更准确地说是指“指标变量”。按照汉语表达习惯，可把译文修改如下：

㊓【这里除了给出求和的指标变量 μ，ν 外，没有指出求和的准确范围，因为后者并不重要。】

例 2 Then by I it will be enough to prove (i) $P(1)$and (ii) $(\forall n)(P(n)\Rightarrow P(n+1))$. For this means that the set S of all n for which $P(n)$holds contains 1 and contains $n+1$ whenever it contains n.

㊒【那么，由 I 证明(i)$P(1)$和 (ii)$(\forall n)(P(n)\Rightarrow P(n+1))$是足够的。对此，意味着使得 $P(n)$成立的所有 n 组成的集 S 包含 1 而且包含 $n+1$，无论何时它

包含了 n。】

◆讲评◆ 该译文有三个错误:(1) 第一句的主语译错了。(2) 第二句把 for 译成介词,从而把 for this 译成"对此"就错了,因为按这样理解,主句就找不到主语。事实上,for 在这里作连接词用,意思为"因为",第二句用于说明第一句论点成立的原因。由于这两句没有主从复合关系,所以常被误解。(3)第二句的后半部分表达含混不清。在数学中,一般 whenever 引导的从句常放在主句之后,是条件从句,全句可译成:"只要……就……"或"若……则……"。

㊣【那么根据 I,只要证明(i)$P(1)$和 (ii)$(\forall n)(P(n)\Rightarrow P(n+1))$就足够了。因为由此可知,由所有使得 $P(n)$成立的 n 组成的集 S 包含了 1,而且若 S 包含 n 则必包含 $n+1$。】

练 习 4.3.1

指出下面各题的译文中所存在的问题,并加以修改:

(1) Let S be a subset of $\mathbf{N}$ such that $1\in S$ and $n\in S$ whenever $m\in S$ for all $m<n$; then $S=\mathbf{N}$.

㊦【设 S 是 $\mathbf{N}$ 的子集使得 $1\in S$ 和 $n\in S$,无论 $m\in S$ 对于所有 $m<n$; 那么 $S=\mathbf{N}$。】

(2) Now, since S has no least element, $1\notin S$, so $1\in S'$; moreover, if $m\in S'$ for all $m<n$, then $n\in S'$, for otherwise n would be the least element in S. Thus by I′, $S'=\mathbf{N}$ and S must be empty.

㊦【现在,因为 S 没有最小元素,$1\in S$,所以 $1\notin S'$;对所有 $m<n$,如果 $m\in S'$,则 $n\in S'$,因为别的 n 将是 S 中的最小元素。这样由 I′知,$S'=\mathbf{N}$ 和 S 必须是空的。】

§4.3.2 Prime Numbers[25] 【素数】

例 1 This process for determining the existence of a prime greater than a given prime P may also be used, together with the existence of a single prime number 2, to prove by mathematical induction that there exists a countably infinite subset of the set of positive prime numbers.

㊦【确定大于一个给定素数 P 的素数的存在性过程以及素数 2 的存在性,可以通过数学归纳法来证明正素数集存在一个可数的无限子集。】

◆讲评◆ 译者对原文各小部分的意思是清楚的,但综合表达时就含糊不清。解决这个问题的关键是抓住主句的主要成分,理清意群之间的关系;同时,最好将被动句译成主动句,以符合汉语习惯,表达得更清楚。

㊣【应用确定大于一个给定素数 P 的素数的存在性的过程，以及素数 2 存在这一结论，借助于数学归纳法就可以证明，正素数集存在一个可数的无限子集。】

例 2 Given any integer m and prime p, the only positive divisors of p, and therefore the only possible positive common divisors of p and m, are p and 1.

㊀【给定任意整数 m 和素数 p，p 的唯一正因子，因此 p 和 m 的公因数仅为 p 和 1。】

◆讲评◆ 译者不理解句子的数学含义，采用字面上的直译，导致各意群之间逻辑关系不明确；此外，译文还漏译了 possible。应注意的是，句中 are p and 1 是它前面两个并列的主语的共同谓语部分，也可以理解成 the only positive divisors of p 之后省略了 are p and 1。由于中英文的差异，汉译时要注意必要的增删、修改(包括连接词及介词之类)。译文可改成：

㊣【对于任意给定的整数 m 和素数 p，因为 p 只有正因子 p 和 1，因此 p 和 m 的正公因子只可能是 p 和 1。】

例 3 This last assumption may be made without loss of generality, since if there exists a single integral multiple, there must be a smallest positive integral multiple of a that is divisible by p.

㊀【后面的这个假设不失一般性，这是因为如果存在一个唯一的整数倍数，那么必定存在 a 的一个最小正整数倍数可被 p 整除。】

[**分析**] 根据数学内容和英语知识应该知道，第一个 integral multiple 后面省略了 of a that is divisible by p。

◆讲评◆ 该译文把 a single 错译成“唯一的”不仅是对词义的误解，更说明译者不理解数学内容，因为根据上下文，显然存在无数多个满足条件的整数倍数。此外，译文的最后部分也没表达清楚。这句可意译成：

㊣【最后这个假设是不失一般性的，这是因为只要存在一个可被 p 整除的、a 的整数倍，就必定存在具有同样性质的最小的正整数倍。】

练 习 4.3.2

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) If p is a prime and m is any integer, then either p divides m or $(p, m)=1$.

㊀【如果 p 是一个素数，并且 m 是任意整数，则或 p 整除 m 或$(p,m)=1$。】

(2) Prove that 3^n-1 and, in general, m^n-1 is composite if n is greater

than one and m is greater than 2.

㊒【证明如果 n 是大于 1 的数且 m 是大于 2 的数，则一般地有 3^n-1 和 m^n-1 是合数。】

§4.3.3 Polynomials and Algebraic Functions[25] 【多项式与代数函数】

例 1 Two polynomials in a variable x may be equal for any nonnegative integral number of values of the variable x. Thus for a variable x, the equation $x^2-2x-3=0$ implies $x=3$ or $x=-1$.

㊒【两个关于变量 x 的多项式可能对于变量 x 的任意非负整数值都相等。因此，关于一个变量 x 的方程 $x^2-2x-3=0$ 蕴含着 $x=3$ 或 $x=-1$。】

[分析] 两个句子都是简单句，语法分析不难，难点在于对数学内容的理解。

◆讲评◆ 从数学内容看，第一句的译文是错误的。即使不知数学的详细内容，从逻辑上也会发现，第一句讲的“变量 x 的任意非负整数值”与第二句的结论 $x=3$ 或 $x=-1$ 不一致。

根据高等代数的基本知识知道，这里主要说明，x 看做变量与看做未定元时两者之间的差异：“两个关于变量 x 的多项式相等”指的是方程，由于 n 阶复方程只有 n 个根，所以“两个关于变量 x 的多项式”相等时，只能有 n 个 x 的值使他们相等；而“两个关于未定元 x 的多项式”的相等就是恒等。

这里必须指出的是，any 的含义可能是 some，也可能是 every（见《数学专业英语》第二章第 11 节），在这里只能译作 some。同时，这句的 number 只能译作“个”。再者，thus 在这里应译成“例如”，因为后一句只是举一个例子，而不是推理的结论。

㊓$_1$【两个关于变量 x 的多项式有可能对于变量 x 的某非负整数个值相等。例如，由关于变量 x 的方程 $x^2-2x-3=0$ 可以推出 $x=3$ 或 $x=-1$。】

或意译成：

㊓$_2$【两个关于变量 x 的多项式有可能对于变量 x 的 m 个值相等，其中 m 是某个非负整数。例如，由关于变量 x 的方程 $x^2-2x-3=0$ 可以推出 $x=3$ 或 $x=-1$。】

例 2 We now introduce a new set of symbols x, y, t, and consider equality, addition, subtraction, multiplication, and division in the total set composed of the new symbols and the complex numbers. The new symbols may be considered simply as symbols without any sets of values or assumed relations.

㊀【现在我们将介绍一个由符号 x,y,t 组成的新的集，以及在由这些新符号和那些复数组成的完全集中考虑等式、加法、减法、乘法和除法。这些新符号可以简单地被考虑为没有任何由值或假设关系组成的集的符号。】

◆讲评◆ (1) 虽然在多数情况下，a set of…和 the set of…译成"由……组成的集"，但是，根据实际情形可以译成"一组(种)……"或其他，在个别情形下还可不译。如，根据上下文，a new set of symbols x,y,t 可译成"一种由 x,y,t 表示的新符号"(具有新的含义的符号)；又如，symbols without any sets of values or assumed relations 可意译成"既没有值也没有相互关系的符号"。这样做，不仅简洁，而且表达得更清楚。(2) introduce 在这里要译成"引入"，因为这里的含义不是一般性的介绍。(3) 这里把 equality 译成"等式"，与"加法、减法"等概念不相称，应改为"相等"。(4) The total set 不能译成"完全集"("完全集"另有所指)，这里指的是"整个集"，但一般只需译成"集"，必要时可在其组成成员后加上"全体"，即把 the total set of…译成"由……全体组成的集"。

㊁【现在，我们引入一种由 x,y,t 表示的新符号，并在由新符号和复数全体组成的集上考虑相等、加法、减法、乘法和除法。可以把这种新符号简单地理解成既没有值也没有既定关系的符号。】

例 3 The concept of an algebraic function is an extension of the concept of a polynomial in that every polynomial $p(x)$ satisfies $f(x,y)=y-p(x)=0$, that is, a polynomial is a special case of an algebraic function that arises when $f(x,y)$ has the form $y-p(x)$.

㊀【代数函数的概念是多项式概念的一个推广，其中每个多项式 $p(x)$ 满足 $f(x,y)=y-p(x)=0$，也就是说，多项式是形如 $y-p(x)$ 的 $f(x,y)$ 所产生的代数函数的一个特殊情形。】

[分析] 插入语 that is 的前后各有一个主从复合句：第一个主从复合句含有一个由 in that 引导的从句；第二个主从复合句含有一个由 that 引导的定语从句，而这个定语从句也是主从复合句，含有一个由 when 引导的条件状语从句。进一步的分析见下面的讲评。

◆讲评◆ 译者把"in that"当成"，in which"来理解，译成"其中"。其实，根据数学知识，这里"in that"的意思是"因为"，说明为什么是推广。第二个主从复合句中由 that 引导的定语从句修饰的是 special case 而不是最靠近它的 algebraic function，因为由上一句知：多项式 $p(x)$ 就是形如 $y-p(x)$ 的 $f(x,y)$ 所产生的代数函数，而不是"它的特殊情形"。

㊁$_1$【代数函数的概念是多项式的概念的推广，因为每个多项式 $p(x)$ 都满足

$f(x, y)=y-p(x)=0$;这就是说,多项式是代数函数当 $f(x, y)$具有形式 $y-p(x)$时的特殊情形。】

也可以意译成:

㊣$_2$【代数函数的概念是多项式的概念的推广,因为每个多项式 $p(x)$都满足 $f(x, y)=y-p(x)=0$;这就是说,多项式是当 $f(x, y)$具有特殊形式 $y-p(x)$时的代数函数。】

练 习 4.3.3

指出下面各题的译文中所存在的问题,并加以修改:

(1) The polynomial $10x^6$ may be considered as a polynomial of degree six in x with coefficient 10, a polynomial of degree two in $2x^3$ with coefficient $\frac{5}{2}$, a polynomial of degree twelve in $\sqrt{x}$ with coefficient 10, and in many other ways.

㊀【多项式 $10x^6$ 可以被看做是一个关于变量 x 的 6 次多项式,它的系数为 10,或一个关于变量 $2x^3$ 的 2 次多项式,它的系数为$\frac{5}{2}$,或一个关于变量$\sqrt{x}$的 12 次多项式,它的系数 10,或用其他形式。】

(2) A polynomial equation $f(x,y)=0$, where $f(x,y)$ is considered as a polynomial in y with coefficients from the ring of polynomials in x with complex coefficients, defines y as an algebraic function (Section 3.16) and has as its real graph an algebraic plane curve.

㊀【多项式方程 $f(x, y)=0$,其中 $f(x, y)$被认为是一个关于变量 y 的多项式,它的系数来自关于变量 x、系数为复数的多项式环,定义 y 为一个代数函数(见 3.16 节),并且把一个代数平面曲线作为它的实图。】

§4.3.4 Groups[37] 【群】

例 1 It is a remarkable fact that the whole of group theory, which includes many deep results and is far from being fully explored yet, rests ultimately on this simple set of axioms.

㊀【一个值得注意的事实是整个群理论包含许多深层次的结论还未被完全研究,群论以简单的集合公理为基础。】

[**分析**] it 是形式主语,that 引导的从句是主语从句,该从句本身是个主从复合句,which 引导的非限制性定语从句把它的主语和谓语部分从中隔开。

◆讲评◆ 按照该译文的意思，本句强调的事实变成“整个群理论包含许多深层次的结论还未被完全研究”，这与原文不合。事实上，which 引导的非限制性定语从句只是对 that 引导的从句的主语 the whole of group theory 作补充说明而已，翻译时应根据汉语习惯，把次序作适当安排（见参文㊣$_1$）或者添加连接词作进一步的意译（见参文㊣$_2$）。此外，ultimately(adv. 最终地)必须译出；而把 this simple set of axioms 译成“简单的集合公理”是错的，因为根据数学知识可知，其本意是“这样一个简单的公理组”。

㊣$_1$【一个值得注意的事实是，整个群理论最终以这样一个简单的公理组为基础，尽管该理论包含了许多深层次的结果而且还远未得到彻底的研究。】

也可意译成：

㊣$_2$【一个值得注意的事实是，整个群理论尽管包含了许多深层次的结果而且离彻底研究还相差甚远，但是它最终是依赖于这样一个简单的公理组。】

例 2 We begin by observing that the axioms **G**. 1～4 are to some extent redundant; less is needed to verify that we have a group.

㊀【我们开始注意到公理 **G**. 1～4 在某种程度上是多余的，即验证一个群只需要更少的条件。】

[**词语注释**] redundant a. 过剩的，重复的。

◆讲评◆ 根据数学知识得知，选用的公理体系中的公理不允许有多余的；由于 redundant 的含义除了“多余的”，还有“重复的”等，所以 the axioms **G**. 1～4 are to some extent redundant 的意思指：其中的公理在某种程度上有交叉或重复的现象。这就是说，译文的表达与原意不合。此外，begin by 或 begin with 意思指：下面的讨论“从……开始”，可以意译成“首先”等。

㊣【首先，我们注意到公理 **G**. 1～4 有某种程度的重复，即验证某个数学对象是否为群只需要更少的条件。】

练 习 4.3.4

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) If this holds then $(1_G f)^2 = 1_G f$, where 1_G is the neutral of G; by division it follows that $1_G f$ is the neutral of H.

㊀【如果这个式子成立，则$(1_G f)^2 = 1_G f$，其中 1_G 是 G 的单位元，通过比较得出 $1_G f$ 也是 H 的单位元。】

(2) Thus $bx = 1$ has a solution for any $b \in S$; hence S satisfies (c) of Th. 1 and is therefore a group.

㊀【这样对 $\forall b \in S, bx = 1$ 有一个解，所以 S 满足定理 1 中的(c)，因此是一

个群。】

§4.3.5 The Parallel Postulate[39] 【平行公设】

例 1 We will call it the Euclidean parallel postulate because it distinguishes Euclidean geometry from other geometries based on parallel postulates.

㊀【由于它区分欧几里得几何学和建立在平行公设基础上的其他几何学，所以称它为欧几里得平行公设。】

[**词语注释**] Euclidean parallel postulate 欧几里得平行公设。

◆讲评◆ 短语 distinguish A from B 应译成"使(把)A 与 B 区分开"，该译文虽然有此意思，但表达得不够清楚。特别要指出的是，第一次出现的 postulate 是单数而且前面有定冠词，而第二次出现的 postulates 是复数，其所指的对象不同前者，即泛指其他各种各样的公设；同时，从几何知识及几何学发展演变的历史知道，根据不同的平行公设可以产生不同的几何学。译文应体现这些主要的意思。

㊁【我们将它称为欧几里得平行公设，因为它使得欧几里得几何学与建立在各种平行公设基础上的其他几何学区别开来。】

例 2 We want to be rigorous here and so should not introduce into our proofs assumptions that have not been stated explicitly. At the same time, don't jump to the conclusion that parallel lines are not equidistant.

㊀【这里我们希望严谨，而且不会介绍没有被清楚叙述的证明假设，同时也不跳到平行直线间不是等距离的结论。】

◆讲评◆ 动词 introduce 有多种含义，此处 introduce into 的意思是"把……引入……"，assumptions 是宾语，因为后面要接定语从句，所以放在 into our proofs 之后。译者错误地理解 introduce 在这里的含义，没能正确分析句子的结构，错把 proofs assumptions 译成一个词组。又，jump to 意思指"突然间从一个看法转变为另一个看法"。译文可修改为

㊁【因为在这里我们要作严密的论证，所以不应该把未经清楚叙述的假设引入证明之中。同时，也不要反过来得出平行直线间不等距的结论。】

例 3 So we cannot use this criterion to convince ourselves of the correctness of the parallel postulate —— that would be circular reasoning.

㊀【所以我们不能用这个判别法来说服我们自己接受平行公设是正确的，那将成为循环论证。】

◆讲评◆ 破折号"——"后的 that 指的是"用该判别法来证明平行公设的正确性"，应该点明。如果只用"那"字来直译 that，就可能造成指代不清。另一

种处理办法是把“那”字换成“否则”二字，使得与上一句的否定形式相对应。

㊣$_1$【所以，不能用这个判别法来论证平行公设的正确性，因为用那种方法来证就会变成循环论证。】

㊣$_2$【所以，不能用这个判别法来论证平行公设的正确性，否则就会变成循环论证。】

练 习 4.3.5

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) It may seem “obvious” to you, perhaps because you have been conditioned to think in Euclidean terms.

㊘【对于你而言它可能看过去是“显然的”，可能是因为你只在欧几里得的术语上考虑。】

(2) The trouble with this criterion for parallelism is that it turns out to be logically equivalent to the Euclidean parallel postulate that was just stated (see the section Equivalence of Parallel Postulates in Chapter 2).

㊘【关于这个平行判别法的问题在于它逻辑等价于刚刚论述过的欧几里得平行公设(参看第二章平行公设的等价部分)。】

§4.3.6 Vector Space of n-Tuples[26] 【n 元向量空间】

例 1 Such a proof is of interest because it shows that the Cauchy-Schwarz inequality is a consequence of the five properties of the dot product listed in Theorem 6.1 and does not depend on the particular definition that was used to deduce these properties.

㊘【这样的证明是有趣的，因为它表明柯西－施瓦茨不等式是定理 6.1 中关于点乘的五个性质的一个推论，并且它不依赖于特定的定义，而这些定义常常用来推导这些性质。】

[**词语注释**] dot product 点乘；Cauchy-Schwarz inequality 柯西－施瓦茨不等式。

◆讲评◆ was used to 虽然有表示过去的习惯性动作的可能，但是根据上下文知，这里只有一个定义，而且仅作一次推导，不可能“常常”如此。正确的翻译是“曾经被用来”。由数学知识或一般逻辑知，and 后面的结论是前一个结论的推论，所以 and 应译成“从而”。此外，that was used to deduce these properties 是限制性定语从句，修饰的程度很强，不宜简单地译成分句。

㊣【这样的证明是有趣的，因为它表明柯西－施瓦茨不等式是定理 6.1 中所

列的关于点乘的五个性质的推论，从而不依赖于曾用以推导这些性质的特殊定义。】

例 2 This proof also shows that the equality sign holds in (6.1) if and only if $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$. But $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$ if and only if $x\boldsymbol{A} = y\boldsymbol{B}$. This equation holds, in turn, if and only if one of the vectors is a scalar multiple of the other.

㊀【这个证明说明了(6.1)式中等号成立当且仅当 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$。但是 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$ 当且仅当 $x\boldsymbol{A} = y\boldsymbol{B}$，反之，这个等式成立当且仅当一个向量是其他的纯量倍数。】

◆讲评◆ 在这里，in turn 的含义不是“反之”而是“接下来”。实际上，原文三句话表示三个互相衔接的推理过程。据此，but 不应直译成“但是”，而应意译成“而”。此外，the other 意思不是“其他的”而是“另一个”；同时，原文省略的 vector 应补译出。

㊁【这个证明也说明了(6.1)式中等号成立当且仅当 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$；而 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$ 当且仅当 $x\boldsymbol{A} = y\boldsymbol{B}$；进一步，后面这个等式成立当且仅当其中一个向量是另一个向量的纯量倍数。】

练 习 4.3.6

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) When we translate this in terms of x and y, it will yield (6.1).

㊀【当我们根据 x 和 y 来表示它，就会得到(6.1)。】

(2) The Cauchy-Schwarz inequality has important applications to the properties of the length or norm of a vector, a concept which we discuss next.

㊀【柯西－施瓦茨不等式在长度的性质或向量的范数上有很重要的应用，下面我们将讨论这个概念。】

§4.3.7 Conic Sections[25] 【圆锥曲线】

例 1 The cone has two nappes meeting at P (Figure 4.3.1).

㊀【这个圆锥体有两叶(曲面)交于点 P(见图 4.3.1)。】

[**词语注释**] nappe n. 叶。

◆讲评◆ 译文含混不清。实际上，根据上下文知，这里 cone 实际上是指圆锥曲面(圆锥体的表面)；原文的意思是指“该圆锥曲面由两叶组成，它们相交于点 P”。原文的 has 既可以译成“有”，也可以不译成“有”，分词短语 meeting at P 既可以放在 nappes 之前，也可以放在后面，关键是看能否表达得清楚且简洁。

㊁$_1$【这个圆锥(共)有两叶，它们交于点 P(见图 4.3.1)。】

或意译成：

㊣$_2$【这个圆锥由交于点 P 的两叶组成(见图 4.3.1)。】

例 2 The locus of points on the set of lines perpendicular to the plane of the circle and through points of the circle is called a right circular cylinder (Figure 4.3.2)and may be considered as a limiting case of the cone as the distance PQ increases without bound (Figure 4.3.1).

㊟【一组垂直于圆所在的平面并且通过圆上的点的直线上的轨迹称为正圆柱(见图 4.3.2),并且圆柱可以认为是当距离 PQ 在无限增长时圆锥的一种极限形式(见图 4.3.1)。】

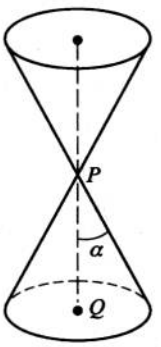


Figure 4.3.1

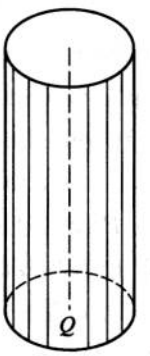


Figure 4.3.2

[**分析**] 这是一个修饰成分复杂的简单句,主语部分的中心是"the locus of points";谓语部分由两个并列成分组成,用 and 把它们隔开。

◆讲评◆ 翻译这句的关键是根据数学知识把主语表达清楚。图形是用"点的轨迹"来定义的,条件的描述最终要落实到这种点。所以,一看就知译文有错。

原文与 the locus of points 联系最紧的修饰语是 on the set of lines(说明是在那些直线上的点);接下来说明确定这些直线的因素有两个:一是垂直于平面,二是经过圆上的点。把上面的分析综合起来就知道主语部分的含义。因为主语的修饰成分重叠较多,用一个名词性词组不易把它表达清楚,所以应采用分段形式。值得注意的是,涉及轨迹的概念时,要强调"所有"满足条件的点。

㊣【考虑垂直于圆所在的平面且经过该圆上的点的所有直线,由这些直线上的点形成的轨迹称为正圆柱(见图 4.3.2),它也可以看成是当距离 PQ 无限增加时圆锥(见图 4.3.1)的一种极限形式。】(**注**:这里把 and 译成"也"。)

练 习 4.3.7

指出下面各题的译文中所存在的问题,并加以修改:

(1) Let Π be an arbitrary real plane and consider the right circular cone generated by lines through the fixed point P and a given nondegenerate circle with center Q as above.

㊀【设 Π 是任意的实平面，并且考虑由通过固定点 P 的直线和上述给定的以 Q 为圆心的非退化的圆所生成的正圆锥。】

(2) Let the constant angle between the generating lines and PQ be α.

㊀【设母线和 PQ 之间的夹角为常数 α。】

§ 4.3.8 Higher Plane Curves[25] 【高次平面曲线】

例 1 A point P of a curve such that every line through P intersects the curve with a multiplicity (Section 8.2) at least two at P is called a singular point of the curve. If some line through a singular point P intersects the curve with multiplicity two at P, then P is a double point.

㊀【曲线上一点 P 使得通过 P 的每一条直线都与曲线相交于点 P 至少二重(见 8.2 节)，则称 P 为曲线的奇异点。如果通过奇异点 P 的某一条直线与曲线相交于点 P 二重，则 P 是一个二重点。】

[**词语注释**] singular point 奇异点；multiplicity two 重数为 2。

◆讲评◆ 这两句多处表达含混不清。其中(i)利用前面(8.2 节)定义的概念—— 重数(multiplicity)来定义奇异点，必须把重数译出；在用"若……则……"的形式来表达数学定义时，连接词"若"和"则"缺一不可。(ii)根据上下文知，第二句是"二重点"的定义，而不是在论证 P 是一个二重点，所以原文是省略形式(省略了 called)，翻译时要补上。此外，译文用"相交于点 P 二重"来定义"二重点"，易造成混淆。一般说来，应避免用字眼非常接近、语义容易混淆的文字来互相定义。

㊁【若曲线上一点 P 使得通过 P 的每一条直线与该曲线在点 P 相交的重数(见 8.2 节)至少为 2，则称 P 为曲线的奇异点。如果有一条通过奇异点 P 的直线与曲线在点 P 相交的重数为 2，则称 P 为二重点。】

例 2 This can be proved using the fact that if an equation $f(x, y)=0$ of degree n and the equation of the line are solved simultaneously, then the resulting equation in one variable is either identically zero or of degree at most n.

㊀【这个可以用实例来加以证明，即如果 n 阶方程 $f(x, y)=0$ 和直线方程同时求解，则推导过程的方程关于一个变量或者恒等于 0 或者最高阶为 n。】

◆讲评◆ 这句译文有如下几处错误：(1) 数学英语常用 fact 表示"正确的结论"，但不表示例子，不可把它译成"实例"；(2) 读者若记得此前(如 § 2.7)已

经学过的数学术语 simultaneous equations(联立方程),就应想到这里的 solved simultaneously 不应该译成"同时求解",应译成"联立求解";(3) 句中的 resulting 虽然是-ing 形式,但在这里不表示"推导过程",the resulting equation 应译成推导出来的方程;(4) in one variable 应译成 equation 的定语,而原来的译文不仅在语言表达上有毛病,而且在数学上是错的。

㊣【这个结论可由以下事实证得:如果把 n 阶方程 $f(x, y)=0$ 与该直线的方程联立求解,则得出的一元方程要么恒等于 0 要么是阶数不超过 n 的方程。】

例 3 A unicursal curve is characterized by the fact that the coordinates of every point on the curve may be expressed rationally in terms of a single parameter.

㊦【一个单行曲线可以这样刻画,即曲线上每一个点的坐标可以根据单个参数来理性地表示。】

[**词语注释**] unicursal curve 单行曲线,有理曲线;parameter n. 参数。

◆**讲评**◆ Rationally 虽然在日常用语中可译成"理性地、合理地",但在这里译成"理性地"肯定不妥。根据上下文和有关数学知识可推测,其含义是"用有理式"或"用有理函数"。当然,要能作出这样的推测,需具备有关知识并经较多的训练才有做到。

㊣【一个有理曲线可以这样刻画,即曲线上每一个点的坐标可以由单个参数的有理式来表示。】

练 习 4.3.8

指出下面各题的译文中所存在的问题,并加以修改:

(1) In general, at a singular point P it (a curve of degree n) has k tangents when every line through P intersects the curve with multiplicity at least k at P and some line intersects the curve with multiplicity exactly k at P.

㊦【一般地,当每一条通过点 P 的直线与这条曲线在相交于点 P 至少 k 重且存在某一条直线和这条曲线的相交于点 P 恰好 k 重,此时,一条 n 阶曲线在一个奇异点 P 上有 k 条切线。】

(2) The Folium of Descartes, $x^3+y^3=3axy$ (Figure 4.3.3), has a node at the origin and the line $x+y+a=0$ as an asymptote, the semicubical parabola $y^2=x^3$ (Figure 4.3.4) has a cusp at the origin, and the curve $y^2=x^2(x-1)$ (Figure 4.3.5) has an isolated point at the origin.

㊦【笛卡儿叶线,$x^3+y^3=3axy$(图 4.3.3),有一结点在原点上,并且直线 $x+y+a=0$ 作为一条渐近线,半三次抛物线 $y^2=x^3$(图 4.3.4)有一尖点在原点

上，并且曲线 $y^2=x^2(x-1)$（图 4.3.5）有一孤立点在原点上。】

［词语注释］Folium of Descartes　笛卡儿叶线；semicubical parabola　半三次抛物线；node　结点；isolated point　孤立点。

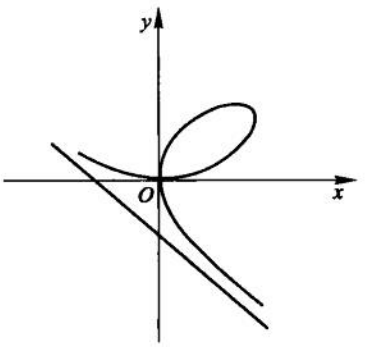


Figure 4.3.3

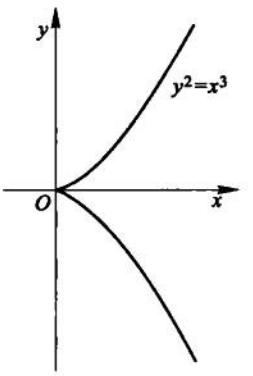


Figure 4.3.4

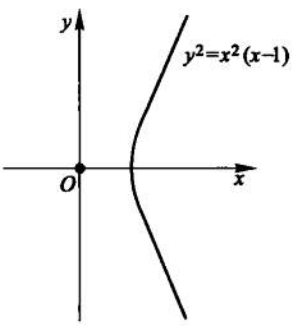


Figure 4.3.5

§ 4.3.9　Zeros of an Analytic Function[40]　【解析函数的零点】

内容与背景提示

这篇短文摘自教材 Functions of one complex variable (2nd ed.)，介绍单复变函数论的一个重要的结果——关于解析函数的零点的结论，即 Liouville 定理，并用它来证明代数学基本定理：任何非常数的多项式必有零点。由于代数学本身无法证明的基本定理，在复变函数论中竟然用“很简短的几行文字”就证出来了，这在历史上一直被认为是一个奇迹。其实，Liouville 定理建立在复变函数论的一系列有关研究的基础上。

这本教材的写作风格与此前的许多教材不同，作者采用启发式教学法，语言比较活泼。短文以多项式的有关性质开始，类比出整函数的定义和有关结论，最后再把它应用到多项式，其中多处给出评论或提示。在文字表达上，本文少用被动式、多用主动式，少用纯书面语（甚至用 get 而不用 obtain），论证过程涉及前面假设的条件时采用过去式动词（was）作谓语；一些专业术语的使用也别具一格。学习这类文章时，读者对于一些似是而非的论断要仔细推敲，尤其对否定式的理解要倍加小心。

例 1　**Definition 1.** If $f: G\to\mathbf{C}$ is analytic and a in G satisfies $f(a)=0$ then a is a zero of f of multiplicity $m\geqslant 1$ if there is an analytic function $g: G\to\mathbf{C}$ such that $f(z)=(z-a)^m g(z)$ where $g(a)\neq 0$.

误【**定义 1**　如果 $f: G\to\mathbf{C}$ 解析且 a 在 G 中满足 $f(a)=0$，则 a 是重数

$m \geqslant 1$的 f 的一个零点，如果存在一个解析函数 $g: G \to \mathbf{C}$ 使得 $f(z) = (z-a)^m g(z)$，其中 $g(a) \neq 0$.】

[词语注释] zero 零，零点；zero of multiplicity m 重数为 m 的零点。

◆讲评◆ 译者不了解其中的数学含义，表达上也存在问题。首先应注意，翻译定义时，最好采用"称为"之类动词来联系被定义的术语(即使原文主句用 is 代替 is called 之类来做谓语也应如此)。其次，a zero of f of multiplicity $m \geqslant 1$ 中的 of multiplicity $m \geqslant 1$ 不是修饰 f 而是修饰 zero，只因 multiplicity $m \geqslant 1$ 太长，原文把它与 f 对调位置，应译成"f 的 m 重零点($m \geqslant 1$)"。再者，前后两个 if 从句，最好不要都把 if 都译成"如果"，应将大小前提的表达方式适当区别。此外，a in G satisfies…也不宜逐字对译。

㊣【定义 1 设 $f: G \to \mathbf{C}$ 解析且 $a \in G$ 满足 $f(a) = 0$，如果存在一个解析函数 $g: G \to \mathbf{C}$ 使得 $f(z) = (z-a)^m g(z)$，其中 $g(a) \neq 0$，$m \geqslant 1$，则称 a 是 f 的 m 重零点。】

例 2 If $p(z)$and $q(z)$are two polynomials then it is well known that $p(z) = s(z)q(z) + r(z)$ where $s(z)$ and $r(z)$ are also polynomials and the degree of $r(z)$is less than the degree of $q(z)$.

㊎【如果 $p(z)$和 $q(z)$是两个多项式，那么已知的是 $p(z) = s(z)q(z) + r(z)$，其中 $s(z)$和 $r(z)$也是多项式且 $r(z)$的阶数小于 $q(z)$的阶数。】

◆讲评◆ 译文把 it is well known 直译成"已知的是"，容易使人误以为后面涉及的内容是已知条件；其实，if 引导的从句是条件，then 之后的主句是结论。短语 it is well known 经常译作"大家知道"，在这里可以译成"如前所述，可以得出"。

㊣【如果 $p(z)$和 $q(z)$是两个多项式，那么如前所述，可以得出 $p(z) = s(z)q(z) + r(z)$，其中 $s(z)$和 $r(z)$也是多项式且 $r(z)$的阶数小于 $q(z)$的阶数。】

练 习 4.3.9

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) Another property of polynomials is that no non constant polynomial is bounded.

㊎$_1$【多项式的另一个性质是：不是非常数的多项式是有界的。】

㊎$_2$【多项式的另一个性质是：常数的多项式是有界的。】

㊎$_3$【多项式的另一个性质是：没有非常数的多项式是有界的。】

(2) If $n =$ the degree of the polynomial $p(z)$and $a_1, \cdots, a_k$ are all the dis-

tinct zeros of $p(z)$ then $p(z)=(z-a_1)^{m_1}\cdots(z-a_k)^{m_k}s(z)$ where $s(z)$ is a polynomial with no zeros.

㊎【如果 $n=$多项式 $p(z)$的阶且 a_1，…，a_k 都是 $p(z)$的不同的零点，则 $p(z)=(z-a_1)^{m_1}\cdots(z-a_k)^{m_k}s(z)$，其中 $s(z)$是一个带有非零点的多项式。】

§4.4 应用数学和数学应用文献的译例评析

本节以出现在应用数学和数学应用领域的教材与专业文献中的某些疑难语句为例，分析初学者在阅读和翻译过程中常见的错误，并给出供对照用的参考译文。

§4.4.1 Newton's Law[41] 【牛顿定律】

例 1 A spring-mass system cannot be solved without formulating an equation which describes its motion.

㊎【如果没有设计描述运动的等式，弹簧质量系统也就得不到解决。】

[**词语注释**] formulate vt. 明确地表达，构想出，使……公式化。

◆**讲评**◆ 把 formulating 翻译成"设计"是不妥的；equation 在这里应译成"方程"。"系统得不到解决"的表达不通顺，解决的对象应是"问题"。

㊍【如果没有明确地表达成一个描述运动的方程，弹簧质量系统的问题就得不到解决。】

例 2 Fortunately many experimental observations culminated in Newton's second law of motion describing how a particle reacts to a force.

㊎【幸运地，很多实验观察在描述粒子在力作用下怎么反应的牛顿第二定律中达到顶峰。】

[**词语注释**] culminate in 达到顶峰，最后变成。

◆**讲评**◆ 这里把 culminate in 译成"达到顶峰"是不妥的；把 describing 引导的分词短语译成前置定语显得不够清晰。

㊍【幸运的是，很多基于实验的观察最后形成了牛顿第二运动定律，该定律描述粒子的运动是如何对力的作用作出反应。】

例 3 There are no point masses in nature. Thus, this formula is valid only to the extent in which the finite size of a mass can be ignored.

㊎【在自然界没有点式群体。因此，这个公式仅仅对限定的质量有效的范围可能被忽视。】

[**词语注释**] point mass 点式群体，质点。

[分析] 第二句 to the extent 是主句的状语，意思是“在这个范围(程度)”；in which the finite size of a mass can be ignored 是定语从句，修饰 extent。

◆讲评◆ (i) 虽然在一些数学词典上 point mass 的注释是点式群体，但是现在考虑的是物理(力学)中的问题，应该查物理(力学)的词典；或者根据上下文猜出是“质点”或“点质量”。(ii) 译文没有正确分析句子的结构，导致错译，特别把 can be ignored 当成主句的谓语，更是大错。(iii) the finite size of a mass 指的是“物体的体积大小有限”，而不是“限定的质量”。

㊣【质点在自然界是不存在的。因此，这个公式仅在所考虑物体的有限体积可以忽略不计的情形下成立。】

例 4 A second approximation has its origins in work by twentieth century physicists in which Newton's law is shown to be invalid as the velocities involved approach the speed of light. However, as long as the velocity of a mass is significantly less than the speed of light, Newton's law remains a good approximation.

㊀【一个二次近似起源于 20 世纪科学家工作中，牛顿定律被发现当速度趋于光速时是无效的。但是，只要一个质量的速度具有重大意义地小于光速，牛顿定律仍然是好的近似。】

◆讲评◆ (1) 虽然在一些数学词典上 second approximation 的注释是“二次近似”，但是根据上下文(见例 2、例 3 和本例的第二句话)知道，原来谈及的是用牛顿定律给出的对运动的近似描述，现在提到的是爱因斯坦相对论，所以这里的 a second approximation 指的是“另一种近似描述”。为了表述得更清晰，翻译时可在文字上作一些补充。(2) 虽然 significantly 在许多词典中的注释是“具有重大意义地”和“意味深长地”，但在数学中常译作“显著地”、“很大地”等；特别是，这里的 significantly less than 可译成“远小于”。

㊣【关于运动规律的另一种近似描述源于 20 世纪物理学家的工作；这种描述指明了，当运动速度趋于光速时牛顿定律失效。但是，只要一个质量的速度远小于光速，牛顿定律仍然是很好的近似描述。】

例 5 Suppose that an external force $\boldsymbol{G}_1$ is applied to m_1, and $\boldsymbol{G}_2$ to m_2. By applying Newton's second law to each mass, show the law can be applied to the rigid body consisting of both masses, if $\boldsymbol{x}$ is replaced by the center of mass $\boldsymbol{x}_{cm}$ [i. e., show $m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}_{cm}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}$, where m is the total mass, $m=m_1+m_2$, $\boldsymbol{x}_{cm}$ is the center of mass, $\boldsymbol{x}_{cm}=\dfrac{m_1\boldsymbol{x}_1+m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2}$, and $\boldsymbol{F}$ is the sum of forces applied, $\boldsymbol{F}=$

G_1+G_2]. The motion of the center of mass of the rigid body is thus determined. However, its rotation remains unknown.

㊀【假定一个外力 G_1 作用于 m_1 上，G_2 作用于 m_2 上，通过应用牛顿第二定律于每一个质点上，证明定律可以应用于由质点组成的刚体上，如 x 由质点中心 x_{cm} 取代［即证明 $m\frac{d^2x_{cm}}{dt^2}=F$，这里 m 是总质量，$m=m_1+m_2$，x_{cm} 是质点中心，$x_{cm}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$，$F$ 是外力之和，$F=G_1+G_2$］，于是刚体中心质点的运动是确定的，但是它的转动未知。】

◆讲评◆ 译者未能理解原文的意思，采用逐个词直译，结果逻辑混乱，表达不清。

㊁【假定外力 G_1 作用于 m_1 上，G_2 作用于 m_2 上。通过把牛顿第二定律应用于这两个质点上，证明当（公式中的）x 用质心 x_{cm} 代替时，牛顿第二定律也可以应用于由这两个质点组成的刚体（即证明 $m\frac{d^2x_{cm}}{dt^2}=F$，其中 m 是总质量，即 $m=m_1+m_2$；x_{cm} 是质心，即 $x_{cm}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$，$F$ 是外力之和，即 $F=G_1+G_2$）。于是，刚体质心的运动规律可以确定，但有关刚体旋转的情形则未能得知。】

练 习 4.4.1

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) We emphasize the word approximation, for although mathematics is frequently treated as a science of exactness, mathematics is applied to models which only approximate the real world.

㊀【我们强调近似这个单词，虽然数学常常被当做是一门精确的科学，数学应用于真实世界的模型。】

(2) Generalize the result of exercise 1.1 to a rigid body consisting of N masses.

㊀【概括练习 1.1 关于一个由 N 个质点组成的坚硬物体的结果。】

［词语注释］generalize vt. 概括而论，推广；generalize…to… 把……推广至……。

§ 4.4.2 Applications in the Biological Sciences[42] 【在生物科学的应用】

例 1 It is sometimes quite a challenge to explain why some behavior that

the solutions of a problem exhibit is not behavior that would be expected of the physical system that the equation purports to model.

㊀【有时这是一个很大的挑战：为什么一个问题的解展示的某种行为不是被期望的行为，而是方程描述模型的物理系统的行为。】

[词语注释] purport vt. 宣称，据称是。

[分析] 不定式 to explain 所引导的短语作主语，why 引导的宾语从句中的主语是 behavior，表语是另一个 behavior，各带一个定语从句，of the physical system 是第二个 behavior 的定语，最后一个 that 引导的定语从句修饰 system。

◆讲评◆ 尽管定语从句 that would be expected 和 of the physical system 都是第二个 behavior 的定语，但是二者之间不存在“不是”与“而是”的选择关系。

㊁【有时会遇到这样一个很有挑战性的问题，即如何解释一个问题（方程）的解的性质不是人们所期望刻画的物理系统的性质，尽管该方程被称为那个物理系统的模型。】

例 2 Often the defect can be remedied at the expense of clarity and ease of understanding.

㊀$_1$【通常这种误区可以以通俗易懂的解释来纠正。】

㊀$_2$【通常这个缺陷可用理解的清楚和容易为代价进行补救。】

[词语注释] remedy v. 补救；at the expense of… 牺牲……，以……为代价。

◆讲评◆ the defect 指的是上一句所指出的“方程的解的性质和实际问题的解的性质不一致”。联系上下文可以分析出这句的意思是：“要弥补这个缺陷，就要用较精细的模型采用更复杂的计算，这就影响了表述的清晰性和理解的容易程度”。clarity 应指 clarity of explanation，它和 ease of understanding 并列。所以，译文 1 不合原文的意思。译文 2 采用直译，似无大错，但含糊不清，读者不知所云。

㊁【通常弥补这个缺陷的办法是以牺牲阐述的清晰度和理解的容易程度为代价的。】

例 3 This can be an expensive trade-off: simplicity and clarity with possible fallacious behavior, versus obscurity and accuracy of behavior.

㊀【这可能是一个昂贵的交易：简单和清楚以及可能的谬误行为对抗行为的模糊和准确。】

[词语注释] trade-off 交换，交易；fallacious adj. 谬误的，靠不住的；versus prep. 对抗；obscurity n. 模糊，不清楚。

◆讲评◆ 译者在对内容不清楚的情况下采用直译，因此未能准确选词，结果表述不清而且有错。应注意，simplicity and clarity 是并列的，所指的是表述方式，possible fallacious behavior 指的是伴随的结果；但是 obscurity 与 accuracy 不是同等地位的，前者指的是表述方式，而 accuracy of behavior 是结果。

㊣【这可能是一笔代价很高的交易，其一方是简单易懂而描述的性质可能有误，另一方是晦涩难懂但描述的性质是准确的。】

例 4 Most of these equations have variables separable, but others are examples of special classes of differential equations that can be studied productively.

㊀【这些方程大部分有可分的变量，但是其他的是具有学习价值的微分方程典型类型的例子。】

◆讲评◆ 按照专业的表达习惯，have variables separable 应译成“是可分离变量的”。But 不是总译成“但是”，这里应译成“而”。

㊣【这些方程大部分是可分离变量的，而其余的是一些很值得学习的微分方程特殊类型的例子。】

例 5 Here the topic is populations where the growth is restricted, rather than unrestricted as it was in Section 1.2. But differential equations similar to the logistic equation, such as the equation

$$\frac{dy}{dt}=(d-cy)(b-ay), \tag{2.1}$$

which is clearly a generalization of the logistic equation, govern such other processes as bimolecular chemical reactions and the spread of flu epidemics.

㊀【这里给出的题目是出生率受限制的地方物种数，不是 1.2 节中地方物种不受限制的情况。但是微分方程类似于符号逻辑方程，比如说这个方程

$$\frac{dy}{dt}=(d-cy)(b-ay) \tag{2.1}$$

是一个简单明了的符号逻辑方程的一般形式，它可表示诸如双分子化学反应和流感的扩散这些过程情况。】

[词语注释] population n. 人口，动植物个体的总数、总体；logistic equation 逻辑斯谛方程，logistic 方程；growth n. 生长，增长性，生成物。

◆讲评◆ 译文对 population，growth，govern 和 logistic equation 的理解都是错误的；其中 population 和 growth 各有多个含义，应结合上下文进行推敲，适当选择；对 logistic 这种单词，文中有解释，切忌自己乱作构词推断。又，generalization 在这里应该译成“推广”。

㊣$_1$【这里的题目是研究其增长性有限制的某种生物的总体，不像 1.2 节那样对增长性不加限制。但是，一些类似于 logistic 方程的微分方程，比如方程

$$\frac{dy}{dt}=(d-cy)(b-ay) \tag{2.1}$$

显然它是 logistic 方程的推广，适用于其他类型的过程，即诸如双分子化学反应和流感的扩散之类过程。】

㊣$_2$【这里的题目是研究其增长性有限制的某种生物的总体，不像 1.2 节那样对增长性不加限制。但是，一些类似于 logistic 方程的微分方程适用于其他类型的过程，比如方程

$$\frac{dy}{dt}=(d-cy)(b-ay) \tag{2.1}$$

（显然是 logistic 方程的推广），适用于诸如双分子化学反应和流感的扩散之类过程。】

例 6 Strange as it may seem at first glance, this equation has served very well at predicting the size of populations living in restricted environments.

㊘【乍一看，像是有点陌生，这个方程为预测生活在受限制环境的人口大小提供很好的帮助。】

◆讲评◆ 原文形容词 strange 放在句首，as 紧跟其后时，这时 as 当连词，意思是“虽然”，而 strange as it may seem at first glance 是让步状语从句。译文没能正确分析句型，把 as 译成“像”是错的。此外，the size of populations 泛指“生物总体的规模”或“生物总体的大小”，不应译成“人口大小”。

㊣【虽然这个方程乍看起来有点不可思议，但它却可以很好地应用于生活在特定环境中的生物总体的规模的预测。】

例 7 Part of the problem of estimating a is that there are competitors for all natural resources, and the equation as formulated does not take this explicitly into account. All of the effects of competition are incorporated into the one coefficient a, so a is more than merely an observable “death rate”.

㊘【评估 a 的一部分问题是：有些竞争者为了获得所有自然资源而竞争，同时刻画的方程不能很明显地考虑它，所有这些竞争的结果将被合并成一个系数 a，所以 a 更是一个可观察的“死亡率”。】

[**词语注释**] take…into account 对……加以考虑；more than merely 绝非仅是；incorporated into 使……并入。

◆讲评◆ 这里 there are competitors for all natural resources competitors 指的是“抑制资源发展的对手”，而不是争夺资源的人类群体；把 more than

merely 译成“更是”也不妥。

㊣【对 a 估值的部分困难是，任何一种自然资源都存在与之对抗的竞争者，而已经形成的这个方程没有清楚地考虑这一点。于是，所有竞争的效果都被合并成一个系数 a，所以 a 绝非仅是一个可观察的“死亡率”。】

例 8 Observe the disturbing fact that for most of its early history a population is small. It then experiences a short period of very rapid growth that increases the size of the population to near its possible maximum, and then the size of the population becomes nearly constant at this very large size (the carrying capacity). The population of the earth has dramatically increased during this century, so it would appear that mankind is in the short period of rapid growth.

㊥【观察下具有干扰性的事实是在地球的早期历史中，人口是比较少的，它经历一个短暂又快速增长以致增长快到它所可能允许的最大值，然后人口总数将停在这么大的一个饱和量中稳定。本世纪人口增长引人注目，所以它将出现在人类这个快速增长的短期中。】

◆讲评◆ 应注意不定冠词与定冠词用法的区别。原文第一句 a population 指的是一般的生物个体的总数，而不是人类。接着第二句 the population 是指第一句涉及的对象，即一般生物。第三句 the population of the earth 所指的才是人口。最后一个分句采用虚拟语气，would 表示推测，意思为“当是”、“就会”。

㊣【请观察如下带有干扰性的事实：一种生物的总体在其早期历史的大部分时间内是很小的。接着，它经历一个短暂而快速的增长期，这使该生物总体的规模几乎增长到其可能允许的最大值，然后总体的规模就几乎停留在这个很大的规模(饱和量)上。本世纪地球上的人口急剧增长，所以，人类应是处在短暂而快速的增长期。】

练 习 4.4.2

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) In the last section we saw that the differential equation for unrestricted growth was $\frac{dy}{dt} = ry$. However, it is not reasonable to think that any support system can sustain unrestricted growth for any extended period of time.

㊥【最后一部分我们看到对于非受限增长的微分方程是$\frac{dy}{dt}=ry$。然而，没

有理由来考虑任何一个支持的系统可以经得起对于任何一段扩展时期的非受限的增长。】

(2) But all of this assumes that any possible growth is unrestricted if $b>d$. How does one account for the fact that natural resources, be they an agar medium in a Petri dish, or a tropical rain forest, or the Pacific Ocean, are finite?

㊒【所有这些任何一种可能性增长的假设都是非受限制的，如果 $b>d$。如何找出一个事实来解释自然资源都是有限的呢？比如像是一个 Petri 盘中的培养基物媒介，或是一片热带雨林，或是太平洋吗？】

[词语注释] Petri dish 有盖培养皿，皮氏培养皿；agar medium 琼脂培养基。

(3) If earth's population is following a logistic curve, then we are not yet at one-half of the carrying capacity of the earth, because the rate of increase of population is still increasing. If we were past half-way, then the rate of increase would be decreasing. Of course the flaw in this reasoning is that we are probably not following a logistic curve, and we may be in greater trouble than this simple analysis would dictate.

㊒【如果地球上的人口满足一条符号逻辑曲线，那么我们还未到地球承载容量的一半，因为人口增长率一直在增加。如果我们超过一半，人口增长率将下降。当然裂痕的原因在于我们可能不满足这一符号逻辑曲线，我们可能会陷入更大的困境而不仅仅是分析所预示那样。】

§4.4.3 The Utility of Graphs[43] 【图论的应用】

例 1 The best way to illustrate the utility of graph is via a "Cook's tour" of several simple problems that can be stated and solved via graph theory.

㊒【说明图论的应用的最好方法是借助于对几个简单问题的"库克旅游"，这些问题能借助于图论来叙述和解决。】

[词语注释] Cook's tour 库克游览(库克指英国著名航海家 James Cook)。

◆讲评◆ utility 不同于 use，它的含义是"功用"、"有效性"等，译成"使用"不妥。外国成语 Cook's tour 一般应采用意译，若无另加注解，把 Cook's tour 直接译成"库克旅游"，将使多数读者不知其意。that 引导的定语从句是非限制性的且句子不长，应直接译成主句的定语。

㊓【说明图论的功用的最好方法是从概述几个简单的、可用图论来叙述并解决的问题(如"库克游览")入手。】

例 2 Euler gave an exact characterization of when such problems have solutions, in term of each dot having an even number of line-ends going into it, thereby showing in particular that the problem of the bridges of Königsberg has no solution.

㊎【欧拉对这个问题何时有解给出了一个准确的特征，从每个点具有偶数个线端进入的角度，特别证明了哥尼斯堡七桥问题无解。】

[**词语注释**] thereby adv. 藉以；the problem of the bridges of Königsberg 哥尼斯堡七桥问题。

◆讲评◆ 译文没正确译出原意。事实上，in term of 引导的短语是方式状语，修饰 gave；showing 引导的分词短语的逻辑主语仍是 Euler。另外，line-end 在一般数学词典找不到解释，但根据数学知识知道，所指为“直线段”或“曲线段”，可意译成“连线”。又，going into it 直译为“进入”不妥（理应有入也有出），可译成“与它连接”。为了准确起见，可把相应的图论术语放在括号中作为补充说明。

㊍$_1$【欧拉采用“每个点（顶点）都有偶数条连线（边）与之连接”的说法，给出了该类问题有解的准确特征；特别地，由此可证得哥尼斯堡七桥问题无解。】

或进一步意译为：

㊍$_2$【欧拉采用“每个点都是偶顶点”的数学语言，准确地刻画了该类问题有解的特征，由此即可推出哥尼斯堡七桥问题这一特殊问题无解。】

例 3 The World Wide Web Communities can be modeled as a graph, where the Web pages are represented by dots or vertices and the hyperlinks between them are represented by lines or edges in the graph.

㊎【万维网可以用图来建模，其中网页用点或顶点表示，它们之间的超链接用线或边在图中表示。】

[**词语注释**] hyperlinks n. 超链接

◆讲评◆ 注意 or 的译法并非总是译成“或”、“或者”。本题 or 的前、后分别是日常用语和专业术语，or 起了一个转换的作用。翻译时应译出这层意思。另外，前后比较知，vertices 后省略了 in the graph，它是 vertices 的定语，翻译时宜补上。

㊍【万维网可以用图来建模，其中网页用点，即图的顶点来表示，它们之间的超链接用线，即图的边来表示。】

练 习 4.4.3

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) Discrete mathematics —— the study of discrete structures (usually finite collections)and their properties —— includes combinatorics (the study of combination and enumeration of objects), algorithms for computing properties of collections of objects, and graph theory (the study of objects and their relations).

㊀【离散数学 —— 离散结构(通常有限集)及其性质的研究 —— 包括组合学(对象的组合与计数的研究)、对象的集的计算性质的算法和图论(对象及其关系的研究)。】

(2) As will become evident after reading this chapter, graphs are excellent modeling tools.

㊀【因为读完这一章如下情况就会很明显,所以图论是优秀的建模工具。】

§4.4.4 Nonstandard Problems in Linear Programming[44] 【线性规划的非标准问题】

例 1 Therefore, given a minimum problem, we may solve instead the problem of maximizing the negative of the objective over the same feasible region.

㊀【因此,给定一个最小值问题,代替它,我们解在同一可行域的负的目标函数的最大化问题。】

[**词语注释**] objective function 目标函数;feasible region 可行域。

◆讲评◆ 这句语法不难,关键是如何翻译 the negative。把"the negative of the objective"译成"负的目标函数"或"目标函数的负面"都是错的。实际上,该短语指的是"原目标函数前加上负号"(注:the negative of the number 可译成"该数的相反数")。

㊁$_1$【因此,要解一个给定的最小值问题,我们可以换成去解在同一可行域上的、原目标函数前加上负号后的最大值问题。】

㊁$_2$【因此,要解一个给定的最小值问题,我们可以换成去解在同一可行域上的最大值问题,只是目标函数要改变符号。】

例 2 It should be pointed out that there are other ways of solving minimum problems directly, and it may not be computationally most efficient to translate all minimum problems into maximum problems in this way.

㊀【应该指出还有其他方法可以直接解决最小值问题,且它可能不是最有效的计算,结果把所有最小值问题用这个方式翻译成最大值问题。】

◆讲评◆ 本句 that 引导的是主语从句,其中 and 连接的是第二个分句,这

个分句中 it 是形式主语，不定式 to translate 引导短语才是真正主语。译者未能正确分析句子结构，导致对第二个分句的翻译有如下错误：(1) 把形式主语 it 译成“它”，导致指代不清；(2) 把不定式短语译成结果状语，与原文的意思明显不同。

㊣【应该指出，还有其他可以直接解决最小值问题的方法，而且用这种方式把最小值问题转化成最大值问题在计算上可能不是最有效的。】

例 3 To be specific, insert a new artificial variable a_i into each equality constraint of the current system, and define a new objective function to be the sum of the negatives of a_i terms.

㊀【特别地，插入一个新的人工变量 a_i 到现在系统中的每一个平等约束条件，且定义一个为负 a_i 项之和的新的目标函数。】

[**词语注释**] equality constraint 等式约束。

◆讲评◆ 译文的错误至少有三处：(1) 把专业术语“等式约束”错译成“平等约束条件”；(2) 由于采用呆板的直译，错译了插入变量 a_i 的情形：实际上这里指的是，在第 i 个等式约束中插入 a_i，而不是在每一个等式约束中都插入同一个 a_i；(3) the sum of the negatives of a_i terms 应译成“各个 a_i 项的相反数之和”。

㊣【特别地，在现行系统的每个等式约束中分别插入一个新的人工变量 a_i，且定义一新的目标函数，它是各个 a_i 项的相反数之和。】

练 习 4.4.4

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) Record also that in the simplex algorithm, the initial system represented the origin, which was feasible, and at the each succeeding step another basic feasible solution was produced.

㊀【回顾在单纯形法中，初始系统也代表原点，它是可行的，且在随后的每一个步骤中产生了另一种基本可行解。】

(2) The first step of our phase algorithm is to remove negative signs on the constant constraint bounds by multiplying by -1, if necessary. Referring to the problem of Example 1.2, the first constraint in (4.4)becomes $x_1-x_2\leqslant 1$.

㊀【我们阶段算法的第一步是在常数约束范围内通过乘以 -1，移除负号，假如需要的话。关于例题 1.2，(4.4)中的第一个约束条件变成 $x_1-x_2\leqslant 1$。】

§4.4.5 Construction of Mathematical Models[45] 【数学模型的构建】

例 1 Moreover, it is imperative to be sufficiently precise (ultimately)in

the formulation of the problem to allow for translation of the verbal statements describing the problem into mathematical symbology.

㊀【而且,在构想问题时必须充分地准确(最终地),以便允许把描述问题的口头语句翻译成数学符号。】

[**词语注释**] imperative a. 必须的,紧急的,命令式的; verbal a. 口头的,语言的。

◆讲评◆ 译文主要存在问题是翻译时用词不够恰当,如 formulation 虽兼有"构想"和"表述"的意思,但根据上文的内容,且为了能和下面 describing 一致,应该选"表述"。verbal 虽有"口头的"的含义,但根据下文,这里 verbal statements 应指与数学语言相对应的"日常用语"。

㊁【而且,在表述问题时(最终)必须足够地准确,以便能够把用日常用语描述的问题转换成数学符号的描述。】

例 2 Usually you have to sort through large amounts of data and identify some particular aspect of the situation to study.

㊀【通常你必须通过大量数据作分类和认同所要研究的情形的某些特别方面。】

◆讲评◆ (1) 这里 you 是泛指研究的人,可译成人们。(2) 动词 sort 既有"分类"的意思,也有"整理和挑选"的意思,这里应采用后者;identify 在这里应译成"确立"。(3) 动词 sort 与 identify 并列,但 some particular aspect 只是后者的宾语,不是前者的宾语;通过分析逻辑关系知道,这里的 and 应译成"从而"。

㊁【人们通常都必须对大量数据进行整理和挑选,从而确立有关情形的某个要研究的特殊内容。】

例 3 Often, we will find that we are not quite ready to complete this step, or we may end up with a model so unwieldy we cannot solve or interpret it.

㊀【经常地,我们将发现我们没有大量的准备来完成这个步骤,或者我们可能由于一个模型不好用而结束,我们没办法解决或解释它。】

[**词语注释**] unwieldy adj. 难处理的,不好使用的。

◆讲评◆ we cannot solve or interpret it 是结果状语从句(省略连接词),它与主句的逻辑关系应译出。单词 unwieldy 的含义在这里应选"难处理的",因为它的含义广些,比较符合建模过程的实际情形。

㊁【经常会发现,我们由于准备不够充分而未能完成这个步骤,或者可能由于所建的模型难以处理以至于无法求解或无法解释它而不了了之。】

例 4 We need to be careful to design the test in such a way as to include observations over the same range of values of the various independent variables

we expect to encounter when actually using the model.

㊎【我们需要按如下方式小心地设计试验，使得它包含对各种自变量的值的同样范围的观察，这些变量是当准确地应用模型时我们希望遇到的。】

◆讲评◆ 这句较长，为避免错误，译前应先对句子结构进行分析。to design the test 是 careful 的补语，in such a way 是状语，修饰 design；we expect to encounter 是一个限制性定语从句(省略关系代词 which)，它带一个时间状语从句。根据数学知识知道，这个定语从句不是修饰 variables，而是修饰 values 的。再者，一般说来，各个自变量不可能在同样的范围内变化，因此这里的 the same range 应指“与我们希望见到的取值范围一样”。这里采用意译。

㊍【我们需要仔细设计试验，试验内容要按照准确地应用模型时各种自变量将会取值的那个范围进行观察。】

例 5 We will want to explain our model in terms that the decision makers and users can understand if it is ever to be of use to anyone.

㊎【我们要解释我们的模型，以便决策者和用户能够理解，如果它曾经对于任何人都是有用的。】

◆讲评◆ 虽然在一些词典上对出现在 if 语句中的 ever 的注解是“曾经”，但是此时不宜这样翻译，因为 ever 在此起强调作用。Anyone 在这里是泛指，意思是“不论是谁”，可以转译成“人们”。

㊍【如果我们的模型确实对人们有用的话，我们一定要用决策者和用户都能理解的语言来对它进行解释说明。】

例 6 Before offering an alternative procedure that emphasizes the iterative nature of the modeling process, let's discuss the advantages of the methodology depicted in Figure model.

㊎【在提供一个强调建模过程的迭代性质的替代过程之前，让我们来讨论用图形模式描绘的方法的优点。】

[**词语注释**] depict v. 描绘，描写(书面用语，相当于口语的 describe)。

◆讲评◆ 译文采用直译，选词欠妥当，表达得不太顺畅。本句宜采用意译。

㊍【下面将提供另一个程序，它把重点放在建模过程的迭代性质；在这之前，让我们来讨论用图形模式描绘建模方法的优点。】

例 7 The first two steps are more artistic or original in nature. They involve abstracting the essential features of the problem under study, neglecting any factors judged to be unimportant, and postulating relationships precise enough to help answer the questions posed by the problem.

㊀【头两个步骤比较有艺术或原创性质。它们包含了所研究问题的本质特征的抽象，忽略了被判断为不重要的任何因素，设定关系足够地准确使得能够帮助回答该问题提出的各种问题。】

◆**讲评**◆ 词组 in nature 的含义是“在本质上”，第二句三个并列的动名词 abstracting，neglecting 和 postulating 都是 involve 的宾语。以上两处被错译。另外，短语中 questions posed by the problem 中的 questions 和 problem 不宜同时译成“问题”。

㊁【开头两个步骤在本质上比较有艺术性或原创性。这两步的工作包括：抽象所研究问题的本质特征，忽略各种被断定为不重要的因素，设定足够准确的关系以便帮助解答由该问题产生的各种疑问。】

例 8 Although these steps admittedly involve a degree of craftsmanship, we will learn some scientific techniques we can apply to appraise the importance of a particular variable and the preciseness of an assumed relationship. Nevertheless, when generating numbers in Steps 3 and 4, remember that the process has been largely inexact and intuitive.

㊀【虽然这两个步骤允许包含一定程度的技巧，我们将学习某些我们能用它来评价特殊变量的重要性和所假定关系的准确性的科学技术。不过，当在第三、四步产生数时，要记住这个过程已经大部分不准确和主观了。】

[**词语注释**] admittedly adv. 无可否认地，明白地；craftsmanship n. 技术，技巧，手艺。

◆**讲评**◆ 词组 a degree of craftsmanship 的意思是“一定程度的技巧”，而不是“技术的级别”。相应于 although 引导的从句，主句在汉译时，通常应补充连接词“但是”。原文 when generating numbers in Steps 3 and 4 有所省略，汉译时应适当补充。

㊁【虽然这两个步骤无可否认地包含一定程度的技巧，但是我们将只是学习某些能用于评价特殊变量的重要性及所假定关系的准确性的科学技术。尽管如此，要记住的是：在第三、四步由模型产生出新的数据时，这个过程已经有很大程度的不准确性与主观性了。】

练 习 4.4.5

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) The variables the model seeks to explain are the dependent variables and there may be several of these.

㊀【模型寻求解释的变量是相关变量并且其中可能有几个要找。】

(2) The assumptions made in Step 2 may be reasonable over a restricted range of the independent variables but very poor outside of those values.

㊀【在第二个步骤所作的假设可能在自变量的一个限制范围内是合理的，但在这些值之外很差。】

(3) Just as we cannot prove a theorem simply by demonstrating many cases that support the theorem, likewise, we cannot extrapolate broad generalizations from the particular evidence we gather about our model.

㊀【正像我们不能通过证明许多支持定理的例子来证明一个定理，类似地，我们不能由我们关于模型收集的特殊证据推断广阔的一般性。】

§4.5 计算数学和计算机科学文献的译例评析

本节以出现在计算数学和计算机科学领域的教材与专业文献中的疑难语句为例，分析初学者在阅读和翻译过程中常见的错误，并给出供对照用的参考译文。

§4.5.1 Introduction to Numerical Methods[46] 【数值方法简介】

例 1 We use the adjective "reliable" to indicate that it is essential to have confidence in any answers produced and an assessment of reliability can form part of the analysis of a method.

㊀【我们用形容词"可靠"来指明对得出的答案有信心和可靠性的评价可以形成分析方法的一部分是必要的。】

◆讲评◆ 译文是建立在对句子结构的错误分析的基础上译出的。实际上，that 引导的宾语从句由两个并列的分句组成(用 and 连接)。to have confidence in any answers 应指客观上"答案令人相信"，而不是指主观上的"对答案有信心"。

㊁【我们用形容词"可靠"来指明：得出的任何答案必须令人相信，同时，可靠性的评估是对一种计算方法进行分析的组成部分。】

例 2 The "derivation" stage is concerned with deriving and describing the sequence of numerical steps which is expected will eventually lead to the required numerical answers. The complete description of these steps, perhaps written in some pseudo-programming language, is called an algorithm.

㊀【"推导"阶段是有关推导和描述希望最终得到数值答案的数值步骤的序列。这些步骤的完全描述，可能用称作算法的伪程序语言来写。】

◆讲评◆ 译者可能想对第一句采用直译，但实际上变成了英汉单词之间的简单机械的对应，译错了原意。第二句主语是 the complete description，谓语部分是 is called an algorithm；而分词 written 引导的短语只是补充说明的插入成分，当 description 的定语；译者未能正确分析句子成分，结果也译错了。

㊣【"推导"阶段要涉及推导和描述数值计算步骤的序列以便最终将导出数值答案。这些步骤的完整描述称作算法，它可能用某种伪程序语言写出。】

例 3 Although this may seem a fairly small reduction in the number of operations (and hence the time taken to evaluate the expression) for high degree polynomials the savings achievable are very large indeed.

㊦【虽然这可能是在数的运算中的相当小的简化(因此用时间评价表达式)，而对高阶多项式，可达节省确实非常大。】

◆讲评◆ 词组 in the number of operations 的意思是"在运算次数上"，而不是"在数的运算中"。括号中 the time taken to evaluate the expression 是括号前的句子的进一步推论，与前面的 the number of operations 并列。所以译成"因此用时间评价表达式"是错的。

㊣【虽然对这个问题在运算次数上可能减少不多(因此在求算式的值时所消耗的时间可能减少不多)，但对于高阶多项式而言，确实可以极大地节省所需的运算量。】

例 4 It is important to realize that, in general, we shall not be able to find this error.

㊦【意识到这一点很重要，通常，我们不能发现这个错误。】

◆讲评◆ 动词 realize 应该译成"认识到"或"领悟到"；error 在这里的意思是"误差"，而不是一般的"错误"；be able 着重强调能力，shall not be able 宜译成"无法"。

㊣【重要的是要认识到，在一般情形下我们无法求出这个误差。】

练 习 4.5.1

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) The subject of numerical analysis is concerned with the derivation, analysis and implementation of methods for obtaining reliable numerical answers to mathematical problems.

㊦【数值分析这门学科是有关为了得到数学问题的可靠的数值答案的推导、分析与实现的方法。】

(2) In Section 6.8 we describe a method which employs interval subdivi-

sion to estimate a definite integral correct to some specified tolerance.

㊒【我们在 6.8 节描述一种方法，其中应用区间细化的方法去估计定积分，纠正某些指定偏差。】

(3) Intuitively, we would expect that an improvement in accuracy can be obtained by dividing the interval of integration into a number of subintervals and then applying the trapezium rule to each sub-interval in turn.

㊒【直观地，我们希望提高精确度可以通过划分积分区间成很多子区间，然后在子区间按顺序应用梯形规则得到。】

§ 4.5.2 Prelude to Numerical Partial Differential Equations 【数值偏微分方程导言】

下面这些例子摘自教材《数值偏微分方程》[47]的导言。

例 1 As in other areas of experimental work, the experiments must be carefully designed. The total problem may involve the physics that describes the original problem; the mathematics involved in the partial differential equation, the difference equation and the solution algorithm for solving the difference equation; and the computer on which the numerical work will be done.

㊒【像实验工作的其他领域一样，实验必须计划周全。总的问题可能包括描述原始问题的物理学；数学包括偏微分方程，差分方程和求差分方程的解的算法；并且计算机在数值工作中也将运行。】

◆讲评◆ 译者把第一句从句中的介词短语 other areas(其他领域)看做主句的主语 the experiments(实验)的比较对象，在语法上是说不通的。注意到 as 引导的比较从句经常出现省略，通过分析不难看到，本句在 in other areas 之前省略了 the experiments。要译好第二句，需要先正确分析句子的结构。应注意的是，第二句虽然用了两个分号，其实 the mathematics, the computer 和 the physics 一样都是 may involve 的并列宾语。由于这三个宾语的修饰成分都较长，所以宾语之间用分号隔开。

㊓【像其他领域的实验工作一样，这些实验必须计划周全。全部问题可能包括描述原始问题的物理学，在偏微分方程、差分方程和求差分方程的解的算法中的数学，以及即将用于进行数值工作的计算机。】

例 2 Several times throughout the text we will assign small experiments that will hopefully clarify some aspects of the schemes we will be studying. It is hoped that these experiments will begin to teach some useful experimental techniques that can be used in the area of numerical solution of partial differen-

tial equations.

㊀【本文从头到尾将会几次地分配一些小实验，这些实验将有希望阐述我们将研究的方案的一些方面。这些实验将有望开始就教会一些有用的实验技巧，并且这些实验技巧可以使用在解偏微分方程的领域中。】

◆讲评◆ 第一句 clarify 的意思不是“阐述”，而是“使……变得清晰明了”；定语从句 we will be studying 修饰 some aspects，而不是 schemes。第二句原文又长又繁琐，直译不易表达，宜采用意译。

㊁【书中有数次安排了一些小实验，这些实验可望把学生即将学习的某些内容变得清晰明了。我们希望这些实验能开始教给学生一些有用的，并且可以用于偏微分方程数值解这一领域的实验技巧。】

例 3 In other parts of the text, it will be necessary or best for the reader to decide that a small experiment is needed, and then design and run that experiment. It is hoped that one thing the reader will learn from this text is that numerical experimentation is a part of the subject of numerical solution of partial differential equations.

㊀【在本书的其他部分中，它对读者解读一些必要的实验，计划和运行实验将是必需的或者是最好的。读者将有望从本书中学到数值实验，它是偏微分方程数值解这门学科的一部分。】

◆讲评◆ 译文对第一句的成分分析错了，一些单词的意思也翻译错了。特别应指出，it 作形式主语时，本身没有含义，不可译成“它”。根据上下文（特别是最后一个 that 引导的表语从句）判断，第二句 learn from 的意思是“从……获悉”或“认识到”。

㊁【在本书的其他部分中，读者必须或最好决定一个必要的小实验，同时设计并运行那个实验。希望读者将从本书认识到的一个道理是，数值实验是偏微分方程数值解这个学科的一部分。】

例 4 A slight background in the methods and theory of partial differential equations will be assumed. An elementary course in partial differential equations is generally sufficient. In addition, since part of the emphasis of the text is on the implementation of the difference schemes, it will be assumed that the reader has sufficient programming skills to implement the schemes and appreciate the implementations that are discussed.

㊀【偏微分方程的方法和理论的部分背景将被假设。偏微分方程的初步课程通常是足够的。此外，由于本书强调的部分是不同方案的执行，所以它将假定读者已有足够的编程技巧来实行方案和欣赏已讨论的工具。】

[**词语注释**] difference schemes 差分格式;implementation 实现。

◆讲评◆ 本段说明学习本书的读者应具备的数学基础,所谓 background 指的就是这个。单词 implementation 的数学术语的含义是"实现"。动词 implement 作为日常用语的含义是"执行"、"实施",但是在这里也应译成"实现"。句中两次出现 will 所表示的将来时是指"学生今后的学习"或"书中以下部分"而言的,而在实际上,书中的内容作者已经确定了。中文没有类似语法现象,汉译时不应把 will 译成"将",而可以不译。如,下面把原文译成主动式,用"本书"当主语,will 未译。

㊣【本书假定读者具有偏微分方程的方法和理论的基本知识。通常,修过偏微分方程的初级课程就足够了。此外,由于差分格式的实现是本书重点内容的一部分,所以本书还假定读者已掌握足够的编程技巧来实现差分格式并评议所讨论的各种实现方案。】

例 5 A common technique is to develop and test the schemes based on model linear problems that have similarities to the desired nonlinear problem.

㊀【常用技巧是基于相似于特定的非线性问题的模式线性问题来发展和检验方案。】

◆讲评◆ 译文把 based 引导的分词短语当做状语修饰 develop and test,其实该短语是作定语修饰 the schemes。动词 develop 虽然常译作"发展"、"开发",但通常不与"方案"搭配;当 develop 的宾语是表示"想法"等一类名词时,它应译作"阐述"。

$㊣_1$【一种常用技术是阐述和检测这类方案:基于与所求的非线性问题具有相似性的模型线性问题的方案。】

或

$㊣_2$【一种常用技术是阐述和检测基于模型线性问题的方案,这类线性问题与所求的非线性问题具有相似性。】

练 习 4.5.2

指出下面各题的译文中所存在的问题,并加以修改:

(1) When we develop linear methods that might be applicable to these nonlinear problems, a numerical experiment should be conducted using the linearized method to try to solve the nonlinear problem.

㊀【当我们发展这些可能对非线性问题有用的线性方法时,数值实验应当用解非线性问题的线性方法来实施。】

(2) The reader should be aware that there has been a large amount of

work done on the above problem. There is an exact solution to the problem which is not especially useful to us. It is probably better to try to work this problem without knowing the exact solution since that is the situation in which a working numerical analyst must function.

㊀【读者应当意识到在以上问题存在大量工作要做。存在着对我们并不特别有用的问题的精确解。试着在未知精确解的情况下解决这个问题可能更好，因为这是一位从事数值分析者必须运作的。】

§4.5.3 Introduction to the Theory of Computation[48] 【计算理论简介】

例1 Let's begin with an overview of those areas in the theory of computation that we present in this course. Then, you'll have a chance to learn and/or review some mathematical concepts that you will need later.

㊀【首先，让我们概述一下在本课程中所讲述的计算理论的那些领域，然后，你将有机会学习或者复习一些后面需要的数学概念。】

◆讲评◆ 定语从句 that we present in this course 修饰的对象是 those areas，而不是 the theory。这可从代词 those 的出现得到启示。此外，begin with…意思是"从……开始"，并不与后面的 then 构成首先与然后的关系。另外，在汉语中，领域的概念大于学科，所以这里的 areas 应指"方面"。

㊁【让我们从概述本课程中将要介绍的一些计算理论开始。那么，你们将有机会学习或者复习一些今后需要用到的数学概念。】

例2 Using this scheme, we can demonstrate a method for giving evidence that certain problems are computationally hard, even if we are unable to prove that they are so.

㊀【运用这个方案，我们能够证明一种方法，给出某些问题是难以计算的证据，尽管我们还不能证明它们是很难计算的。】

◆讲评◆ 动词 demonstrate 虽有"证明"的含义，但在这里的主要意思不是"证明"，而是"展示"，或转译成"提出"。另外，译者把"证明一种方法"和"给出……证据"译成并列成分是不妥的。下面给出的是意译。

㊁【运用这个方案，我们能够给出一种为"某些问题难以计算"的说法提供证据的方法，尽管我们还不能证明这种说法的正确性。】

例3 You have several options when you confront a problem that appears to be computationally hard. First, by understanding which aspect of the problem is at the root of the difficulty, you may be able to alter it so that the prob-

lem is more easily solvable. Second, you may be able to settle for less than a perfect solution to the problem. In certain cases finding solutions that only approximate the perfect one is relatively easy.

㊀【当你面对一个看来很难计算的问题时，有几种选择。首先，搞清楚困难的根源，你可能会作某些变动，使问题变得容易解决。其次，你可能会求出问题的不那么完美的解。在某些情况下，寻找问题的近似解相对容易一些。】

◆讲评◆ 译文基本正确，只是译文表达得不够准确。例如，may be able 不宜译成“可能会”，而应译成“也许可以”，因为这时是在对学生作启发或提建议，而不是猜测。

㊁【面对一个看来很难计算的问题时，你可有几种选择。首先，你应搞清楚困难的根源，也许可以作某种替换以使问题变得容易解决。其次，你也许可以先求出问题的稍欠完美的近似解。在某些情况下，寻找问题的近似解相对容易一些。】

例 4 One applied area that has been affected directly by complexity theory is the ancient field of cryptography. In most fields, an easy computational problem is preferable to a hard one because easy ones are cheaper to solve.

㊀【受到复杂性理论直接影响的一个应用领域是密码学的古代领域。在绝大多数的情况下，容易计算的问题比难计算的问题更可取，因为容易问题的求解费用较便宜。】

◆讲评◆ 从字面上看，把 the ancient field of cryptography 直译成“密码学的古代领域”似乎没错，其实不合原文的意思。应该注意的是，ancient 还有一个意思是“自古以来(就有)的”；而且这时 of 的作用是具体说明 the ancient field 所指的是 cryptography，应将二者译成同位语。此外，形容词 cheap 虽然常表示“便宜”，但在这里不仅是“费用较便宜”，应转译为“代价较小”。

㊁【已经受到复杂性理论直接影响的一个应用领域是密码学，这一历史悠久的研究领域。在大部分领域中，容易计算的问题比难以计算的问题更可取，因为求解容易的问题代价较小。】

练 习 4.5.3

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) Among the consequences of this profound result was the development of ideas concerning theoretical models of computers that eventually would help lead to the construction of actual computers.

㊀【关于计算机理论模型思想是在这个意义深远的结论的推论中发展，它

将最终有助于导致实用计算机的构造。】

(2) The theories of computability and complexity require a precise definition of a computer. Automata theory allows practice with formal definitions of computation as it introduces concepts relevant to other nontheoretical areas of computer science.

㊀【自动机理论是开始学习计算理论的一个良好的地方。可计算性理论和复杂性要求计算机的一个精确定义。自动机理论允许用计算的正式定义的实践,像它引入与计算机科学的其他非理论领域有关的概念一样。】

§4.5.4 P Versus NP Question and NP Completement[48] 【P 与 NP 问题及 NP 完全性】

例 1 For our purposes, polynomial differences in running time are considered to be small, whereas exponential differences are considered to be large. Let's look at why we chose to make this separation between polynomials and exponentials rather than between some other classes of functions.

㊀【对于我们的目的来说,多项式在运行时间上的差异被认为是很小的,但是指数在运行时间上的差异被认为是很大的。让我们看看为什么我们要将多项式和指数分开考虑而不是将其他函数类之间分开。】

[**词语注释**] separation n. 分离,分开,分界限。

◆讲评◆ polynomial 和 exponential 在这里都是形容词定语。名词 separation 在这里可译成"分界限";动词 make this separation 在这里的意思是"采用这种分界限来衡量运行时间的长短"。后面的 polynomials 与 exponentials 都是名词,应当成函数来译。

㊁【为了我们的目的,把运行时间的多项式差看成是很小的,而把指数差看成是很大的。下面将看到,为什么我们采用多项式函数和指数函数之间的分界限而不采用其他函数类之间的分界限。】

例 2 P is the class of languages that are decidable in polynomial time on a deterministic single-tape Turing machine.

㊀【P 是一种语言类,它的多项式时间是由单一型的图灵机决定的。】

[**词语注释**] decidable adj. 可判定的;deterministic single-tape Turing machine 确定性单带图灵机。

◆讲评◆ 译文除了未能准确翻译术语外,也未能正确分析句子的成分,如 in polynomial time 是状语,不能把 polynomial time 译成主语。因此,整句的意思都译错了。

㊟【P是在“确定性单带图灵机”上用多项式时间就可判定的那些语言组成的类。】

例 3 The class P plays a central role in our theory and is important because

1. P is invariant for all models of computation that are polynomially equivalent to the deterministic single-tape Turing machine, and

2. P roughly corresponds to the class of problems that are realistically solvable on computer.

㊝【P类在理论中扮演重要角色,它很重要是因为

1. P对所有计算机模型是不变的,它多项式地等价于确定性单一型图灵机。

2. P大约与实际上能在计算机求解的这类问题相对应。】

[**词语注释**] invariant 不变的; equivalent to 等价于;solvable 可解的。

◆讲评◆ 第一句的 and 应译成“因而”,因为 is important 是前面所说的情形的结果。第 1 点的翻译是错的,第 2 点的翻译不准确。应注意,polynomially 是由数学术语 polynomial 派生的副词,在这里的意思是“按多项式时间的意义”,不能简单地译成“多项式地”。

㊟【P类在计算机理论上起着中心的作用因而很重要,这是因为

1. 对所有按多项式时间的意义等价于确定性单带图灵机的计算机模型来说,P是不变的。

2. P大体上与在计算机上实际可解的问题类相对应。】

例 4 NP is the class of languages that have polynomial time verifiers. (A verifier for a language A is an algorithm V, where

$$A = \{w \mid V \text{ accepts } \langle w, c\rangle \text{ for some string } c\}.$$

We measure the time of a verifier only in terms of length of w, so a polynomial time verifier runs in polynomial time in the length of w. A language A is polynomially verifiable if it has a polynomial time verifier.)

㊝【NP是一类有多项式时间验证法的语言。(验证法是对一种语言 A 有一种算法 V,其中

$$A = \{w \mid V \text{ 满足} \langle w, c\rangle, \text{对某个字符串 } c\}。$$

测量验证法的时间就是计算 w 的长度所用的时间,因此一个多项式的时间验证算法在一个多项式上运行的就是 w 的长度。如果语言 A 有一个多项式时间验算法,那么它是多项式变量。)】

◆讲评◆ 应注意定冠词的用法,不可把 the class 译成“一类”。括号中的

第一句解释什么是 verifier，即给出 verifier 的定义，应加以明确。Only in terms of 的意思是“仅采用……来……”，应译出。类似于词组 a polynomial in x（关于 x 的多项式），词组 polynomial time in the length of w 可译成“关于 w 的长度的多项式时间”。

㊣【NP 是由具有多项式时间验证法的语言组成的类。（一种语言 A 的验算法指的是一种算法 V，其中

$$A = \{w \mid \text{对某个字符串 } c, V \text{ 接受} \langle w, c \rangle\}。$$

我们只采用 w 的长度来测量验证法的时间，因此一个多项式时间的验算法按照关于 w 的长度的多项式时间来运行。如果语言 A 有一个多项式时间验证算法，那么它就是多项式可验算的。）】

例 5 The term NP comes from nondeterministic polynomial time and derived from an alternative characterization by using nondeterministic polynomial time Turing machine.

㊀【术语 NP 来自不确定多项式时间和通过使用不确定多项式时间的图灵机由交替的特征来得到。】

◆讲评◆ 译文未能正确理解原文的含义，导致无法清楚表达原文的意思。

㊣【术语 NP 源于“不确定多项式时间”，又因其可以用不确定多项式时间的图灵机来作替代性描述而得名。】

例 6 The power of polynomial verifiability seems to be much greater than that of polynomial decidability. But, hard as it may be to imagine, P and NP could be equal. We are unable to prove the existence of a single language in NP that is not in P.

㊀【能证实的多项式的乘方似乎比可判定性多项式的乘方大的多。但是，NP 可能等于 P 的困难可想而知。我们还无法证明在 NP 中存在一种单一语言但是它又不在 P 中的这种语言。】

[**词语注释**] power n. 幂，乘方。

◆讲评◆ (1) 术语 power 既可表示“乘方”，也可指“幂”，前者主要指运算，后者指乘方运算的结果。在这里应译成“幂”。(2) hard as it may be to imagine 是 as 引导的让步状语从句，意思是“尽管难以想象”。(3) A single language 在这里是强调“连一种这样的语言不存在的情形”都无法证明，在译文中虽不必这样表达，但也不宜译成“一种单一语言”。

㊣【多项式可验证性中的幂似乎比多项式可判定性中的幂大得多。但是，尽管难以想象，NP 还是可能等于 P。事实上，我们仍无法证明在 NP 中存在某种不属于 P 的语言。】

例 7 They discovered certain problems in NP whose individual complexity is related to that of the entire class. If a polynomial time algorithm exists for any of these problems, all problems in NP would be polynomial time solvable. These problems are called NP-complete.

㊎【他们发现在 NP 里有某些问题，NP 里这些个体相对于整个 NP 类是复杂的。如果这些个体中的任一个都存在多项式时间算法，在 NP 类中的所有问题将是多项式时间可解的。这些问题就称为 NP 完全性。】

◆讲评◆ 第一句中的 that 是代词，代替 complexity。Be related to 的意思是“与……关联的”，而不是“相对于”，所以译文是错误的。第二句中的 any 的意思不是“任一个”，而是“某一个”。NP-complete 不宜译成“NP 完全性”，可译成“NP 完全的”或“NP 完全问题”。

㊍【他们发现 NP 中有些问题，其个体的复杂性与整个 NP 类的复杂性是关联的。如果这些个体中有一个存在多项式时间算法，则 NP 类中的所有问题都是多项式时间可解的。这种问题称为 NP 完全问题。】

练 习 4.5.4

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) If any problem in NP requires more than polynomial time, an NP-complete one does. Furthermore, a researcher attempting to prove that P equals NP only needs to find a polynomial time algorithm for an NP-complete problem to achieve this goal.

㊎【如果在 NP 里任何问题需要的不只是多项式时间，一个 NP 完全性也需要。因此，研究者在尝试证明 NP 等于 P 时，为了达到这个目的，他们认为对一个 NP 完全性只需找到它的多项式算法。】

(2) Even though we may not have the necessary mathematics to prove that the problem is unsolvable in polynomial time, we believe that P is unequal to NP, so proving that a problem is NP-complete is strong evidence of its non-polynomiality.

㊎【尽管可能还没必要用数学知识来证明这问题在多项式时间上是不可解的，但是我们仍然相信 P 不等于 NP，因此，证明一个问题是 NP 完全的是它没有多项式的有力证据。】

(3) A Boolean formula is satisfiable if some assignment of 0s and 1s to the variables makes the formula evaluate to 1. The preceding formula is satisfiable because the assignment $x=0$, $y=1$, and $z=0$ makes ϕ evaluate to 1. We say

the assignment satisfies ϕ. The satisfiability problem is to test whether a Boolean formula is satisfiable.

㊀【布尔公式是可满足的，如果把 0 和 1 指派给变量时布尔公式的值为 1，前面的公式是可满足的，因为指派 $x=0, y=1, z=0$ 使 ϕ 的值为 1，我们就说指派满足 ϕ。可满足性问题用于验证布尔公式是否是可满足的。】

§4.5.5 Artificial Intelligence and Its Tasks[49] 【人工智能及其任务】

本节介绍人工智能的基本知识。前四个例子主要涉及“人工智能定义”的讨论，后面的例子涉及“人工智能的任务”以及“如何认识智能”的问题。

例 1 What exactly is artificial intelligence? Although most attempts to define complex and widely used terms precisely are exercises in futility, it is useful to draw at least an approximate boundary around the concept to provide a perspective on the discussion that follows.

㊀【人工智能确切地说是什么呢？虽然大多数试图阐明复杂并被广泛使用的说法，精确地说是徒劳的练习，近似边界在理念提供的角度来看至少在随后的讨论中是有益的借鉴。】

[**词语注释**] in futility 无用；perspective n. 透视图，整体的看法，展望。

[**分析**] Although 引导让步从句，主句中 it 是形式主语，不定式短语 to draw... the concept 是逻辑主语，不定式 to provide 引导的短语充当目的状语。

◆讲评◆ 这句话的意思是，虽然试图要精确地定义一些术语很难，但是现在对人工智能这个概念画出近似轮廓却有利于下面的讨论。译者对一些词语（如 terms，perspective 等）的理解有错，也未能正确分析句子成分，所以未能正确表达原意。

㊁【人工智能到底是什么呢？虽然大多数试图要精确地定义一些复杂且用途广泛的有关术语的做法只是无用的尝试，但是为了在随后的讨论中提供一个整体的看法，哪怕只是围绕这个概念画出一个近似轮廓也是很有用的。】

例 2 To do this, we propose the following by no means universally accepted definition. Artificial intelligence (AI) is the study of how to make computers do things which, at the moment, people do better. This definition is, of course, somewhat ephemeral because of its reference to the current state of computer science.

㊀【要做到这点，我们提出以下绝不会公认的定义。人工智能(AI)是研究如何使电脑做一些事情，在那个时刻人们做得更好。这个定义当然是某种短命

的东西，因为它的参考物是计算科学的现状。】

◆讲评◆　第二句 which 引导限制性定语从句 people do，它被起强调作用的插入语 at the moment 隔开，better 应属于主句。译文在表达上的含糊不清，既与对原文语法结构分析错误有关，也和对科学新分支不了解有关。

㊣【为此，我们提出以下还未得到公认的定义。人工智能(AI)研究的是如何使电脑把人们此时在做的一些事情做得更好。当然，这个定义只适于较为短暂的时间，因为它是参照计算科学的现状提出的。】

注：这个未得到公认的定义用 the things which people do (人们做的事)来说明 the artificial intelligence(人工智能)的含义，实际上这两者在哲学上是相似的概念。下面的例 3 将指出这个问题。

例 3　But it provides a good outline of what constitutes artificial intelligence, and it avoids the philosophical issues that dominate attempts to define the meaning of either artificial or intelligence. Interestingly, though, it suggests a similarity with philosophy at the same time it is avoiding it.

㊦【但是它提供了包含人工智能的好的纲要，它避免了哲学上试图阐明人工或智能的意义的问题。虽然如此，有趣的是，它提出了一个与哲学相似的、同时互相避免的东西。】

[**词语注释**] dominate vt.　支配，控制

◆讲评◆　第一句中 what constitutes artificial intelligence 是介词宾语从句，其中 what 既是关系代词，又是疑问代词；从句的意思是“什么组成了人工智能”，译文没译出这个意思。这里 outline of…意思是“……的概要”或“……的要点”，不宜译成“纲要”。第二句 it suggests a similarity with philosophy 指的是例 2 的“注”所提及的哲学上的类似概念。此外，though 作为插入语是副词，它的意思是“可是”，而不是“虽然”；主句中的 at the same time 是时间状语，而 it is avoiding it 是时间状语从句(省略连接词)。

㊣【但是它很好地概括了人工智能的组成情况的要点，还避免了那些支配着试图阐明“人工”或“智能”的含义的哲学论题。但是，有趣的是，它在避开哲学的同时又提出了一个类似于哲学概念的东西。】

例 4　Philosophy has always been the study of those branches of knowledge that were so poorly understood that they had not yet become separate disciplines in their own right. As fields such as mathematics or physics became more advanced, they broke off from philosophy. Perhaps if AI succeeds it can reduce itself to the empty set.

㊦【哲学研究的一直是那样的知识的那些分支，它们太难以理解以至于在

他们自己的权力之内不能成为单独的学科。像数学与物理等一些领域变得更加先进，它们从哲学中脱颖而出。也许人工智能的成功会把它本身变成空集。】

[**词语注释**] in one's own right 凭自己的天赋，当然；the empty set 空集。

◆**讲评**◆ 第一句中的 in their own right 不能直译成"在他们自己的权力之内"；第二句中第一个 as 引导时间状语从句，第二个 as 是介词，such as 可译成"像"或"诸如"。第三句如何理解 it 是个难点，把 it 当成人工智能则是大错；因为由上下文可推理出，it 指的是哲学。

㊣【哲学研究的一直是那样的一些知识分支，它们由于太不容易被人理解而无力使自己成为一个独立的学科。当一些领域，诸如数学和物理，发展较为成熟时，它们就从哲学中脱颖而出。也许，在人工智能的成功之时，哲学可能缩减成空集。】

例 5 It was thought that this process required very little knowledge and could therefore be programmed easily. As we will see later, this assumption turned out to be false since no computer is fast enough to overcome the combinatorial explosion generated by most problems.

㊀【这个过程被认为只要求很少的知识，因此能够很容易编程。正像我们后面将看到的那样，这个假设被证实是错误的，因为没有计算机能足够快地克服多数问题所生成的组合爆炸。】

◆**讲评**◆ 在词组 required very little knowledge 中，little 是否定的意思，不可译成"只要求很少的知识"。词组 be fast enough to overcome 的意思是"快到足以克服"，而不是"足够快地克服"；这二者意思相差很大，前者的意思是"无法克服"，而后者的意思是"可以克服，只不过速度不够快而已"。

㊣【人们曾以为这个过程不需要什么知识，从而可以很容易地编程。正像我们后面将看到的那样，这种设想被证实是错误的，因为没有一部计算机能快到足以克服大多数问题所生成的组合爆炸。】

例 6 Another early foray into AI focused on the sort of problem solving that we do every day when we decide how to get to work in the morning, often called commonsense reasoning.

㊀【另一种早期进入人工智能的任务是集中在解决我们每天做的那一类问题，包括决定如何从事早晨的工作时的问题，通常称为日常推理。】

[**词语注释**] foray n. 插手。

[**分析**] 本句 that 引导的定语从句 we do every day 是修饰 problem solving，when 引导时间状语从句，in the morning 是该从句的时间状语。

◆讲评◆ 本节短文多次出现“名词+动名词”形式的词组，如 game playing (游戏竞赛)，theorem proving(定理证明)，problem solving 在这里也可译成“问题解决”(这也是教学方法的一种术语)。译文把 solving 看成现在分词，把 work 当成名词，同时把 in the morning 当成 work 的定语，都是错的。

㊣【人工智能早期涉及的另一任务是集中在那种通常称为常识推理的一类问题解决，比如每天早晨当我们决定如何开始工作时我们所做的事。】

例 7 To investigate this sort of reasoning, Newell, Shaw, and Simon built the General Problem Solver (GPS), which they applied to several commonsense tasks as well as to the problem of performing symbolic manipulations of logical expressions.

㊦【为了研究这种推理，Newell, Shaw 和 Simon 建立了一般问题解法(GPS)，他们把它应用于几个常见任务及逻辑表达符号操作问题。】

[**词语注释**] symbolic manipulations 符号操作。

◆讲评◆ 译文大致正确，但是存在一些问题，如：(1) 大写文字 the General Problem Solver (GPS)是专有名词，可译成“一般问题解法软件(GPS)”，不可当成一般词组处理。(2) Commonsense tasks 指的是关于上例所说的常识问题的任务，不可译成“常见任务”。

㊣【为了研究这种推理，Newell, Shaw 和 Simon 创建了一般问题解法软件(GPS)，把它应用于多个关于常识问题的任务，也用于逻辑表达式的符号操作问题。】

例 8 As AI research progressed and techniques for handling larger amounts of world knowledge were developed, some progress was made on the tasks just described and new tasks could reasonably be attempted.

㊦【当人工智能的研究获得进步，而操作大量知识的技术得到发展时，刚才描述的那些任务也取得进步，同时有理由能对新的任务发起攻击。】

◆讲评◆ 被动式必要时应译成主动式。句子后一个 and 有表示递进的意思，应译成“而且”。此外，could reasonably 不宜译成“有理由能”，应译成“有可能适度地”，这因为 reasonably 修饰 be attempted，而不是修饰 could。

㊣【当人工智能的研究获得进步而处理大量的全球性知识的技术得到开发时，人们对刚才描述的那些任务的研究也取得一定进步，而且有可能适度地尝试一些新的任务。】

例 9 Perception of the world around us is crucial to our survival. Animals with much less intelligence than people are capable of more sophisticated visual perception than are current machines.

㊀【对我们的幸存者来说，我们周围世界的知觉是很重要的。具有比人类少得多的智力的动物具有比现在的机器更精致的视觉感知。】

◆讲评◆ Our survival 应译成“我们的生存”；谁的知觉应该明确指出；智力分强弱而不是多少。

㊁【感知我们周围的世界对我们的生存是极重要的。智力比人类弱得多的动物却具有比现在的机器更精致的视觉感知。】

例 10 Perceptual tasks are difficult because they involve analog (rather than digital) signals: the signals are typically very noisy and usually a large number of things (some of which may be partially obscuring others) must be perceived at once.

㊀【知觉的任务很难，因为它们包括了类似物信号(而不是数字的信号)：这些信号本身就是噪音，而且经常是大量的东西(其中有一部分可能遮蔽了另一部分)必须立即感知。】

◆讲评◆ at once 在这里应译成“同时”。这里的 things 也代表信号。

㊁【感知的任务很难，因为其中包含了类似物的信号(而不是数字的信号)：这些信号本身就是典型的噪音，而且经常有大量的事物(其中有部分互相干扰)必须被同时感知。】

例 11 The problem of understanding spoken language is a perceptual problem and is hard to solve for the reasons just discussed. But suppose we simplify the problem by restricting it to written language. This problem, usually referred to as natural language understanding, is still extremely difficult.

㊀【理解口语是一个直觉问题，因为刚刚讨论的理由，它难以解决。但是，假定我们把这个问题限制于书面语言以作简化。这个问题通常称为自然语言理解，仍然是极端困难的。】

◆讲评◆ 副词 but 的常用意义是“但是”，据此译文把第二句开头的 but 译成“但是”，结果句子明显不通。原因是第二句实际上是转换话题，这时 but 应译成“那么就”。此外，第一句的 discuss 和 reason 不宜直译成“讨论”和“理由”。

㊁【理解口语是一个直觉问题，因为刚刚说明的原因，它难以解决。那么就假定我们把这个问题简化为只限制于书面语言吧。这样的问题通常称为“自然语言理解”，仍然是极端困难的。】

例 12 Although expert skills require knowledge that many of use do not have, they often require much less knowledge than do the more mundane skills and that knowledge is usually easier to represent and deal with inside programs.

㊎$_1$【尽管一些专门的技术需要很多应用领域没有的知识，但是它们经常需要比更多常规技术要求的少得多的知识，而且这些知识通常容易表示并用内部的程序来处理。】

㊎$_2$【尽管一些专门的技术所需要的知识是很多应用领域所不具备的，但是它们所需要的知识量经常比许多常规技术所要求的知识量少得多，而那些知识通常容易采用内部的程序来表达和处理。】

◆讲评◆ 本句 although 引导一个状语从句，其中包含一个 that 引导的定语从句 many of use do not have，修饰 knowledge，应译成“很多应用领域不具备”。主句的谓语动词有两个宾语：一个是短语 much less knowledge than do the more mundane skills，其中 than 引导一个倒装的比较状语从句；另一个是 that 引导的宾语从句，其中不定式短语 to represent and deal with inside programs(动宾关系)是从句的状语。

㊐【尽管一些专门的技术所需要的知识是很多应用领域不具备的，但是它们所需要的知识量经常比多数的常规技术所要求的知识量少得多，而且通常要求那些知识能容易地用来表达和处理内部的程序。】

练 习 4.5.5

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) This definition is, of course, somewhat ephemeral because of its reference to the current state of computer science. And it fails to include some areas of potentially very large impact, namely problems that cannot now be solved well by either computers or people.

㊎【这一定义当然是有些短暂，因为它只参照计算机科学的现有状态。并且它没有包括一些潜在的具有非常大的影响的方面，即现在不能被电脑或者人解决的问题。】

(2) Game playing and theorem proving share the property that people who do them well are considered to be displaying intelligence.

㊎【游戏的玩法和定理的证明分摊了这种性质，做好这事的人被认为是在展示智力。】

[分析] that 引导同位语从句，其中 who do them well 是定语从句修饰 people。

(3) Again, no attempt was made to create a program with a large amount of knowledge about a particular problem domain.

㊎【再者，不打算创建一个程序带有关于某个特殊问题领域的大量知识。】

§4.6 新数学分支专业文献的译例评析

本节以出现在“小波分析”、“分形几何”和“模糊数学”这三个新数学分支的教材与专业文献中的某些疑难语句为例，分析初学者在阅读和翻译过程中常见的错误，并给出供对照用的参考译文。

§4.6.1 Wavelets and Fourier Analysis[50] 【小波分析与 Fourier 分析】

例 1 While its origins go back many decades, the subject of wavelets has become a popular tool in signal analysis and other areas of applications only within the last two decades or so partly as a result of Ingrid Daubechies's celebrated work on the construction of compactly supported, orthonormal wavelets.

㊀【当它的起源追溯到许多年前时，仅在近二十年里，小波才成为信号分析以及别的应用领域的流行工具。一部分，这是 Ingrid Daubechies 在紧支撑的正交波的构造的杰出工作的结果。】

◆讲评◆ 词组 or so 的意思是“左右”，the last two decades or so 译成“近二十年左右”；词组 the construction of compactly supported, orthonormal wavelets 是专业术语“关于紧支集的正交小波的构造”。

㊁【虽然小波的起源要追溯到几十年前，但是仅在近二十年左右，作为 Ingrid Daubechies 关于紧支集的正交小波的构造的杰出工作的部分结果，小波才成为信号分析以及其他应用领域受欢迎的工具。】

例 2 In order to implement efficient algorithms for decomposing a signal into an expansion (either Fourier or wavelet based), the building blocks (sines, cosines or wavelets) should satisfy various properties. One convenient property is orthogonality, which for the sine function states

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt)\sin(mt)\mathrm{d}t=\begin{cases}0,\text{if } n\neq m,\\1,\text{if } n=m.\end{cases}$$

㊀【为了实现把一个信号分解成展开式的有效算法(傅里叶或小波算法)，构造块(正弦波，余弦波或小波)应满足各种性质。一个方便的性质是正交性，用正弦函数表述为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt)\sin(mt)\mathrm{d}t=\begin{cases}0,\text{if } n\neq m,\\1,\text{if } n=m.\end{cases}\text{】}$$

◆讲评◆ (1) 应注意原文括号(either Fourier or wavelet based)的位置紧接在 an expansion 之后,而不是放在 efficient algorithms 之后;其意思是"按傅里叶基或小波基展开",而不译成"算法"。(2) convenient property 应译成"合适的算法"。(3) the building blocks 通常称为"基",括号中的 sines, cosines 分别指基中的函数族{sin(*mt*)}和{cos(*mt*)}。这两句话应该按照数学知识进行部分意译。

㊣【为了实现把一个信号分解成展开式(按傅里叶基或小波基展开)的有效算法,构造块(正弦函数族、余弦函数族及小波函数族)应满足各种性质。其中一个合适的性质是正交性,对于正弦函数族而言,该性质可表述为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt)\sin(mt)\mathrm{d}t=\begin{cases}0,\text{if } n\neq m,\\1,\text{if } n=m.\end{cases}】$$

例 3 One of the difficult tasks in the construction of a wavelet is to make sure that its translates and rescalings satisfy analogous orthogonality relationships, so that efficient algorithms for the computation of the wavelet coefficients of a given signal can be found.

㊥【构造小波的困难之一是确定它平移和伸缩后仍然满足正交性,为了计算一个给定信号的小波系数的有效算法能够被找到。】

◆讲评◆ 译文的意思大体正确,只是不够准确。如,analogous orthogonality relationships 不能简化成"正交性";make sure 虽有"确定"的意思,在这里应译成"确保";连词 so that 引导原因从句放在主句后面时,应译成"以便"。另外,从句译成被动句不如译成主动句好。

㊣【构造小波的困难之一是确保它的平移和伸缩都满足类似的正交关系,以便能得到一个用于计算给定信号的小波系数的有效算法。】

练 习 4.6.1

指出下面各题的译文中所存在的问题,并加以修改:

(1) While this approach may be appropriate for filtering or compressing signals that have time-independent wavelike features, other signals may have more localized features for which sines and cosines do not model very well.

㊥【然而这个方法适合滤除或压缩那些具有时间独立的波状特色的信号,而其他具有更多显著特征的图形,正弦波和余弦波不能很好地模拟它。】

(2) This is why we cannot construct a wavelet simply by truncating a sine or cosine wave by declaring it to be zero outside of one or more of its periods.

㊀【这就是为什么我们不能通过截断一个正弦或余弦波，通过断言它在一个或多个周期之外为0而得到小波。】

§4.6.2 The Discovery of Fractal Geometry[51] 【分形几何的发现】

例1 All we attempt here is an elementary presentation of the relations that have to be known in order to follow, without difficulty and with a critical mind, the scientific literature dealing with the concept of time in physics in a fractal environment.

㊀【我们这里所做的一切只是对那种关系提交一个初等的表达，这是为了没困难地且能带着审慎的心理去追随那些处理在分形环境下的物理时间的概念的科学文献所必须了解的。】

◆讲评◆ 动词 follow 的含义很多，虽然常表示“跟随”、“跟着”等意思，但这里的宾语是 the scientific literature，所以应译成“学习”或“了解”；time in physics 不宜译成“物理时间”。又，that have to be known 是定语从句，修饰 the relations。

㊁【我们这里只想对读者在下一步学习中必须了解的关系给出一个基本的介绍，以便他们可以没困难地且能带着审慎的态度去学习那些在分形环境下处理物理学中的时间概念的科学文献。】

例2 In this study the reader will find that the key element of fractal geometry, the non-integral dimension, is intimately associated with the way in which we evaluate our space, measure its boundaries and “weigh” its contents, the meaning of the concept of dimension will be seen to be, above all, physical.

㊀【在学习中读者将发现，分形几何的关键因素，即非整数维数，是与方法有密切关系的，我们用它估计我们的空间，测量它的边界且“称出”它的内容，维数概念的含义将被看到，首先是在物理中。】

◆讲评◆ 句子间断太多，意群之间关系不明确或太松散；如“用它估计”中的“它”指代不清。

㊁【读者在学习中将看到，分形几何的关键因素，即非整数维数，是与我们估计自己所处的空间大小、测量其边界及“称出”其内容物的重量的方法紧密关联的；我们将看到，维数概念的含义首先是物理上的内涵。】

例3 He will see also that the aim of a measure is to try to free the mind of the paradoxes that characterize “pathological” behavior, whilst using examples of such behavior to enrich our vision of the world.

㊀【他也将看到，当用关于“病态”行为的例子来充实我们对世界的看法时，

测量的目的就是试图使刻画“病态”行为的悖论的思想获得自由。】

◆讲评◆ whilst = while，译者在这里把 whilst 看成连词，引导时间状语从句。实际上这里 whilst 引导的是“对比状语从句”，这可以从两个方面判断：(1) 作为 see 的宾语，前后两个子句的内容有对比的含义而没有时间方面的关系；(2) while 或 whilst 引导的时间状语从句后置时，通常它的前面不用逗号分开。另外，不定式短语 to free 的意思是“摆脱……的束缚”，而译者未能准确译出。

㊣【读者也将看到，测量的目的就是试图摆脱那些刻画“病态”行为的悖论的思想束缚，而用关于“病态”行为的例子却可以丰富我们对世界的看法。】

注：这时，我们把 whilst 译成“而”。

例 4 This will be the case if the walker does not jump erratically from place to place, and indeed the principle of the walk requires that he does not.

㊦【那就是这种情形，如果步行者不是从一个地方不规则地跳到另一个地方，而且事实上，步行的规则要求他不这样。】

◆讲评◆ 这句由两个并列分句组成，其中第一句是主从复合句，译者没有译好条件从句与主句之间的逻辑关系。实际上，这句是在说明如何才能满足“$l(t)$有定义且处处连续”，译者没译出这个意思。

㊣【如果步行者不从一个地方不规则地跳到另一个地方，就能满足上述条件；事实上，步行的原则就要求不能跳跃。】

例 5 The step is the human gauge for measuring lengths along the paths we take. But even without any jumping about the walker will not follow the curve in all its infinitesimal details: implicitly, he will approximate it by a polygonal line whose general form is given by steps of length η placed on the ground in succession.

㊦【脚步是沿着我们所走的路线测量长度的人的度规。但是，即使没有跳跃的行人也没有办法在所有无穷小的细节中跟随该曲线行走：说明白些，他只是用一条折线来近似它，折线的一般形式由逐个印在地上的长度为 η 的脚步给出。】

◆讲评◆ 译文表达不够清楚，人称方面有时用“我们”，有时用“他”来表达，不一致。

㊣【脚步是人们沿着所走的路线测量长度的度规。但是，即使行人只走不跳也没有办法沿着曲线的所有无穷小的弯曲小段行走：说明白些，人们只是用一条折线来近似它，而折线的整个形状是按走在地上的、长度为 η 的步伐依次连接而成。】

例 6 Let $\lambda(\mathscr{P})$ be the length of the plane polygonal line $[f(0), f(t_1), f(t_2), \cdots, f(t_{p-1})]$, where $f(t_i)=[x(t_i), y(t_i)]$ and $\mathscr{P}$ is the finite sequence $[t_1, t_2, \cdots, t_p]$. We say that the arc is rectifiable if the upper bound of the real numbers $\lambda(\mathscr{P})$ when $p \to \infty$ is a finite number L, which is then called the length of the curve Γ.

㊀【设 $\lambda(\mathscr{P})$ 是平面折线 $[f(0), f(t_1), f(t_2), \cdots, f(t_{p-1})]$ 的长度，这里 $f(t_i)=[x(t_i), y(t_i)]$，同时 $\mathscr{P}$ 是有限序列 $[t_1, t_2, \cdots, t_p]$。我们说这条弧是可求长的，如果实数 $\lambda(\mathscr{P})$ 当 $p \to \infty$ 时的上界是一个有限的数 L，那么它就称为曲线 Γ 的长度。】

◆讲评◆ 译文把第二句的条件夹在两个结论之间，表达不准确且不符合汉语习惯。

㊁【设 $\lambda(\mathscr{P})$ 是平面折线 $[f(0), f(t_1), f(t_2), \cdots, f(t_{p-1})]$ 的长度，这里 $f(t_i)=[x(t_i), y(t_i)]$，而 $\mathscr{P}$ 是有限序列 $[t_1, t_2, \cdots, t_p]$。如果实数 $\lambda(\mathscr{P})$ 当 $p \to \infty$ 时的上界 L 是有限的数，则称该弧是可求长的，且把 L 称为曲线 Γ 的长度。】

例 7 So far no constraint has been placed on the elementary segments that constitute the polygonal line; suppose now that these are all of the same length $\eta(p)$ and that all the time intervals $t_i - t_{i-1}$ are equal and have the value Δt.

㊀【至今没有任何约束放在组成折线的初等线段上；现在设它们是全部具有同样的长度 $\eta(p)$ 且全部时间区间 $t_i - t_{i-1}$ 相等，并有值 Δt.】

[**词语注释**] constraint v. 约束；segment n. 段，节，这里特指 line segment(线段)。

◆讲评◆ The elementary segments 译成“初等线段”不合数学知识；all 要根据它在句中所修饰对象的成分来翻译，不能都译成“全部”。根据数学知识，the time intervals 此时不是“时间区间”，而是“时间区间的长度”，即“时间间隔”。

㊁【至今尚未对组成折线的基本线段提出任何约束条件，现在设它们都具有同样的长度 $\eta(p)$ 且所有时间间隔 $t_i - t_{i-1}$ 都相等，其值为 Δt.】

例 8 Then the sequence $\mathscr{P}$ is equivalent to giving the number p of measuring steps. If t is the total time needed to make the measure, $p=\frac{t}{\Delta t}$, and if $p=\frac{t}{\zeta_0}$ where ζ_0 is some constant time then p can be regarded as a generalized frequency and used as a Laplace variable.

㊀【于是，序列 $\mathscr{P}$ 就等价于给出测量脚步的个数 p。如果 t 是作测量所需要

的全部时间，$p=\frac{t}{\Delta t}$，并且如果 ζ_0 是某个常数时间，$p=\frac{t}{\zeta_0}$，则 p 就可以被认为是一个广义的频率，并用作 Laplace 变量。】

◆讲评◆ (1) 译文的第一个句子称一个序列和脚步的个数等价，根据数学知识知道这显然是错误的。(2) 第二句由两个并列的主从复合句组成，第一个 if 引导的从句所对应的主句是 $p=\frac{t}{\Delta t}$，其开头未出现 then，仍要译成“如果……则”或类似的形式；译者没这样做，可能是误以为 $p=\frac{t}{\Delta t}$ 也是条件的一部分。

㊣【于是，给出序列 $\mathscr{P}$ 就等价于给出测量的步数 p。如果 t 是测量所需的全部时间，则 $p=\frac{t}{\Delta t}$；又，如果 ζ_0 是一个常数时间而 $p=\frac{t}{\zeta_0}$，则 p 就可以看做广义频率并用作 Laplace 变量。】

例 9 Rectifiability can be understood simply from a graph of $\lambda(p)$ as a function of $\eta(p)$: it means that $\lambda(p)$ must tend to a finite limit, L, as $\eta(p)$ tends to zero. The necessary analysis can be performed in Laplace or Fourier space.

㊐【从 $\lambda(p)$ 的图形看，可求长性可以简单地理解成 $\eta(p)$ 的函数：它表明当 $\eta(p)$ 趋于 0 时，$\lambda(p)$ 一定会趋于一个有限的极限 L。这种必要的分析可以在 Laplace 或 Fourier 空间中完成。】

◆讲评◆ 根据数学知识，可求长性这个概念不可能是 $\eta(p)$ 的函数。事实上，句中的冒号“:”后面的句子才是可求长性的解释。因此，as 不是与 understood 搭配的，而是与 $\lambda(p)$ 一起组成短语修饰 graph。

㊣【由 $\lambda(p)$ 作为 $\eta(p)$ 的函数的图形容易了解到，可求长性意味着当 $\eta(p)$ 趋于 0 时，$\lambda(p)$ 一定会趋于一个有限的极限 L。其中必要的分析可以在 Laplace 或 Fourier 空间中进行。】

例 10 Stated otherwise, the space gauge tends to zero when the time gauge tends to zero, or equivalently when the frequency gauge tends to infinity: an infinitely precise measure requires an infinite frequency.

㊐【否则，空间的度规趋于 0，若时间的度规趋于 0 或等价地，频率的度规趋于无穷大：无限精确的测量要求无穷大频率。】

◆讲评◆ otherwise 有时表示“否则”，但还有其他的，如“另一种”的含义。根据上下文知，这里并没有用反证法，而是从另一方面进一步叙述，所以 stated otherwise 意思为“换言之”。此外，按汉语的习惯，应尽量把条件放在前面，结论放在后面；即使不得已要把结论放在前面，也得努力把逻辑表达清楚。译文就未

能做到这一点。

㊣【换言之，当时间的度规趋于0或等价地，频率的度规趋于无穷大时，空间的度规就趋于0；这说明，要作无限精确的测量，就要有无限大的频率。】

例11 The essential aim of this chapter is to show that the concept of "measure", in the physical sense of the term, enables us to bring the properties of these strange objects under our control.

㊀【本章的主要目的是引出"测度"的概念，根据这个术语的物理意义我们能够得出在我们的控制之下的那些奇异对象的性质。】

◆讲评◆ 本句是主从复合句，主句的表语是动词不定式 to show，that 引导了一个宾语从句，从句在主语与谓语之间有一个插入语。译者未能正确分析句子的结果，结果译错了 show 的宾语。其中 enables us to 的意思是"使我们能"而不是"我们能"。根据上下文，这里所谓 strange objects 只是一些图形而已，无所谓控制与否，under our control 应译成"我们已掌握的"或"已了解的"。原文在这里强调 the properties of these strange objects(奇异对象的性质)，至少是要指出它区别于作为纯粹数学概念的"测度"。

㊣【本章的主要目的是证明，按照术语的物理意义，"测度"这个概念能使我们得出那些已知的奇异对象的性质。】

练 习 4.6.2

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) There are, of course, excellent works on this, some of which are listed in the bibliography, which will take the reader further with the analysis that is only sketched out here.

㊀【当然，在这个方面有许多出色的工作，其中某些工作列举在图书目录中，它们将带读者进一步地分析，它们在这里只是简单概述。】

(2) We have preferred clarity to mathematical rigour.

㊀【我们宁要清楚而不要数学的严密。】

(3) Finally, he will see that this freedom can be exercised at the mathematical level, perhaps more there than elsewhere——something that the engineer too often forgets.

㊀【最后，他将看到，这种自由可以在数学水平上运动，在那里可能比其他地方多——这是一种工程师也经常忘记的东西。】

(4) We say that the curve is *parametrised* by $l(t)$, which initially we assume to be defined and continuous everywhere.

㊎【我们说，该曲线用 $l(t)$ 当参数，我们假定它初始有定义且处处连续。】

§ 4.6.3 The Concept of the Fuzzy Set[52] 【模糊集概念】

例 1 A significant number of direct real-world implementations range from home appliances to industrial installations and involve fuzzy sets, both by themselves and hand in hand with other modern approaches, including neural networks.

㊎【大量的直接的现实世界的工具遍布从家庭用具到工业设施的各个领域，并且包含了模糊集，既通过本身也利用现代化手段，包括神经网络。】

[**词语注释**] fuzzy n. 模糊(性)；fuzzy set 模糊集；implementation n. 工具；hand in hand 共同地。

◆讲评◆ 这句不宜按原来语序直译。如 direct real-world implementations 不宜直译成“直接的现实世界的工具”，因为中文没有这种说法，谁也不知它指什么；而据上下文可推测原文的意思是像家庭使用的电器到工厂的机器等“供直接使用的实物工具”。又，动词 involve 虽然有“包含”的意思，但若译成“包含了模糊集”则使人不知所云；这里应译成“涉及模糊集”或“与模糊集的概念相关联”。

㊍【大量的供直接使用的实物工具遍布从家庭用具直到工业设备的各个领域，它们不仅本身，而且还通过包括神经网络在内的现代化手段与模糊集的概念相关联。】

例 2 Essentially, fuzziness is a type of imprecision that stems from a grouping of elements into classes that do not have sharply defined boundaries.

㊎【本质上说，模糊是一个不精确的类型，它从一组元素发展成一些类，这些类却没有明确地定义边界。】

◆讲评◆ (1) a type of imprecision 应译成“一种不精确性”；(2) stems from 意思为“起源于”，这里 into 并不与 from 配搭成“stem from…into…”，而是与 group 搭配，grouping of elements into classes 意思是“把一些元素分类”。

㊍【本质上说，模糊性是把一些元素划归为一些界限不明确的类别时产生的一种不精确性。】

例 3 Since certain aspects of reality always escape such models, the strictly binary (and even the ternary) approach to the treatment of physical phenomena is not always adequate to describe systems in the real world; and the attributes of the system variables often emerge from an elusive fuzziness, a readjustment to context, or an effect of human imprecision.

㊀【因为现实中的某些方面总会逃离这些模型，所以用以处理物理现象的严格的二进制（甚至三进制）途径并非总能适用于描述现实世界的各种系统；而系统变量的属性经常来自于难以捉摸的模糊状态，根据上下文所作的调整，或者人们的某种不准确行为的效果之中。】

◆讲评◆ 词组 binary approach 和 ternary approach 在这里应分别译成“二分法”和“三分法”。Escape such models 应作意译。词组 emerge from 之后的三个并列短语分别说明产生系统属性的因素，其中 context 此时应译成“前后的情形”。

㊁【因为现实中总有某些方面不能为这些模型所概括，所以用以处理物理现象的严格二分法（甚至三方法）并非总能适用于描述现实世界中的各种系统；而且系统变量的属性经常出现在如下三种情形之中：难以捉摸的模糊状态中、根据前后情形的变化所做的随机调整过程中，或者人们的某种不准确行为的影响之中。】

例 4 The theory of fuzzy sets has as one of its aims the development of a methodology for the formulation and solution of problems that are too complex or too ill-defined to be susceptible of analysis by conventional techniques.

㊀【模糊集理论有一个目标是发展一门方法学，为了描述和解决那些太过复杂或太过不确定，用常规的技术不能分析的问题。】

[词语注释] be susceptible of 能……的，容许……的。

◆讲评◆ 词组 have A as B 的意思是“把 A 作为 B”，原文由于 A 长 B 短，所以把 A 和 B 调换位置。译文虽无明显错误，但未能准确表达原文的意思。

㊁【为了描述和解决那些太过复杂或太过不确定以至于无法用常规的技术进行分析的问题，模糊集理论的目标之一是把自身建成一门方法学。】

例 5 The “fuzzy subset” has no well-defined boundaries where the universe of discourse (the universe X) covers a definite range of objects.

㊀【“模糊子集”没有很好地定义边界，其中论域（全集）覆盖了一个确定的由一些对象组成的值域。】

◆讲评◆ 这里 where 引导的是限制性定语从句，修饰 boundaries，译者把它当成了非限制性定语从句来翻译，由于“其中”二字指代不清，所以从句修饰何物也不清楚。又，原文 no 是修饰 boundaries，而不是修饰 has，而 well-defined 在这里并非与 has 一块组成完成式谓语动词，而是形容词，因此译成“没有很好地定义边界”是错的。这句最好采用意译。

㊁【“模糊子集”没有明确的、可在论域中（像通常那样地）界定其成员的归属范围的边界。】

例 6 Traditionally, the grade of membership 1 is assigned to those objects that fully and completely belong to A, while 0 is assigned to objects that do not belong to A at all.

㊎【传统上，成员 1 的等级指定给那些完全或全部属于 A 的对象，而 0 指定给那些完全不属于 A 的对象。】

[**词语注释**] the grade of membership 隶属度(模糊数学的专门用语)。

◆**讲评**◆ The grade of membership 1 中 1 是 the grade 的同位语，而不是 membership 的同位语，所以该短语的意思不是"成员 1 的级"，而是"成员的隶属度为 1"。Fully and completely 只要译成"完全"即可。

㊍【按传统做法，完全属于 A 的对象的隶属度为 1，完全不属于 A 的对象的隶属度为 0。】

例 7 In such classes, it is not necessary for an object to belong or not belong to a class; there may be intermediate grades of membership. This is the concept of fuzzy set, which is a "class" with a continuum of grades of membership.

㊎【在这些类中，一个对象未必属于或不属于一类；可以存在一些中间的隶属度。这就是模糊集的概念，它是具有一个连续的隶属度的"类"。】

◆**讲评**◆ Continuum 通常译成"连续统"，根据数学知识，区间[0, 1]是一个连续统，即模糊集的隶属度可以是[0, 1]中的任何值，即一个连续统中的任一值。

㊍【在这些类中，一个对象未必属于或不属于某一类；可能存在一些中间的隶属度。模糊集就是具有这种性质的概念，它是一个其隶属度为连续统的"类"。】

例 8 Intuitively, a fuzzy set is a class that admits the possibility of partial membership in it.

㊎【直观地说，模糊集是允许其中含有部分成员的可能性的一个类。】

◆**讲评**◆ 讲 A 是一个模糊集时，通常 A 不是 X 的常规意义下的子集。按原文的意思，A 是一个类。原文最后的 it 代表 A，partial membership in it 可译成"部分隶属于它"或"对它部分隶属"。

㊍【直观地说，模糊集是这样一个类，即允许其成员只是部分隶属于它。】

例 9 We shall assume for simplicity that $\chi_A(x)$ is a number in the interval [0, 1], with the grades 1 and 0 representing, respectively, full membership and nonmembership in a fuzzy set, as discussed before.

㊎【为简便起见，我们假定 $\chi_A(x)$ 是区间[0,1]中的一个数，并用隶属度 1 和

0 分别表示在模糊集中的“完全成员”与“非成员”，正像前面讨论的那样。】

◆讲评◆ 在模糊数学中 full membership 和 nonmembership 不译作“完全成员”与“非成员”，而译作“完全隶属”与“不隶属”。

㊣【为简便起见，我们假定 $\chi_A(x)$ 是区间[0,1]中的一个数，并用隶属度 1 和 0 分别表示在模糊集中的“完全隶属”与“不隶属”，正像前面讨论的那样。】

例 10 We have assumed that an exact comparison is possible for the truths of any two inexact statements “$x\in A$” and “$y\in A$,” and that the exact relation so obtained satisfies the minimal consistency requirement of transitivity and reflexivity; the ordering $x\geqslant y$ means “x is at least as true as y” with $x\leqslant y$ denoting “x is not truer than y.”

㊦【我们还假定，一个准确的比较对于任意两个不准确的语句“$x\in A$”与“$y\in A$”的真实性是可能的，而且这样得到的传递性和反身性是一个精确的关系且满足最小相容要求；这个次序 $x\geqslant y$ 意味着“x 至少和 y 一样真”，同时 $x\leqslant y$ 表示“x 不比 y 真”。】

◆讲评◆ 译文未能正确译出本句原文开头的时态。事实上，原文这句开头采用完成时 have assumed，表示在前面已经假定了下面讨论的这个比较关系，但其后两个并列的宾语从句都采用现在时，叙述的是数学命题。接下来的部分，译者可能想采用“意译”，但由于既未能正确分析句子的语法成分，又不能准确表达数学术语，结果与原文的意思相差甚远。特别应注意，不能采用不等式的通常含义作为这里的特殊含义的“意译”。

㊣【我们已经假定了：对任意两个不确切的命题“$x\in A$”与“$y\in A$”的真实程度可以作准确的比较，而且由此得到的准确比较关系满足关于“传递性”和“反身性”的最小相容性要求；次序 $x\geqslant y$ 指的是“x 至少和 y 一样真”，而 $x\leqslant y$ 表示“x 不比 y 更真”。】

例 11 The grades of membership reflect an “ordering” of the objects in the universe; it is interesting to note that the grade-of-membership value $\chi_A(x)$ of an object x in A can be interpreted as the degree of compatibility of the predicate associated with A and the object x.

㊦【隶属度反映了全集中的对象的一种“次序”；有趣的是，A 中的对象 x 的隶属度的值 $\chi_A(x)$ 可以翻译成谓语与 A 及 x 相关联的相容程度。】

◆讲评◆ 单词 predicate 的含义通常指“谓语”、“谓词”。因为前文涉及 truths 和 statements 这些逻辑用语，所以这里只能译成“谓词”。句中 associated 引导的分词短语作定语，修饰 the predicate。

㊣【隶属度反映了关于全集内的对象的“次序”；有趣的是，A 中的对象 x 的

隶属度的值 $\chi_A(x)$可以解释成与 A 及对象 x 相关联的谓词的相容度。】

例 12 As will be seen later, it is also possible to interpret $\chi_A(x)$as the degree of possibility that x is the value of a parameter fuzzy restricted by A.

㊎【正如今后将看到的那样,也可以把 $\chi_A(x)$翻译成 x 是由 A 限制的一个模糊参数的值的可能程度。】

◆讲评◆ 单词 fuzzy 作名词的定语时通常都放在该名词的前面,所以 parameter fuzzy 不应译成"模糊参数";另外,也没有"参数模糊"的说法,因此推断 fuzzy 是形容词,当定语,修饰 restricted by A。

㊣【正如今后将看到的那样,也可以把 $\chi_A(x)$解释成:x 是一个用 A 作模糊限制的参数的值的可能程度。】

练 习 4.6.3

指出下面各题的译文中所存在的问题,并加以修改:

(1) Such classes——called fuzzy sets——arise, for example, whenever we describe ambiguity, vagueness and ambivalence in mathematical models of empirical phenomena.

㊎【这些类别称为模糊集,例如,当我们描述那些实验现象的数学模型中的模棱两可、含糊、不明确性时,就会出现这些类别。】

(2) Then a fuzzy set A in X is a set of ordered pairs

$$A = \{ x, \chi_A(x)\}, x \in X,$$

where $\chi_A(x)$is termed "the grade of membership of x in A".

㊎【那么,一个属于 X 的模糊集 A 是一个由有序对

$$A = \{ x, \chi_A(x)\}, x \in X$$

组成的集,其中 $\chi_A(x)$称为 x 在 A 中的隶属度。】

(3) In many cases, however, even if the model is precise, fuzziness may be a concomitant of complexity. Systems of high cardinality are rampant in real life and their computer simulations require some kind of mathematical formulation to deal with the imprecise descriptions.

㊎【但是,在许多情况下,即使模型是精确的,模糊性也可能是错综复杂事物的伴随物。在现实生活中高基数的系统是无法控制的,而它们的计算机模拟实验要求用某种数学公式去处理那些不确定的描述。】

(4) The theory of fuzzy sets deals with a subset A of the universe of discourse X, where the transition between full membership and no membership is

gradual rather than abrupt.

㊎【模糊集理论处理论域 X 的一个子集 A，其中完全成员与非成员之间的变化是逐步的而不是突然的。】

§4.7 数学练习题的译例评析

本章前 6 节给出的错译例子主要出现在《数学专业英语》[1] 的第三章。显然，数学习题的英文表达也是数学专业英语的一个重要组成部分。此前，我们未有机会较多地涉及习题，作为一种弥补，本节将对数学练习题的译例进行评析。

由于前面已经较多地涉及大学的教材，所以这一节主要讨论中学数学教材中习题的翻译（本节习题主要来源于英美和香港的中学数学教材，即书末所列的参考文献[15]～[20]、[57]～[63]）。相信许多中学教师和师范大学学生会对这部分内容有更多的兴趣。

不难看到，无论大学或中学数学教材，其中习题的基本形式都是由(1)前提（条件）和(2)任务这两部分组成的。习题的前提（条件）的表达和教材其他部分中同类内容的表达方式一样，不再介绍。而“任务”指的是学生应完成的工作，它有两种表达形式：

(i) 由祈使句直接指明学生应完成的工作，常用 find(求)，determine(确定)，prove(证明)，verify(验证)，show(证明)，simplify 等作为祈使句的动词；

(ii) 用疑问句表达，提出问题，要求学生作答。

在具体表述上，不同的题目表现的形式差异很大。一般说来，前提要独立叙述。但是，如果前提明确，或由上下文可以得知的话，则可以省略前提，如 Find the sum of $(x^2+1)$and $(2x^2-5)$，就是前提本身已经明确的例子。当条件很简单时，常可以把条件和任务合成一个句子，如 Prove the base angles of an isosceles triangle are equal，就是如此。

有的习题的前提部分用一个长句或几个句子表达（例如对于学生陌生的知识的介绍），如下面 §4.7.2 例 2；有的习题给出的任务多，句子很长（见 §4.7.2 例 4），这些任务可能是并列的，也可能是递进的（参看以下相关的习题）。

很清楚，习题的表达形式本身不是很重要；对于本书读者而言，最重要的是能正确地理解，准确地翻译。一般说来，中学数学的英语版教材无论在数学内容或语言表达方面难度都不会太大。但是我们也可能遇到一些较难的句子，对于它们，要很好地理解并准确地翻译，也是需要经过认真推敲的。

为了阅读方便，下面把常见的错译例子大体分成两类进行介绍。

§4.7.1 数学知识和术语方面的不足导致的错译

例 1 The sum of the digits of a two-digit number is 10 and the tens digit is 4 larger than the units digit. Find the digits.

㊀【2 数字数的数字的和为 10,十个数字比单位数字大 4,求这些数字。】

◆讲评◆ 译者显然不了解 two-digit number(两位数),tens digit(十位数字)和 units digit(个位数字)的含义,导致一系列错误。读者应进一步认识到 digit 与 number 异同之处,以及 digit 在不同地方的不同译法。再者,句末的 the digits 应该明确地译成"这两个数字"。

㊁【一个两位数的两个数字之和为 10,十位数字比个位数字大 4,求这两个数字。】

例 2 The sum of square of two consecutive even numbers is 52 and the square of their sum is 100. Find the larger number of the numbers.

㊀【两个连续不断的偶数的平方的和为 52 和它们的和的平方是 100。求这些数中较大的数。】

◆讲评◆ 这句的主要问题在于译者没理解 two consecutive even numbers 的含义是"两个相邻的偶数";其次的问题是两个分句之间的连接词 and 在这里不能译成"和",否则容易导致与前后出现的数学意义下的"和"混淆;第三,句末的 the numbers 应该明确地译成"这两个数"。

㊁【两个相邻偶数的平方和为 52 且这两个数之和的平方是 100。求这两个数中较大者。】

例 3 Sunny borrows $20 000 from a bank with the interest being calculated at the interest rate of 16% p. a. compounded quarter-yearly. If he repays $4 000 every 3 months, how much will he owe after 1 year?

㊀【Sunny 向一家银行以每年利息 16%借 20 000 美元,四分之一年复合计算。如果他每 3 个月还 4 000 美元,一年后他欠多少?】

[**词语注释**] p. a. = per annual 每年。

◆讲评◆ 翻译这一句的关键是,认识英文表达存款或借款按复利率计算的句型,了解其一般译法。注意,quarter-yearly 或 annually 这类由表示时间长度的名词加后缀-ly 之后构成的词常表示"每……"的意思。另外,the interest rate(利率)与 interest(利息)是完全不同的概念,不可混淆。

㊁【Sunny 向一家银行借了 20 000 美元,年利率为 16%,按复利模式每 3 个月计算一次利息。如果他每 3 个月归还 4 000 美元,问一年后他还欠多少?】

例 4 In the figure, two ships A and B are sailing towards an island C.

The compass bearing of the island from ship A is N49°E, and the true bearing of the island from ship B is 316°. If the ships A and B are 170km and 75km respectively from the island, find (a)$\angle ACB$, (b)the distance between the two ships.

㊎【在图中，船 A 和 B 正在朝一个小岛 C 开去，海岛离开 A 的罗盘方位角是 N49°E，海岛离开 B 的真方位角是 316°。如果船 A 和船 B 分别离开海岛 170 千米和 75 千米，求(a) $\angle ACB$，(b) 两只船之间的距离。】

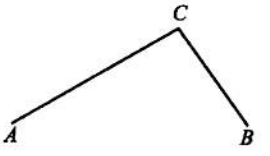


Figure 4.7.1

[**词语注释**] compass bearing 为“罗盘方位角”，相关的术语有 due north(正北)，due east(正东)，due south(正南)，due west(正西)和 Nx°E(北偏东 x°)，Nx°W(北偏西 x°)，Sx°E(南偏东 x°)，Sx°W(南偏西 x°)等，其中 x° 是目标方向与正北或正南方向的夹角的度数(小于 90°)；true bearing 为“真方位角”，以正北方向为 0°，其余方向用 y°(0°≤y°≤360°)来表示(指正北方向沿顺时针方向旋转 y° 所指的方向)。

◆**讲评**◆ The compass bearing of C from A is... 这种句型的含义是：“从 A 点观察，C 的罗盘方位角是……”(把 compass 换成 true 时，情况类似)。译者把句中三个 from 都译成“离开”，前两个是错的，后一个也不够妥当。

㊊【在图中，船 A 和 B 正在朝一个海岛 C 驶去，从船 A 观察，海岛的罗盘方位角是 N49°E(北偏东 49°)；从船 B 观察，海岛的真方位角是 316°。如果船 A 和船 B 分别距海岛 170 千米和 75 千米，求(a) $\angle ACB$，(b) 两只船之间的距离。】

练 习 4.7.1

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) Let P be the top of a building and A be a person on the ground somewhere. If the angle of elevation of P from A is 31°, find the angle of depression of A from P.

㊎【设 P 是某个建筑物的顶部，A 是地上某处的一个人。若由 A 到 P 的仰角为 31°，求由 P 到 A 的俯角。】

[**词语注释**] angle of elevation 仰角；angle of depression 俯角。

(2) Suppose that a certain radioactive substance have a half-life of 20 years. If there are presently 2 500 milligrams of the substance, how much, to the nearest milligram, will remain after 40 years? After 50 years?

㊎【设某种放射性物质有 20 年的一半生命。如果现在该物质有 2 500 毫

克，40 年后将剩下多少最近的毫克？50 年后呢？】

§4.7.2　语法等语言知识的不足导致的错译

例 1　Four lattices are selected from 5×4 grid board indicated in the figure above so that they form the corners of a rectangle having sides parallel to the edges of the board. How many different rectangles can be formed in this way?

㊎【四个格子从上面图形指出的 5×4 的格子板中选出，使得它们构成一个矩形的角落且具有平行于该板的边的边。用这种办法可以形成多少个不同的矩形？】

◆讲评◆　这段译文词不达意，没有译出原文的意思。事实上，现在分词 having 引导的短语不是修饰 lattices，而是修饰 rectangle；于是 rectangle 是 having 的逻辑主语；把 form the corners of a rectangle 译成“构成一个矩形的角落”也是很不明确的。此外，lattice(格子)和 grid(网格)也不可以混淆。

㊍【从上面图形所示的 5×4 的网格板中选出四个格子，使得它们构成一个矩形的四个隅角且使该矩形的边平行于网格板的边缘。用这种办法可以形成多少个不同的矩形？】

例 2　In the Pascal triangle, the term $T_{n,r}$ which is in the row n and position r with $n>1$ and $0<r<n$ is equal to the sum of the two terms immediately above it, i. e. $T_{n,r}=T_{n-1,r-1}+T_{n-1,r}$. The first and last terms in each row are both equal to 1, i. e. $T_{n,0}=T_{n,n}=1$, since the only term immediately above them is always a 1. Find $T_{12,5}$, $T_{40,32}$ and $T_{n+1,r+1}$.

㊎【在帕斯卡三角中，该项 $T_{n,r}$，它在第 n 行第 r 个位置，其中 $n>1$ 而 $0<r<n$，等于直接在它上面的两项之和。每一行的第一项和最后一项同时等于 1，即 $T_{n,0}=T_{n,n}=1$，因为直接在它们上面的项总是 1。求 $T_{12,5}$，$T_{40,32}$ 和 $T_{n+1,r+1}$。】

[**词语注释**] Pascal triangle　帕斯卡三角，即中国古代数学家发现的杨辉三角，或称贾宪三角(见下图)。

◆讲评◆　这个译文虽无大错，却不准确，文字表达也不够顺畅。首先，尽管 immediately 常译成“直接”，但在这里的意思是“最接近的”。结合图形的实际情形，应把 the sum of the two terms immediately above it 译成“它的上方与其最接近的两项之和”。其次，虽然不定冠词 a 经常不用译出，但在“a 1”中，a 的作用等同于 one，强调只有一个，应译出；同时，强调词 only 也不可省去；此外，太长的修饰成分翻译时应该放在适当位置，词序不必与原文一一对应，以免影响句子主

要内容的连贯性。全句可改为：

㊣【在帕斯卡三角中，第 n 行第 r 个位置的项 $T_{n,r}$ 等于它的上方与其最接近的两项之和，其中 $n>1$ 而 $0<r<n$。每一行的第一项和最后一项都等于 1，即 $T_{n,0}=T_{n,n}=1$，这是因为在它们的上方最接近的项都只是一个 1。求 $T_{12,5}$，$T_{40,32}$ 和 $T_{n+1,r+1}$。】



$T_{0,0}$

$T_{1,0}\ T_{1,1}$

$T_{2,0}\ T_{2,1}\ T_{2,2}$

$T_{3,0}\ T_{3,1}\ T_{3,2}\ T_{3,3}$

$T_{4,0}\ T_{4,1}\ T_{4,2}\ T_{4,3}\ T_{4,4}$

$T_{5,0}\ T_{5,1}\ T_{5,2}\ T_{5,3}\ T_{5,4}\ T_{5,5}$

$T_{6,0}\ T_{6,1}\ T_{6,2}\ T_{6,3}\ T_{6,4}\ T_{6,5}\ T_{6,6}$

Figure 4.7.2

例 3 Alternate add and subtract the terms in each of the first seven rows of the Pascal triangle and list the results in a table similar to the one on the right.

㊥【交替地把帕斯卡三角的前面七行中的每一行的项加和减，并把结果列在一个与右边类似的表格中。】

◆讲评◆ 应注意 each 常强调“各自”的意义。原来的译法容易造成误会，使人以为是“把前七行的项全部放在一块运算”；后一个分句也表达得不够清楚。

㊣【对帕斯卡三角的前面七行中的各行分别进行如下运算，即对该行的各项交替地进行或加或减的运算，并把结果列在一个与右边的表格类似的表格中。】

例 4 A company makes boxes of wooden matches and it is known the number of matches in its boxes follow a normal distribution pattern with a mean of 44 matches per box and a standard deviation of 2 matches. (a) What percentage of boxes of wooden matches made will contain less 40 matches?

(b) If the operations of the machines are improved and the standard deviation is decreased to 1 match, find the mean number of matches that a box should contain so that the percentage of boxes which contain less than 40 matches remains the same as before.

㊀【有一家公司制造木头火柴盒且已知它的一个盒中的火柴数量按照正态分布,平均每盒 44 根火柴,标准差为 2 根火柴。(a) 百分之多少的木头火柴盒将要装少于 40 根的火柴? (b) 如果通过改进机器操作,标准差降低 1 根火柴,求一个火柴盒所装的平均火柴根数,使得装少于 40 根火柴的盒子的百分比保持不变。】

[**词语注释**] normal distribution pattern 正态分布模型;standard deviation 标准差。

◆**讲评**◆ 该译文的主要问题在于没有按照汉语的表达习惯正确表达原文的意思,特别是最后一句,由于死板地按照原文的式样翻译,效果不好。另外,follow a normal distribution pattern 应译成"服从正态分布"。

㊁【有一家公司生产木制的火柴盒。已知其中每盒所装的火柴数量服从这样的正态分布:平均数为每盒 44 根火柴,标准差为 2 根火柴。问:(a) 只能装少于 40 根火柴的木制的火柴盒占多少个百分点? (b) 如果通过改进机器操作,标准差降低到 1 根火柴,假定只能装少于 40 根火柴的盒子所占的百分比保持不变,求平均一个火柴盒能装的火柴根数。】

例 5 For certain real numbers a, b, c with $a\neq 0$, is it impossible that for no real number x to have the equality $ax^2+bx+c=0$ valid?

㊀【对某些实数 a, b, c, $a\neq 0$,是否不可能对不是实数的 x 有等式 $ax^2+bx+c=0$ 成立?】

◆**讲评**◆ 译者对英语中的这类否定形式不了解,也对带逻辑主语的动词不定式缺乏认识,导致错误理解和错译(相关的讲解可见 §3.3 和 §3.12)。本句的后半部分可直译成"是否不可能找不到一个使得等式 $ax^2+bx+c=0$ 成立的实数 x?"但是,这样的译文显得有点拗口。实际上,对这种双重否定形式,必要时可采用意译把它译成肯定句,以便达到简洁明了的效果。

㊁【对某些实数 a, b, c, 其中 $a\neq 0$,是否必有实数 x 使得等式 $ax^2+bx+c=0$ 成立?】

例 6 Read the problem carefully to get an overview of the situation being described and to determine the known facts, as well as what is to be found before you solve any word problem.

㊀【仔细阅读题目,以便了解所描写的情景,确定已知的事实,以及你在解

决任何词汇问题之前所发现的事物。】

◆讲评◆ 这句的主要错误是认为 before 引导的从句所对应的主句只是 what is to be found。第二个错误是把 word problem 译成“词汇问题”。而且，found 在这里应译成“求”而不是“发现”。

㊣$_1$【你在解决任何应用题（文字题）之前，仔细阅读题目以便对题目所描写的情景有一个大致的了解，并确定已知的事实以及题目要求的是什么。】

或

㊣$_2$【在你解一个应用题之前，应仔细阅读题目，以便对题目所描写的情景有一个整体的了解，并确定哪些是已知的事实，哪些是题目要求的东西。】

练 习 4.7.2

指出下面各题的译文中所存在的问题，并加以修改：

(1) The sum of three numbers is 20. The sum of the first and third numbers is 2 more than twice the second number. The third number minus the first yields three times the second number. Find the numbers.

㊎【三个数的和是 20。第一个与第三个数的和是 2 多于两倍的第二个数。第三个数减去第一个得出 3 乘以第二个数。】

(2) Solve the following systems of equations. Don't forget that to check a problem like example 7 you must check the potential solutions back into the original equations.

㊎【解下列方程组。不要忘记检验像例 7 那样的题目，你必须回到原方程去检验潜在的解。】

§4.8 减少误读错译，提高读译能力

在以上各节，我们已经看到 200 多个误读错译的例子。本节的主要任务是对前几节做一个小结。第一小节将归纳一些常见的类型，指出误读错译的直接原因；第二小节简要介绍一些有效地减少错误、提高读译能力的途径。

§4.8.1 误读错译的四个典型形式

前面我们已经看到，数学专业英语可能被误读错译的例子的表现形式是多种多样的。为了讲评和分析的方便，我们把典型的例子大体上分为四个类型：**简单性错误、英文疑难致错、数学疑难致错、双重疑难致错**。下面就依照类型 A，B，C，D 分别举例分析之。

类型 A 简单性错误

所谓简单性错误，指的是低难度错误，那些被误读错译的例子，原文语言表述的难度和数学内容的难度（对于大学二年级的学生而言）都不大，只因为初学者在某些知识方面的欠缺或阅读理解时不够认真仔细等原因导致错误，表现为对英语常见句型或习惯用法欠了解、对数学术语和概念的理解错误、汉译时文字不通顺或不符合中文表达习惯等。

1. 对常用数学术语或基本概念理解错误导致的错误

例 1 It becomes necessary in our times for all college students to understand calculus.

㊀【当代的所有大学生了解计算都成为是必要的。】

◆讲评◆ 这个译文明显有错，因为近 100 年来，连小学生都把数学当成主课了，何以当代的所有大学生才有必要了解计算呢？这里错误的原因是，译者不知道 calculus 有其他重要的含义。

大体说，calculus 主要含义有两个，一是“计算”，二是“微积分学”（the differential and integral calculus 的简称）。前者少用，因为目前常用于表示计算的英语单词很多，其中名词如 calculation，computation，counting 等。据上下文不难得知，这里谈的是“微积分学”。

㊁【对于当代的所有大学生来说，了解微积分已变得很有必要。】

例 2 Equations are of two kinds——identities and equations of condition.

㊀【方程有两类——恒等式和条件方程。】

◆讲评◆ Equation 虽然经常译成“方程”，但它也用于表示“等式”。译者如果不了解数学中的方程、等式和恒等式的含义及它们之间的关系，或者只知道 equation 的含义是“方程”，则可能把这个句子错译。

㊁【等式分为两类——恒等式和条件等式。】

2. 对英语常见语法或习惯用法缺乏了解导致的错误

例 3 The set of integers is a subset of the set of real numbers.

㊀【某些整数的集是某些实数的集的子集。】

◆讲评◆ 应注意，the set of integers 等同于 the set of all integers，the set of real numbers 等同于 the set of all real numbers，应分别译成整数集和实数集。若把定冠词改成不定冠词 a，那么 a set of integers 和 a set of real numbers 才应分别译成“某些整数组成的集”与“某些实数组成的集”，这是定冠词与不定冠词的一个重要区别。同样，the set of natural numbers 与 the set of rational numbers 分别表示自然数集和有理数集。因此，原句应译成：

㊣【整数集是实数集的子集。】

例 4 The volume of the big ball is 3 times larger than that of the small one.

㊀【大球的体积比小球的体积大 3 倍。】

◆讲评◆ 译者可能不了解，原句等同于 the volume of the big ball is 3 times as larger as that of the small one，即英文表示倍数比较的方法不同于表示“A 的数值比 B 多 3(A is 3 more than B)”的表示法(详见 §3.10)。原句应译成：

㊣$_1$【大球的体积是小球的体积的 3 倍。】

㊣$_2$【大球的体积比小球的体积多 2 倍。】

3. 汉译时文字不通顺或不符合中文习惯等方面的错误

例 5 An identity involving letters is true for any set of numerical values of the letters in it.

㊀【一个含有字母的恒等式对任何由其中字母的数值组成的集合都是真的。】

◆讲评◆ 句中 set 作量词用，意为“组”、“套”等。因为数学命题有真假之分，把 is true 直译为“是真的”也可以，但只在特定场合才那么说。在一般情况下应译成“成立”。整句应译成：

㊣【含有字母的恒等式对其中字母的任何一组数值都成立。】

例 6 This number is said to be a function of x even though no simple algebraic formula is known for computing it (without counting) when x is known.

㊀【这个数称为 x 的函数，尽管对于当 x 已知时计算它的值(不计算)是没有简单的代数公式为已知的。】

◆讲评◆ 译文表达不清楚。除了文字组织不当外，其错误主要体现在：(1) 把 computing 和 counting 含义混同，结果导致逻辑混乱，其实 counting 的含义主要为“计数”；(2) 把前后两个 is known 都译成“已知的”，其实二者的含义是有差别的，第一个 is known 连同它前面的 no…formula 指的是人们“还没认识到”有关公式(即“还没有建立”那样的代数公式)，第二个 is known 指的是具体计算的条件(x 是已知的)。

㊣【这个数称为 x 的函数，尽管还没有一个简单代数公式可用来由已知的 x 计算(不通过计数求)出它的值。】

类型 B 英文疑难致错

有些句子涉及的数学内容不深，但英语的语法稍复杂或一些词语的惯用法

与汉语相应的表达方式有较大差距，初学者若未能解决有关的英语疑难问题，就容易导致误读错译。我们在§4.7.2已经看到部分较简单的例子，下面是进一步的例子。

例7 If a variable y depends on another variable x in such a way that to each value of x corresponds a definite value of y, then y is a function of x.

㊀【如果一个变量 y 和另一变量 x 有关，即 x 的每个值都和 y 的一定值相对应，那么 y 就是 x 的函数。】

◆讲评◆ 以上文字没译好应变量与自变量的基本关系，这与译者对函数的概念认识不清有关，同时也反映了其英语水平之不足。事实上，原文 if 引导一个条件状语从句，其中包含了 that 引导的同位语从句。句中有三个难点：一是动词 depend 和 correspond 的惯用法：depend on 表示“依赖于”，correspond to 意思是“对应于”。二是，该同位语从句是倒装句，主语是 value of y。此外，这句话是在阐述定义，不过原文没有采用通常表示定义的方式表述，这也是一个隐蔽的难点。

㊁【如果变量 y 按这样的方式依赖于另一变量 x，即对 x 的每个值，y 都有一个确定的值与之对应，那么 y 就称为 x 的函数。】

例8 The goal is to come out of this course with a large number of methods about which you have theoretical knowledge and with which you have numerical experience.

㊀【其目的是利用许多已有的理论知识和数值经验方法走出这门课程。】

◆讲评◆ 词组 come out of 在字面上的意思是“走出”，这里应转义为“学完”。句中介词短语 with a large number 是行为方式状语。两个 which 分别引导一个定语从句修饰 methods。初学者可能对这句的语法结构不明确且对两个 with 的含义理解不清而出现错误。

㊁【其目的是使学完课程者获得大量的方法，不仅具有关于它们的理论知识，而且具有使用它们的数值计算经验。】

类型C 数学疑难致错

有的英文句子的语法结构未必复杂、词语未必晦涩难懂，主要是由于读者对其中数学内容或应用背景不理解而产生错误。我们在§4.7.1已经给出部分例子，下面是进一步的例子。

例9 In Figure 1.3, we show all graphs (up to isomorphism) that have order at most 4 and size 3.

注：这个句子选自《Modern graph theory》[67]，上下文内容是关于图的同构

概念的定义和性质的讨论。术语 isomorphism 的意思就是“同构”。

㊀【图 1.3 表示所有(直达同构)的、具有最多次数 4 和大小 3 的图。】

◆讲评◆ 词组 up to 相当于一个介词，其通常含义是“直到”或“到……为止”。但在数学中，当 up to 后接一个表示某种意义下的等价关系的术语(如 equivalence(等价)，isomorphism(同构)，homeomorphism(同胚)等)时，常译作“按……的意义”。例如，up to isomorphism 应译作“按同构的意义”；其数学含义是“把互相同构的数学对象看做同一个而不加区分”。另外，在图论中，order 应译成“阶”，size 3 指的是“边数为 3”(3 边图)。所以不懂这个专业的人就难以作出正确的翻译。

㊁【图 1.3 所示的是所有(按同构意义)的、阶数至多是 4 的 3 边图。】

对于在英语方面的知识和能力有所欠缺的读者，若数学方面的能力较强，则可以弥补语言方面的不足；反之，则可能妨碍在语言方面已有能力的正常发挥。特别地，在翻译那种语言方面难度不大的句子时，数学方面的知识和能力对译文的正确性所起的作用更大。

例 10 Nor is it the graph of a function g expressing x as a function of y, since in a neighborhood of 0 the same value of y gives sometimes two values of x, sometimes none.

注：这个句子选自本书 §6.1.4《$\mathbf{R}^n$ 中的光滑流形》，上下文的内容是讨论平面上非光滑曲线 $f(x)=|x|$ 的函数表示。这句话的前一句是 It is the graph of the function f expressing y as a function of x, of course, but f is not differentiable.【它是函数 f(把 y 表成 x 的函数)的图，当然 f 是不可微的。】

㊀【它作为函数 g(把 x 表成 y 的函数)的图形也是不可微的，因为在 0 的邻域，y 的同一个值有时给出 x 的 2 个值，有时一个也没有。】

◆讲评◆ 这句的主句译错，从句基本正确。根据我们的教学经验，主句译错可能出自于以下原因：译者对有关的数学知识不甚了解，以为图形也讲可微性；加上对英语中 nor 的用法不太了解，以为句子开头的 nor 所否定的内容一定与上句一样，即这里的 nor 就代表上句末的“不可微”；结果在未对主句作仔细分析的情况下就给出错误的译文。

如果译者对函数的基本概念有较好的认识，就应知道其中 since 引导的从句是在否认函数 g 的存在性。事实上，该从句的数学含义是：“在 0 的邻域(如区间$(-\varepsilon,\varepsilon)$)，当 $y\in(-\varepsilon,0)$ 时，y 的同一个值对应着 x 的 2 个值；当 $y\in(0,\varepsilon)$ 时，则不存在实数 x 与它对应”。因此，所讨论的图像不是任何形如 $x=g(y)$ 的函数的图像。也就是说，根据数学知识可以推知 nor 否定的不是“可微性”，而是函数的图像。但是由于译者缺乏有关的知识和能力，结果就不能做到这一点。

㊣【它也不是某个函数 g(把 x 表成 y 的函数)的图像,因为在 0 的每一邻域里,有时同样的一个 y 对应着 x 的两个不同的值,而有时则没有 x 的值与 y 对应。】

类型 D　英语数学双重疑难致错

当一些英文句子不仅其语法结构复杂或表达方式特殊,而且数学内容也较艰深时,读者产生错误的机会最多,错误程度也较大。§4.6 的例 10 就是这种类型的句子。下面再给出两个较典型的例子。

例 11　Theorem 11.13 is sometimes described by saying that if $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ in S the value of a line integral along a piecewise smooth simple closed curve in S is unaltered if the path is deformed to any other piecewise smooth simple closed curve in S, provided all intermediate curves remain within the set S during the deformation.

注:这段英文摘自本书§6.1.1《多连通区域上的格林定理》,句中所说的定理 11.13 的内容是"线积分关于积分路径变形的不变性"。

㊥【定理 11.13 有时用这种说法描述,如果 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 S 成立,那么沿 S 中某一条逐段光滑的简单闭曲线的线积分的值不作变更,如果积分路径变形成其他在 S 的任意逐段光滑的简单闭曲线,如果所有中间曲线在变形过程中一直都保持在 S 中。】

◆讲评◆　从局部看,这个译文的各个分句的翻译基本无大错,但整个句子逻辑关系不清楚,未能表达原文的基本意思。在客观上,这句在语法上和数学专业方面都有一定难度。比如,英文句子较长,语法结构较为复杂,其中 that 引导的宾语从句中又含有三个条件从句,且它们的主句的位置较不突出(放在第一个条件从句之后);同时,数学内容也有一定难度,特别是初学者较难掌握其中的数学思想,搞不清"什么东西在变","什么东西不变","在变的东西是如何变的"等问题。在这种情况下,如果读者不下工夫,就难以理清条件与条件,条件与结论之间的逻辑关系。

要翻译好这个句子,应该首先认识句子的语法结构;接着在数学上,应该根据主句的主语"定理 11.13"的内容及有关介绍,了解有关的数学思想,明确从句要阐述的就是"线积分关于积分路径变形的不变性";并进一步理清:在各个条件中,第一个条件从句给出大前提,第二个条件从句给出小前提,第三个条件从句则对第二个从句的条件作补充说明。在这基础上才能写出基本正确的翻译初

稿，再经过反复推敲，才能得出较好的译文。

㊟【定理 11.13 有时也可以这样表述：如果$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$在 S 中成立，则沿 S 中某一条逐段光滑的简单闭曲线的线积分的值，不因把积分路径换成任意一条由原曲线变形得到的、逐段光滑的简单闭曲线而改变，其中假定了曲线在变形过程中一直保持在 S 中。】

例 12 We can in fact regard D (and functions of D) as the primary object in itself, divorced from functions such as y on which it operates.

注：这句英文摘自§6.1.3，其中 D 表示微分算子。相关的上下文讨论如何理解微分算子 D 和 D 的函数(如 $x^2D^2+4xD-3$)，并举出它们对函数 y 作用的具体例子。

㊠【其实，我们可以把 D(连同 D 的函数)看做算子本身的基本对象从像 y 这样的函数分开，它对这种函数进行运算。】

◆讲评◆ 译文未能正确译出原文意思。原文的语法结构虽然简单，但却有一些常被忽略的语言方面的难点。比如，若 in fact 放在句首(当插入语)且用于订正上一个句子的意思，可译成“其实”；但这里 in fact 放在句中用于修饰动词，其含义是“根据实际情形”或“事实表明”，应译成“实际上”或“事实上”(这种译法有时也适用于 in fact 放在句首的情形)。又如，短语 in itself 的意思是“完全地”，用来修饰动词；而不是“本身”或“本身的”，不能译成“基本对象”的定语。再者，译文对 divorced 引导的分词短语也没有译好；事实上，from 未必要译成“从”，operate 未必要译成“运算”。出现这些问题，既与译者在语言方面(中、英文)的知识和能力的欠缺有关，也和数学知识(包括算子)的缺乏有关。

㊟【实际上，我们可以把 D(连同 D 的函数)完全看做数学的基本对象，把它与它所作用的(如上面例子中的 y 这样的)函数分离开来。】

§4.8.2 加强基本功训练，在反复推敲中提高

由上述分析看到，语言的基本能力和数学水平的高低决定了能否正确地进行数学专业英语的阅读理解和翻译。由于数学专业英语是用英语工具来表达数学内容，所以，在误读错译的数学专业英语的例子中，尽管我们列出四种典型的形式，实际上只有很少的例子是纯粹由于数学水平的不足或英语水平的不足导致错误的。因此，为了提高阅读理解和翻译的水平，减少误读错译，就得同时从语言和数学两个方向努力。

下面列出的一些办法看上去似乎平淡无奇，实际上，无数经验证明，只要按照这些办法去做，就能确实地帮助实践者很有效地提高他们的读译水平。

一、勤学苦练需坚持、切实夯实基本功

1. 提高英语的基本能力，夯实数学专业英语的基础

大学生应该根据公共英语的教学要求，努力掌握一定数量的常用词汇(包括常用动词、形容词、介词等的惯用法)、熟悉基本语法规则，会分析句子的语法结构，掌握基本的阅读和翻译的技能和技巧。在这基础上，努力掌握常用的数学术语及数学英语的常用句型和表达方式。具体的可以这样做：充分利用本教材的内容，努力掌握本书第一、二章的基本内容及相关的语法和译法选讲的要点，完成指定的练习和训练。在这基础上，参照第四章 1—6 节提供的译例，逐步进行阅读与翻译的训练。

2. 修补数学知识缺漏，提高专业及其应用水平

在阅读及翻译的过程中，遇到不明白的数学术语、概念或命题(包括已经学过但已经遗忘的概念、结论等)，应努力查阅相关数学文献(包括词典、教材、参考书、百科全书等，最便捷的是中文版的资料)，或向师友请教，努力解决疑难。只有这样，才能正确理解原文，获得正确的译文；经常这样做的话，经过一段时间努力，定然会提高阅读和翻译的能力。

3. 提高中文的表达能力，掌握论题的表达方式

为了正确而且顺达地写好译文，提高中文的表达水平显然是非常重要的；为了能使译文符合数学专业的中文表达习惯，译者还必须了解并尽可能掌握有关论题的中文表达方式。

总之，学习数学英语必须有高度热情、勤学苦练，同时要有坚忍不拔的精神，不怕失败、永不放弃，才能不断地获得进步。这和学习其他科学知识一样，相信读者会有许多体会，不需我们详述。

二、善于分析多比较，反复推敲勤查证

实践证明，要学好专业英语，应有科学精神，实事求是的态度，对于有疑问的知识点要认真查证，努力探索。有时，这种查证要反复多次进行，考虑各种可能性，理清各种命题、概念或语法关系。

数学以逻辑为基础，一时一刻也离不开逻辑；语言表达(不论英语或汉语)的规律也受逻辑的支配。逻辑作为工具，可以帮助我们进行思考和分析，及时发现问题、分析错误、改正错误。学习和研究数学的人，其逻辑思维训练较多、也较好，我们应该发挥自己的这个长处，在阅读理解和翻译的过程中，主动积极地把逻辑的方法应用到其中去参与思考和分析。

在阅读理解和翻译的过程中每前进一步，都面临着各种问题、各种矛盾，包括由于我们在数学和语言方面的能力不够所犯下的错误或欠缺。因此，我们既要学习提高，又要在实践中随时检查自己的工作，不断发现矛盾又不断解决矛

盾；我们要采用逻辑工具、结合数学知识和语言能力，反复推敲、反复查证、千方百计设法解决问题，纠正错误，提高译文的可读性、科学性，努力做到“信”和“达”，逐步向“雅”迈进。

下面通过一些具体译例说明我们可以如何通过反复分析和推敲，逐步改进阅读和翻译的效果。

1. 涉及词义选择的分析

我们在§4.8.1 例2(Equations are of two kinds — identities and equations of condition)中看到，如果把前后两个 equation 都译成“方程”，那么就把恒等式译成是“方程的一部分”，根据数学知识知道，这是明显的矛盾。面对这样的矛盾，我们认真地查阅字典，就知道 equation 还有一个常用的含义——等式。按等式来翻译，就把矛盾解决了，获得了正确的译文。

更一般的，当两个同义词出现在同一句时，也应判别它们的词义有何异同。

例1 It is therefore important to be fully aware of the rules of logic we need and to realize that these rules can be applied without regard for the actual meaning of the statements on which they are used.

㊁$_1$【因此，重要的是应该充分地了解我们所需要的逻辑规则，并明确这些规则可以应用在它们被应用的命题上，而不管该命题的实际含义是什么。】

◆讲评◆ 这里把两个同义词 applied 或 used 都译成“应用”，在语法上是没错的。但是“这些规则可以应用在它们(规则)被应用的命题上”这种表达无论如何都是错误的，后半句说“已经被应用的命题上”，前半句再来说“可以应用”在那里，很明显是存在矛盾。尽管在数学专业英语中，apply 通常译作“应用”，但是我们不能就此作罢，而应再次查证它的词义和有关用法。这样，我们就会发现 apply 还有“适用”这一个重要含义，若改用它，就可以得到如下译文：

㊁$_2$【因此，重要的是应该充分地了解我们所需要的逻辑规则，并明确这些规则可以适用于它们所应用的命题，而不管该命题的实际含义是什么。】

◆讲评◆ 这样翻译已经很大程度上解决了前面发生的矛盾。但是，如果仔细推敲，可以发觉，中间那个分句似乎和最后一句不协调。经过思考，英语这种提醒语句中的 can，应该译成“是否可以”，于是㊁$_2$改成：

㊀$_1$【因此，重要的是应该充分地了解我们所需要的逻辑规则，并应明确，这些规则是否可以适用于它们所应用的命题，不论该命题的实际含义是什么。】

◆讲评◆ 进一步，若采用书面语代替㊀$_1$ 的最后一句译文，可以改成：

㊀$_2$【因此，重要的是应该充分地了解我们所需要的逻辑规则，并应明确，这些规则是否可以适用于它们所应用的命题，且与命题的实际含义无关。】

2. 涉及否定形式的分析

例 2　If A is a real square matrix with only real characteristic values, is it possible that for no matrix P over the real fields, PAP^{-1} is diagonal, yet such a P can be found with complex entries?

㊎$_1$【如果 A 是一个只有实特征值的方阵，是否可能不对实数域上的矩阵 P，PAP^{-1} 是对角矩阵，但是这一 P 可以用复数表值中找到?】

◆**讲评**◆　遇到否定句，首先要搞清楚的是：否定词是什么？是全部否定还是局部否定？本例译者可能以为 for no 等同于 not for，其实 no 在句中表示全部否定，它否定的是动词 is 而不是介词“for”，所以译成“不是对实数域上的矩阵 P”是错的。后一个分句的译文多处模糊不清，如“这一”是什么意思？“用复数表值中找到”是什么意思？如果译者能通过查阅有关资料，搞清楚上面提出的问题，则可以得到如下改进：

㊎$_2$【如果 A 是一个只有实特征值的方阵，是否可能对实数域上的矩阵 P，PAP^{-1} 不是对角矩阵，但是可能找到复数元矩阵 P 使之满足这样的条件?】

◆**讲评**◆　译文修改后虽然有改进，但读起来仍有些别扭。如果译者能进一步了解英语否定形式的特点(如参考本书 § 13.2)，则应该把全部否定的含义表达出来，在矩阵 P 前面加上逻辑量词“所有”，于是译文改成：

㊍$_1$【如果 A 是一个只有实特征值的方阵，是否可能对实数域上的所有矩阵 P，PAP^{-1} 都不是对角矩阵，但是可能找到复数元矩阵 P 使之满足这样的条件?】

◆**讲评**◆　比较原文前后两个分句发现，前后分别涉及实矩阵和复矩阵的存在性问题，译文最好能把两种情形互相对照的意思表达出来，于是可以把原文意译成：

㊍$_2$【如果 A 是一个只有实特征值的方阵，是否可能出现这样的情形：在实数域上不存在矩阵 P 使得 PAP^{-1} 成为对角矩阵，但在复数域却可以找到这样的矩阵 P。】

3. 涉及模糊表达的分析

因为中外表达方式和表达习惯的巨大差异，所以，一段从字面上看翻译正确的文句未必是好的译文。好与否的关键在于是否“信而达”，即有没有译出原文的本意且能让读者清楚地明白它。下面一个简单的例子可以给我们提供一些启发。

例 3　An earthquake in San Francisco in 1906 was reported to have a Richter number of 8.3. How did its intensity compare to the reference intensity?

㊎【据报道，1906 年旧金山的地震的 Richter 数是 8.3。怎么把它的强度与参考强度比较?】

◆讲评◆ 原文是中学的一个数学习题。把这个译文与原文对照，很难看出与原文有不一致的地方，而且表达也通顺，所以，这是一段从字面上看正确的译文。尽管如此，从中国读者的角度来看，却不清楚“Richter 数是 8.3”表示的准确意思是什么；再者，按照译文，该习题要学生回答：“怎么把它的强度与参考强度比较?” 按常规，“怎么”问的是行为方式，学生只好往行为方式方面去考虑，结果必然答非所问。这就是说，很多学生不明确题目到底问什么，要答什么。实际上，译者可能自己也不知题目的准确意思，只是在形式上正确地作了对译。

面对这样的情形，认真的译者就不应该只停留在字面上的正确，而应该按照上述问题去寻求原文的本意并用学生容易明白的语言表达出来。事实上，只要查阅一下文献，就知道“Richter 数是 8.3”就是所考虑的地震按里氏(Richter)标准计算是 8.3 级；同时，这里的“强度”指的是“能量强度”，里氏还给出了用于表示能量强度与地震级别之间关系的计算公式，同时给出“参考能量强度”。

经过查阅词典和分析，根据地震计算的公式和 how 的含义可推测出，这里问的是：“与里氏参考(能量)强度相比，这次地震的强度如何?”于是，就可写出明确的译文，让学生一看就知道题目的具体要求，即他们应该回答的是什么。

㊣【据报道，1906 年发生在旧金山的地震按里氏标准是 8.3 级。那么，这次地震的能量强度是参考强度的多少倍?】

4. 涉及多个意群的分析

有时一个英语语句涉及好多个意群，特别是长句子。要翻译好长句，首先要善于“化长为短”，即在理清语法结构的基础上把长句划分成适当的意群(主句、从句都可以各归于一个意群，一个较长的修饰语也可独立成为一个意群)，接着把每个意群分别译出，然后把它们适当地衔接成文。关于长句的翻译方法，许多文献，包括文献[1]都有介绍。我们在这里不再重复，下面只是举出一个例子，说明应该注意各个意群之间的配合与协调关系。

例 4 **Problem** Does there exist some features (numbers, rank, order, etc.)of an arbitrary symmetric matrix A that will determine which subset contains A and consequently whether A is congruent to a particular representative?

㊟$_1$【**问题** 是否存在一个任意的对称矩阵 A 的某种特点(数、秩、阶等)，它将确定哪一个子集包含 A，并且因此 A 是否相合于一个特殊的代表。】

◆讲评◆ 这个句子的主句是个疑问句，它有一个定语从句，该定语从句又有两个宾语从句(一个由 which 引导，另一个由 whether 引导)。㊟$_1$对其中的结构不太清楚，主句部分的译文逻辑不清，两个从句部分的译文既不能互相配合，又不能与主句协调，整个译文根本不合原文的意思。

㊟$_2$【**问题** 一个任意的对称矩阵 A 是否存在某种特点(数、秩、阶等)，它将

确定是哪一个子集包含了 A，而且因此 A 是否相合于一个特殊的代表?】

◆讲评◆ 经过修改，主句部分和第一个宾语从句都分别作了改正，但是仍然没有处理好第二个宾语从句与其他意群的关系。值得注意的是，汉译时，像 will determine 这种后接两个宾语从句的动词必要时应重复译出，这样才能得到清楚的表达。

㊣$_1$【**问题** 一个任意的对称矩阵 A 是否存在某种特点(数、秩、阶等)，它将确定是哪一个子集包含了 A，因而将确定 A 是否相合于一个特殊的代表?】

◆讲评◆ 还应该进一步注意到，原文 which 引导的是限制性的定语从句，因为从句很长，用分句译出是合理的，但是它与主句的修饰限制关系仍然要明确地体现。处理好主句和从句的关系是在意群分析中必须特别重视的环节。

根据上述分析，并对文字进一步加工，我们得到如下译文：

㊣$_2$【**问题** 是否任意的一个对称矩阵 A 都存在某种具有如下作用的特征(可以通过数、秩、阶等来体现)，这种特征可以确定包含 A 的矩阵子集，因而可以确定 A 是否相合于一个特殊的代表矩阵?】

本节小结：上述四个例子，仅仅从几个侧面说明如何通过反复分析和推敲，逐步改进阅读和翻译。读者不难从中看到推敲产生的良好效果以及推敲过程的艰辛。至于如何展开这项工作，这里再提供一些意见供读者参考。

反复分析的过程可以用“由表及里、由此及彼、去粗取精、去伪存真”来描述。具体推敲过程大体上可以分为三步：

(1) 第一步：从已有的译文出发，暂时不管原文如何，先看译文语句是否通顺，意思是否明白；再看译文涉及的数学内容是否可以成为一个有效的、没有自相矛盾的命题。在有明显不当、可能错误或有疑问之处做上记号，以便下一步就此重点查证和修改。

(2) 第二步：仔细阅读原文，先逐个检查单词，特别是数学术语和英语动词及其配搭成分的翻译是否正确，并作相应的修改；接着检查较小的意群，然后大的意群与分句；如果每个局部部分都作查证和修改了，再对照句子的语法结构，来检查各个意群之间的关系是否协调，并作修改，得出新的译文。其中，对第一步分析发现的问题要特别关注。

(3) 第三步：认真推敲新的译文，首先检查，此前每一步发现的问题是否都已经作了相应的修改或处理；接着检查的是：是否语句通顺、意思明确，忠实于原文。如果这些都做到了，那么，译文就算是“信、达”了。当然，有可能的话还要进一步考虑“译文是否还有改进的空间”，包括“怎样才能使译文更能反映原文的本意”和“怎样才能用中文表达得更完美”等“雅”的问题。

第五章　数学论文的英语表达

本章主要介绍数学论文在英语表达方面的一些基本写作知识和应该注意的事项，提供各种常用的表达句型和例子，指出初学者在写作过程中应注意的事项。此外，为了便于读者学习参考，我们选用两个附录放在本章末：附录 A 是一篇已发表的数学论文，附录 B 是关于应用软件“CNKI 翻译助手”辅助写作的简介。

撰写本章时，我们参考了如下文献：[1]、[3]、[6]、[8]、[10]、[11]和[53]。

§5.1　数学论文的英语表达提要

一篇研究性的数学论文主要由如下六个部分组成：标题(title)、作者信息(about author(s))、摘要(abstract)、关键词(key words)、正文(main text)和参考文献(references)。其中，正文部分可包括引言、论证部分等。必要时还可在正文之后、参考文献之前添加答谢语(acknowledgements)；此外，有时还要求在摘要或关键词之后附上主题分类号。

本章的附录 A，就是我们选录的一篇简短而且内容较为浅显的参考论文。初学者可以从中获知英文版数学论文的基本样式。同时，在我们接下来陆续介绍写作知识时，读者也可以参照该论文的写法来进行学习。

随着国际学术交流的日益发展，数学论文的结构和格式在全世界各地都变得基本一致了。所以，下面对论文各组成部分的基本要求只作简要介绍，而把我们的讨论着重放在这样的问题：用英文来写数学论文时，国内的初学者应该注意什么？由于其中大多数中国学生在写作英文版论文或摘要之前，都有写作中文版论文或摘要的经验。因此，对于中国学生，最主要的是了解数学论文的英语表达的要求，特别是英语表达与中文表达的异同之处；而对于那些想把中文版论文译成英文版的作者来说，值得注意的是：翻译时不可呆板地采用逐字对应、生搬硬套的办法，一定要尽量采用英语的规范表达方式。

一篇英文版的数学论文大体可以按其中的语言表达特点分成三部分：第一

部分是受数学专业影响较多的内容，即通常所说的数学专业英语；第二部分是受数学专业影响较少、而与其他科技论文的写作特点相比具有较多共性的内容，我们不妨称之为公共英语；第三部分是附加信息的罗列。具体地，论文中具体数学内容的表达，包括数学命题和论证过程的写作，可以算是第一部分；而标题以及摘要和引言中不涉及数学命题的部分则一般属于第二部分，因为其中除了可能包含数学术语外，语言表达方式大多与其他学科一致；第三部分则包括作者的信息、关键词、参考文献，它们是附加于论文的，却也是必要的。

据我们的经验，对于数学专业多数的本科生和研究生来说，把数学论文写成英文稿，其难点不仅出现在数学内容的表达，而且出现在公共英语的表达上，不少人甚至觉得标题、摘要和引言部分的写作更难。所以，本章下面几节（§5.2～§5.4）先介绍标题、摘要和引言部分的写作（其中摘要部分是重点），然后在§5.5和§5.6中再介绍数学命题和论证过程的写作。

第三部分的写作并不难，而且在格式上，英文版与中文稿类似。因此，只在这里作简单的说明。

作者的信息主要包括作者的姓名和工作单位，多个作者则依次排列，分别介绍信息，放在论文标题的下一行。

关键词是指从论文的正文、摘要中抽出的，在表达论文的内容、主题等方面具有实际意义并起关键作用的词汇。关键词应尽可能采用规范化的数学词汇，通常是名词性术语，部分是具有检索意义的动词和形容词等。一般每篇论文选用3～8个关键词，列于摘要之后，另起一行，各关键词之间用分号隔开，行首写上“Key words”，最末尾那个关键词后不用标点，例如：

Key words elliptic equation; generalized solution; fixed point theorem

参考文献是论文的必要组成部分之一。凡引用的文献都应加上标引（见§5.4），并在全文最后的参考文献（references）中将这些文献依序列出（参阅附录A）。文献的列出形式应该符合出版社规定的规格，准确地写出文献的作者、文献名称、文献所载的期刊名（或书名或文集名等）、杂志期卷、年份、页码（或书的出版地点、出版社、年份）。至于更详细和深入的介绍，读者可参见文献[1]（即《数学专业英语》）的第五章或其他文献。

总之，作者的信息、关键词、参考文献等的著录格式，英文稿和中文稿类似，已经写好中文稿的作者，一般只要把中文的有关内容相应地翻译成英文即可（参见附录A）。

练 习 5.1

1. 翻译下面拟作关键词的短语：

微分方程、线性组合、特征根、代入法、双曲面、椭圆型、数学水平、培养。

2. 参照附录 A，按照英文版论文中参考文献的著录格式写出下面参考文献的信息：

(1) 参考书，名为《线性代数》，作者是张力道，1990 年由科学出版社出版。

(2) 论文，标题为《关于一类高阶不定方程的解法》；作者：李达时，汪元；发表于《应用数学》杂志，2007 年第二期，起止页码为 25-30。

§5.2 论文标题的英语表达

标题是论文的必要组成部分。一个好的标题既能启迪读者的兴趣，也便于文献数据库系统的收录和检索。

论文标题(即题目)应该用简洁而引人注目的短语概括全篇中心内容。为此，标题的写作应该做到：(1) 概括时要紧贴主题，不可过于空泛；(2) 标题要具有检索性，为此，要尽量使用专业术语，多用关键词；(3) 文字表达上要注意简洁，尽量不用赘词冗语，切忌“广告语”。

论文标题的英语表达有特别的要求，现从如下几个方面简要介绍。

1. 论文的英文标题的基本形式

通常采用一个名词性短语表示标题。因此，不采用一个句子或其他形式(如分词短语或不定式短语)表示标题；同时，为了简洁，也不带从句等成分。有时标题也可写成“介词 on＋一个名词短语”的形式(见例 4)，表示“论……”或“关于……的探讨”。不过，目前这种形式用得较少，即常把开头的 on 删去。

在行文格式上，按惯例，英语标题第一个词和每个实词的第一个字母都要大写，而小词(介词、冠词、连接词)不用大写。不过，有的杂志也允许标题每一个字母都大写或第一个单词的首字母大写而其余的字母都小写。

以下这些标题的写法都是正确的：

例 1 Pointwise Approximation Theorems for Combinations of Bernstein Polynomials with Inner Singularities

【具有内奇异性的伯恩斯坦多项式组合的点态逼近定理】

例 2 A NEW BANDWIDTH INTERVAL BASED FORECASTING METHOD FOR ENROLLMENTS USING FUZZY TIME SERIES

【利用模糊时间级数引入的、基于注册式力迫法的新型宽带区间】

这个标题每一个字母全部大写。

例 3 On the periodicity of solutions of the system of rational difference equations

【关于有理差分方程组的解的周期性】

这个标题第一个单词的首字母大写而其余的字母都小写。

2. 避免标题汉译英时产生的错误

不少初学者把论文标题译成英文时，常把其中的单词按字面意思逐一对应地进行翻译，出现许多错误，下面是一些常见的例子。

(1) 把标题错误地译成祈使句

例 4 中文标题为：应用中值定理证明一个新的积分不等式，被译成：

Apply the mean value theorem to prove a new integral inequality

译文把动词放在开头，变成一个祈使句(命令式)，这样的形式是不可以作为论文的标题的。其实，据中文的意思，这篇文章的重点应该是得出一个新的积分不等式，然后指出：它是用中值定理证明的。因此可以改译成：

A new integral inequality proved by the mean value theorem

(2) 把标题译成分词短语或其他错误形式

前面说过，英文标题应采用名词性短语来表示。更准确地说，论文标题英译时，只译成一个名词性短语(或前面加 on)，不要译成非名词性短语。如把标题“改进教学方法，提高学生的数学能力”译成如下形式都是错误的：

Improving the teaching method, increasing the abilities of students

Increasing the abilities of students by improvement of the teaching method

这两种形式都是分词短语(或分词短语的组合)，不符合要求。第一条译文即使改成如下形式(两个并列的名词性短语)：

Improvement of the teaching method, increase of the abilities of students

也不符合原文的意思。因为原意是“通过改进教学方法来提高学生的数学能力”。据此，下面给出的译文是值得参考的：

On enhancement of the students' mathematical abilities by improving the teaching methods

事实上，翻译是一种具有创造性的艰巨工作，我们应该多下工夫才能做好翻译工作。

(3) 标题含有赘词冗语

赘词冗语指的是不必要的词语。由于中西文化的差异，汉语的表达习惯与英语有许多不同之处。例如汉语写出的标题可能包括客套用语，它们在英文中却成了累赘。英文标题应力求简洁，不用客套，所以汉译英时应尽量做得简明扼要、直截了当。例如有人把标题“用复数解三角方程的若干方法初探”和“试论贯彻数学思想改进课堂教学方法的作用”分别译成：

A preliminary exploration of some methods of solving trigonometric equa-

tions by means of complex numbers

A trying exposition on the improvement of the teaching methods by carrying out mathematical thoughts

其实,“初探”、“试论”都是客套话。翻译时处理客套话的办法通常是“或删或改”。例如,上面两句可分别简化成:

Some methods of solving trigonometric equations by means of complex numbers

Improvement of the teaching methods by carrying out mathematical thoughts

3. 注意冠词、介词、连接词的正确使用

为了简短起见,标题开头的冠词可以省略,其他处的冠词也能省则省。

当标题需要使用多个修饰成分时,应注意这些修饰成分的次序排列及连接词等的正确使用。

例如:有人把标题“关于一类椭圆型方程的整体解的存在性和渐近性研究”译成:

The study on the existence and the asymptotic property of entire solutions of a kind of elliptic equations

这里用 the study 是不妥的,因为定冠词 the 加在 study 前面时,表示指定的研究,也表示有关的所有研究,而一篇论文常只涉及某个研究,所以,出现在标题开头时常用 a study on... 不过,现在提倡简洁,可把 the study on 省略,同时把 the existence 与 the asymptotic property 中的定冠词也都省略,成为:

Existence and asymptotic property of entire solutions of a kind of elliptic equations

这里连用了两个 of,这虽然也可以,但显得太单调。较好的用法是把第二个 of 改成 to,因为表示方程的解时,既可以用 of 也可以用 to,这时改用 to 可更突出 solutions 与后面部分的关系。最后成为:

Existence and asymptotic property of entire solutions to a kind of elliptic equations

练 习 5.2

1. 把下列标题译成英语:

(1) 探索数学教学方法,提高数学教学质量

(2) 关于积分中值定理的应用初探

(3) 用系数待定法求解一类二阶常微分方程

2. 下面英文标题中存在一些错误或欠妥之处，试给出修改建议。

(1) The investigation on Riesz Mean Inequalities for Subelliptic Laplacian

(2) Analyse the Soliton Resonances of the Nonisospectral Modified Kadomtsev-Petviashvili Equations

(3) The study of existence property of the solutions of one kind of integral equation

§5.3 论文摘要的英语表达

论文摘要很重要，它既是数学论文的一个重要组成部分，也可以代表论文单独使用[注1]。比如，申请参加一个国际学术会议时要提交拟在会上报告的论文的英文摘要；许多文摘或网上的资源都只录用论文的摘要。此外，一篇以中文书写的数学论文在国内发表或作为毕业论文时，都需要附加一份英文摘要。因此，写好英文摘要很有必要。

下面首先简要介绍摘要的基本形式和基本要求，然后着重介绍摘要的英文写作：列举多种经常出现在英文摘要中的句型，并就如何应用句型组成英文稿给出指导意见。

§5.3.1 英文摘要的基本形式和写作要求

1. 论文摘要的内容及类型

论文摘要应用简明扼要的语句概述论文的主要信息。概述的信息主要包括三个方面：

A. 研究的对象(包括课题、内容等)或论文写作的目的；

B. 研究方法；

C. 研究结果(包括应该突出的创新点与特色)。

其中，研究结果是最重要的，必不可少的；其他部分可以根据论文的特点适当行文，或详或简，甚至略去。

摘要大致可分为三种类型：(I) 提示性摘要(或称叙述性摘要)，(II) 信息性摘要(又称报道性摘要)和(III) 综合性摘要。

I. **提示性摘要**只点明论题、提示研究结果的梗概(如类型或属性)，不对论题和成果作具体介绍，文字十分简短(通常三言两语而已)。

注 1：作为论文组成部分的摘要，指的是摘要的内容。而一份单独使用的摘要必须包括论文标题、作者信息和摘要的内容。

例 1 下面是一篇题目为《Suggestions on improvement of the mathematical quality of students》的摘要。

This paper analyzes the recent situation of the mathematics education in middle schools and proposes some suggestions to improve the mathematical quality of students.

【本文分析中学数学教育现状并提出了一些提高学生数学素质的建议。】

这篇摘要只有一句话，点明研究的内容是中学数学教育现状，研究的成果是提出了一些提高学生数学素质的建议。它没有介绍研究的具体内容和提出的具体的建议，属于提示性摘要。

II. **信息性摘要**用简短的文字报道论文的要点与基本内容，提供论文的最重要信息。这些信息除了研究结果外还可以包括研究的课题及其背景、研究方法、创新与特色等，并可对其中某些部分作稍微具体的介绍。这里所谓"简短的文字"是与全文比较而言的，通常含 5 至 8 句。

例 2 下面是一篇信息性摘要：

Abstract[#注2] It is well-known that the length spectrum of a geometrically finite hyperbolic manifold is discrete. In this paper, we begin a study of the length spectrum for geometrically infinite hyperbolic surfaces. In this generality, it is possible that the spectrum is not discrete and the main focus of this work is to find necessary and sufficient conditions for a geometrically infinite surface to have a discrete spectrum. After deriving a number of properties of the length spectrum, we show that every topological surface of infinite type admits both an infinite dimensional family of quasi-conformally distinct hyperbolic structures having a discrete length spectrum, and an infinite dimensional family of quasi-conformally distinct structures with a nondiscrete spectrum. Moreover, there exists such an infinite dimensional subspace arbitrarily close to (in the Fenchel-Nielsen topology) any hyperbolic structure.

【**摘要** 我们知道，一个在几何上有限的双曲流形的长度谱是离散的。而本文则开始对几何上无限的双曲流形的长度谱的研究。在这种一般化情形下，谱有可能不再是离散的，所以这项工作的重点是求出使几何上无限的双曲流形具有离散谱的充分必要条件。我们在得出长度谱的一些性质之后证明了：每一个无限型的拓扑曲面既允许一个关于拟共形相异的双曲结构组成的无限维族具有

注 2：摘要的画下线部分表示组成句型的框架文字。引用的摘要在 Abstract 之后附有 # 者（或 Abstract[#] 者）录自 SCI 检索（根据这里的需要，个别地方稍作修改或删节）。

离散的长度谱，又允许一个这种族具有非离散谱。进一步，还证明了存在(关于Fenchel-Nielsen 拓扑)任意接近双曲结构的无限维子空间。】

III. **综合性摘要**的特点介于上述两种摘要之间，即比提示性摘要详细而比信息性摘要简短，通常含 2 至 4 句。多数的论题较为单一、篇幅不长的数学论文都采用综合性摘要，用简短的文字概括重要的信息，以突出重点而不求全面为特征。下面两篇都属于综合性摘要。

例 3 **Abstract**# In this Paper, by using the method of Dulac functions, it is proved that under certain conditions a two dimensional system has at most $(n-1)$limit cycles on an n-connected region. As an illustration, two examples are discussed for the existence of a unique limit cycle of at most two limit cycles.

【**摘要** 本文利用 Dulac 函数，在一定的条件下证明了，一个二维系统在一个 n 连通区域上至多只有$(n-1)$个极限圈。作为说明，文中讨论了至多存在 2 个极限圈而实际上只存在唯一极限圈的两个例子。】

这篇摘要总共才两句话，第一句给出了包括研究结果和方法的主要信息，第二句补充说明本文的特色。

例 4 **Abstract**# Let G be a complex, linear algebraic group acting on an algebraic space X. The purpose of this article is to prove a Riemann-Roch theorem that gives a description of the completion of the equivariant Grothendieck group $G_0(G, X)\otimes C$. The main new technique for proving this theorem is our non-Abelian completion theorem for equivariant K-theory. The second theorem generalizes the classical localization theorems for diagonalizable group actions to arbitrary groups.

【**摘要** 设 G 是作用在代数空间 X 上的一个复线性代数群。本文的目的是证明一个描述等变 Grothendieck 群 $G_0(G, X)\otimes C$ 的完备性的 Riemann-Roch 定理。证明这一定理的主要新技巧是我们关于等变 K-理论的非 Abel 完备性定理，它推广了经典的、关于作用在任意群上的可对角化群的局部化定理。】

这篇摘要先说明论文的研究目标(内容与主要成果)是证明一个 Riemann-Roch 型的定理(定理内容也作了概述)，然后介绍了获得成果的关键是采用一种新的技术 —— 建立自己的非 Abel 完备性定理，最后指出后一定理的创新性。这篇摘要介绍的信息较完整，重点突出、亮点彰显、文句扼要，是一篇很好的综合性摘要。

对于初学者，我们建议着重学习写作简短(最好两三句，不超过四句)的综合性摘要。这也是下面介绍的重点。当然，考虑到其他读者的需要，下面同时也介

绍一些可供书写信息性摘要的句型。

2. 写作摘要的基本要求

写作摘要的基本要求是：观点鲜明，内容明确；重点突出，文句简洁；用词规范，体现专业；相对完整，独立成文。其中，

“观点鲜明，内容明确”要求所叙述的事和理是具体的而不是含糊的。例如，不笼统地讲“与什么有关”，而直接讲论文“论证了什么”，“研究了什么”。

“重点突出，文句简洁”要求对论文的内容作简明扼要叙述，突出重点，不求面面俱到，不涉及其他非摘要允许的内容，例如，不可在摘要中讨论问题，不能举例说明、附注等，也不出现图表之类内容。有的杂志对摘要字数还作了限制。初学者更应该注意简洁，因为写得太多不仅无益，而且增加错误的机会，成了画蛇添足。

“用词规范，体现专业”指的是要用正规的语言和标准的专业词汇来写作。

“相对完整，独立成文”是因为摘要可以单独使用，所以必须要求“自行封闭”、独立成文，即不可在其中引用或评论后面的内容或其他文献[注3]。

摘要采用英文来表达，即写作英文摘要时，在语言上有如下具体要求：

(1) **术语规范**：英文摘要应采用的专业用语必须是规范的，不要采用缩写语或其他非规范用语。作者应认真核对每个专业术语的英文表达方式，不可自以为是。

(2) **句子完整**：英文摘要的每个句子都必须是完整的。特别是，现在流行的中文摘要经常省略主语，译成英文摘要时要把主语补上。例如，一篇中文摘要的第一句话可以写：

“研究一类奇异方程的解，得出广义解存在的若干充分条件。”

但它不可译成：

“Study solutions of a kind of singular equations and obtain some sufficient conditions for the existence of generalized solutions.”

因为这个句子不是叙述句，是祈使句。最简单的修改办法是在句子的开头补充：“The authors”或“We”，并把 Study 的第一个字母 S 改成小写；也可以改成被动语态：Solutions of a kind of singular equations are studied and some sufficient conditions for the existence of generalized solutions obtained.

(3) **语法正确**：努力按照英语的表达方式与习惯，注意用词搭配。下一小节特地介绍一些常用句型和例句，供读者参考。这里仅指出摘要在时态、语态和人

注 3：近来见到一些摘要中出现引用参考文献的标记（如[1]、[2]等，详见下面 5.3 节），这种作法只能用于附有参考文献的摘要。因为这种做法与“摘要应独立成文”的要求相悖，能否得到公认尚未得知。

称方面的一些特点。

1) **时态**：研究性数学论文的摘要通常采用一般现在时，只在少数特殊情形下采用一般过去时(例如，有的摘要把该文的成果与已有成果作比较，在叙述已有成果的语句中采用过去时，参见§5.3.2)[注4]。

2) **语态和人称**：为了表示研究内容的客观性，摘要的语句多采用被动语态；也可以采用第三人称(如 this paper, the author(s)等)为主语的主动语态形式来介绍作者的工作。这样的要求被认为是比较正规和传统的。不过，近来传统的做法已受到很大冲击，经常可见到摘要用复数第一人称"we"代替第三人称当主语的情形。但是，应注意的是，这里 we 不可用"I"代替。

(4) **双语同步**：有些初学者所写的中文摘要本身就写得很别扭或者句子结构太复杂，导致翻译非常困难。遇到这种情况时，作者应该首先写好中文摘要，使之易读且易于翻译；同时，还应根据翻译过程中发现的问题，适当修改中文摘要。

§5.3.2 写作英文摘要常用的基本句型

初学者在撰写英文摘要时往往觉得难以下手。其实，只要多读、多总结、多练习，就不难学会。多读，指的是多读水平较高的英文版专业文献；多练习，指的是经常习作。在两者之间，需要一个实践和总结的过程。为了帮助习作者学习和总结，本小节将介绍写作英文摘要的一些常见句型。参照这些句型，习作者就可以根据其写作的论文的内容和特点，写出所需要的语句。在这基础上，§5.3.3将简要地介绍摘要基本结构，给出句子串连成文的一些基本方法。

下面在介绍常用的句型时将同时指出其适用范围，并给出一些发表在重要学术刊物的论文摘要的例子。

1. 介绍研究的课题、内容的句型

写摘要时，作者可以开门见山地阐明文章所研究的课题或内容，也可以是整个成果或部分成果。下面(1)和(2)的形式最常用，在少数情况下也采用(3)的形式。

(1) 直接的主动语态表示法

这种表示法以 the author, authors, we, this article, this paper 等当主语。常见动词是 consider, discuss, study, investigate 等. 句子的基本形式如：

注4：偶尔也见到一些研究性数学论文的摘要采用一般过去时写出(见§5.3.2 例14)，也有人主张在摘要中叙述不同内容时采用不同时态。我们认为初学者应选取通用方式较妥。另外，关于教学法研究和教学经验总结的论文摘要，其时态的使用较为灵活。

we consider…【我们考虑……】,其中主语和谓语动词可从上面列举的词汇中选择适当的搭配。

例 5 In this paper, we consider properties of the Perron complements of diagonally dominant matrices and H-matrices.

【本文考虑对角占优矩阵和 H 矩阵的 Perron 补的某些性质。】

(2) 被动语态表示法

类型 1:这种表示法把类型(1)中的句子改成被动语态,必要时添加 in this paper(或 in this article)。

类型 2:若同时强调新概念或采用的方法,可采用如下形式或类似的句型:

例 6 A generalized concept of boundary limit is introduced to investigate the behaviors of the superharmonic functions.

【本文引入一种广义的边界极限的概念来研究上调和函数的性质。】

类型 3:采用 be concerned with…指明研究课题。

例 7 This article is concerned with the semilinear elliptic systems for the polyharmonic operator having a critical growth nonlinearity. We establish conditions for existence and nonexistence of nontrivial solutions to these systems.

【本文研究带有临界增长的非线性多重调和算子的半线性椭圆方程组,建立了关于这类方程组的非平凡解的存在性及非存在性的条件。】

(3) 间接的主动语态表示法

这种表示法以客观事物,如 subject, scope of the research 等作为主语。

类型 1: The chief subject of the investigation(或 research 或 study) is…【本文研究的主题是……】。

类型 2: The scope of the research covers…【本研究包括了……】。

这些句型较少出现在简短的摘要之中,因为它不如(1)和(2)两种表示法来得直截了当。

2. 表示研究目标和意图的句型

摘要的开头,也可以阐明文章研究的目标课题或意图。下面给出这种类型的一些常见句型。应该指出的是,下面的句型经常也用于间接地表示研究内容(见例 8)。

(1) 用表示目的的名词当主语的句型

常用来表示目的或意图的名词如 aim, attempt, purpose, goal 等。基本表达形式如:

类型 1: The aim of this paper is to…【本文的目的是……】, 其中 aim 的定语也可以换成 our,放在句首;另一方面,paper 也可换成 study 或 investigation 等。

又，其中名词 aim 可以改成 attempt，goal，purpose 等。当采用 attempt 时，还可以写成其他形式，如：

类型 2：An attempt is made to…【目的在于……】，其中 made 可以换成 undertook 或其他类似动词。

类型 3：The present study is an attempt to replicate earlier evidence that…【当前研究试图重复早期的证明……】。

例 8 Abstract[#] The aim of this paper is to study the canonical partial metric associated to the norm of a normed space, whose related non-translation-invariant topology can be used to characterize the convexity properties of the original space. In order to do this, we define and characterize a new intermediate geometric property that we call continuous convexity, which appears in a natural way in the context of the canonical partial metric topology.

【摘要 本文的目的是研究与赋范空间的范数关联的典型偏距离，其相关的非平移不变拓扑可以用来刻画原来空间的凸性。为此，我们定义并刻画了一种新的称之为连续凸的中间几何属性，它以一种自然的方式出现在涉及典型偏距离拓扑的上下文中。】

(2) 用表示目的或意图的动词表示的句型

常用的动词如 aim，intend，attempt 等。

类 A：This research aims to…【此研究目的在于……】，其中主语可以改成其他常用主语，动词可以用 intend，attempt 替换(仍然用 to 搭配)。

类 B：This study is aimed at identifying…【本研究目的在于识别……】。

例 8 开头一句话可以改写为：

例 8' This paper aims to study the canonical partial metric associated to the norm of a normed space….

(3) 用不定式短语作目的状语

上面两种句型主要用于叙述全文的研究目标、作者的研究意图等。此外，摘要常用不定式短语作为目的状语(从句)，表示作者采用某种措施(如某种方法、工具等)或行动(如论证、计算等)的目的。参见例 8 的最后一句。

常用的动词有：

analyze(分析)，characterize(刻画)，clarify(阐明)，construct(构造)，describe(描述)，determine(确定)，establish(建立)，estimate(估计)，evaluate(计算)，examine(考察)，identify(验证)，investigate(探索)，report(报告)，study(研究)，test(测试)……

3. 介绍或涉及已知的成果或相关研究的句型

摘要有时需要指出或强调该论文的研究基础或相关的前期工作。本段给出这类句型的一些常见形式。

(1) 用短语简要提及研究的出发点或参考对象

在介绍研究的课题、方法或成果时，以一个分词短语或介词短语作状语来指明研究的出发点或参考对象。常用 based on…(基于……)，inspired by…(受到……的启发)或者 by means of…(借助于……)的形式引导短语。

例 9 Inspired by the fine boundary topology which was proposed and well studied by B. Brelot, a new concept named with the AT-fine topology is introduced to investigate the boundary behaviors of semi-continuous functions.

【基于 B. Brelot 提出的并作了很好的研究的细边界拓扑，本文引进一种新的称为 AT-细拓扑的概念来研究半连续函数的边界行为。】

关于 based on…形式参见下面例 11.

(2) 用整个句子介绍已有的研究成果或方法

摘要的重点是介绍自己的成果。但是，当相关的成果对本文影响很大，或者直接叙述本文的中心内容不便时，可用一两句话来先行介绍前人研究或概括的相关成果，以便接下来通过比较的方法介绍自己的成果。由于摘要一般不引用其他文献，所以，被介绍的内容必须是公认的、有一定影响力的成果。下面是一些介绍前人的研究成果及该课题的研究状况的句型，其中时态可用过去时或现在完成时。

这种句型可出现于信息性摘要，也可出现在引言中。

类型 1：把介绍的内容放在主语从句。如，

It is well-known that…【众所周知……】或 It has been reported that…【据报道……】。

类型 2：把介绍的内容放在宾语从句。如，

Previous studies have shown(that)…【先期研究已经表明……】。

类型 3：把介绍的内容放在句中充当某个成分。如，

例 10 **Abstract** The problem on boundary limit of the subharmonic functions was first studied by Haymann G and later was improved by Hanack P. The purpose of this paper is to prove that a similar theorem holds in a more general frame.

【**摘要** 关于下调和函数的边界极限问题首先由 Haymann. G 作出研究，接着 Hanack. P 作了改进。本文旨在更一般的框架中证明有类似的定理成立。】

注：摘要中涉及已有成果的语句除了用于说明本文研究的基础或根据之外，更常见的是用于说明自己的研究成果的意义，即指明本文对已有成果的推广或深化。为此，除了形式(2)这类专门介绍已有成果的句子外，更多的是采用另一种句型，即通过“厚今薄古”的比较方式，把本文的创新性凸显出来。详细见下面第 5 点(2)。

4. 介绍研究方法的常用句型

在摘要中常要指出研究所使用的方法，特别是当运用了新的方法或对以往方法进行了明显的改进时，更有必要对研究方法进行重点说明。

下面是一些较常见的介绍研究方法的句型：

(1) 直接阐明“研究方法是什么”的句型

可以用 method，tool，technique 等当主语，be 作动词，直接阐明研究的方法。句型如：

An important tool of these investigations is… 【这些研究的一个重要工具是……】

或

The main new technique for proving this theorem is… 【用来证明这个定理的主要的新方法是……】，参见例 4。

(2) 伴随研究内容或成果来介绍方法

常见的形式有三种：

类型 1：把作为工具的著名的结果当成主语。如，

The well-known… theorem is used to study… 【本文利用著名的……定理来研究……】，其中 theorem 可以用 method 或 formula 等替换，并加上适当的定语。

类型 2：通过已有的方法来描述新的方法。如，

例 11 Based on the extended Tanh method, an efficient method is proposed to obtain the exact solutions to the coupled nonlinear evolution equations.

【基于推广的 Tanh 方法，本文提出一种有效的方法来求出非线性耦合发展方程组的精确解。】

类型 3：用表示行为方式的短语来提及方法

By using the method of… we… 【通过应用……方法，我们……】，参见例 3。

5. 介绍研究结果和结论的常用句型

在摘要的结尾部分通常用来叙述本文发现了什么，研究得出了什么结果，由结果可以得出什么结论，或者提出一些建议。

(1) 指明发现或得出的结论或结果的一般句型

通常用主语或宾语从句来叙述研究成果。这时需要适当地选用主句的动词,常用动词有 present, find、result in, prove, show, reveal, observe, obtain, conclude, solve, establish 等。

类型 1: It 为先行词的主语从句,如

It is found that… 【我们发现……】,其中 found 可用 indicated, observed, shown, concluded 等替换,句子含义相应改变(参见下例)。

例 12 **Abstract**# The Noether symmetry of three dimensional isotropic system is investigated in terms of one parameter Lie group. All five possible potentials are studied. The corresponding symmetry transformations, the conserved quantities and symmetry algebras are also obtained. It is concluded that the minimal non-trivial Noether symmetry of three dimensional isotropic systems is SO(2.1)×SO(3).

【摘要 本文探讨利用单参数李群研究三维各向同性系统的 Noether 对称性,研究了五种可能的位势;求出了相应的对称变换、不变量和对称代数;证明了:最小非平凡三维同伦组的 Noether 对称性为 SO(2.1)×SO(3)。】

类型 2: 直接用被动语态句型,如

例 13 **Abstract** In this paper, two existence theorems for second order ordinary differential inclusions are proved without the continuity of multi-valued functions involved in the inclusions and using the multi-valued fixed point theorem of Dhage(1988).

【摘要 本文证明了关于二阶常微分包含关系的两个存在性定理,这里不要求该包含关系中的多值函数连续,也没有用到 Dhage(1988)给出的多值函数的不动点定理。】

例 14 **Abstract**# The s-dimensional Hausdorff measure in the case of $s=0$ was perfected, and the equivalence of the definition revised to a few other definitions was proved, so the conclusion that the results in different literatures according to different definitions are identical was obtained.

【摘要 本文完善了 s-维 Hausdorff 测度在 $s=0$ 的情形,证明了该定义与其他几个形式定义的等价性,因此得到这样的结论:在不同的文献中根据不同定义得出的结果是一致的。】

附注 这篇摘要采用过去式来介绍自己的成果。

类型 3: 用主动语态形式表达,如

We obtain that… 【我们得到……】,其中主语可以用 the author, authors,

this article, this paper 等替换；动词可以根据需要用 present, prove, find, observe, show, conclude, establish 等动词替换。

例 15 **Abstract** The authors present an algorithm for computing the greatest integer that is not a solution of the modular Diophantine inequality $ax \bmod b \leqslant x$, with complexity similar to the complexity of the Euclid algorithm for computing the greatest common divisor of two integers.

【**摘要** 作者提出了一种用于计算那些不是模的丢番图不等式 $ax \bmod b \leqslant x$ 的解的最大整数的算法，这种算法的复杂性类似于用于计算两个整数的最大公因数的欧几里得算法。】

(2) 强调本文特色——如何发展已有成果的语句

在介绍自己的研究成果或其意义时，常常通过指明对已有成果的发展来体现。这时常用动词 develop, improve, generalize, solve 等或相应的名词来体现。这类句子常放在摘要的后半部分或最后。句子可采用主动语态，但常采用被动语态。

类型 1：用被动语态的形式表达，如

例 16 Theorem 1 in this paper can be considered as a generalization of the classical remainder theorem in the complex analysis.

【本文的定理 1 可以看成是复分析中经典的留数定理的一个推广。】

类型 2：用主动语态的形式表达，如

例 17 **Abstract**# In this paper we give a new simple proof of a result of Luigi De Pascale, which states that the Morse-Sard Theorem holds under the hypothesis of Sobolev regularity. Moreover, as our proof is independent of the Morse-Sard Theorem with C-K regularity, our result implies the classical Morse-Sard Theorem.

【**摘要** 本文对 Luigi De Pascale 的结果给出一种新的、简单的证明方法；该成果表明，Morse-Sard 定理在 Sobolev 正则的假设之下成立。而且，由于我们的证明方法独立于具有 C-K 正则条件的 Morse-Sard 定理，所以我们的结果蕴含了经典的 Morse-Sard 定理。】

这篇摘要从头至尾都通过新旧的对比，展示作者的创新成果。最后一句指明，该成果蕴含了经典的 Morse-Sard 定理，即该结果更一般化。

例 18 **Abstract**# We show that the fourth degree polynomials that satisfy Rolle's Theorem in the unit ball of a real Hilbert space are dense in the space of polynomials that vanish in the unit sphere. As a consequence, we obtain a sort of approximate Rolle's Theorem for those polynomials.

【摘要 本文证明:在实 Hilbert 空间的单位球内满足 Rolle 定理的四阶多项式在由那些于单位球面取 0 值的多项式组成的空间中是稠密的。因此,我们得出了一类关于这些多项式的近似 Rolle 定理。】

这篇摘要通过主要结果的推论来说明论文的推广意义。

(3) 用含蓄的方式表达新观点和新方法

有的结果,特别是涉及新观点、新方法和新应用方案的提出,因为含有一定的主观性,为了慎重起见,就采用建议的形式来叙述,通常采用以 suggest 为谓语动词的句子,也可以用名词 suggestion 来表示。

类型 1:用名词 suggestion 表示,如

Suggestions were made for further study of… 【作出进一步研究的建议……】。

类型 2:用 suggest 的被动语态形式表示,如

It is suggested that… 【建议……】

或

The method is suggested for… 【建议用这种方法来……】,其中 method 前后可以加上各种修饰成分。

类型 3:用 suggest 的主动语态形式表示,如

The author suggests that… 【作者建议一种……的方法】,其中 the author 可以用 we 等表示人的主语替换,suggest 可据需要用 recommend 替换。

例 19 Abstract# In this paper, current matching methods for the solutions of the simplified Navier-Stokes equations are reviewed systematically and elementary theoretical analysis of some experimental approaches are given. In addition, the authors also suggest some improvements on the current difference schemes and the methods of solving the equations.

【摘要 本文对现行的求解简化的 Navier-Stokes 方程的匹配方法作了系统评论,并对某些实验方法给出了基本的理论分析。此外,作者对解这类方程的多种不同的方案和方法提出了一下改进建议。】

注:下面的句型也常用于表示研究结果,但语句中的动词 suggest 的意思不是"建议",而是"显示"或"表明",但仍然有含蓄的意味。

The results obtained suggest that… 【所得到的结果显示(表明)……】,其中 results 可以据需要用 solutions, methods 等具体表达成果的词语替换。

例 20 Abstract# We prove the existence of a positive radial solution for the Hénon equation with arbitrary growth. The solution is found by means of a shooting method and turns out to be an increasing function of the radial varia-

ble. Some numerical experiments suggest the existence of many positive oscillating solutions.

【摘要 本文证明了具有任意增长性的 Hénon 方程的正的径向解的存在性。这种解是用打靶法求出的，并且被证实是关于径向变量的增函数。文中的几个数值实验表明了多个正的振动解的存在性。】

§5.3.3 利用基本句型和基本结构写作英文摘要

1. 句型的作用与局限性

上面已经根据摘要应该涵盖的主要信息(研究对象、研究方法和研究成果)分成五个类型分别列举了一些常用的句型和例句。在应用它们写作摘要之前，我们有必要对这些句型和例句作进一步的认识。

首先，我们应该肯定基本的句型对于习作者写作摘要有一定的帮助。事实上，由于摘要无非是用几句话来概括论文的研究对象、研究方法和研究成果。习作者如果熟悉了写作这些信息的基本句型和例句，就可根据论文的内容和特点，选用适当的句型进行"套用"：参照例句将待写的论文摘要的信息套进(即适当修改相关词语)，然后按照一定结构(逻辑次序)及语言表达习惯把这些语句串联起来，就可以大致成文。当然，最后还要再作一些必要的修改、调整之类的加工。

但是，我们也要指出，在应用上面介绍的句型和例句时，应该注意如下几个方面。

(1) **句型之间可能有交叉**：前面把句型按句子叙述的内容分成五类，是为了便于我们的介绍和读者的学习。但是，这种分类并非严格的，各类之间可能有交叉。例如，从语法结构上说，介绍研究内容的句型也可以用于介绍成果，只要把动词适当替换即可，况且有时研究内容也包含着成果。又如，论文采用的方法(如新方法)有时也是研究内容或成果的一部分。

(2) **句型的作用有局限性**：上面介绍的仅是一部分常用句型，它远非完整，但已足以让人感到眼花缭乱。其实，初学者只要重点抓好每种类型中的一两种形式就可以习作了。应该指出，关键是融会贯通。实际上，文章的写法是千变万化的，即所谓"法无常法"。初学者应以此为基础，不断学习和总结，不断提高，以便写出更好的摘要来。

(3) **句型可以发展和综合**：已有的句型可以发展或综合。在前面我们也已指出，介绍论证和计算的方法或者已知的成果时未必需要单独成句，可把方法作为介绍研究课题、内容、成果的句子中的一个方式状语(见例 3)。实际上，根据需要和作者的爱好，还可以把多种信息综合在一起表达，形成一个同时介绍多种信息的句型。下面的摘要就是一个例子，它把整个摘要融合成一个句子。

例 21 Abstract[#] The authors extend the bitopological notion of sequential normality to ditopological texture spaces, and use this notion to state and prove a (pseudo-)dimetrizability theorem.

【**摘要** 本文把序列正规化的双拓扑学概念推广为二分纹理拓扑空间并利用这一概念证明了一个拟二分可度量化定理。】

2. 选用摘要的适当结构

在§5.3.2的开头，我们已经指出，写摘要时要按照一定结构(逻辑次序)及语言表达习惯把表达论文信息的语句串联起来。现在就来简要分析一下摘要的基本结构和语言表达习惯。

(1) 设计摘要结构的基本思路

为了使读者能够快速、简便地通过摘要较为准确地获取论文的主要信息，摘要就必须写得简洁明了、中心突出、层次分明、可读性强。因此，在写作摘要之前，作者要根据论文的特点，设计好摘要的基本结构，即解决好如何把论文的各种信息以较合适的方式出现在摘要上的问题。

关于设计摘要结构的基本思路，可以用四句话来概述："点明研究对象、概述主要成果、突出创新特色、灵活描述方法"。其意思是：

1) 对研究的课题或内容等对象，只要用简洁的语句指出即可。

2) 对于成果，重点介绍主要成果，而对于主要成果的介绍也只要概括而已(不求细节)。

3) 对论文的创新之处(无论理论上或应用上的)和写作特色，要加以突出；当然如果创新和特色不够明显且不易表达，也未必写出。

4) 对于研究方法，若有重要意义(具有创新性或典型性)，可添一句话突出之；如系较为一般的，可附带表述(如在介绍内容或成果的语句中以方式状语的形式出现)；对于特色不明显者，可以省略。

(2) 摘要结构的基本类型

常见摘要结构大致有如下的基本模式：

模式1—直入式：摘要一开始就直接介绍研究对象，紧接着叙述主要成果(或把对象与成果放在一起介绍)，然后适当介绍摘要的其他信息(创新、特色、方法等)。这种模式的优点是：开门见山，使读者能快速地了解到论文的研究内容、写作意图，主要成果及其特色，适用于写作简短的摘要(见例3、例13)。

模式2—引入式：先用一个句子给出一个设定(如参数或记号，该句与摘要主要内容可能无直接联系)，然后再据此介绍研究对象和成果，必要时还适当地介绍其他信息。这种模式的优点是：便于较仔细地介绍论文的各种信息，适用于写作稍长的摘要(见例4)。

模式 3—渐进式：先点明研究对象，接着按逻辑次序分层次逐步介绍多个成果，通常最主要的成果在较后面叙述，或者作为前面结果的推论；而后才适当地介绍摘要的其他信息（创新、特色、方法等）。这种模式的优点是：便于介绍论文的多个成果以及各成果之间的联系，体现全文的论证思路，适用于写作稍长的摘要（见例 17、例 19）。

模式 4—比较式：开头先介绍已有的相关成果（包括方法等）或研究现状，然后通过比较的方式介绍本文的成果（包括方法等），最后才适当地介绍摘要的其他信息。这种模式比较少用，适合于不易直接叙述本文成果的摘要（见例 10）。

上面四种基本模式除了可以单独使用外，也可以两种模式综合使用。例如，例 2 可以看成模式 3 与模式 4 综合使用。

（3）如何利用句型和摘要的结构来写作摘要

下面仅给出一些注意事项：

1）注意句子、结构与论文中心内容的密切关系，使摘要尽可能准确地反映论文的实质。

2）注意句子之间的衔接关系（包括连接词的使用）和逻辑关系的正确性。

3）句型之间要融洽，遣词造句要推敲。比如一篇摘要中，不应其中一些句子用 we 作主语，而另一些句子用 the author(s)作主语。在一篇较短的摘要中，通常只能有一个句子用 the author(s)或 the paper 作主语；其他句子则采用被动式或无人称语句。

4）突出创新与特色要恰如其分。创新与特色通常都在介绍成果或方法的句子中体现；使用“it is fund…”，“it is revealed…”或“a new method is give to…”等句型要谨慎；单独用于介绍创新和特色或应用的句子要实事求是地具体指明体现在哪些方面，到达什么范围或程度，力戒广告用语。

上述只是值得注意的一些要点。具体细节，希望读者多读多想，多关注多练习，不断积累经验，提高自身水平。

练 习 5.3

1. 把下列供独立使用的摘要（含题目、摘要内容和关键词）译成英语：

（1）**标题**：带临界和次临界项的椭圆方程的正解

摘要 研究一类带临界项和次临界项的椭圆方程，运用变分法和分析技巧证明了在一定的局部$(PS)_c$条件下正解的存在性。

关键词 正解；临界项；次临界项；椭圆方程；$(PS)_c$条件；变分法

（2）**标题**：数学分析教学方法改革的若干措施及其实践效果

摘要 基于对目前数学分析课程教学中存在的主要问题的认真分析，提出

相应的教学改革措施，经实践证明这些措施有助于提高教学效果。

关键词 数学分析；教学方法；教学改革；教学效果

2. 指出下面英文摘要中存在的问题，并加以修改完善：

(1) **Abstract** Apply Lagrange mean value theorem, solve a kind of inequalities and generalize some well-known results.

(2) **Abstract** In this paper, the authors mainly focus on the Riesz means of eigenvalues of the subelliptic Laplacian on the Heisenberg group H^n. We establish a trace formula of associated eigenvalues, then we prove differential inequalities, difference inequalities and monotonicity formulas for the Riesz means of eigenvalues of the subelliptic Laplacian.

§5.4 论文引言的英语表达

1. 引言的基本内容与写作要求

引言(introduction)作为论文的开场白，放在正文的开头部分。它向读者交代该论文所做的研究的来龙去脉，并对论文的总体轮廓作一个概述。

一篇完整的引言常包括以下三个内容：

(1) 本文的研究对象及相关背景(包括研究历史、现状、写作的起因和目的)；

(2) 本文研究的理论依据和研究方法；

(3) 本文获得的主要的成果及其意义(理论上的和应用上的)。

引言写作的基本要求是：开门见山、紧扣主题、突出重点、简明扼要。

与摘要相比，引言对内容和形式的要求有如下不同之处：

其一、引言的模式较为单一，一般只要把上述三个内容依次叙述即可。

其二、引言的篇幅可长可短，各项内容可多可少(如略去内容(2)，增加其他方面的内容)，字数没有严格限制，对摘要的一些“禁令”(如不可举例、论证、讨论等)都不再起作用(亦见下条)。

其三、引言不要求单独成文，它只是正文的一个开场白。在引言中可以引用其他文献及本文其他处的内容；而且，在介绍研究历史和现状(包括介绍前人提出的概念和结果)时要说明根据，即要引用其他文献。这时，可在该处使用“标引”标明出处。标引由方括号和其中的文献序号组成(例如，[2])，其中[2]表示所引用的文献是排列在论文末尾 Refferences 处的第二篇文献。标引可出现在被引用文献的作者名字或被引用内容的右上方(以上标的方式出现)或作为句子的某个成分(如…in [2]…，不作上标)。标引方式参见下面关于引言的例子。

其四、引言介绍的信息通常覆盖了摘要的内容，而且在深度和广度上超过摘要。比如，引言中还可以介绍全文内容的安排，后面要用到的主要记号和概念，主要结论，指出研究的难点和主要解决思路，给出反例或成果应用的例子，就有关课题的研究前景发表看法等。

其五、在写作格式上，摘要的开头一定要用 Abstract 标出；引言的开头未必要用 Instruction 标出；即使有 Instruction 出现，也是以小标题的形式出现；反之，引言前面的小标题也可以是别的，比如，当在引言中兼介绍预备知识时，小标题可采用“引言与预备知识”(Introduction and preliminaries)。

2. 引言的英文表达

第一、在句型方面，引言和摘要都是数学论文中最多使用非数学语言的部分，由于引言介绍的信息通常覆盖了摘要的内容，因此，我们在 § 5.3 介绍的在摘要中常用的句型大部分在引言中都可以用。引言中介绍数学内容的语句可以参考 § 5.5 和 § 5.6。此外，引言中的许多句子没有特别的模式限制，作者只要尽量按照英文表达习惯写出即可。

第二、在时态方面，引言在介绍以往的研究情形，特别是在出现时间状语的句子里，时态要用一般过去时；在概括至今进行的工作时，可用现在完成时。在其余情况下，通常用一般现在时。

第三、在语态方面，引言的句子较多地用被动语态，而各种形式的主动语态也常出现。

第四、在人称方面，在主动语态语句中，若主语是作者，通常用 we 表示，除特殊情况外，不用 the author(s)或 this paper 当主语。这一点是有别于摘要的。

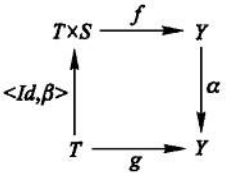
例 下面是一篇题为《Undecidability Of Uzawa Equivalence Theorem And Cantor's Diagonal Argument》[54](Uzawa 等价定理的不确定性与 Cantor 对角线论证法)的引言.

Introduction

The existence of Walrasian equilibrium in an economy with continuous excess demand functions is proved by Brouwer's fixed point theorem. It is widely recognized that Brouwer's fixed point theorem is not a constructively proved theorem. The so-called Uzawa equivalence theorem ([3]) showed that the existence of Walrasian equilibrium is equivalent to Brouwer's fixed point theorem, that is, the existence of a fixed point for any continuous function from an n-dimensional simplex to itself. The existence of an equilibrium price vector, however, may be undecidable, and in [4] Velupillai said that the Uzawa equiv-

alence theorem implies decidability of the halting problem of the Turing machine. In this paper we examine the decidability problem of the Uzawa equivalence theorem, properly speaking, the decidability problem of the existence of a Walrasian equilibrium price vector which is assumed in the Uzawa equivalence theorem, and show that the existence of an equilibrium price vector is not decidable using an extended version of Cantor's diagonal argument presented by Yanofsky [5] which is based on Lawvere [2].

According to [5] an extended version of Cantor's theorem is stated as follows. Let Y be a set, and α: $Y\to Y$ a function without a fixed point (for all $y\in Y$, $\alpha(y)\neq y$), T and S sets and β: $T\to S$ a function that is onto (i. e., has a right inverse $\bar{\beta}$: $S\to T$), then for all functions f : $T\times S\to Y$ the function g : $T\to Y$ constructed as represented by the following diagram is not representable by f, where Id is the identity mapping on T.



It is an extension of the famous Cantor's theorem that the cardinality of the power set $P(\mathbf{N})$of the set $\mathbf{N}$ of positive integers is larger than the cardinality of $\mathbf{N}$, or in other words, there is no onto map $\mathbf{N}\to P(\mathbf{N})$. In the proof of our main result we will use similar arguments to those in the proof of this theorem.

In the next section we present the theorem of the existence of Walrasian equilibrium and the Uzawa equivalence theorem. In Section 3 we present an extended version of Cantor's theorem and its proof, and prove the undecidability of the existence of an equilibrium price vector assumed in the Uzawa equivalence theorem.

这篇引言短小精悍,且概括得较为全面。共分为四段。第一段先介绍研究背景,然后介绍本文的研究内容和论证方法,其中引用了许多文献,从历史的发展和研究的多个侧面来阐述。第二段通过引入符号来介绍由前人推广的 Cantor 定理的内容,为下面进一步介绍研究的内容作准备。第三段介绍 Cantor 定理的另一种推广的形式,并指出它的论证方法将用于本文的主要定理的证明。第四段预告下面两节(第 2 节和第 3 节)将分别给出并论证的两个主要定理。

练 习 5.4

1. 把本节例子中的 Introduction 译成汉语。

2. 在本节例子 Introduction 中出现如下文献标引[3]、[4]和[5],请比较它们出现的形式及其在句子中的作用:

(1) The so-called Uzawa equivalence theorem ([3])showed that…

(2) The existence of an equilibrium price vector, however, may be undecidable, and in [4] Velupillai said that…

(3) …Cantor's diagonal argument presented by Yanofsky [5] which…

§5.5 定理和定义的英语表达

在数学中,术语的定义和数学定理等数学命题总是由条件和结论两部分组成的。在英语中,这些命题的表达方式是多种多样的,但其基本格式可归结是"If…, then…"的形式,也就是说,其他的表达形式一般说来都可视为这一格式的简化、延伸或变形。

§5.5.1 数学定理的英语表达

定理、引理、推论都是特殊的数学命题,是表达数学论证的结果的主要形式,它们在数学论文中经常出现。在这三者之中,定理是论文的主要结果,引理是对定理的论证具有预备意义的重要结果,推论是定理或引理的结论的直接延伸。但是,在语言表达形式上,三者是一致的。因此,下面以定理为代表作简要介绍。

1. 用简单句叙述的定理

如果定理的条件比较简明(可用一个简短的定语来修饰主语),且结论很简短,则可以用简单句叙述。如:

例 1 The vertical opposite angels are equal.

【对顶角都相等。】

例 2 The union of a finite number of closed sets is still a closed set.

【有限个闭集的并仍是闭集。】

例 3 Every integer greater than one has a positive prime divisor.

【每一个大于 1 的整数都有正的素因子。】

这种句子可以看成"If…, then…"形式的简化。例如,例 1 可以改写成:

例 1' If A and B are the vertical opposite angels, then they are equal.

显然,例 1 的表达比例 1'更简明易记,若非有特别的需要,人们常采用前者。

2. 用单个条件从句的复句叙述的定理

如果定理的条件需要而且可能用一个从句表达清楚,可以用"If…, then…"形式,也可以把结论放在前面,后面附上一个条件从句,用 if 或其他适当的连接词把它们组成复句。

例 4 If function $f(x)$ is continuous on $[a, b]$, then there exists a point c

in$[a, b]$ such that $f(x)\leqslant f(c)$ for all x in$[a, b]$.

【若函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续，则在$[a, b]$上有一个点 c 使得 $f(x)\leqslant f(c)$ 对所有的 $x\in[a,b]$都成立。】

例 5 A quadratic equation $ax^2+bx+c=0$ has two different real roots when the discriminant b^2-4ac is greater than 0.

【当判别式 b^2-4ac 大于 0 时，二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不同的实根。】

3. 用多个条件从句的复句叙述的定理

如果定理的条件比较复杂，可以先按照逻辑关系理清这些条件的层次，然后用"If…, then…"的复合(套叠)形式来表达。有时也可以把两个并列的条件从句依次放在前面，后接 then 引出的主句，如：If…and if…, then…。

例 6 If $ABCD$ is a parallelogram, then it is a rectangle if one of its interior angles is right angel or is a rhombus if a pair of its adjacent sides are equal.

【如果 $ABCD$ 是一个平行四边形，那么当有一个内角是直角时，它是一个矩形；而当有一对邻边相等时，它就是菱形。】

本句开头的 if 引导的从句叙述的条件也称为"大前提"，后面两个 if 引导的从句称为"具体条件"。在这句中，后面两个 if 都可以换成 when。

为了避免混乱且便于阅读，一般不主张采用多层，尤其是多于两层的复合条件句，而尽可能采用下面一种方式来表达。

4. 把定理的前提或条件独立成句

(1) 把条件和结论各自独立成句

用单个条件从句的复句叙述的定理，如果定理条件和结论都较长，为了条理清晰，便于阅读，常把条件看做前提，单独写成一个表示设定的祈使句，放在结论之前。这时，一般采用 Suppose, Assume 或 Let 充当祈使句的动词。其形式为

Suppose/Assume… Then…"or "Let… Then…

例 7 Let u be an infinitesimal and v is a bounded quantity as x tends to a. Then the multiple uv is also an infinitesimal and the sum $u+v$ is a bounded quantity as x tends to a.

【设当 x 趋于 a 时，u 是一个无穷小量而 v 是一个有界量。那么当 x 趋于 a 时，乘积 uv 也是一个无穷小量，而和 $u+v$ 是一个有界量。】

(2) 把前提独立成句，后接条件复句

上面例 6 可以改写为

例 6' Suppose $ABCD$ is a parallelogram. Then $ABCD$ is a rectangle if one of its interior angles is right angel or it is a rhombus if a pair of its adjacent

sides are equal.

如果大前提叙述之后，条件从句放在结论之前，例 6 可改写成：

例 6** Suppose $ABCD$ is a parallelogram. If one of its interior angles is right angel, then $ABCD$ is a rectangle; if a pair of its adjacent sides are equal, then $ABCD$ is a rhombus.

(3) 多个前提依次罗列，后接条件复句

如果定理的前提有 2 个不同层次，可用如下形式：

Let(大前提)…, and assume /suppose(小前提)…. If…, then…

定理的前提也分别成句依次罗列：

Let(大前提)…. Assume/Suppose(小前提)…. If…, then…

如果两个前提是并列的，可以用 and 连成一个并列复句：

Suppose(前提 1)… and suppose(前提 2)…. If…, then…

例 8 Let I be an open interval and $f(x)$ be a function defined on I. Assume that $f(x)$ has a relative maximum or a relative minimum at an interior point c of I. If the derivative $f'(c)$ exists, then $f'(c)=0$.

【设 I 是开区间，$f(x)$是定义在 I 上的函数。假定 $f(x)$在 I 的内点 c 有相对极大值或相对极小值。如果导数 $f'(c)$存在，则 $f'(c)=0$。】

5. 用特殊形式叙述的定理

用必要条件或充分必要条件叙述的命题是数学独有的形式。它通常在前提或条件已经明确的情况下给出。

(1) 用充分必要条件叙述的命题

例 9 Suppose $f(x)$ is a polynomial. Then the sufficient and necessary condition for $f(x)$ to be divisible by $(x-a)$ is $f(a)=0$.

【设 $f(x)$是一个多项式。那么 $f(x)$能被$(x-a)$整除的充分必要条件是 $f(a)=0$。】

例 9 可以改写成：

例 9* Suppose $f(x)$ is a polynomial. Then $f(x)$ is divisible by $(x-a)$if and only if $f(a)=0$.

其中 if and only if 可以换成 when and only when。

(2) 用必要条件叙述的命题

例 10 Suppose $\{a_n\}$ is a real sequence. Then the necessary condition for $\{a_n\}$ to be convergent is that a_n is bounded.

【设$\{a_n\}$是一个实数列。那么$\{a_n\}$收敛的必要条件是 a_n 有界。】

例 10 的表达形式主要是强调“有界性是数列收敛的必要条件”；如果不作此

强调，这个命题可以改用如下更简洁的句子来表达：

例 10' Suppose $\{a_n\}$ is a real sequence. If $\{a_n\}$ is convergent, then a_n is bounded.

命题的条件通常是充分的，可以直接采用 If…, then…的形式来叙述，所以很少用 the sufficient condition(充分条件)当主语来叙述命题，虽然这也是允许的。只因为少用且用法简单，我们就不再举例。

§ 5.5.2 数学定义的英语表达

数学论文写作中，经常涉及相关专业术语。除了其中一些较不常用的术语需要向读者介绍外，有时作者还需要自行对新的术语给出定义。叙述数学术语的定义时，要求准确、精炼且清晰。叙述定义的语句在结构上也是由条件和结论两部分组成。数学英语在条件部分的表达方面，定义和定理基本相同，二者的主要区别在于结论的叙述方面。实际上，常见的用于叙述定义的结论的动词或动词词组不多，所采用句型也较为固定。特别要指出的是，由于定义中结论与条件的关系都是充分必要的关系，因此，通常不采用 § 5.5.1 的第 5 种方式来叙述定义，即不用充分必要条件的形式写出，而用 If…, then…的形式或与其等价的形式叙述。

本小节主要着重于介绍数学英语中定义表述之异于定理之处，给出一些常见句型及相关例子；至于与定理叙述相同之处，则不再重复说明。特别，§ 5.5.1 介绍的叙述定理条件的前四种方式都可以在叙述定义在使用。

1. 数学术语的种类

数学术语按照其作用大体上可以分成四类：

I. 作为数学对象或对象之间关系的名称：多数的数学术语是名词或名词性词组，用于表示数学对象或对象之间关系的名称。例如：直线(straight line)，曲线(curved line)，正多边形(regular polygonal)，直角三角形(right triangle)，线性相关(linear dependence)，线性无关(linear independence)等。

II. 用于描述数学对象的属性和特征：这类术语多数是形容词，例如，收敛的(convergent)，发散的(divergent)，连续的(continuous)，离散的(discrete)。

III. 用于描述数学对象的行为或状态：这类术语多数是动词或动词词组，例如，收敛(converge)，收敛于(converge to)，相切于(tangent at)，具有性质 P (has property P)。

IV. 用于描述数学对象之间的关系：这类术语多数是词组或句子，例如，P 大于 Q (P is greater than Q)，x 属于 Q (x belongs to Q)等。这类术语经常是第(III)类术语的相对完整的描述。

2. 叙述定义的常用动词及相关词组

叙述定义的语句中常用动词是:call, say, define 和 refer。例如,把满足某条件的 A 定义为 B(即 B 是被定义的术语),可以采用以下各种形式来叙述:

1) Define: We define B as A. 或 A is defined as B.

2) Call: We call A(第 1 宾语)B(第 2 宾语). 或 A is called B.

3) Say: We say A to be B. 或 A is said to be B.

4) Refer: We refer to A as B. 或 A is referred to as B.

少数情形下用 name, be named as; term, be termed as; mean, be meant 等来类似地叙述定义. 此外,动词 be 也可以用来叙述定义,其用法在下面介绍。

3. 叙述定义的常用句型

常见的表达定义的句型大多采用被动语态(有时也采用主动语态形式),被定义的术语充当简单句或条件复句中的主句的次要成分,放在主语和谓语的后面。

(1) 被定义的术语直接充当句子的成分

对 I 和 II 类(即作为名词和描述属性)的术语下定义时,术语可直接充当句子的成分。

例 11 A triangle with two equal sides is called an isosceles triangle.

【两边相等的三角形称为等腰三角形。】

本句中,被定义的术语 isosceles triangle 是 call 的宾语。

这句可以改成主动语态。但是需要作较大变动,因此通常不译成:

We call a triangle with two equal sides an isosceles triangle.

而要译成主从复句,把条件从句放在前面:

If a triangle has two equal sides, then we call it an isosceles triangle.

这时代替原来的主语的代词变成了 call 的第一宾语,被定义的术语 isosceles triangle 是 call 的第二宾语。

下面再给出动词 call 换成其他同义词时的被动语态形式,请注意比较不同动词及动词词组在用法上的差异。相应的主动语态形式留作读者的练习。

例 11' A triangle with two equal sides is said/defined to be an isosceles triangle.

本句中,被定义的术语 isosceles triangle 是主语的补语中的表语。

例 11'' A triangle with two equal sides is defined as an isosceles triangle.

本句中,被定义的术语 isosceles triangle 是介词 as 的宾语。

例 11''' A triangle with two equal sides is referred to as an isosceles triangle.

本句中，被定义的术语 isosceles triangle 是介词 as 的宾语。

例 12 A function $f(x)$ defined on $[a, b]$ is said to be bounded if there exists some positive number C such that $|f(x)| \leqslant C$ for all $x \in [a, b]$.

【定义在$[a, b]$上的函数 $f(x)$如果存在一个正数 C 使得$|f(x)| \leqslant C$ 对所有 $x \in [a, b]$成立，则称 $f(x)$是有界的。】

这句定义的概念 bounded 是一个形容词，用于表示该函数的属性；bounded 在补语中充当表语。

(2) 被定义的术语用从句或带 to 的动词不定式表示

叙述 III 和 IV 类(即描述动作状态和关系)术语的定义时，术语常以从句或动词不定式的形式充当句子的成分。

例 13 Suppose $\{f_n\}$ is a sequence of functions defined on a set E. If for any $\varepsilon > 0$, there is an integer N such that $\| f_n - f_m \| < \varepsilon$ whenever $n, m > N$, then we say that $\{f_n\}$ has the Cauchy property uniformly on a set E.

【假设$\{f_n\}$是定义在集 E 上的一列函数。如果对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在整数 N 使得 $\| f_n - f_m \| < \varepsilon$ 对所有 $n, m > N$ 成立，则称$\{f_n\}$在 E 上具有一致的柯西性质。】

例 13 中的宾语从句可以改写为不定式：

例 13' Suppose $\{f_n\}$ is a sequence of functions defined on a set E. Then $\{f_n\}$ is said to have the Cauchy property uniformly on E, if for any $\varepsilon > 0$ there is an integer N such that $\| f_n - f_m \| < \varepsilon$ whenever $n, m > N$.

4. 叙述定义的特殊句型

被定义的术语通常充当句子的非主要成分(见上一段)，而且放在主语和谓语的后面，但在特殊情况下(例如为了强调该术语，或者在此前已经提及该术语)，可以将该术语作为句子的主语或者作为介词宾语放在倒装句的句首。用这种形式叙述的定义可称为**解释性定义**。具体的句型主要有如下三种。

例 14 A square is a quadratic with four equal sides and four equal angles.

【四边相等且四个角相等的四边形称为正方形。】

这里虽然原文用 is 当动词，仍然译成“称为”。

这个句型与前面的例子的不同点在于：被定义的术语 square 当主语且其谓语动词是 be，即用判断句的形式给出定义。这种句型一般适用于条件比较直接且便于叙述的情形。

例 15 The derivative $f'(x)$ is defined by the equation

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

provided the limit exists.

【当极限 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 存在时，$f'(x)$ 就定义为 $f(x)$ 的导数。】

这句用被定义的术语当主语，define 的被动语态当动词谓语，用 by 带出描述该术语的内容和条件。

例 16 By "the graph of the set of ordered pairs" is meant the set of all points of the plane corresponding to the set of ordered pairs.

【所谓"有序对集的图形"指的是平面上对应于有序对集的所有的点组成的集。】

这句是倒装句，主语是后面的 the set，被定义的术语作为 by 的介词宾语放在前面，表示强调。

上述特殊句型较少使用，初学者只要对它们有所了解即可。

5. 叙述定义的语句的扩充

(1) 在定义术语的同时定义记号

在叙述一些术语(主要是第 I 类术语)的定义后，往往需要用符号来表达，这时我们常把定义句扩充，增加一个由 and 连接的并列主句，或补充一个定语从句(可用"in which case"连接)或补充一个分句。如：

例 17 A set A is called a subset of a set B, and will be denoted by $A\subseteq B$ whenever every element of A also belongs to B.

【如果集 A 的元素都属于集 B，则称 A 为 B 的子集并记作 $A\subseteq B$。】

例 18 Two sets A and B are said to be equal if they consist of exactly the same elements, in which case we write $A=B$.

【如果两个集合 A 和 B 由完全一样的元素组成，则称它们相等并记作 $A=B$。】

其中 in which case 可以换成 in this case 或 in that case。

(2) 同时给出多个相关的定义

把紧密相关的术语放在一块定义，便于体现它们之间的关系或差异，还可以对其中较迟给出的定义的句子成分作适当的省略。

例 19 A sequence $\{f(n)\}$ is said to be increasing if $f(n)\leqslant f(n+1)$ for all $n\geqslant 1$.

If, on the other hand, we have $f(n)\geqslant f(n+1)$ for all $n\geqslant 1$, we call the sequence decreasing. A sequence is called monotonic if it is increasing or if it is decreasing.

【序列 $\{f(n)\}$ 称为是增加的，如果对所有的 $n\geqslant 1$ 都有 $f(n)\leqslant f(n+1)$。反

之，若对所有的 $n \geqslant 1$ 都有 $f(n) \geqslant f(n+1)$，则称$\{f(n)\}$为减少的。若一个序列是增加的或者是减少的，则称之为单调的。】

练 习 5.5

1. 把下列数学命题译成英语：

(1) 设 N 是一个大于 1 的整数。如果 N 只能被它自己而不能被其他大于 1 的整数整除，就称 N 为质数；如果 N 不是质数，则称为合数。

(2) 设直线 AB 和 CD 平行。又设另一直线 EF 分别与 AB 和 CD 交于 E，F，则它们形成的同位角相等。

(3) 如果函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续而且满足 $a \leqslant f(x) \leqslant b$，则必存在一点 $c \in (a, b)$使得 $f(c)=c$。

(4) 设 f 是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射，$a \in X$，$b \in Y$ 使得 $f(a)=b$。如果对于 b 的任意邻域 U，都存在 a 的邻域 V 满足 $f(V) \subseteq U$，则称映射 f 在 a 连续(提示：拓扑空间(topological space)；邻域(neighborhood))。

2. 把下面定义中的被动语态改成主动语态：

(1) A triangle with two equal sides is said/defined to be an isosceles triangle.

(2) A triangle with two equal sides is defined as an isosceles triangle.

(3) A triangle with two equal sides is referred to as an isosceles triangle.

3. 下面用英文写作的定理和定义存在某些错误或欠妥之处，请加以修改和完善：

(1) Theorem If a function $f(x)$ is continuous on$[a, b]$ and $f(a)=f(b)$, there is a point C in (a, b) such that $f'(C)=0$, when $f(x)$ is differentiable at C.

(2) Theorem Let $ABCD$ is a quadrilateral, then if it has two sides which are parallel then it is a trapezium and it is a parallelogram if they are also equal.

(3) Definition If there exists a constant M such that $f(x) \geqslant M$ for any x in$[a, b]$, we call M to be a lower bound of $f(x)$ on$[a, b]$.

(4) Definition A triangle is said to be a regular triangle if and only if its three sides are equal.

§5.6 数学推理与论证的英语表达

本节介绍部分常用的表述数学推理与论证过程的句型和词语，并给出相应的例子，以帮助初学者写作时参考。为了叙述方便，我们按表述的功能分成六类(表达设定、表达理由与根据、表达性质、表达讨论与分析、表达推理行为、表达结

束),分别进行介绍。必须指出,这些介绍主要针对数学专业的特点展开,对于那些读者们较为熟悉的,特别是在公共英语中常见的内容,我们要么省略,要么只是简要提及。

§5.6.1 表达设定的句型

在论证问题的开头,一般需要对考虑的条件或前提进行设定。下面分六种情形分别介绍。

1. 一般性设定

一般情况下,我们按照论证的问题所需要考虑的整个前提和范围进行设定。

(1) 通常直接采用 let/suppose/assume 为动词的祈使句来表示。这三个动词的用法略有区别。

let 常用于比较简单的设定,如

例 1 Let x be the length of the rectangle.

【设 x 是矩形的长度】。

suppose 和 assume 的后面都接宾语从句,可用于较长的设定。在作一般设定时,suppose 和 assume 可以互相替换。而 assume 还常用于多种带有其他功能的设定。

(2) 有时采用 given 引导的分词短语表示设定。

例 2 Given a rectangle $ABCD$ whose area is 54 cm^2, find the perimeter of $ABCD$ if its width is two third of its length.

【给定一个面积为 54 cm^2 的长方形 $ABCD$,如果它的宽度是长度的三分之二,求它的周长。】

(3) 少数情况下采用"总是……除非……"的表示法。

例 3 The term measurable applied to a set in S will always mean V-measurable unless stated otherwise.

【若无另加说明,可测这术语用于 S 中的集时总是指 V 可测。】

2. 简约化设定

数学论证过程有时要对所讨论的问题进行简化,常见的有如下两种表达形式:

(1) 指明多种情况可简化为其中一种。

例 4 We can assume $X>-\infty$, otherwise there is nothing to show.

【我们可以假定 $X>-\infty$,否则不证自明。】

例 5 We may assume the index $n>0$ without loss of generality since the cases for $n<0$ and $n=0$ are the direct consequence of the case of $n>0$.

【不失一般性，我们可以假定指标 $n>0$，因为 $n<0$ 和 $n=0$ 的情形都是$n>0$的情形的直接推论。】

有时把 without loss of generality 放在句首，以引起读者注意：

例 5 Without loss of generality, we may assume the index $n>0$ since the cases for $n<0$ and $n=0$ are the direct consequence of the case of $n>0$.

这类句子都是在作简约化假定之后，再根据具体情形说明原因，其他常见的原因如：since the other cases can be proven similarly（因为其他情形可以类似地证明）或 the conclusion for the other cases are obvious（因为在其他情形下结论显然成立）等。

（2）用 for simplicity 放在句首提示简约化。

例 6 For simplicity, we will refer to the elements of $L^1(X)$ as a function instead of equivalence class.

【为了简便起见，我们把 $L^1(X)$的元素称为函数，而不称之为等价类。】

3. 分层次设定

有时需要分情况进行讨论，如先考虑特殊情形再讨论一般；或者分多种并列的情况进行讨论，此时需要多次设定。这时所用动词除 assume 之外，还可用 consider 等（未必都用祈使句），另外，通常要附加一些指明时间次序的副词。

例 7 Assume the index $n>0$ first,…. Then we assume $n<0$,…. Finally we consider the case $n=0$.

【首先假定指数 $n>0$，……。然后，我们假定 $n<0$，……。最后，我们考虑$n=0$的情形。】

4. 反向性设定

（1）用现在时表示的反向设定

用反证法来证明定理时，开头总要假定在定理的条件下结论不成立。经常用如下面这类普遍适用的语句作为论证的开始：

例 8 Assume the conclusion of the proposition is false under the given hypotheses.

【假设在给定的条件下命题的结论不成立。】

为了突出反证法，可在上句的开头加上 contrarily 或 in contradiction 之类词语：

例 9 Contrarily, we assume the conclusion is untrue.

【相反地，我们假定结论不成立。】

在作反证法设定时，也可以把条件和结论分别具体化；也可以假定结论的逆

命题成立；此外，第一句也可以只假定结论不成立，而默认定理的条件成立，或把条件包含在下一句的叙述之中。

(2) 用虚拟语气表示反向设定

虚拟假设的句型常用于讨论某些问题的过程，也可以用于反证法的开头。

例 10 If the set were unbounded, then the function $f(x)$ would be discontinuous at the point b, which is impossible since $f(x)$ is proven to be continuous on the interval$[a, b]$.

【如果该集是无界的，则函数 $f(x)$在点 b 不连续，但这是不可能的，因为我们已经证明了 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续。】

5. 符号设定

除了像例 1 那样用 let 语句设定符号外，还常用 denote 或 designate 等动词的命令式来设定符号。如

例 11 Denoted by df the differential of the function f.

(或 The differential of the function f is denoted by df.)

【用 df 表示函数 f 的微分。】

用数学式来设定符号时，除了 denote 或 designate 之外，还常用动词 set 和 put。例如，

例 12 Set $\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$.

(或 Put $\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$.)

【令 $\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$。】

6. 任意性设定

在数学中，经常用介词短语“for any +名词性短语”或“for any +一个数学式子”放在句首，表示下面的讨论是对任意一个取定的对象来进行的。

例 13 For any positive number ε (或 For any $\varepsilon>0$), there exists a number N such that $|a_n-A|<\varepsilon$ for all $n>N$.

【对任意正数 ε 都存在一个数 N，使得$|a_n-A|<\varepsilon$ 对所有 $n>N$ 都成立。】

注意，第一个 for 短语中的 ε 是事先取定的任意正数，第二个 for 短语主要用于指明 n 的允许范围，其界限 N 是与 ε 有关的，不是事先取定的。

§ 5.6.2 表达理由和根据的句子与短语

1. 用状语从句表示原因

论证的过程经常需要反复陈述因果关系。叙述原因通常需要采用一个原因

从句来表达，放在主句的前面或后面均可[注5]。在数学英语中，引导原因从句的连接词最常用 since，有时用 owing to，很少采用 because。实际上 since 和 owing to 都可以表示“由于”的意思，特别 since 还有“既然”的含义，用 since 连接的从句蕴含着“该理由是此前已经得知的事实”，较符合数学推导的需要。而 because 多用于特别强调原因的情形。

since 引导的从句可以放在主句之后（见例 5），但更多的是放在句首。

例 14 Since the function $f(x)$ is differentiable at x_0, we have $f(x_0)=0$.

【由于 $f(x)$ 在 x_0 是可微的，可得出 $f(x_0)=0$。】

应该注意的是，汉语中“因为……所以……”的句型，在英语中不能逐字对应翻译成“since…so…”这种类型的句子，因为 since 引导原因状语从句而 so 引导结果状语从句，而使“since…so…”英语句子成了错误的无主句复合句。总之，在英语中不能用一个表示“所以”的单词（如 hence，therefore 或 so 等）来与 since 搭配。

2. 用介词短语表示论证的根据与方法

常用“by＋公式（或术语）”来表示推导的根据或方法。

例 15 We obtain $x=(a^2+b^2)^{1/2}$ by Pythagoras theorem.

【据勾股定理可得 $x=(a^2+b^2)^{1/2}$。】

例 16 By L'Hospital rule it follows that $\lim x=4$.

【用洛必达法则可以求得 $\lim x=4$。】

3. 用分词短语表示根据与方法

有时也用过去分词短语“based on＋名词性词组”来表示根据。

例 17 Based on Newton's interpolation formula, a new method to compute the approximate solutions is presented.

【根据牛顿插值公式，人们提出了一种计算近似解的新方法。】

有时用过去分词或现在分词表示“经过……而得到……”（推论）。

例 18 Divided by $\cos x$ on both sides, the equality above becomes $2\tan^2 x-3\tan x=4$.

【在上一等式两边同时除以 $\cos x$，得出 $2\tan^2 x-3\tan x=4$。】

例 19 Multiplying both sides of the inequality with $(x+2)$, we have $2x-3\geqslant 5(x+2)$.

【将该不等式两边乘以 $(x+2)$，得到 $2x-3\geqslant 5(x+2)$。】

注 5：除了用主从复句陈述原因外，还可以用 for 连接的句子说明原因，放在一个给出结论的句子之后。应注意的是，这个 for 连接的句子不是从句，而是与前者并列的分句。

§5.6.3 表达具有某种性质的句子与短语

在这里只介绍部分具有数学特色的表示方式。

1. 用定语从句指明对象满足的性质

例 20 Suppose $f(x)$ is a function on a domain D which satisfies that $|f(x)|<M$ for all $x\in D$, where M is a constant.

【设 $f(x)$是区域 D 上的函数,它对所有 $x\in D$ 都有 $|f(x)|<M$ 成立,这里 M 是一个常数。】

2. 用 such that 连接的从句指明性质

在专业英语中常见到某个数学对象之后紧接着以 such that 为连接词的从句,用于表示该对象具有的性质或满足的条件。例如,例 20 常被改写成:

例 20* Suppose $f(x)$ is a function on a domain D such that $|f(x)|<M$ for all $x\in D$, where M is a constant.

【假定 $f(x)$是区域 D 上的一个函数使得对所有 $x\in D$,不等式 $|f(x)|<M$ 成立,其中 M 是一个常数。】

3. 用分词指明对象满足的性质

关于分词短语的详细介绍可见 §3.1。这里仅指出,例 20 也常改写成:

例 20** Suppose $f(x)$ is a function on a domain D satisfying that $|f(x)|<M$ for all $x\in D$, where M is a constant.

4. 用修饰名词的介词短语指明性质

借助于介词 with 引导的短语可以说明其修饰的对象所具有的性质。

例 21 Suppose D is an open set with its closure in G.

【假定 D 是一个其闭包包含于 G 的开集。】

或译成:

【假定 D 是一个开集且其闭包在 G 中。】

5. 用 have 句型表示主语具有的性质

熟知,动词 have 的功能很多,这里只是给出一些表示数学对象具有某种性质的例子。

例 22 The lighthouse has a height of 25 meters.

【这座灯塔高 25 米。】

例 23 This circle has a smaller area than that square.

【这个圆的面积比那个正方形来得小。】

例 24 The unit matrix $\boldsymbol{I}$ has the property that $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A}$ for any square matrix $\boldsymbol{A}$ with the same order.

【单位矩阵 I 具有这样的性质：对任何同阶方阵 A 满足 $AI=A$。】

6. 用 be 句型表示主语具有的性质和特点

上面用 have 句形表示的例 22、23 可相应改成：

例 22' The lighthouse is 25 meters height.

例 23' This circle is smaller in area than that square (is).

be＋形容词表语常用于表示具有某种特点。

例 25 The two straight line are perpendicular to each other.

【这两条直线相互垂直。】

§5.6.4 用于讨论与分析问题的句型

1. 用条件复句进行讨论

常用 if，when，as 为连接词的条件状语从句或时间状语从句表示条件，在主句中给出结论。关于这两类从句的介绍，读者可以参考§3.6 及§5.5.1 的有关部分。这里只是作一些补充说明。

基本句型 If…，then…可以变化成多种其他形式，如可以把主句放在前面(未必用 then)，把 if 引导的从句放在后面(称为后置)，也可以用多层 If...，then...套叠。当 if 引导的从句后置时，也可以用 when 代替。As 为连接词的条件状语从句常后置，表示伴随变化的意义，这时一般不宜用 if，when 代替。

例 26 The function $u(t)$ approaches to 0 as t tends to ∞.

【当 t 趋于∞时，函数 $u(t)$趋于 0。】

2. 用介词短语指明结论成立的范围

常用 for 短语放在某结论的后面表示该结论成立的条件或范围(见例 13 中的第二个 for 短语，以及例 24 中的 for 短语)。

对一个论题分情况讨论时，虽然可以用多个并列的 If…，then…语句来表示，但在不用 then 搭配的情形下，也常用 for 来代替 if 表示条件。

例 27 The series is convergent for $n>1$ and divergent for $n<1$.

【该级数当 $n>1$ 时收敛，而当 $n<1$ 时分散。】

3. 作充分性分析的句型

分析法是演绎推理的一种重要方法，它根据问题的预期结论，寻求使之成立的条件。其常用模式是：

(1) To prove the conclusion P, it is sufficient to prove (or verify) Q.

【为了证明结论 P，只要证明(或验证)Q 即可。】

当目的已经明确时，前面的不定式短语可用 then 或 thus 之类的副词来代替。其中，核心部分是 it is sufficient(形容词)to do…，也可以改用 it suffices to

do…，这里 suffice 是不及物动词。当 suffice 用另一个不及物动词 remain 代替时，成了

(2) It remains to do…，(余下只要做……即可)，这种句型经常出现于证明的后半段，用于指明下一步的论证任务(见例 42)。

4. 作必要性与可能性分析的句子

(1) 有时需要用如下句型进行必要性分析：

It is necessary for sb. to do sth.

It is necessary to do sth.

例 28 It is necessary for a series $\sum u_n$ to converge that the sequence $\{u_n\}$ has a limit 0.

【要使级数 $\sum u_n$ 收敛，数列 $\{u_n\}$ 必须以 0 为极限。】

关于必要性描述的另外的例子见 § 5.5.1 关于定理的表述方法。

(2) 类似地，关于可能性(或不可能性)的分析可用如下句型：

It is possible (或 impossible) for sb. to do sth.

It is possible (或 impossible) to do sth.

例 29 Is it possible to find a continuous solution to the equation?

【是否可能求出该方程的连续解?】

5. 表示存在性的动词与句型

主要是 be 与 exist 构成的句型：there is (are)…(表示一般的存在，即“有”)和 there exist (s)…(强调存在性)。其否定形式分别为：there is (are)not…和 there does not exist…。

例 30 Does there exist an accurate upper bound for these constants?

【这些常数是否存在准确的上界。】

句中 an accurate upper bound 是主语。

6. 表示唯一性的句型

单词 unique，uniquely，uniqueness 分别表示“唯一的”、“唯一地”和“唯一性”。

例 31 The equation has a unique real root.

【该方程有唯一的实根。】

例 32 For any square matrix $\boldsymbol{A}$ there exists uniquely matrix $\boldsymbol{B}$ such that $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$ when and only when $\boldsymbol{A}$ is nonsingular.

【对任意方阵 $\boldsymbol{A}$，存在唯一的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的。】

§5.6.5 表述推理行为的句型和词语

1. 表示 A 推出 B 的句型

及物动词 imply 或 yield 可来描述“命题 A(或代替 A 的代词)推出(或蕴涵)命题 B”的推理,其中 imply 较常用。

例 33 That $AB//CD$ and $CD//EF$ implies that $AB//EF$.

【$AB//CD$ 和 $CD//EF$ 蕴涵着 $AB//EF$。】

2. 表示由 A 产生或得出 B 的句型

常用不及物动词 follow 构成的句子 from A follows B(当 B 是一个名词性词组)或 from A it follows that B(当 B 是一个句子),表示由命题 A 产生或得出命题 B。

例 34 From the above discussion follows the conclusion of theorem 1.

【由上述讨论得出定理 1 的结论。】

例 35 By Lemma 1, from (2) and the above inequality follows that the function $f(x)$arrives at its maximum value at x_0.

【据定理 1,由(2)式及上一不等式得出,函数 $f(x)$在 x_0 达到其最大值。】

3. 表示 A 等价于 B 的句型

(1) 用连接词 when and only when, if and only if 表示充分必要条件。

例 36 The sufficient and necessary condition for the inequality is $\alpha>0$ and $p\geqslant 3$.

【该不等式成立的充分必要条件是 $\alpha>0$ 且 $p\geqslant 3$。】

同一句子可改用如下形式表达:

例 36' The inequality is valid when and only when $\alpha>0$ and $p\geqslant 3$.

其中“when and only when”可用“if and only if”替代或更简单地用“iff”替代。

(2) 用形容词 equivalent 表示充分必要条件:

例 37 P is equivalent to Q.

【P 等价于 Q。】

例 37' P and Q are equivalent.

4. 宣称得出某个结论的句型

(1) 用主-谓-宾结构表示

常用 we 作主语,后接 obtain, deduce, conclude, have, yield 等具有“得出”含义的及物动词加宾语或宾语从句(表示结论)。这类表示推理的句子,常带有表示推理根据的介词短语,如 by…。

例 38 By induction, we obtain the general formula $s_n=\frac{2a+(n-1)d}{2}$.

【由归纳法，我们得出一般的公式$s_n=\frac{2a+(n-1)d}{2}$。】

(2) 采用 it 作为形式主语，把结论的内容放在 that 引导的主语从句之中。如

例 39 It is clear that the equation has only one solution on the interval.

【显然，该方程在这个区间上只有一个解。】

其中 it is clear 可以换成 it is obvious, it follows, it is concluded 等。

(3) 不具体说明结论的内容时，可用如下被动句型指明推导的结果：

例 40 Consequently, the conclusion is proved.

【因此，结论已经获证。】

5. 先宣布某个结论，然后补证明的句子组合

在一个较长的论证过程中，有时在论证某个子命题之前，先行宣布其结论，然后用 in fact 或 indeed 作为转折，紧接下去再证明之。常见的形式为：

We assert/claim that…. In fact/ Indeed,…

It will be seen that…. In fact/ Indeed,…

It is easy to see that…. In fact / Indeed,…

例 41 We claim that the order of this polynomial is less than 3. In fact,…

【我们断言该多项式的阶数小于 3，事实上，……】

6. 用副词带出进一步推导的语句

副词 hence(因此), therefore(因此，所以), consequently(因此), thus(于是，从而), furthermore(进一步，进而)等常放在表示进一步推导的句子之前，起强调的作用。应注意，这些词并非连接词，它们并不和 since 或 because 搭配使用。

例 42 By Lemma 2, the inequality is valid for the case $L=+\infty$. Thus it remains to prove the conclusion holds for the case $L<+\infty$.

【由引理 1，该不等式当 $L=+\infty$时成立。于是，只要证明结论在 $L<+\infty$ 的情形下也成立即可。】

§5.6.6 表述论证结束的句型

1. 单纯表示论证结束的句子

例 43 The proof of theorem is complete.

【证明完毕。】

例 43* We have completed the proof.

2. 结合其他内容指出论证结束的句子

例 44 Because r is arbitrary, we conclude the proof of Inequality (I).

【因为 r 是任意的，故不等式(I)证明完毕】

或

【我们证得了不等式(I)。】

此句中的 conclude 可换成 complete(动词)。

3. 表示反证法结束的句型

常用以 contradict 为谓语动词的句子表示“与……矛盾”。

例 45 This contradicts the fact provided above.

【这与上面提供的事实矛盾。】

另外，词组 be contradictory to…和 be in contradiction with…等也可用于表示同样意思，读者应注意其中介词的固定配搭。

例 46 This result is contradictory to the hypotheses of the theorem and the proof is complete.

【这个结果是与定理的假设矛盾的，从而证明完毕。】

其中 contradictory to 可以换成 in contradiction with。

如果仅指出矛盾，可以表成“this is a contradiction”，也可以采用非限制性定语从句“which is a contradiction”，放在有矛盾的结论之后。

本节小结：以上所介绍的只是数学专业英语在描述数学对象和论证数学命题中的部分较常见的基本句型和表达方式。更深刻和细致的语言规律有赖于读者在实践中不断摸索与逐步掌握。不过，据作者本人的学习和教学经验，初学者只要先掌握以上基本句型和例子，就可以大大提高数学论文的写作速度和水平。

在数学专业英语读、译、写三个环节的学习过程中，大家都不难体会到：翻译固然比单纯的阅读增加了不少难度；如果把写作与翻译相比，以汉语为母语的人要用英语写好文章的难度就更大了。因此需要更多的学习、训练，在不断改进中逐步前进。

在写作训练的开始，特别要注意随时检查自己写出的句子是否有毛病，写完一段或一篇之后，更需要回头检查，一旦发现错误，立即设法改正。习作者常犯的错误，除了我们在上面相应段落有所提及，其他介绍科技英语写作的文献中也有专门列举和评析，例如，近期出版的《科技英语论文实用写作指南》[10]列举了十多种写作中常犯的错误。习作者参阅这些内容，可以增强识别正误的能力。有些初学者为了更快更好地提高写作水平，把易犯的错误按条目列成表格，便于自己写作时检查对照，引以为戒。这种做法可供参考。

“错误不足畏”，相信每个敢于经历错误和纠正错误的习作者，都能快速地成长起来。

练 习 5.6

1. 把下列语句译成英语。

(1) 由不等式 A 可以推出如下结论：m 与 n 是互素的，这与假设矛盾。

(2) 不失一般性，可以假设 k 为非负整数，因为其余情形的证明是类似的。

(3) 我们断言该变量没有极限，实际上，按照下面步骤不难验证它是一个无界量。

(4) 于是，要得出结论，只要验证这个多项式只有一个零点即可。

(5) 上一不等式两边关于变量 t 在$[a, b]$上积分，就得出所要的结论。

(6) 根据式(4)并利用 Zensen 公式，就可以推出 A 和 B 两个命题等价。

2. 修改下面英文语句中的错误。

(1) Let t is the time of the car to catch the bus.

(2) Because that $x>a$, $y>0$, hence $xy>ay$, and obtain the conclusion is valid.

(3) The house is a height of 25 meters.

(4) There exists unique matrix $\boldsymbol{B}$ such that $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$ when and only when $\boldsymbol{A}$ is nonsingular for any square matrix $\boldsymbol{A}$.

(5) The proof of the conclusion is remaining to verify the necessary condition.

(6) We are sufficient to consider the case $a>0$.

附录A 参考论文

下面是一篇近期发表的论文[注6]，因为所涉及的数学知识比较浅显，便于本科各专业大学生阅读，所以特地选登于此，供习作英文版数学论文的作者参考。

Values Taken by Linear Combinations of Cosine Functions

Vichian Laohakosol, Pinthira Tangsupphathawat and Supreedee Dangskul

(Department of Mathematics, Kasetsart University, Bangkok 10900,

注 6：这篇论文发表于 Applied Mathematics E-Notes[55]，该杂志的网页允许自由进入阅读和下载。

and Centre of Excellence in Mathematics, CHE, Si Ayutthaya Road, Bangkok 10400, Thailand)

Abstract For θ, $\beta\in[-\pi, \pi)$and $\theta\notin\{-\pi, 0\}$, it is shown that as n runs through the nonnegative integers, the nonzero sequence $(\cos(n\theta+\beta))$ takes infinitely many positive and negative values; and if $\theta=\frac{s}{t}$ is a rational multiple of π, the sequence is purely periodic whose least period is equal to t when s is even and equal to $2t$ when s is odd; while if θ is not a rational multiple of π, the range of values of the sequence is dense in the unit interval $(0, 1)$. Any sequence of the form $\left(\sum_r^d a_r\cos\frac{2n\pi s_r}{t_r}+\beta_r\right)$, with rational $\frac{s_r}{t_r}$ belonging to the unit interval $(0, 1)$, is shown to be purely periodic whose least period is equal to the least common multiple of $t_1, \cdots, t_d$.

Keywords Linear Combinations; Cosine Functions; period; infinitely many values

Mathematics Subject Classifications: 33B10, 30D35, 11B83.

1 Introduction

Let θ, $\beta\in[-\pi, \pi)$and $\theta\notin\{-\pi, 0\}$. The distribution of the values of $\cos(n\theta+\beta)$ as n varies over the nonnegative integers $\mathbf{N}_0 := \mathbf{NU}\{0\}$ has been of much interest recently. To mention one instance, in the course of establishing the positivity of elements in a binary sequence, it is shown by Halava, Harju and Hirvensalo ([2, Lemma 5], see also [3])using elementary means that the inequality $\cos(n\theta+\beta)\geqslant 0$ cannot hold for all $n\in\mathbf{N}_0$. We endeavor here to carry out two particular tasks. In the next section, we improve upon the above-mentioned result of Halava-Harju-Hirvensalo by showing that both positive and negative values occur infinitely often. When θ is not a rational multiple of π, through the use of a theorem of Kronecker in Diophantine approximation, we show even more that the value set of such cosine function is dense in the closed interval $[-1, 1]$.

Our second task arises from a result of Bell and Gerhold, [1, Lemma 8], dealing with a linear combination of cosine functions which states that: If $\theta_1, \cdots, \theta_d$ are rational numbers in the open interval $(0, 1)$, and if α_i, β_i are real numbers such that the purely periodic sequence.

$$u_n=\sum_{i=1}^{d} a_i\cos(2\pi\theta_i n+\beta_i)$$

is not identically zero, then the sequence (u_n)takes both positive and negative values.

Our next objective is to obtain more information about the periodicity of the sequence (u_n). We show that the least period of the sequence $(u_n)$is exactly equal to T, the least common multiple of the denominators $t_1, \cdots, t_d$.

2 Positive and Negative Values

We begin with a result on negative values. For an angle , it is convenient to use the phrase γ mod $(-\pi, \pi]$, when we mean an angle $\gamma_0\in(-\pi, \pi]$ for which $\gamma\equiv\gamma_0 \bmod 2\pi$. Clearly, the method employed here can also be adapted to examine the values taken by other

trigonometric functions.

Proposition 2. 1. Let $\theta, \beta \in [-\pi, \pi)$ and $\theta \notin \{-\pi, 0\}$. There are infinitely many $n \in \mathbf{N}_0$ such that $\cos(n\theta+\beta)<0$.

Proof. Assume that there are only finitely many $n \in \mathbf{N}_0$, say $n_1, \cdots, n_L$, such that

$$\cos(n\theta+\beta)<0 \ (n=n_1, \cdots, n_L).$$

Thus,

$$\cos(((n_L+1)\theta+\beta)+k\theta)=\cos((n_L+1+k)\theta+\beta)\geqslant 0$$

for all $k \in \mathbf{N}_0$, which contradicts the result in Lemma 5 of [2] when φ is replaced by $(n_L+1)\theta+\beta \bmod (-\pi, \pi]$.

PROPOSITION 2. 2. Let $\theta, \beta \in [-\pi, \pi)$ and $\theta \notin \{-\pi, 0\}$.

(i) The relation $\cos(n\theta+\beta)\leqslant 0$ cannot hold for all $n \in \mathbf{N}_0$.

(ii) There are infinitely many $n \in \mathbf{N}_0$ such that $\cos(n\theta+\beta)>0$.

Proof. (i) Assume that $\cos(n\theta+\beta)\leqslant 0$ for all $n \in \mathbf{N}_0$, which implies that for each $n \in N_0$,

$$n\theta+\beta \in \left[\frac{-3\pi}{2}+2k\pi, \frac{-\pi}{2}+2k\pi\right],$$

for some $k \in \boldsymbol{Z}$. Then $\beta \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ or $\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

If $\beta \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, since $|\theta|<\pi$, we have

$$\theta+\beta \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right].$$

Inductively, we obtain $n\theta+\beta \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ for all $n \in \mathbf{N}_0$. Since $\theta \neq 0$, this implies $|n\theta+\beta| \to \infty (n \to \infty)$, which is a contradiction.

If $\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, since $|\theta|<\pi$, we have

$$\theta+\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Inductively, we obtain $n\theta+\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ for all $n \in \mathbf{N}_0$. Since $\theta \neq 0$, this implies $|n\theta+\beta| \to \infty (n \to \infty)$, which is again a contradiction.

(ii) Assume that there are only finitely many $n \in \mathbf{N}_0$, say $n_1, \cdots, n_L$, such that

$$\cos(n\theta+\beta)>0 \ (n=n_1, \cdots, n_L).$$

Thus,

$$\cos(((n_L+1)\theta+\beta)+k\theta)=\cos((n_L+1+k)\theta+\beta)\leqslant 0$$

for all $k \in \mathbf{N}_0$, which contradicts the preceding lemma when β is replaced by $(n_L+1)\theta+\beta \bmod (-\pi, \pi]$.

Next, we derive more information by invoking upon a result in Diophantine approximation known as the Dirichlet approximation theorem.

Theorem 2.3. Let $\theta, \beta \in [-\pi, \pi)$ with $\theta \notin \{-\pi, 0\}$.

(a) If $\theta=\frac{s\pi}{t}$ ($s \in \mathbf{Z}$, $t \in \mathbf{N}$, $\gcd(s, t)=1$) is a rational multiple of π, then the sequence $(\cos(n\theta+\beta))_{n\in\mathbf{N}_0}$ is purely periodic. Moreover, if s is even, then the least period of the sequence $(\cos(n\theta+\beta))_{n\in\mathbf{N}_0}$ is t, while if s is odd, then its least period is $2t$.

(b) If θ is not a rational multiple of π, then as n varies over $\mathbf{N}_0$ the range of values of $\cos(n\theta+\beta)$ is dense in $[-1, 1]$.

Proof. (a)Since the cosine function is periodic of period 2π, the sequence

$$\cos(n\theta+\beta)=\cos\left(\frac{ns\pi}{t}+\beta\right) \quad (n \in \mathbf{N}_0)$$

is purely periodic with at most $2t$ values in a period, corresponding to $n=0, 1, 2, \cdots, 2t-1$, namely,

$$\cos\beta, \cos\left(\frac{s\pi}{t}+\beta\right), \cos\left(\frac{2s\pi}{t}+\beta\right), \cdots, \cos\left(\frac{s(2t-1)\pi}{t}+\beta\right).$$

If $t=1$, then either $\theta=2k\pi$ or $\theta=(2k+1)\pi$ for some $k \in \mathbf{Z}$. In either case, $\theta \in [-\pi, \pi)\setminus\{-\pi, 0\}$, and so there is nothing to consider.

Let now $t \geqslant 2$. If s is even, say $s=2k$, then t must be odd and the sequence

$$\cos(n\theta+\beta)=\cos\left(\frac{2nk\pi}{t}+\beta\right) \quad (n \in \mathbf{N}_0)$$

is periodic of period t with values in each period being

$$\cos\beta, \cos\left(\frac{2k\pi}{t}+\beta\right), \cos\left(\frac{4k\pi}{t}+\beta\right), \cdots, \cos\left(\frac{2k(t-1)\pi}{t}+\beta\right).$$

If t is not the least period, let its least period be l. Thus $l \mid t$, $l<t$ and

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{2kl\pi}{t}+\beta\right), \cos\left(\frac{2k\pi}{t}+\beta\right)=\cos\left(\frac{2k(l+1)\pi}{t}+\beta\right), \cdots$$

The first equality yields two possibilities

$$\frac{2kl\pi}{t}+\beta=2N\pi\pm\beta \quad \text{for some } N \in \mathbf{Z}.$$

The possibility $\frac{2kl\pi}{t}+\beta=2N\pi+\beta$ yields $N\pi=\frac{kl\pi}{t}$, which is impossible because $t \nmid kl$, $t \geqslant 3$ and so only the other possibility can hold which yields $\beta=N\pi-\frac{kl\pi}{t}$. Similarly, the second ine-

quality yields $\beta = M\pi - \frac{2k\pi}{t} - \frac{kl\pi}{t}$ for some $M \in \mathbf{Z}$. Equating the two values of β gives $(N-M)\pi = -\frac{2k\pi}{t}$ which is not tenable because $t \nmid (2k)$, $t \geqslant 3$. Consequently, t is the least period.

If $s=2k+1$ is odd, then the sequence

$$\cos(n\theta+\beta) = \cos\left(\frac{n(2k+1)\pi}{t}+\beta\right) \quad (n \in \mathbf{N}_0)$$

is periodic of period $2t$ with values in each period being

$$\cos\beta,\ \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{t}+\beta\right),\ \cos\left(\frac{2(2k+1)\pi}{t}+\beta\right),\ \cdots,\ \cos\left(\frac{(2t-1)(2k+1)\pi}{t}+\beta\right).$$

There remains to show that $2t$ is the least period in this case. If $2t$ is not the least period, let its least period be m. Thus $m \mid 2t$, $m < 2t$ and

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{(2k+1)m\pi}{t}+\beta\right),\ \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{t}+\beta\right) = \cos\left(\frac{(2k+1)(m+1)\pi}{t}+\beta\right),$$

etc. The first equality yields two possibilities

$$\frac{(2k+1)m\pi}{t}+\beta = 2N\pi \pm \beta \text{ for some } N \in \mathbf{Z}.$$

The possibility $\frac{(2k+1)m\pi}{t}+\beta = 2N\pi+\beta$ yields $N\pi = \frac{(2k+1)m\pi}{2t}$, which is impossible because $2t \nmid (2k+1)m$, $t \geqslant 2$ and so only the other possibility can hold which yields $2\beta = 2N\pi - \frac{(2k+1)m\pi}{t}$. Similarly, the second inequality yields $2\beta = 2M\pi - \frac{2(2k+1)\pi}{t} - \frac{(2k+1)m\pi}{t}$ for some $M \in \mathbf{Z}$. Equating the two values of β gives $(N-M)\pi = -\frac{(2k+1)\pi}{t}$ which is not tenable because $t \nmid (2k+1)$, $t \geqslant 2$. Consequently, $2t$ is the least period.

(b) Assume that θ is not a rational multiple of π, say $\theta = \vartheta \cdot 2\pi$, where $\vartheta \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$. Writing

$$\vartheta = [\vartheta] + \xi,$$

where $[\vartheta]$ denotes its integer part, and $\xi := \{\vartheta\} \in (0, 1)$ denotes its fractional part which must be irrational, for $n \in \mathbf{N}_0$ we have

$$\cos(n\theta+\beta) = \cos(n\vartheta 2\pi+\beta) = \cos(2n\xi\pi+\beta) = \cos(\{n\xi\}2\pi+\beta).$$

Since ξ is irrational, by the Kronecker's approximation theorem, see e. g. Corollary 6. 4 on page 75 of [4], we know the set $\{\{n\xi\} ; k \in \mathbf{N}\}$ is dense in $[0,1]$. Consequently, the set $\{\{n\xi\}2\pi; n \in \mathbf{N}\}$ is dense in $[0, 2\pi]$, implying that the range of values of $\cos(\{n\xi\}2\pi+\beta)$ $(n \in \mathbf{N})$ is dense in $[-1, 1]$.

When θ is a rational multiple of π, the values in a period can be distinct or otherwise as

seen in the next example.

Example 1. Take $\theta=\frac{s\pi}{t}=\frac{2\pi}{3}$, $\beta=0$. The sequence

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}_0}=\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}_0}$$

is periodic of length 3 with each period being

$$\cos(0)=1,\ \cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\ \cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

showing that there are exactly $2<3=t$ distinct sequence values.

EXAMPLE 2. Take $\theta=\frac{s\pi}{t}=\frac{2\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$. The sequence

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}_0}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}_0}$$

is periodic of length 3 with each period being

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

showing that there are exactly $3=t$ distinct sequence values.

3 Linear Combination of Cosine Functions

In this section, we consider a linear combination of cosine functions. Such expression is always periodic as we now see.

Theorem 3.1. Let $\theta_1=\frac{s_1}{t_1},\ \cdots,\ \theta_d=\frac{s_d}{t_d}$ $(s_r,\ t_r\in\mathbf{N},\ \gcd(s_r,\ t_r)=1)$ be rational numbers in the open interval $(0,\ 1)$, and let $\alpha_r,\ \beta_r$ be real numbers such that the purely periodic sequence

$$u_n=\sum_{r=1}^{d}a_r\cos(2\pi\theta_r n+\beta_r)$$

is not identically zero. Let $T=l.c.m.\ (t_1,\ \cdots,\ t_d)$. Then the least period of the sequence $(u_n)$is a divisor of T.

Proof. As seen in the proof of Theorem 2.3, the sequence

$$u_n=\sum_{r=1}^{d}a_r\cos\left(2n\pi\frac{s_r}{t_r}+\beta_r\right)\quad(n\in\mathbf{N}_0)$$

is purely periodic with a period T and the values in such a period correspond to $n\in\{0,1,2,\cdots,T-1\}$, namely,

$$\sum_{r=1}^{d}a_r\cos\beta_r,\ \sum_{r=1}^{d}a_r\cos\left(2\pi\frac{s_r}{t_r}+\beta_r\right),\ \sum_{r=1}^{d}a_r\cos\left(4\pi\frac{s_r}{t_r}+\beta_r\right),\ \cdots,$$
$$\sum_{r=1}^{d}a_r\cos\left(2(T-1)\pi\frac{s_r}{t_r}+\beta_r\right).$$

From Theorem 3.1, there then arises a natural question of determining when T is the

least period. A rather surprising fact that T is always the least period of such sequence is now proved. To proceed further, let us note the following useful fact. Since

$$\sum_{n=0}^{T-1} \exp\left(\frac{2i\pi n s_r}{t_r}\right)=0,$$

It follows that $\sum_{n=0}^{T-1} u_n=0$.

Theorem 3.2. For $r\in\{1, 2, \ldots, d\}$, let $\frac{s_r}{t_r}$ $\left(s_r, t_r\in\mathbf{N}, \gcd\left(\frac{s_r}{t_r}\right)=1\right)$ be rational numbers in the unit interval $(0, 1)$, and let $a_r(\neq 0)$, β_r be real numbers. If the purely periodic, non-identically zero sequence $(u_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ is defined by

$$u_n=\sum_{r=1}^{d} a_r\cos\left(\frac{2\pi n s_r}{t_r}+\beta_r\right),$$

then its least period is equal to $T=l.c.m.(t_1, t_2, \cdots, t_d)$.

Proof. Let l be the least period of (u_n). Since $l\mid T$, let $T=lL$ for some $L\in\mathbf{N}$. We proceed to prove the theorem by induction on d.

The case $d=1$ is contained in Part (a)of Theorem 2.3. Assume now that $d\geqslant 2$ and that the theorem holds up to d$-$1.

If $t_r\mid l$ for every $r\in\{1, 2, \cdots, d\}$, then $l=T$ and we are done. Suppose then that not all of the t_r's divide l. If there are some t_r's that divide l and some t_r's that do not divide l. Without loss of generality, assume that l is divisible by $t_1, t_2, \cdots, t_m$, but not divisible by t_{m+1}, $t_{m+2}, \cdots, t_d$ for some $m\in\{1, 2, \cdots, d-1\}$. For $k, j\in\mathbf{N}_0$, we have

$$\begin{aligned}
Lu_j&=\sum_{k=0}^{L-1} u_{kl+j}=\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{r=1}^{d} a_r\cos\left(\frac{2\pi s_r}{t_r}(kl+j)+\beta_r\right)\\
&=\sum_{r=1}^{m} a_r\sum_{k=0}^{L-1}\cos\left(\frac{2\pi s_r}{t_r}j+\beta_r\right)+\sum_{r=m+1}^{d} a_r\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{L-1}\exp\left(\frac{2i\pi s_r}{t_r}(kl+j)+i\beta_r\right)\right)\\
&=L\sum_{r=1}^{m} a_r\cos\left(\frac{2\pi s_r}{t_r}j+\beta_r\right)+\sum_{r=m+1}^{d} a_r\mathrm{Re}\left(\exp\left(\frac{2i\pi s_r}{t_r}j+i\beta_r\right)\frac{1-\exp(2i\pi lLs_r/t_r)}{1-\exp(2i\pi ls_r/t_r)}\right)\\
&=L\sum_{r=1}^{m} a_r\cos\left(\frac{2\pi s_r}{t_r}j+\beta_r\right).
\end{aligned}$$

Thus, $u_j=\sum_{r=1}^{m} a_r\cos\left(\frac{2\pi s_r}{t_r}j+\beta_r\right)$, which shows that u_n has $m\leqslant d-1$ terms, the induction hypothesis finishes this case.

If none of the t_r's divides l, the same arguments as in the last steps shows that $u_n\equiv 0$, which is untenable.

We remark that the above proof can clearly be applied, with appropriate adjustments, to certain other trigonometric functions and/or periodic functions.

Acknowledgement. The authors are supported by the Commission on Higher Education, the Thailand Research Fund RTA5180005, and the Centre of Excellence in Mathematics,

CHE, Thailand.

References

[1] J. P. Bell and S. Gerhold, On the positivity set of a linear recurrence sequence, Israel J. Math. 157(2007), 333-345.

[2] V. Halava, T. Harju and M. Hirvensalo, Positivity of second order linear recurrent sequences, Discrete Applied Math., 154(2006), 447-451.

[3] V. Laohakosol and P. Tangsupphathawat, Positivity of third order linear recurrence sequences, Discrete Applied Mathematics, 157(2009), 3239-3248.

[4] I. Niven, Irrational Numbers, The Carus Mathematical Monographs Number 11, The Mathematical Association of America, 1967.

附录 B　利用"CNKI 翻译助手"辅助写作

一、CNKI 翻译助手[56]

1. CNKI 翻译助手及其特点

CNKI 翻译助手(以下简称"CNKI"),是"中国知网"开发制作的大型中英文在线辅助翻译系统,用户不仅可以输入个别词汇进行识别和翻译,还可以输入句子进行翻译检索。系统对翻译请求中的每个词给出较为准确的翻译和解释,同时给出大量在结构上相似、内容上相关的例句。

当我们在阅读英文专业文献或写作英文版论文(尤其是摘要)遇到困难时,不妨试着求助于 CNKI。它对输入请求翻译的每个词语,不仅提供多种对应的译文,而且提供大量的翻译例句,并对该词义的使用频率进行标注,从而让我们有可能进行较为准确地判断和选择,避免或减少误译的可能性,提高翻译的准确性。

2. CNKI 翻译助手用法简介

我们可以通过"中国知网"首页 **http://www.cnki.net** 上的链接进入翻译助手,或者通过网页搜索直接进入 CNKI 网页 **http://dict.cnki.net** 的界面。

在搜索栏中输入我们想要查询的词汇(中文或英文),就可以方便快捷地找出它在各个学科文献中的英译法或汉译法,以及各种翻译被使用的频率,并且提供该词汇的出处,包括例句、文摘、整篇文献。用户可根据自己的需要,对所查询结果的页面进行选择使我们可以对查询的对象获得更为全面的了解,得出更为准确的译文。

如果我们觉得搜索范围太泛,可以在分类学科中进行筛选,缩小范围,使所查找到的内容更贴近于我们的需要。

二、CNKI 辅助写作举例

1. 术语及其用法查找举例

比如要查询"数学素质"的译法,可以打开 CNKI 翻译助手的首页,输入"数学素质"进行搜索。由弹出的页面可看出使用得较多的译文有:mathematics quality,mathematical quality。为了进一步确认哪个译法更适用于此篇摘要,可以具体点击到该词,查看它的双语例句或者

摘要。经查阅，使用最多的是“mathematics quality”；进一步，还可以查询它在具体例句中的适用情况。

在页面右栏我们可以看到“评价 添加词条 短句来源”的链接字眼。点击进去可以链接到相关的页面，更深一步了解该词的使用背景以及读者对该词适用是否合理的评价。从而帮助用户对该词的译文作出较为合适的选择。

同时，我们从例句中不但看到“数学素质”的译法，而且看到如何用它来组成句子的常用句型，其中有些句型可能就是我们翻译摘要时所需要的。

此外，除了对专业术语的翻译外，许多别的词汇的翻译也可以借助 CNKI 来完成，省去了手头查阅书籍字典的麻烦。

借助 CNKI 还可以进一步查看短句的文章出处，阅读整篇文献。通过对所得各个信息的总结，就可以选择出适合我们写作需要的更为准确、合适的词汇。因此可使整个摘要的写作更为规范。

2. 辅助翻译摘要举例

由于英文摘要的写作具有特殊的重要性(见 § 5.3)，而数学教育学中有关数学教法研究又是师范生和中学教师写作的主要课题，所以本小节以这种课题的英文摘要的翻译为例，说明如何使用 CNKI 翻译助手辅助写作。

下面是发表于《数学教育学报》的一篇文章的中文摘要(含关键词)：

关于数学教育核心问题的思索[14]

摘要 本文分析了当前一些“数学教育核心说”所存在的问题，提出了新的数学教育核心——提高受教育者的数学素质。

关键词 数学教育；核心；数学素质

这类关于数学教育论的文章，有许多教育学术语(如“数学教法课”、“学科带头人”等)和其他重要词汇(如“核心说”)，在数学词典中查不到；加上中国语言文化几千年的沉淀和中国近几十年政治语言的影响，文章内容的表达方式与英文相差甚大。要把它们较为准确地翻译成英文，对于许多习作者来说难度很大。但是，正是这类论文的摘要，比较适合于借助 CNKI 翻译助手，因为这方面的资料该软件收集很丰富。

一般说来，翻译这类摘要的办法大体分为四步：译好词汇、选用句型、逐句翻译、整合成文。

(i) **译好词汇**：确定摘要的核心词汇(包括关键词)，并通过查找 CNKI 把它们译出。

例如，在上例中，不难确定出摘要的核心词汇为：数学教育，核心，数学素质，受教育者。只要把这些关键词汇翻译出来，整篇摘要的翻译也就变得简单了。

通过 CNKI 翻译助手我们确定它们的英文翻译分别为：mathematics education，kernel，mathematics quality，educated people。

(ii) **选用句型**：分析组成摘要的主要句型，在本书 § 5.3.2 或在 CNKI 上查找相应的英文句型。

不难看出，在上例中，只有三个句型需要考虑，即：

本文分析了……问题，提出了……核心，提高……。

通过 CNKI，可选用这样的英文句型：The paper analyzes on...，and proposes a new ... kernel，improve...

(iii) **逐句翻译**：根据第一步和第二步查找的结果，把词汇套进选用的句型中，通过适当的补充整理，完成对摘要中各个句子的翻译。

上例中的内容可分别译成如下句子：

(a) 分析当前一些"数学教育核心说"所存在的问题：We analyze the current problem of mathematics education kernel theory。

(b) 提出了新的数学教育核心：We propose a new mathematics education kernel。

(c) 提高受教育者的数学素质：We should improve the mathematics quality of educated people。

(iv) **整合成文**：把第三步译出的句子整合成一篇完整的摘要。

这是关键的一步，文章的作者需要认真设计摘要全文的结构，采用英语的规范表达方式来组织文句。这里，基本的语法分析能力和应用能力是必须具备的。

下面是上例的参考译文。读者也可以探讨更好的译法。

Study on the Kernel Problem of Mathematics Education

Abstract　The paper analyzes the current problem of mathematics education kernel theory, then proposes a new mathematics education kernel—improving the mathematics quality of educated people.

Key words　mathematics education; kernel; mathematics quality

最后，我们就如何用好 CNKI 的问题提出一些看法，供初学者参考。

首先，我们在 § 5.2 和 § 5.3 分别针对如何做好标题和摘要的翻译工作提出的意见，希望能得到读者的重视。根据 CNKI 的特点，我们再强调以下几点。

(1) 写好中文摘要

对于先写出中文稿再译成英文稿的作者，首先写好中文稿是一个重要的前提。当然，要事先完全写好也常是不可能的。不过，如果在翻译的过程中发现中文稿存在的问题，就应该边修改边翻译。

(2) 学会分析和确定核心词汇和主要句型

在利用 CNKI 翻译中文稿之前，要分析和确定核心词汇和主要句型。这件事做好了，才能有效地利用 CNKI 翻译助手。因此，具备这方面的能力很重要。

(3) 学会利用 CNKI 选择合适的译法

在利用 CNKI 翻译时，要求能从众多的译法中选择最合适者。而在选择的过程中，要进行分析、比较和判断。这里需要用户具备一定的英文和中文的水平和能力。

(4) 根本的还是要靠作者的基本功。

综上所述，CNKI 只是辅助而已，能否写作好英文版数学论文，从根本上说，还是要靠作者本身在语言(中文和英文)上的基本功。那些奢望翻译软件能帮助做好一切的想法，都是不切合实际的。

第六章　扩展阅读与备考资料

本章提供前面1—3章的扩展阅读资料和准备专业英语测试的参考资料，旨在扩大读者的阅读视野，提高阅读理解和翻译的能力，并为读者在进行阶段复习，或准备各种考试时提供自我测试的平台。其中第一节提供的阅读资料共六篇：前三篇主要是大学本科数学基础课（微积分、线性代数等）的内容；后三篇是数学专业文献选读，涉及流形、信息学和数学建模的简单介绍。第二节是数学专业英语课程的模拟测试题和硕士研究生入学复试的试题或模拟试题，试题的参考答案放在本书附录中。

§6.1　扩展阅读资料[注1]

§6.1.1　Green's Theorem for Multiply Connected Regions[26]

Green's theorem can be generalized to apply to certain multiply connected regions.

Theorem 11.12. Green's theorem for multiply connected regions. Let $C_1, \cdots, C_n$ be n piecewise smooth Jordan curves having the following properties:

(a) No two of the curves intersect.

(b) The curves $C_2, \cdots, C_n$ all lie in the interior of C_1.

(c) Curve C_i lies in the exterior of curve C_j for each $i \neq j$, $i > 1$, $j > 1$.

Let R denote the region which consists of the union of C_1 with that portion of the interior of C_1 that is not inside any of the curves C_2, C_3, $\cdots$, C_n (An example of such a region is shown in Figure 6.1.1). Let P and Q be continuously differentiable on an open set S containing R. Then we have the following

注1：本节英文阅读材料中出现的节段、定义、定理、例题等的编号都是它们在原著中的序号。——编著者

identity:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{C_1}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)-\sum_{k=2}^{n}\oint_{C_k}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y). \quad (11.24)$$

The theorem can be proved by introducing crosscuts which transform R into a union of a finite number of simply connected regions bounded by Jordan curves. Green's theorem is applied to each part separately, and the results are added together. We shall illustrate how this proof may be carried out when $n=2$. The more general case may be dealt with by using induction on the number n of curves.

The idea of the proof when $n=2$ is illustrated by the example shown in Figure 6.1.2, where C_1 and C_2 are two circles, C_1 being the larger circle. Introduce the crosscuts AB and CD, as shown in the figure.

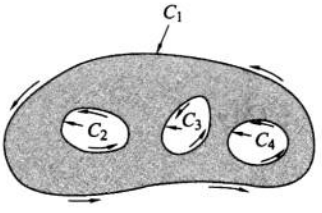


Figure 6.1.1 A multiply connected region

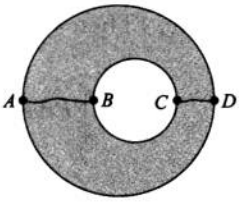


Figure 6.1.2 Proof of Green's theorem for a multiply connected region

Let K_1 denote the Jordan curve consisting of the upper half of C_2, the upper half of C_1, and the segments AB and CD. Let K_2 denote the Jordan curve consisting of the lower half of C_1, the lower half of C_2, and the two segments AB and CD.

Now apply Green's theorem to each of the regions bounded by K_1 and K_2 and add the two identities so obtained. The line integrals along the crosscuts cancel (since each crosscut is traversed once in each direction), resulting in the equation

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{C_1}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)-\oint_{C_2}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y).$$

The minus sign appears because of the direction in which C_2 is traversed. This is Equation (11.24) when $n=2$.

For a simply connected region, the condition $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ implies that the line integral $\int P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ is independent of the path (Theorem 11.11). As we have already noted, if S is not simply connected, the condition $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ does not necessarily imply independence of the path. However, in this case there is a substitute for independence that can be deduced from Theorem 11.12.

Theorem 11.13 Invariance of a line integral under deformation of the path. Let P and Q be continuously differentiable on an open connected set S in the plane, and assume that $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ everywhere on S. Let C_1 and C_2 be two piecewise smooth Jordan curves lying in S and satisfying the following conditions:

(a) C_2 lies in the interior of C_1.

(b) Those points inside C_1 which lie outside C_2 are in S. (Figure 6.1.3 shows an example.) Then we have

$$\int_{C_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{C_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\,, \tag{11.25}$$

where both curves are traversed in the same direction.

Proof. Under the conditions stated, Equation (11.24) is applicable when $n=2$. The region R consists of those points lying between the two curves C_1 and C_2 and the curves themselves. Since $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ in S, the left member of Equation (11.24) is zero and we obtain (11.25).

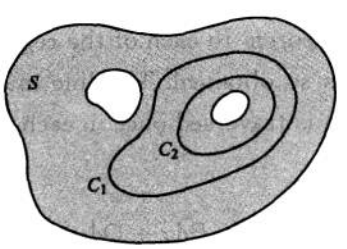


Figure 6.1.3 Invariance of a line integral under deformation of the path

Theorem 11.13 is sometimes described by saying that if $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ in S the value of a line integral along a piecewise smooth simple closed curve in S is unaltered if the path is deformed to any other piecewise smooth simple closed curve in S, provided all intermediate curves remain within the set S during the deformation. The set S is assumed to be open and connected — it need not be simply connected.

§ 6.1.2 Invariant Subspaces[22]

In this section, we shall introduce a few concepts which are useful in attempting to analyze a linear operator. We shall use these ideas to obtain characterizations of diagonalizable (and triangulable) operators in terms of their minimal polynomials.

Definition. Let V be a vector space and T a linear operator on V. If W is a subspace of V, we say that W is **invariant** under T if for each vector $\boldsymbol{\alpha}$ in W the vector $T\boldsymbol{\alpha}$ is in W, i.e. if $T(W)$is contained in W.

EXAMPLE 6. If T is any linear operator on V, then V is invariant under T, as is the zero subspace. The range of T and the null space of T are also invariant under T.

EXAMPLE 7. Let F be a field and let D be the differentiation operator on the space $F[x]$ of polynomials over F. Let n be a positive integer and let W be the subspace of polynomials of degree not greater than n. Then W is invariant under D. This is just another way of saying that D is "degree decreasing".

EXAMPLE 8. Here is a very useful generalization of Example 6. Let T be a linear operator on V. Let U be any linear operator on V which commutes with T,i.e. $TU=UT$. Let W be the range of U and let N be the null space of U. Both W and N are invariant under T. If $\boldsymbol{\alpha}$ is in the range of U, say $\boldsymbol{\alpha}=U\boldsymbol{\beta}$, then $T\boldsymbol{\alpha}=T(U\boldsymbol{\beta})=U(T\boldsymbol{\beta})$so that $T\boldsymbol{\alpha}$ is in the range of U. If $\boldsymbol{\alpha}$ is in N, then $U(T\boldsymbol{\alpha})=T(U\boldsymbol{\alpha})=T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$; hence, $T\boldsymbol{\alpha}$ is in N.

A particular type of operator which commutes with T is an operator $U=g(T)$, where g is a polynomial. For instance, we might have $U=T-cI$, where c is a characteristic value of T. The null space of U is familiar to us. We see that this example includes the (obvious)fact that the space of characteristic vectors of T associated with the characteristic value c is invariant under T.

EXAMPLE 9. Let T be the linear operator on $\mathbf{R}^2$ which is represented in the standard ordered basis by the matrix

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Then the only subspaces of $\mathbf{R}^2$ which are invariant under T are $\mathbf{R}^2$ and the zero subspace. Any other invariant subspace would necessarily have dimension 1. But, if W is the subspace spanned by some non-zero vector $\boldsymbol{\alpha}$, the fact that W is invariant under T means that $\boldsymbol{\alpha}$ is a characteristic vector but A has no real characteristic values.

When the subspace W is invariant under the operator T, then T induces a linear operator T_W on the space W. The linear operator T_W is defined by $T_W(\boldsymbol{\alpha})=T(\boldsymbol{\alpha})$, for $\boldsymbol{\alpha}$ in W, but T_W is quite a different object from T since its domain is W not V.

When V is finite-dimensional, the invariance of W under T has a simple matrix interpretation, and perhaps we should mention it at this point. Suppose we choose all ordered basis $\mathfrak{B}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ for V such that $\mathfrak{B}'=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ is an ordered basis for W ($r=\dim W$). Let $A=[T]_{\mathfrak{B}}$ so that

$$T_{\boldsymbol{\alpha}_j}=\sum_{i=1}^{n}A_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i.$$

Since W is invariant under T, the vector $T_{\boldsymbol{\alpha}_j}$ belongs to W for $j\leqslant r$. This means that

$$T_{\boldsymbol{\alpha}_j}=\sum_{i=1}^{r}A_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i, \qquad j\leqslant r. \tag{6.9}$$

In other words, $A_{ij}=0$ if $j\leqslant r$ and $i>r$.

Schematically, A has the block form

$$A=\begin{bmatrix}B & C\\ O & D\end{bmatrix}, \tag{6.10}$$

where B is an $r\times r$ matrix, C is an $r\times(n-r)$ matrix, and D is an $(n-r)\times(n-r)$ matrix. The reader should note that according to (6.9) the matrix B is precisely the matrix of the induced operator T_W in the ordered basis $\mathfrak{B}'$.

Most often, we shall carry out arguments about T and T_W without making

use of the block form of the matrix $\boldsymbol{A}$ in (6.10). But we should note how certain relations between T_W and T are apparent from that block form.

Lemma. Let W be an invariant subspace for T. The characteristic polynomial for the restriction operator T_W divides the characteristic polynomial for T. The minimal polynomial for T_W divides the minimal polynomial for T.

Proof. We have

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix},$$

where $\boldsymbol{A}=[T]_{\mathfrak{B}}$ and $\boldsymbol{B}=[T_W]_{\mathfrak{B}'}$. Because of the block form of the matrix

$$\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}).$$

That proves the statement about characteristic polynomials. Notice that we used $\boldsymbol{I}$ to represent identity matrices of three different sizes.

The kth power of the matrix $\boldsymbol{A}$ has the block form

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^k & \boldsymbol{C}_k\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}^k\end{bmatrix},$$

where $\boldsymbol{C}_k$ is some $r\times(n-r)$ matrix. Therefore, any polynomial which annihilates $\boldsymbol{A}$ also annihilates $\boldsymbol{B}$ (and $\boldsymbol{D}$ too). So, the minimal polynomial for $\boldsymbol{B}$ divides the minimal polynomial for $\boldsymbol{A}$.

EXAMPLE 10. Let T be any linear operator on a finite-dimensional space V. Let W be the subspace spanned by all of the characteristic vectors of T. Let $c_1,\cdots,c_k$ be the distinct characteristic values of T. For each i, let W_i be the space of characteristic vectors associated with the characteristic value c_i, and let $\mathfrak{B}_i$ be an ordered basis for W_i. The lemma before Theorem 2 tells us that $\mathfrak{B}'=(\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_k)$is an ordered basis for W. In particular,

$$\dim W=\dim W_1+\cdots+\dim W_k.$$

§ 6.1.3 Introduction to *D*-Operator Methods[64]

So far, in solving differential equations, we have regarded the derivative $\frac{dy}{dx}$ as an entity in itself — as the function obtained by differentiating y. There are advantages in concentrating attention on the actual operation of differentia-

tion, regarding $\frac{dy}{dx}$ as the result of an operator, denoted $D=\frac{d}{dx}$, applied to the function y. We write this

$$\frac{dy}{dx}\equiv\frac{d}{dx}y\equiv Dy$$

Problem 10

Write the differential equation $x^2y''+4xy'-3y=1$ in D-operator notation.

By the discussion above,

$$y'=Dy\ ,\ y''=D^2y,$$

so the equation becomes

$$x^2D^2y+4xDy-3y=1 \qquad \text{or} \qquad (x^2D^2+4xD-3)y=1.$$

This is more than just a shorthand. We can in fact regard D (and functions of D) as the primary object in itself, divorced from functions such as y on which it operates. For example the operator D^2+2D+3 may be treated as an algebraic object in isolation, but having a particular effect when it acts on given functions

$$(D^2+2D+3)(x^2)\equiv 2+4x+3x^2,$$
$$(D^2+2D+3)(\cos x)\equiv 2\cos x-2\sin x,$$

and so on.

This motivates the definition

$$f(D)=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0,\ a_n\neq 0,$$

where the a_i are constants, is called a polynomial differential operator of nth order.

It follows from the linearity of the D-operator itself

$$D(au(x)+bv(x))=aDu(x)+bDv(x),$$

the $f(D)$is also a linear operator

$$f(D)(au(x)+bv(x))=af(D)u(x)+bf(D)v(x)$$

for $u(x)$, $v(x)$arbitrary sufficiently differentiable functions of x.

The theory of linear operators is an entire subject in its own right, wheth-

er the operator be matrix, differential, integral, difference, etc. So, having shown that differential operators are linear we could apply all this theory to them. This is not the place for this, however , we will simply concentrate on some practical applications of the D-operator concept to the solution of inhomogeneous differential equations with constant coefficients. The keys to this are the algebraic properties of the D-operator and the meaning of the inverse D-operator, D^{-1}.

The algebraic properties of D actually mirror those of the auxiliary equation. Also, there are a number of useful rules satisfied by D and function of D. For example, polynomials in D may be combined just like ordinary algebraic quantities, always remembering that the final results must be interpreted by acting on sufficiently differentiable functions.

Thus

$$(D+2)(D-1)\equiv D^2+D-2$$

operating on x^3 gives

$$\begin{aligned}(D+2)(D-1)(x^3)&\equiv(D+2)[(D-1)(x^3)]\\&\equiv(D+2)[3x^2-x^3]\\&\equiv 6x+3x^2-2x^3,\end{aligned}$$

and similarly

$$(D^2+D-2)(x^3)\equiv 6x+3x^2-2x^3.$$

Note that such simple rules in which D behaves like an ordinary commutative algebraic quantity break down when there are $x-$dependent coefficients. For example, evaluating $(xD)D$ and $D(xD)$on an arbitrary function gives

$$[(xD)D]y\equiv xy''$$

and

$$[D(xD)]y\equiv xy''+y'\neq[(xD)D]y.$$

Just as we can expand products such as $(D+2)(D-1)$, we can similarly factorize polynomials in D in the obvious way. This can be used to solve differential equations and is best illustrated by an example

$$y''+5y'+6y=0.$$

Written in D-operator form we have

$$0=(D^2+5D+6)y \equiv (D+2)(D+3)y=0.$$

Putting $z\equiv(D+3)y$(it wouldn't matter if we put $z\equiv(D+2)y$ instead)gives $(D+2)z=0$, or $z'+2z=0$, with solution $z=Ae^{-2x}$. So

$$(D+3)y\equiv y'+3y = Ae^{-2x}$$

with solution $y=Be^{-3x}-Ae^{-2x}$, with A, B arbitrary constants.

But all of this is a little pedantic — the polynomial D-operator D^2+5D+6 is only the auxiliary equation in disguise. The real power of D-operator methods lies in finding particular integrals of inhomogeneous equations. Useful in this context is the powerful.

§ 6.1.4 Smooth Manifolds in $\mathbf{R}^n$ [65]

When is a subset $X\subset\mathbf{R}^n$ a smooth manifold? Our definition is based on the notion of graph.

Definition 3.1.1(Graph) The graph $\Gamma(f)$of a function $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ is the set of pairs $(x, y)\in(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m)$such that $f(x)=y$.

You are familiar with graphs of functions $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; most often we graph such functions with the horizontal x-axis corresponding to the input, and the vertical axis corresponding to values of f at different x. Note that the graph of such a function is a subset of $\mathbf{R}^2$. For example, the graph of $f(x)=x^2$ consists of the points $\begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2$, i.e., the points $\begin{pmatrix} x \\ x^2\end{pmatrix}$.

The top two surfaces shown in Figure 6.1.4 are graphs of functions from $\mathbf{R}^2$ to $\mathbf{R}$: the surface on the left is the graph of $f\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=x^3-2xy^2$; that on the right is the graph of $f\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=x^2+y^4$. Although we depict these graphs on a flat piece of paper, they are actually subsets of $\mathbf{R}^3$. The first consists of the points $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x^3-2xy^2\end{pmatrix}$, the second of the points $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^4\end{pmatrix}$.

More generally, the graph of a function f lives in a space whose dimension is the sum of the dimension of the domain of f and the dimension of its range:

the graph of a function $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ is a subset of $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{n+m}$.

Definition 3. 1. 2 says that if such a function $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ is C^1, then its graph is a smooth n-dimensional manifold in $\mathbf{R}^{n+m}$. Thus the top two graphs shown in Figure 6. 1. 4 are two-dimensional manifolds in $\mathbf{R}^3$.

But the torus and helicoid shown in Figure 6. 1. 4 are also two-dimensional manifolds. Neither one is the graph of a single function expressing one variable in terms of the other two. But both are locally graphs of functions.

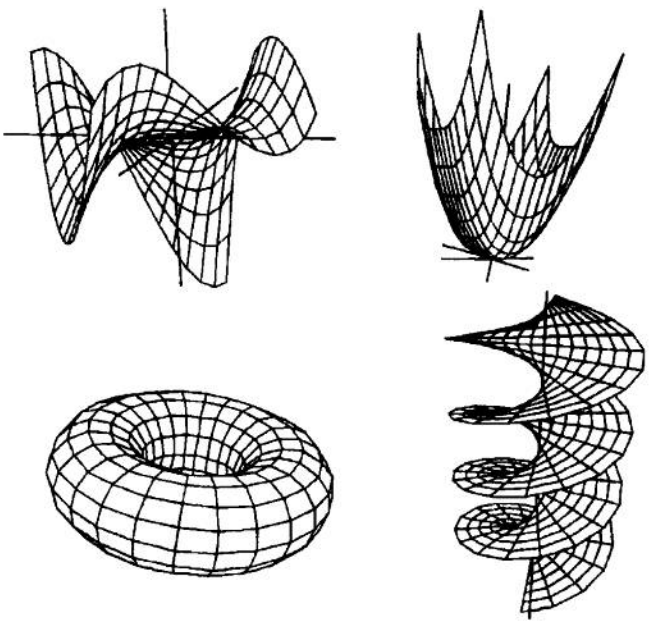


Figure 6. 1. 4 Four surfaces in $\mathbf{R}^3$. The top two are graphs of functions. The bottom two are locally graphs of functions. All four qualify as smooth surfaces (two-dimentional manifolds) under Definition 3. 1. 2.

Remark: A k-dimensional manifold M embedded in $\mathbf{R}^n$, denoted by $M \subset \mathbf{R}^n$, is sometimes called a submanifold of $\mathbf{R}^n$. Strictly speaking, it should not be referred to simply as a "manifold", which can mean an abstract manifold, not embedded in any space. The manifolds in this book are all submanifolds of $\mathbf{R}^n$.

Definition 3. 1. 2 (Smooth manifold in $\mathbf{R}^n$) A subset $M \subset \mathbf{R}^n$ is a smooth k-dimensional manifold if locally it is the graph of a C^1 mapping expressing $n-k$ variables as functions of the other k variables.

Generally, "smooth" means "as many times differentialble as is relevant to the problem at hand". In this and the next section, it means "of class C^1".

"Locally" means that every point $x \in M$ has a neighborhood $U \subset \mathbf{R}^n$ such that $M \cap U$ (the part of M in U) is the graph of a mapping expressing $n-k$ of the coordinates of each point in terms of the other k.

Example 3.1.3 (Graph of smooth function is smooth manifold) The graph of any smooth function is a smooth manifold. The curve of equation $y=x^2$ is a one-dimentional manifold; it is the graph of y as the function $f(x)=x^2$. The curve of equation $x=y^2$ is also one-dimentional manifold, the graph of a function representing x as a function of y. Each surface at the top of Figure 6.1.5 is the graph of a funcion representing z as a function of x and y.

Example 3.1.4 (Graphs that are not smooth manifolds) The graph of the function $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=|x|$, shown in Figure 6.1.5 is not a smooth curve; it is the graph of the function f expressing y as a function of x, of course, but f is not differentiable. Nor is it the graph of a function g expressing x as a function of y, since in a neighborhood of 0 the same value of y gives sometimes two values of x, sometimes none.

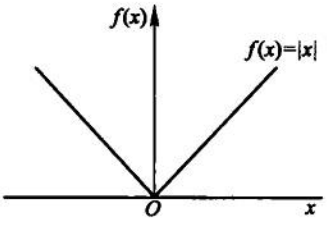


Figure 6.1.5

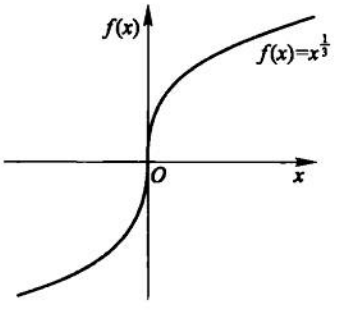


Figure 6.1.6

The set $X \subset \mathbf{R}^2$ of equation $xy=0$ (i.e. the union of the two axes) is also not a smooth curve; in any neighborhood of $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, there are infinitely many y's corresponding to $x=0$, and infinitely many x's corresponding to $y=0$, so it isn't a graph of a function either way.

In contrast, the graph of the function $f(x)=x^{1/3}$, shown in Figure 6.1.6, is a smooth curve; f is not differentiable at the origin, but the curve is

the graph of the function $x=g(y)=y^3$, which is differentiable.

§ 6.1.5 What Is Information?[66]

In this section we are going to try to quantify the notion of information. Before we do this, we should be aware that "information" has a special meaning in probability theory, which is not the same as its use in ordinary language. For example, consider the following two statements:

(i) I will eat some food tomorrow.

(ii) The prime minister and the leader of the opposition will dance in the street tomorrow.

If I ask which of these two statements conveys the most information, you will (I hope!)say that it is (ii). Your argument might be that (i)is practically a statement of the obvious (unless I am prone to fasting), whereas (ii)is extremely unlikely.

To summaries:

(i) Has very high probability and so conveys little information.

(ii) Has very low probability and so conveys much information.

Clearly, then, quantity of information is closely related to the element of surprise.

Consider now the following "statement":

(iii) XQWQ YK VZXPU VVBGXWQ

Our immediate reaction to (iii)is that it is meaningless and hence conveys no information. However, from the point of view of English language structure we should be aware that (iii)has low probability (e. g. Q is a rarely occurring letter and is generally followed by U, (iii)contains no vowels)and so has a high surprise element.

The above discussion should indicate that the word "information", as it occurs in everyday life, consists of two aspects, "surprise" and "meaning". Of the above three examples, (i)has meaning but no surprise, (iii)has surprise but no meaning and only (ii)has both.

The mathematical theory of information which we are going to develop in this chapter is solely concerned with the "surprise" aspect of information. There are two reasons for this. Firstly, information theory was originally developed within the context of communication engineering, where it was only

the surprise factor that was of relevance. Secondly, "meaning" has so far proved too difficult a concept to develop mathematically. The consequence of this is that we should be aware that "information" in this chapter has the restricted technical meaning of "measure of surprise". Hence, statements such as (iii)above may well have a high information content, even though we consider them meaningless.

Let $(S, \mathrm{B}(S), P)$ be a probability space. In this chapter we will take $\#(S)=n$ and $\mathrm{B}(S)=P(S)$. We would like to be able to measure the information content $I(E)$ of an event $E\in \mathrm{B}(S)$. From the above discussion, it seems clear that I should be a decreasing function of $P(E)$, the probability of E; that is, if $E,F\in \mathrm{B}(S)$ with $P(E)\leqslant P(F)$, then $I(E)\geqslant I(F)$. To gain further insight into the form of I, suppose that we draw a card at random from a pack of 52 and consider the following events:

(i) The card is a heart (E_1),

(ii) The card is a seven (E_2),

(iii) The card is the seven of hearts ($E_1\cap E_2$).

We have by the principle of symmetry,

$$P(E_1)=\frac{1}{4},\ P(E_2)=\frac{1}{13},\ P(E_1\cap E_2)=\frac{1}{52}.$$

Note that E_1 and E_2 are independent events. From our above discussion, we have:

(a) $I(E_1\cap E_2)\geqslant I(E_2)\geqslant I(E_1)$.

Our intuition tells that the amount of information $I(E_1\cap E_2)$ that we get from learning (iii)is the sum of the information content of E_1 and E_2; that is, if E_1 and E_2 are independent, we have:

(b) $I(E_1\cap E_2)=I(E_1)+I(E_2)$.

Together with (a)and (b)we will impose the commonsense condition that there is no such thing as negative information, that is:

(c) $I(E)\geqslant 0$ for all $E\in \mathrm{B}(S)$.

We now look for a candidate for a function which satisfies (a), (b)and (c). In fact, it can be shown that the only possibilities are of the form

$$I(E)=-K\log_a(P(E)), \tag{6.1}$$

where a and K are positive constants. You should check using the laws of log-

arithms that (a), (b)and (c)above are all satisfied by (6.1), with the sole exception of events E for which $P(E)=0$, in which case $I(E)=\infty$. Although (c)is violated in this case, we regard this as desirable — it indicates the nonfeasibility of ever obtaining information about an impossible event. Equation (6.1)also has the desirable property that if the event E is certain, it contains no information as $\log_a(1)=0$.

Note that since $\log_a(y)=\dfrac{\log_b(y)}{\log_b(a)}$, the choice of a is effectively a choice of the constant K and hence will only alter the units which $I(E)$is measured in. Throughout this book we will make the standard choice $K=1$ and $a=2$. Hence, we define the information content of the event E by

$$I(E)=-\log_2(P(E)). \tag{6.2}$$

$K=1$ is chosen for convenience. The choice of $a=2$ is motivated by the following simple situation. Suppose that we have a symmetric Bernoulli random variable X taking values 0 and 1; then with the above convention we have

$$I(X=0)=I(X=1)=-\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

The units of information content are *bits*. So we gain one *bit* of information when we choose between two equally likely alternatives.

As we will be using logarithms to base 2 extensively from now on, we will just write $\log_2(x)=\log(x)$. When directly calculating information content you should use the change of basis formula quoted above in the form $\log_2(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Example 6.1 A card is drawn at random from a pack of 52. What is the information content of the following events:

(i) The card is a heart,

(ii) The card is a seven,

(iii) The card is the seven of hearts.

Solution Using the probabilities calculated above, we have

(i) $I(E_1)=-\log\left(\dfrac{1}{4}\right)=2.00$ bits, as $4=2^2$.

(ii) $I(E_2)=-\log\left(\dfrac{1}{13}\right)=\dfrac{\ln(13)}{\ln(2)}=3.70$ bits (to three significant figures).

(iii) Since E_1 and E_2 are independent, we have

$$I(E_1 \cap E_2)=I(E_1)+I(E_2)=2+3.70=5.70(\text{bits}).$$

We observe that the information content of an event depends only upon its probability. In the following, we will often be concerned with the events $(X=x_1),(X=x_2),\cdots,(X=x_n)$ arising from a discrete random variable X with range $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ and law $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$. In this case we will write

$$I(p_j)=I(X=x_j) \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

§ 6.1.6 Mathematical Model[68]

A **mathematical model** is a description of a system using mathematical concepts and language. The process of developing a mathematical model is termed **mathematical modelling.** Mathematical models are used not only in the natural sciences (such as physics, biology, earth science, meteorology) and engineering disciplines (e. g. computer science, artificial intelligence), but also in the social sciences (such as economics, psychology, sociology and political science); physicists, engineers, statisticians, operations research analysts and economists use mathematical models most extensively.

Mathematical models can take many forms, including but not limited to dynamical systems, statistical models, differential equations, or game theoretic models. These and other types of models can overlap, with a given model involving a variety of abstract structures. In general, mathematical models may include logical models, as far as logic is taken as a part of mathematics. In many cases, the quality of a scientific field depends on how well the mathematical models developed on the theoretical side agree with results of repeatable experiments. Lack of agreement between theoretical mathematical models and experimental measurements often leads to important advances as better theories are developed.

Examples of mathematical models

• Population Growth. A simple (though approximate) model of population growth is the Malthusian growth model. A slightly more realistic and largely used population growth model is the logistic function, and its extensions.

• Model of a particle in a potential-field. In this model we consider a particle as being a point of mass which describes a trajectory in space which is mod-

eled by a function giving its coordinates in space as a function of time. The potential field is given by a function V: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ and the trajectory is a solution of the differential equation

$$m \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) = -\nabla V x(t).$$

Note this model assumes the particle is a point mass, which is certainly known to be false in many cases in which we use this model; for example, as a model of planetary motion.

Modelling requires selecting and identifying relevant aspects of a situation in the real world.

Classifying mathematical models

Many mathematical models can be classified in some of the following ways:

1. Linear vs. nonlinear: Mathematical models are usually composed by variables, which are abstractions of quantities of interest in the described systems, and operators that act on these variables, which can be algebraic operators, functions, differential operators, etc. If all the operators in a mathematical model exhibit linearity, the resulting mathematical model is defined as linear. A model is considered to be nonlinear otherwise.

The question of linearity and nonlinearity is dependent on context, and linear models may have nonlinear expressions in them. For example, in a statistical linear model, it is assumed that a relationship is linear in the parameters, but it may be nonlinear in the predictor variables. Similarly, a differential equation is said to be linear if it can be written with linear differential operators, but it can still have nonlinear expressions in it. In a mathematical programming model, if the objective functions and constraints are represented entirely by linear equations, then the model is regarded as a linear model. If one or more of the objective functions or constraints are represented with a nonlinear equation, then the model is known as a nonlinear model.

Nonlinearity, even in fairly simple systems, is often associated with phenomena such as chaos and irreversibility. Although there are exceptions, nonlinear systems and models tend to be more difficult to study than linear ones. A common approach to nonlinear problems is linearization, but this can be

problematic if one is trying to study aspects such as irreversibility, which are strongly tied to nonlinearity.

2. Deterministic vs. probabilistic (stochastic): A deterministic model is one in which every set of variable states is uniquely determined by parameters in the model and by sets of previous states of these variables. Therefore, deterministic models perform the same way for a given set of initial conditions. Conversely, in a stochastic model, randomness is present, and variable states are not described by unique values, but rather by probability distributions.

3. Static vs. dynamic: A static model does not account for the element of time, while a dynamic model does. Dynamic models typically are represented with difference equations or differential equations.

4. Discrete vs. Continuous: A discrete model does not take into account the function of time and usually uses time-advance methods, while a continuous model does. Continuous models typically are represented with $f(t)$and the changes are reflected over continuous time intervals.

§6.2 本科学期考试与研究生入学复试参考资料

§6.2.1 本科生数学专业英语考核模拟试卷

参照目前本科"数学专业英语"作学选修课的教学课时与考核概况,这里提供两份模拟考试(查)的试卷,仅供参考。

一、"数学专业英语"模拟试卷 1

编者评介:这份试卷适用于以数学专业英语的阅读和翻译为主要教学内容的本科学生,教学课时为 60～70 课时,考试时间为 120 分钟。

(一) 把下列数学名词和术语翻译成汉语(每小题 1 分,共 11 分)

1. higher algebra;
2. division with remainder;
3. cylindrical equation;
4. probability event;
5. equilateral triangle;
6. coordinate transformation;
7. function of several variables;
8. propositional calculus;
9. expansion into power-series;
10. convergence in measure;
11. isosceles triangle.

(二) 把下列短句翻译成汉语(每小题 3 分,共 24 分)

1. The ratio of one quantity to another like quantity is the quotient of the first divided by the second.

2. A differential Equation is an equation that involves one or more derivatives of an unknown function.

3. The underlying set S may vary from one application to another; it will be referred to as the universal set of each particular discourse.

4. Vectors $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_n$ are said to be linearly dependent if there exist a set of scalars α_1, α_2, $\cdots$, α_n which are not all zero such that $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{0}$.

5. A sequence $\{a_n\}$ is called a Cauchy sequence if and only if for each $\varepsilon>0$ there exists $n^*\in\mathbf{N}$ such that $|a_m-a_n|<\varepsilon$ for all m and $n\geqslant n^*$.

6. A complex function f on a measurable space X whose range consists of only finitely many points will be called a simple function.

7. We plot the domain X on the x-axis, and above each point x in X we plot the point (x, y), where $y=f(x)$.

8. With existential quantification, we form a proposition that is true if and only if $P(x)$is true for at least one value of x in the universe of discourse.

(三) 把下列长句翻译成汉语(每小题 5 分,共 25 分)

1. Frequently we describe a subset of S by means of a prepositional function, thus $\{x\in S|P(x)\}$ denotes the subset of S consisting of those (and only those)elements x for which $P(x)$holds. e. g. , if the set of all natural numbers is denoted by $\mathbf{N}$, then the subset of odd numbers may be denoted by $\{x\in\mathbf{N}|x$ is odd$\}$.

2. Descartes, the inventor of analytic geometry and one of the founders of modern algebraic notation, believed that all problems could ultimately be reduced to the solution of a set of simultaneous linear equations.

3. This problem is a special case of the more general problem of counting the number of distinct subsets of k elements that may be formed from a set of n elements (when we say that a set has n elements, we mean that it has n distinct elements. Such a set is sometimes called an n-element set), where $n>k$.

4. However, in order to gain a better understanding of probability, we need to consider three terms which are in everyday use, but which have special meanings when we discuss probability, namely trial, experiment and event.

5. Note that since the range of an exponential function(with positive base) is the set of positive reals and the domain is the set of all reals, the domain of the corresponding logarithm function is the set of positive reals and the range is the set of all reals.

(四) 把下列短文翻译成汉语(每小题 10 分,共 40 分)

1. It is important for the student to understand that a ratio is a quotient of like quantities. The ratio of a line segment to an angle has no meaning; they are not quantities of the same kinds. We find the ratio of one line segment to a second line segment or the ratio of one angle to a second angle. This we do by measuring them and then finding the quotient of their measurements. The measurements must be expressed in the same units.

2. In most cases, the sets under consideration in any given case will all be subsets of some given set U, the "universe of discourse". Thus U might be the set of natural numbers, or of triangles in the plane etc. In this situation we can, for any set S, form its complement, i.e. , the set of all members of U that are not in S; it is denoted by S'. Thus, if S is the set of all odd numbers, then its complement (in the set of all natural numbers) is the set of all even numbers. This example makes it clear why the complement, to be useful, has to be taken within a given set as universe.

3. Suppose now that f has a derivative at x. This means that the difference quotient approaches a certain limit $f'(x)$ as h approaches 0. When this is interpreted geometrically it tells us that, as h gets nearer to 0, the point P remains fixed, Q moves along the curve toward P, and the line through PQ changes its direction in such a way that its slope approaches the number $f'(x)$ as a limit. For this reason it seems natural to define the slope of the curve at P to be the number $f'(x)$. The line through P having this slope is called the tangent line at P.

4. In elementary geometry you studied the concept of congruence as it pertains to geometric figures. You also discovered that there are certain conditions that determine the congruence of triangles. For example, the SAS condition states that if two sides and the included angle of a triangle are equal in measure, respectively, to two sides and the included angle of another triangle, the triangles are congruent. In other words, knowing the lengths of two sides and the measure of the angle included by those two sides determines the shape and

size of the triangle.

二、"数学专业英语"模拟试卷 2

编者评介:这份试卷适用于教学课时为 70 课时左右的本科学生,既考查英译汉基本能力,也考查汉译英的基本能力。考试时间为 120 分钟。

(一) 把下列数学名词和术语翻译成汉语(每小题 1 分,共 10 分)

1. equilateral triangle;
2. tangent line;
3. independent variable;
4. monotonic sequence;
5. continuous function;
6. square matrix;
7. system of equations;
8. indefinite integral;
9. linear combination;
10. the sum of the two vectors.

(二) 把下列数学术语翻译成英语(每小题 1.5 分,共 15 分)

1. 非负整数;
2. 有限区间
3. 关于 x 的多项式;
4. 三阶行列式;
5. 函数的定义域;
6. 一个大于零的常数;
7. 加、减、乘、除;
8. 圆的半径和圆心;
9. 收敛于 A 的数列;
10. 垂直于平面 P 的直线。

(三) 把下列短句翻译成汉语(每小题 5 分,共 20 分)

1. To solve an equation means to find the value of the unknown term. To do this, we must, of course, change the terms about until the unknown term stands alone on one side of the equation, thus making it equal to something on the other side.

2. Let S be an independent set consisting of k elements in a linear space V and let $L(S)$ be the subspace spanned by S. Then every set of $k+1$ elements in $L(S)$ is dependent.

3. Differential equations are classified under two main headings: ordinary and partial, depending on whether the unknown is a function of just one variable or of two or more variables.

4. A sequence $\{f(n)\}$ is called bounded if there exists a positive number M such that $|f(n)| \leqslant M$ for all n. A sequence that is not bounded is called unbounded.

(四) 把下列短句翻译成英语(每题 7 分,共 28 分)

1. 在直线运动中,速度的一阶导数称为加速度。

2. A 是由小于 100 且能被 3 整除的正整数组成的集。

3. 该等式的两边同时关于 t 积分，我们就得到方程(1)的所有的解。

4. 本文考虑二阶常微分方程，在较一般的条件下证明了存在唯一性定理。

(五) 把下列短文翻译成汉语(第 1 小题 12 分，第 2 小题 15 分，共 27 分)

1. If a relation is reflexive, symmetric, and transitive, we call it an equivalence relation. Frequently, the symbol $\equiv$ is used for an equivalence relation because an equivalence relation acts much like equality. (By the way, the relation "equal" is an equivalence relation on the real numbers.)

Another example of an equivalence relation on the integers is $a \equiv_2 b$ if $a-b$ is even. Note that $\equiv_2$ partitions the integers into two disjoint sets (called equivalence class), the even integers and the odd integers.

To describe it another way, the two classes are those integers that are equivalent to 0 and those that are equivalent to 1.

2. Theorem 1. Let V be a finite-dimensional linear space with $\dim V=n$. Then we have the following.

(a) Any set of independent elements in V is a subset of some basis for V.

(b) Any set of n independent elements is a basis for V.

Proof. The proof of (a)is identical to that of part (b)of Theorem 8. 10. The proof of (b)is identical to that of part (c)of Theorem 8. l0.

Let V be a linear space of dimension n and consider a basis whose elements $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ are taken in a given order. We denote such an ordered basis as an n-tuple $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$. If $\boldsymbol{x} \in V$, we can express $\boldsymbol{x}$ as a linear combination of these basis elements:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{e}_i. \tag{10.4}$$

The coefficients in this equation determine an n-tuple of numbers $(c_1, \cdots, c_n)$ that is uniquely determined by $\boldsymbol{x}$. In fact, if we have another representation of $\boldsymbol{x}$ as a linear combination of $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, say $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} d_i \boldsymbol{e}_i$, then by subtraction from (10.4), we find that $\sum_{i=1}^{n} (c_i - d_i)\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}$. But since the basis elements are independent, this implies $c_i = d_i$ for each i, so we have $(c_1, \cdots, c_n) = (d_1, \cdots, d_n)$.

The components of the ordered n-tuple $(c_1, \cdots, c_n)$determined by equation

(10.4)are called the components of x relative to the ordered basis $(e_1,\cdots,e_n)$.

§6.2.2 研究生入学复试数学专业英语的真题与模拟试题

目前全国大部分高等院校招收数学专业(包括基础数学、应用数学、信息与计算科学、运筹学等方向)硕士研究生时,都对参加复试的考生进行数学专业英语的考试。不过,考试的内容、深浅程度、时间长短都不尽相同。根据初步调查,主要有三种模式:

一、较仔细地考查考生阅读和翻译英文数学文献的能力,考试的时间为120分钟;

二、综合考查考生读、译和写英文数学文献的基本能力,考试的时间约60~80分钟;

三、只考查考生关于数学英语的最基本的知识和能力,考试的时间约40分钟。

根据上述情形,我们在此给出了一份属于第一种模式的考研真题(系国内一所一流重点大学2011年的试题),另外还设计了一份对应于第二模式的模拟试题供读者参考。至于第三种模式,只要酌情删减即可。应该说明的是,这里给出的模拟试题难度和覆盖面都不大,但今后的研究生复试试题的要求,应该会随着形势的发展而逐步提高。

一、硕士研究生入学复试试卷(真题)

考试用时:120分钟

编者评介:这份试卷属于模式一,只要求研究生翻译一篇(段)1 000~2 000个字符的文献。许多高校,包括重点大学,希望他们录取的研究生一进校就能阅读专业文献,所以采用这种模式来考查考生。下面是考卷内容:

Please translate the following paragrah.

Applied mathematics is a branch of mathematics that concerns itself with mathematical methods that are typically used in science, engineering, business, and industry. Thus, "applied mathematics" is a mathematical science with specialized knowledge. The term "applied mathematics" also describes the professional specialty in which mathematicians work on practical problems; as a profession focused on practical problems, applied mathematics focuses on the formulation and study of mathematical models. In the past, practical applications have motivated the development of mathematical theories, which then be-

came the subject of study in pure mathematics, where mathematics is developed primarily for its own sake. Thus, the activity of applied mathematics is vitally connected with research in pure mathematics.

Historically, applied mathematics consisted principally of applied analysis, most notably differential equations; approximation theory (broadly construed, to include representations, asymptotic methods, variational methods, and numerical analysis); and applied probability. These areas of mathematics were intimately tied to the development of Newtonian physics, and in fact the distinction between mathematicians and physicists was not sharply drawn before the mid-19th century. This history left a legacy as well: until the early 20th century subjects such as classical mechanics were often taught in applied mathematics departments at American universities rather than in physics departments, and fluid mechanics may still be taught in applied mathematics departments. As well as physics, engineering and computer science have traditionally made use of applied mathematics.

Fluid mechanics is often considered a branch of applied mathematics. Today, the term applied mathematics is used in a broader sense. It includes the classical areas above, as well as other areas that have become increasingly important in applications. Even fields such as number theory that are part of pure mathematics are now important in applications (such as cryptography), though they are not generally considered to be part of the field of applied mathematics per se. Sometimes the term applicable mathematics is used to distinguish between the traditional applied mathematics that developed alongside physics and the many areas of mathematics that are applicable to real-world problems today.

The success of modern numerical mathematical methods and software has led to the emergence of computational mathematics, computational science, and computational engineering, which use high performance computing for the simulation of phenomena and the solution of problems in the sciences and engineering. These are often considered interdisciplinary disciplines.

Historically, mathematics was most important in the natural sciences and engineering. However, since World War II, fields outside of the physical sciences have spawned the creation of new areas of mathematics, such as game theory and social choice theory, which grew out of economic considerations, or

neural networks, which arose out of the study of the brain in neuroscience.

The advent of the computer has created new applications: studying and using the new computer technology itself (computer science), using computers to study problems arising in other areas of science (computational science), and studying the mathematics of computation (for example, theoretical computer science, computer algebra, numerical analysis). Statistics is probably the most widespread mathematical science used in the social sciences, but other areas of mathematics are proving increasingly useful in these disciplines, most notably in economics.

Many mathematicians distinguish between applied mathematics, which is concerned with mathematical methods, and the applications of mathematics within science and engineering. A biologist using a population model and applying known mathematics would not be doing applied mathematics, but rather using it; however mathematical biologists have posed problems that have stimulated the growth of pure mathematics. However, mathematicians like Poincaré and Arnold deny the existence of "applied mathematics" and claim that there are only "applications of mathematics"; similarly, nonmathematicians blend applied mathematics and applications of mathematics. The use and development of mathematics to solve industrial problems is also called industrial mathematics.

二、硕士研究生入学复试模拟试卷

考试用时:80 分钟　总分:100 分

(一) Translate the following mathematical terminologies into Chinese (10 分)

1. linear independence;
2. mathematical model;
3. parameter equation;
4. definite integral;
5. differential equation of second order.

(二) 把下列数学术语译成英文(10 分)

1. 直角三角形;
2. 乘法结合律;
3. 数学归纳法;
4. 一致连续的;
5. 这个矩阵的第二行。

(三) 把下面论文摘要译成英文(20 分)

本文首先利用微分中值定理建立了一个不等式,然后用它来求出一类函数在区间上的最大值和最小值。我们的结果推广了一些已知的相关结论。

(四) Translate the following paragraph into Chinese (60 分)

1. (12 分)Linear equations and linear inequalities play an important role in many fields of study. It is often possible to express a variety of relationships by writing one or more equations or inequalities.

2. (14 分)THEOREM 10.6. Let V be a finite-dimensional linear space. Then every finite basis for V has the same number of elements.

Proof. Let S and T be two finite bases for V. Suppose S consists of k elements and T consists of m elements. Since S is independent and spans V, Theorem 10.5 tells us that every set of $k+1$ elements in V is dependent. Therefore, every set of more than k elements in V is dependent. Since T is an independent set, we must have $m \leqslant k$. Similarly, we have $k \leqslant m$. It follows that $k=m$ and the proof is complete.

3. (16 分)The Rule of Sum: If the first task can be performed in m ways and the second task can be performed in n ways, and the two tasks cannot be performed simultaneously, then performing either task can be done in $m+n$ ways. For example, suppose there are 5 red books and 6 blue books. Suppose the first task is to pick one red book, which can be done in 5 ways. Suppose the second task is to pick one blue book, which can be done in 6 ways. Therefore, there are $5+6=11$ ways of picking a red or blue book.

4. (18 分)Let S and T be sets; any subset of $S \times T$ is called a correspondence from S to T. E.g., let S be the set of all points in the plane and T the set of lines; the relation of incidence(the point P is incident with the line l if P lies on l)defines a correspondence from points to lines. To each point P correspond all the lines through P and to each line l correspond all the points on l. This is an example of a "many-many correspondence", where to each element of S correspond many elements of T and vice versa. In general, to each element of S there may correspond many, one or no elements of T.

An important special case of a correspondence is that of a bijective or one-one correspondence, also called a bijection. Here there corresponds to each $s \in S$ just one $t \in T$ and to each $t \in T$ just one $s \in S$. (提示:incidence 意思是"关联"。)

附录[注1] 部分练习参考答案

（含§6.2试卷和模拟试卷的参考答案）

第 一 章

§1.1

2. (1) $3x-4y+5z$ 读作 three times x minus four times y plus five times z；$(2a+3b)(4c-3d)$读作 two times a plus three times b into four times c minus three times d。

(2) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$读作 the square of the sum of x and y equals x squared plus 2 times x times y plus y squared；$2a\geqslant 3b+c$ 读作 two times a is greater than or equal to three times b plus c；$4x<2$ 读作 four times x is less than two；$3x$ 读作 three times x。

(3) x^5 读作 x to the fifth power；$2x^3y^2$读作 two times x to the third power times y to the second power；$\sqrt{5}$ 读作 the square root of five；$\sqrt{3x^2}$ 读作 the square root of three times x squared。

(4) $\frac{1}{2}$ 读作 one half；$\frac{3}{4}$读作 three fourths；$\frac{34}{123}$读作 thirty four over one hundred and twenty-three；$\frac{2a+3b}{3b-5c}$读作 two times a plus three times b over three times b minus five times c。

(5) 0.234 读作 point two three four；0.000 2 读作 point-three 0's-two；12.34 读作 twelve-point-three-four；103.01 读作 one hundred and three-point-zero-one。

3. (1) A right-angled triangle has one right angle and two acute angles.

(2) The volume of a frustum of cone is equal to the difference between that of the two circular cones.

(3) Straight lines sometimes can be treated as special curves.

(4) Parallelograms and circles are important plane figures.

4. (1) 加法、减法、乘法、除法都是基本的运算法则。

(2) 如果方程的两边同时乘以 3，则得到 $x=1$。

(3) 不等式 $x\geqslant y$ 读作 x 大于等于 y。

(4) 矩形是特殊的平行四边形而正方形是特殊的长方形。

注 1：为了节省篇幅，在附录中不出现图形；需要对照图形者，请参考原文。

§1.2

2. (1) Integers include positive integers, negative integers and zero. A natural number is a positive integer which doesn't include zero.

(2) A number is rational if and only if it can be expressed as a quotient of two integers (where the divisor is not zero).

(3) When an irrational number is expressed as a decimal, it is neither a finite decimal number nor an infinite recurring decimal.

(4) All of the students in primary school are required to grasp the least common multiple and highest common factor of two positive integers.

(5) For an expression with many layers of brackets (parentheses, square brackets and braces), we should handle the operations within the most inner brackets first.

(6) We often face the problem on dealing with percentage in our daily life. Also we compute the discount with the percentages when the selling price of the goods is lower than marked price.

3. (1) 求出 56 和 42 的最大公因数和最小公倍数,然后分别把他们表示为 a 和 b。试问在 a,b 与 56 和 42 的积之间有什么关系?

(2) 考虑 45 和 75 公共的素因子,我们得 45 和 75 的最大公因数是 15,因为 15 是它们的公共素因子 3 和 5 的积。

(3) 减法是加法的逆运算,除法也是乘法的逆运算,但是减法和除法不满足交换律、结合律和分配率。

(4) 两个有理数的和、差、积、商仍是有理数(当考虑商时,除数不能是 0)。但一个自然数的平方根可以是一个无理数。

§1.3

2. (1) Point out the coefficient and degree of the monomial $-213x^2y^3$.

(2) A sum of one or more monomials is called a polynomial, and a monomial is regarded as a special polynomial.

(3) When finding the sum or difference of two polynomials, we combine the like terms.

(4) Solving a first-degree equation in an unknown is to find the root of the equation, that is, the value of the unknown making the equation true.

(5) The methods of elimination and substitution are usually used to solve the systems of first-degree equations with two unknowns. By using matrixes, we can solve the systems of the linear equations in several unknowns.

(6) The methods for solving a first-degree inequality with an unknown are similar to that

for solving a first-degree equation with an unknown. But it is noticeable that the inequality sign must be reserved if we divide or multiple both sides of the inequality by a negative number.

(7) In the coordinate plane, the point of intersection of two straight lines is the solution of the corresponding system of a first-degree equation in two unknowns.

(8) Whether a quadratic equation in one unknown has real roots or not is determined by the sign of the discriminant.

3. (1) 等式有两类，即恒等式和条件方程。算术恒等式和代数恒等式都是等式。含字母的恒等式对其字母的任何一组数值都成立。

(2) 一个等式若仅仅对其中一个字母的某些值成立，或者对其中两个或多个字母的若干组相关的值成立，则它是一个条件等式。例如，只有当 $x=4$ 时，$3x-5=7$ 才成立；而当 $x=6$，$y=2$ 时，$2x-y=10$ 成立，它还对 x 和 y 的许多其他值也成立。

(3) 解方程就是求未知项的值。为了求出这个值，当然我们必须变动它的项，直到未知量被单独留在等式的一边，并且等于方程另一边的数或式子。于是，我们就求得未知量的值，即问题的答案。

(4) 复合线性不等式由两个或两个以上的线性不等式通过“且”或者“或”联系在一起。当我们解用“且”关联的两个不等式时，必须求出同时满足这两个不等式的 x 的值。换句话说，满足其中一个不等式但不满足另一个不等式的 x 的值不包括在它的解集之中。另一方面，当我们解用“或”关联的两个不等式时，任何满足其中一个不等式的值都在它的解集之中。

§1.4

2. (1) A set A is said to be a subset of B, and denoted by $A\subseteq B$, if and only if every element of A is an element of B.

(2) The open interval $(a, b)$is a proper subset of the closed interval $[a, b]$, since the interval endpoints a and b belong to $[a, b]$ but not to (a, b).

(3) A function may be regarded as a mapping; the inverse function is the inverse mapping. The monotonic function defined on the interval has its inverse function.

(4) Linear functions, quadratic functions, exponent functions, logarithm functions and trigonometric functions are all the elementary functions.

(5) The domain of both $\sin x$ and $\cos x$ is $\mathbf{R}$, the range of them is $[-1, 1]$. They are periodic functions, and have period 2π.

(6) The graph of a linear function in the coordinate plane is a straight line, and that of a quadratic function is a parabola.

(7) In history, function is a correspondence between two variables y and x. The relationships can be expressed with a formula.

(8) In fact, the function $\tan x$ is the quotient of $\sin x$ divided by $\cos x$. Therefore its do-

main must exclude the points which make $\cos x=0$.

3. (1) "set"和"collection"这两个词是同义词,"set"作为数学术语,而"collection"则作为日常用语。

(2) 任何形如 $f(x)=ax+b$ 的函数(其中 a 和 b 是实数)称为线性函数。任何可以写成 $f(x)=ax^2+bx+c$ 形式的函数(其中 a, b, c 都是实数,且$a\neq0$)称为二次函数。

(3) 如果存在一个正实数 p,使得 $f(x+p)=f(x)$对函数 f 的定义域内的所有 x 都成立,则称函数 f 是周期函数,这种 $p(p>0)$的最小值称为该函数的周期。

(4) 函数 $f(x)=\sin(x+\pi)$的图形是由正弦函数曲线向左移动 π 个单位形成的。一般地,图形 $f(x)=\sin(x-\alpha)$是由基本的正弦函数曲线平移$|\alpha|$个单位形成的,如果 $\alpha>0$,则向右移;如果 $\alpha<0$,则向左移。这里$|\alpha|$称为图形的相位移。

(5) 如果我们写出方程 $x=b^a$,那么就把 x 和它的关于一个取定的底数 b 的对数 a 之间的基本关系表达出来了。用对数符号可把上式改写成 $\log_b x=a$,读作以 b 为底的 x 的对数等于 a。

(6) 我们可以用一句话把对数和底数的关系叙述为:一个已知数的对数,是另一个称为底数的数为了等于已知的那个数而必须自乘的幂次。

§1.5

2. (1) Two rays starting at a point O on the plane form an angle. The starting point O is called the vertex of the angle and the two rays are called the sides.

(2) If two parallel lines intersect the third line, then the alternate angles formed are equal and the corresponding angles formed are also equal.

(3) A triangle with two equal sides is called isosceles; a triangle with three equal sides is said to be an equilateral triangle.

(4) If two pairs of corresponding sides and one pair of included angles of two triangles are equal, then the triangles are congruent.

(5) If two pairs of corresponding sides are proportional and one pair of included angles of two triangles are equal, then the triangles are similar.

(6) An isosceles triangle is a figure with reflection symmetry and the attitude standing on the base is also the axis of symmetry.

(7) All interior angles of an equilateral triangle are 60°, the incenter and circumcenter are overlap; each angle bisector is also the median of the corresponding side.

(8) The line segment joining the mid-points of two sides of a triangle is parallel to the third side and equals half the length of the third side.

3. (1) 全等形具有相同的形状和大小。他们经过平移、反射、旋转后仍然全等。

(2) 若三条平行线被一条截线所截的截距相等,那么这些平行直线被其他截线所截的截距也相等。

(3) 如果两个三角形相似，则

(a) 这两个三角形的所有对应角都相等；

(b) 这两个三角形的所有对应边成比例。

(4) 如果两个相似的图形大小不同，那么我们可以通过放大或缩小适当的倍数使它们大小相同。

(5) 因为一个三角形的三个内角和等于 180°，所以我们得出另一个等价的命题，即一个三角形每一个外角都等于与这个外角不相邻的两个内角的和。

(6) 若一条直线 XY 与两直线 AB 和 CD 相交，则 XY 称为 AB 与 CD 的截线。这两条直线与截线可能构成 2 个交点及 8 个角，可以将这些角分为 3 类：同位角、内错角以及同旁内角。

§1.6

2. (1) Triangles, quadrilaterals, pentagons, hexagons and octagons are all special polygons.

(2) Regular n-sides polygon has $n-2$ diagonals, which divide the regular n-sides polygon into $n-2$ triangles whose interiors do not intersect.

(3) A quadrilateral having one pair of parallel opposite sides and the other pair of not parallel sides is called a trapezium. Hence a parallelogram is not a trapezium.

(4) A parallelogram is a rectangle if it has a right angle. A parallelogram is a rhombus if it has 2 equal adjacent sides.

(5) A circle is determined by its center and radius. It has infinitely many diameters and each one of them is a symmetric axis of the circle.

(6) If an angle at the center O and an angle of circumference both correspond to the same arc, then the size of former is double to the latter.

(7) The area of a sector is determined by its angle at the center and the bigger the angle, the greater the former.

(8) Each triangle has its circumscribed circle, but only the quadrilateral satisfying certain conditions has its circumscribed circle.

3. (1) 所有边都相等的多边形是不是正多边形？如果是，请证明；如果不是，请举出反例。

(2) 如果一个四边形的对角线互相平分或者两组对角分别相等，那么这个四边形是一个平行四边形。

(3) 如果两个圆周角所对应的弧相等，那么这两个圆周角相等。

(4) 三枚厚度相同的圆形金硬币，它们的半径分别为 2 cm，3 cm，4 cm。这三枚金硬币融化后重铸成一个新的金硬币。如果新的金硬币和原来每一枚金硬币的厚度一样，求出新金硬币的半径。

(5) 已知一个圆的圆心为 O,半径为 2 cm。动点 P 在圆内运动且满足:它到圆周上的最短距离总等于它到圆心的距离。请画出并描述点 P 的轨迹。

(6) 欧几里得在他的 13 卷著作《几何原本》中对几何作了详尽的研究。首先,他建立了一组被认为是事实的公理。这些事实容易被人们接受而无需证明。其次,他准确地表述了一些术语和图形的意思,这些表述称为定义。从公理和定义出发,可以推出称之为定理的可靠结论。然后,从已有的定理推导出更多的定理。据此,就建立了一套演绎推理体系。

§1.7

2. (1) If we establish a coordinate system such as rectangular coordinate system or a polar coordinate system on a plane, then we call this plane the coordinate plane.

(2) A rectangular coordinate system usually consists of a horizontal axis (named as x-axis)and a vertical axis (named as y-axis).

(3) In a rectangular coordinate plane, a straight line can be expressed by the linear equation in two unknowns $Ax+By+C=0$, where A, B and C are constants with $A^2+B^2\neq 0$.

(4) A straight line on the plane which is not vertical has a slope (or gradient). We can write the equation of a straight line if its slope and one point on it are given.

(5) Conic sections concludes ellipses, parabolas and hyperbolas and a circle is a special ellipse. These curves can be expressed by quadratic equations.

(6) If a general equation of a circle is given, we can find the coordinate of the center and radius. Conversely, if the coordinate of the center and radius are given, we can find the equation of the circle.

(7) Two distinct straight lines on a plane may intersect or not, which corresponds to that the system of their equations has a unique solution or has no solution.

(8) The polar coordinate system is especially useful in aviation and sailing. It makes the point P on the plane correspond to its polar coordinate, i.e. an ordered pair (r,θ), where r is the distance of P from the pole O, and θ is the angle measured from the pole axis to the ray OP in an anti-clockwise direction.

3. (1) 设 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 和 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 分别是直线 l_1 和 l_2 的方程,那么(x,y)是 l_1 和 l_2 的公共点当且仅当(x,y)是这两个方程组成的方程组的解。

(2) 在同一平面上的一条直线 l 和抛物线 U 可能交于两点,交于一点或者没有交点。设它们分别是 $y=mx+k$ 和 $x^2+Dx+Ey+F=0$。这时,通过解联立方程我们可以求出(i)交点的个数和(ii) 交点的坐标。

(3) 轨迹是满足一定条件的点移动所形成的图形。椭圆可以认为是在平面上满足 PA 与 PB 之和等于常数的动点 P 的轨迹,其中 PA 和 PB 分别是 P 到两个定点 A 和 B 的距离。

(4) 在平面直角坐标系中给定两个点 $A(x_1, y_1)$和 $B(x_2, y_2)$,其中且$x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$。设 C 的坐标为(x_1, y_2),连接 AB,AC 和 BC,就得一个以 AB 为斜边的直角三角形 ABC。

(5) 我们现在准备画出形如 $y=ax^2+bx+c$ 的二次方程的图形，这里 a，b 和 c 都是实数且 $a\neq 0$。其一般的方法是将方程的形式 $y=ax^2+bx+c$ 改变为形式 $y=a(x-h)^2+k$。配方的过程是对方程进行这种变形的基础。

(6) 我们知道，当 A，B 和 C 都是同号的非零常数且 $A=B$ 时，任何形如 $Ax^2+By^2=C$ 的方程的图形是一个以原点为中心的圆。若对 A，B 和 C 的限制改变，一般形式的方程 $Ax^2+By^2=C$ 就可以用来描述其他图形。例如，当 A，B 和 C 同号且 $A\neq B$ 时，方程 $Ax^2+By^2=C$ 的图形是一个椭圆。

§1.8

2. (1) A polyhedron T at least has 4 faces; each face is on a plane. If for each face F of it, T is located only on one side of the plane containing F, then T is convex, otherwise T is concave.

(2) The relationship among the number F of faces, the number E of edges and the number V of vertexes of a simple polyhedron can be described by Euler theorem.

(3) A right pyramid and a regular pyramid are two different conceptions. The former is a special case of the later since the base of the former is a regular polygon.

(4) A regular hexahedron is also called a cube. It has 6 faces which are all squares with the same size.

(5) The volume of a cylinder and a prism are equal to the product of the area of the base and the height, where the base and each cross-section are equal and the height is perpendicular to both two bases.

(6) The volume of a frustum of cone is equal to the difference of a bigger circular cone and a smaller one, they are similar and the base of bigger one is identical with the lower base of the frustum and the base of the smaller one is the same as the upper base of the frustum.

(7) In the space we can set up the rectangular coordinate system by using three mutually perpendicular number axes intersecting at the same point, which is called the origin.

(8) Analytic geometry and linear algebra are closely related; vectors, matrixes and determinants are their important tools. The algebraic methods show a lot of advantages in the investigation of quadratic surfaces.

3. (1) 多面体可以分成两类：凸多面体和凹多面体。立方体、长方体是凸多面体的常见例子。

(2) 关于圆台的问题可以转变为关于圆锥的问题来解决。例如：如果一个圆台 F 是从原先的圆锥 B 截去一个小圆锥 A 而形成的，那么圆台 F 的体积＝圆锥 B 的体积－圆锥 A 的体积。

(3) 在图 1.8.10 中，把水倒进圆锥形的容器中，这个容器的高度和底面半径分别是 20 cm和 7.5 cm。水平面的高度是 18 cm。求出在容器里水的体积和容器内壁没有沾湿部分

的面积。

(4) 图 1.8.11 给出了一块球形巧克力的横截面。在黑色巧克力球上涂上一层白色巧克力。白色巧克力的内半径和外半径分别是 1.5 cm 和 1.8 cm。求其中白色巧克力的体积。

(5) 在图 1.8.12 中,一个实心的正圆锥放置在有同样底面和高度的空心的圆柱里。把水倒进这个圆柱内后水面的高度为 6 cm。(a)用 π 表示到达水面高度的圆台体积。(b)进而求取出圆锥后的水面高度。

(6) 在空间中,我们可以建立直角坐标系。二次曲面特别是球面,圆柱和圆锥曲面,可以用以下这个方程来表示:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz+$$
$$2Gx+2Hy+2Iz+J=0,$$

其中 A, B, C, D, E, F, G, H, I 和 J 是常数,而 $A^2+B^2+C^2\neq 0$, x, y 和 z 是变量.

§1.9

2. (1) By comparing the differences between any two consecutive terms we can determine whether the series is arithmetic sequence.

(2) For a given sequence, if the ratio of each term compared to its successive term is a constant, then the sequence is a geometric sequence, the reciprocal of the constant is called the common ratio.

(3) As long as the first term and the common difference of an arithmetic sequence are known, it is easy to find its general term and the sum of the first n terms.

(4) If the first term and the common ratio of a geometric sequence are known, we can find its general term and the sum of the first n terms. Moreover, we can also find the sum of all the terms when the absolute value of the common ratio is less than 1.

(5) The concept of the series is different from the sequence. A series is usually referred to an infinite series, which is formally the sum of infinitely many numbers.

(6) The concept of the sum S_n of first n terms of a series is very important. We can translate the problem of finding the sum of a series into that of the limit of the sequence $\{S_n\}$ to deal with.

(7) Mathematical inductive is useful in proving the correctness of the propositions about natural numbers. However it cannot be used to prove the mathematical propositions about general real numbers.

(8) When we prove a proposition $T(n)$to be true for all positive integers greater than or equal to n_0 by mathematical induction, we must first prove that $T(n_0)$is true and then suppose that $T(k)$is true for $k\geqslant n_0$ and prove $T(k+1)$holds.

3. (1) 对于一个给定的序列 a_1, a_2, a_3, …, a_n, …,可以构造出一个无穷级数 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$。另一方面,若对所有 n 都令 $S(n)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$,则可得到一个

新的序列 $S(1)$，$S(2)$，$S(3)$，…，$S(n)$，…。

(2) 如果 a，b，c 是一个等差数列的任意三个连续项，则中间项 b 等于 a 和 c 的算术平均，即 $b=\frac{a+c}{2}$。反之，如果 a，b，c 是实数且 $b=\frac{a+c}{2}$，那么 a，b，c 构成一个等差数列。

(3) 如果 x，y，z 是一个等比数列的任意三个连续项，则中间项 y 等于 x 和 z 的几何平均，即 $y=\sqrt{xz}$ 或 $y=-\sqrt{xz}$。反之，如果 x，y，z 是实数且 $y=\sqrt{xz}$ 或 $y=-\sqrt{xz}$，那么 x，y，z 构成一个等比数列。

(4) (a) 求出一个第 5 项是 27，第 8 项是 729 的等比数列的第一项和公比。(b) 进而求出这个级数前 9 项的和。

(5) 设循环小数 $0.\dot{1}\dot{8}$ 表示成一个有无穷项的等比级数且第一项为 0.18。(i) 写出这个级数的前 3 项；(ii) 求出这个级数的公比；(iii) 将 $0.\dot{1}\dot{8}$ 表示成分数。

(6) 在某些情况下，当 $n=k$ 时命题 $P(n)$ 成立的假设不足以推断 $P(n)$ 当 $n=k+1$ 时也成立。归纳的过程还要假设对某些小于 k 的值 n，命题也正确，例如 $k-1$，$k-2$ 等，这种方法称为数学归纳法第二原理。

§1.10

2. (1) Except the certain event and the impossible event, the probability of any other event always lies between 0 and 1.

(2) The collection of all possible outcomes is called the sample space at an experiment and any event is a subset of the space.

(3) We also consider the experimental probability in our practical applications, because the problems in theoretical probability are studied in some ideal situations, however, the problems in real world are more complex than that in theory.

(4) The mathematic statistics, which is based on the theory of probability, will be applied to more and more economic areas.

(5) It is essential for middle school students to understand the basic acknowledge of statistics. They should learn to deal with the discrete data first.

(6) The most primary job to learn the central tendency of a set of data is to find the mean, median and mode of these data, which play an important role in the data analysis.

(7) In order to know the properties and characteristics of the data, it is not enough to know only the mean of a set of data, since the range of the data can be very large.

(8) Frequency distribution histograms, frequency polygons and curves, cumulative frequency polygons and curves are some common graphs in statistics.

(9) Any measurement may produce error; we need to know what are the absolute error, the relative error and the percentage error.

(10) When handling the approximation operations, we are often required to round off the

data according to the degree of accuracy, such as the number of significant digits.

3. (1) 在我们的日常生活中,我们很容易发现这样的事件,当一个事件发生时,另一个事件不发生。这样的两个事件叫做互斥事件。

(2) 如果两个事件 E 和 F 是互斥的,则事件 E 或事件 F 发生的概率是事件 E 发生的概率与事件 F 发生的概率之和,即 $P(E \text{ 或 } F)=P(E)+P(F)$。

(3) 从一副 52 张的扑克牌中依次随机抽取两张牌(第一次抽出后不放回),分别求出以下事件的概率:(a) 两张牌都是黑色的;(b) 两张牌都是 K;(c) 一张是 K,另一张是 Q。

(4) 四分位数间距定义为上四分位数和下四分位数的差,即四分位间距 $=Q_3-Q_1$,一般地,四分位数间距较大表示离差较大,而四分位数间距较小则表示离差较小。

(5) 对 4.061 3 进行四舍五入使得精确到 3 位有效数字;对 4.061 3 进行四舍五入使得精确到 3 位小数。对算式 3 456+6 785+1 243 中的各个数四舍五入使其精确到百位数,再求出该式的一个近似估计值。

第 二 章

§2.1

3. (1) 一条线段的长和一个角的大小的比是没有意义的,这是因为它们不是同类量。

(2) 使用比率时,一个量的特定的值和另一个量的单位值作比较。

(3) 通过说出一个量是另外一个量的几倍来作比较,这两个量必须有相同单位。

(4) 在比例式中,通过交叉相乘得到的两个积是相等的,即当 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 时,有 $ad = bc$。

(5) 要解方程就必须移项,直到未知项单独被留在等式的另一边,并使它和另一边的数或式子相等。

(6) 我们熟知的一些数学符号是阿拉伯数字 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0 以及加号“+”,减号“−”,乘号“×”,除号“÷”和等号“ = ”。

4. (1) Measuring the length of a table is, in fact, comparing the length of a table to that of the length of a ruler.

(2) Compared to the large building, our classroom is not too high.

(3) Ratio is different from the measurement, it has no units. The ratio of the length and the width of the same book doesn't vary when the measurement unit changes.

(4) A ratio is a fraction and it is a quotient of two like quantities in the same units.

(5) 60 percent of students in a school are girls, which means that 60 students out of every 100 students are girls.

§2.2

3. (1) Trigonometric function of the acute angle shows the mutually dependent relations

between each side and acute angle of the right triangle.

(2) If two sides of a right triangle are given, the triangle can be solved.

(3) If two sides and the included angle of an oblique triangle are given, the cosines theorem can be used to find the unknown sides and angles.

(4) The cosine can also be used to find the measure of the angles of a triangle when the lenghts of the sides are given.

(5) Knowing the measure of two angles and the lenght of any side of a triangle can determine the shape and size of the triangle. In other words, the two triangles made by these datas are congruent.

(6) The general direction for solving a right-angled triangle can follow three steps. First, draw a figure and show out the known part and the unknown part, then find each unknown quantity by appropriate trigonometric formulas respectively, at last, check the values found.

4. (1) 如果一个角的顶点在笛卡儿坐标系的原点并且始边在 x 轴的正方向上，则称这个角处于标准位置。

(2) 一般地，如果处于标准位置的两个角的终边重叠，则称这两个角是共终边的角。因此，共终边的角只相差 360°的一个倍数。而且，共终边的角所对应的三角函数是相等的。

(3) 仰角和俯角的测量以水平线为参考位置。如果一个物体是在观测者视线的上方，那么由水平线和视线所成的角就叫做仰角。如果一个物体是在观测者视线的下方，那么由水平线和视线所成的角就叫做俯角。

(4) 在上一节中我们已经知道，当已知条件满足 SAS(边角边)或 SSS(边边边)性质时，则可利用余弦定理来解三角形，然而余弦定理并不适用于 ASA(角边角)或 AAS(角角边)的情况，于是我们需要另一组称为正弦定理的性质取代之。

(5) 如果已知三角形两条边的长度和其中一边所对的角的角度，那么如何解这个三角形呢？这个问题回答起来比较困难，这是因为所给的条件有可能确定两个三角形，一个三角形，或无法确定任何三角形。

(6) 求解满足诸如 $2\sin\theta = 1$ 的三角方程，指的是求出变量 θ 的值的过程，该值应能使原方程成为一个逻辑值为真的数值语句。这个值可以用弧度或角表示。

§2.3

3. (1) We need to study by which integers an integer is divisible, that is, which are the factors of an integer. Specially, an integer is sometimes required to expressed as the produce of its prime factors.

(2) If an integer a can be divisible by another integer b, then there is an integer c such that $a = bc$, that is, a is a multiple of b.

(3) The number one is neither prime nor composite. A composite number can be divisible not only by one and itself but also by certain prime number.

(4) Let m be a composite number. Find a positive prime divisor n of m such that its square is less than or equal to m.

(5) We can use the sieve of Eratosthenes to find the number of the primes bounded by any given finite integer N.

(6) By division algorithm (also called Euclidean algorithm), for two integers a and b with $a > b > 0$, the highest common factor of a and b is equal to the highest common factor of b and r, where $r > 0$ is the remainder of a divided by b.

4. (1) 数论中的一个重要问题是哥德巴赫猜想,它是关于把偶数表示成两个素数之和的问题。

(2) 假设 n 是大于 1 的整数,而 m 是大于 2 的整数,证明 3^n-1 是合数,而且一般地,m^n-1 是合数。

(3) 一个形如 2^p-1 的素数被称为梅森素数,求出 5 个这样的数。

(4) 为了证明定理 2-4,假设有一个最大的素数,比如 P,那么数 $N=P!+1$ 一定有一个素因子(定理 2-2)。但是任何小于或等于 P 的数都不能整除 $P!+1=N$。因此,N 有一个大于 P 的素因子,从而不存在最大的素数,即正素数组成的集是可数无限的。

(5) 对于任给的正数 m 和素数 p,p 仅有的、正的因子是 p 和 1,因此,也仅有 p 和 1 才可能是 p 和 m 的、正的公因子。所以,我们得出结论:如果 p 是素数,而 m 是任意的整数,则 p 要么能整除 m,要么 $(p, m)=1$。

§2.4

3. (1) Set theory has become a common basic theory and one of important tools in many branches of mathematics.

(2) What we will discuss is not the important significance of new theory, but the application of the theory in natural science.

(3) Set S itself is the improper subset of S; if a set T is a subset of S but not S, then T is called a proper subset of S.

(4) A set consists of some things, in which nothing special is assumed about the nature of the individual objects in the collection.

(5) The subset T of set S can often be denoted by $\{x \in S \mid P(x)\}$, that is, T consists of those elements x for which $P(x)$ holds.

(6) Since a collection may be a subset of many different sets, we need assign a set as the universe of discourse in order to determine the complement of corresponding.

(7) This example makes the following question become clear, that is, why may two straight lines in the space neither intersect nor parallel.

4. (1) 设 N 是所有自然数的集合,如果 S 是所有偶数的集合,那么它在 N 的补集是奇数的集合。

(2) 在讨论许多数学分支的时候，例如解析几何、代数，或是微分方程，使用向量、矩阵和行列式是非常有用的。

(3) 一个非空集合 S 称为上有界，如果存在一个具有如下性质的数 c：对集合中所有 x 都有 $x \leqslant c$。这样的数 c 称为集合 S 的上界。

(4) 完备性公里叙述为，对任何有界的非空的实数集合 S，在 S 的上界集合中有一个最小的上界。

(5) 任意两个对象 x 和 y 可以形成序列(x, y)，称之为有序对，除非$x = y$，否则它当然不同于(y, x)。如果 S 和 T 是任意的两个集合，用 $S\times T$ 表示所有有序对(x, y)（其中 $x\in S$，$y\in T$)组成的集合。集 $S\times T$ 称为 S 和 T 的笛卡儿积，这里用 R. 笛卡儿命名，因为他当时就给我们展示了如何通过两根实轴的笛卡儿积来描述平面上的点。

§2.5

3. (1) In the rectangular coordinate system on the plane, one can set up the one-one correspondence between points and ordered pairs of real numbers and also the one-one correspondence between conic curves and quadratic equations.

(2) Though any arbitrarily drawn curve determines a set of points, it may not be described succinctly by a simple equation.

(3) The symbol can be used to denote the set of ordered pairs (x , y) satisfying that the ordinate is equal to the cube of the abscissa.

(4) Whenever a set of real coefficients are given for which the quadratic equation has a nonvacuous graph, the graph may be obtained as the intersection of a plane and a right circular cone.

(5) According to the values of the discriminant, we can determine that the nondegenate graph of the equation (iii)is a parabola, a hyperbola or an ellipse.

(6) A quadratic equation is degenerate if and only if the determinant Δ of its coefficients equals 0.

4. (1) 在例 1，我们同时用了图形法和代数的代入法解一个方程组（其中一个方程是二次的，另一个是线性的）。方程组的图形提供了关于解的信息，而代数解提供了关于图形的信息。方程组的“代数”和它的解析“几何”之间的相互作用既引人注目又很有用。

(2) 圆可以定义为到平面上一个定点 Q 的距离相等的、该平面上的点的轨迹。当该平面上有一个坐标系(x, y)和一个距离关系时，圆就是多项式$(x-h)^2+(y-k)^2-r^2$ 的图形，这时圆心的坐标是(h, k)，而半径是 $r \geqslant 0$。半径 $r = 0$ 的圆称为点圆，它被归类为圆的退化形式。

(3) 考虑一个非退化的、以 Q 为圆心的实圆，设 $P\neq Q$ 是经过 Q 且垂直于圆所在的平面的直线上的一个定点。由连接 P 和圆上的点得到的所有直线构成一个集，该集上的点的轨迹称为正圆锥。

(4) 退化的圆锥在代数上和几何上都是一致的。从几何的观点来看，双曲线可以退化成两条相交的直线，抛物线则退化成两条重合的直线或两条平行的直线(可由一个直圆柱退化)，而椭圆退化成一点。

§2.6

3. (1) In space any two parallel vectors are collinear; two vectors can determine a plane if and only if they are nonparallel.

(2) Let $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ be nonzero vectors. The sum $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ lies along the diagonal of a parallelogram with sides formed by placing $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ with a common base point.

(3) The product $a\boldsymbol{A}$ of a number a and a vector $\boldsymbol{A}$ is still a vector which has length $|a|\cdot|\boldsymbol{A}|$ and the same direction as $\boldsymbol{A}$ if a is positive and the opposite direction if a is negative.

(4) A point $Q(x, y, z)$ is on the plane if and only if the displacement vector $\overrightarrow{PQ}$ is perpendicular to the normal vector $\boldsymbol{n}$, i.e., the dot product of the two vectors is zero.

(5) By giving a point on a line and a nonzero vector parallel to it, we can obtain a parametric equation of the line. A line can also be expressed as a system of two plane equations.

(6) The displacement vector $\overrightarrow{PQ}$ from the point $P=(x_1, y_1, z_1)$ to the point $Q=(x_2, y_2, z_2)$ can be computed from the coordinates of the points by the following formula.

4. (1) 我们知道，笛卡儿用数对来确定平面上的点，用数的三元组来确定空间的点。当这个思想推广为实数的 n 元组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，其中整数 $n\geqslant 1$，这个 n 元组称为 n 维点或 n 维向量，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的每一个数称为坐标或向量分量。提示：n 元组可译成 n-tuple。

(2) 设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 表示向量。那么，以如下形式表示的向量

$$a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n(\text{其中 } a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ 是标量})$$

称为(或可以表示成)$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 的一个线性组合。(对于 $n=1$ 的平凡情形，我们称之为 $\boldsymbol{x}_1$ 的线性组合，它只是表示 $\boldsymbol{x}_1$ 的一个倍数。)

(3) 向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 称为线性相关的，如果存在不全为零的标量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 使得 $a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{0}$. 向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 称为线性无关的，如果 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 不是线性相关的。

当 $n\geqslant 2$ 时，向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是线性相关的当且仅当其中有一个向量可以表示成其余向量的线性组合。

(4) 设向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 线性无关。如果标量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{0}$，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都等于零。

这个命题只是线性相关和线性无关的定义的直接推论。事实上，如果这个结论是错的，则有 $a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{0}$ 且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全为零。于是由定义推出，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是线性相关的，这与 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 线性无关的假设矛盾。

§2.7

3. (1) Linear combination, linear dependence and linear independence are all important concepts on linear space.

(2) A matrix is composed with numbers displayed in the rectangular array. If the number of the rows of a matrix is equal to that of its columns, then it is called a square matrix. Each square matrix corresponds to a determinant.

(3) Matrix can be used not only to solve the simultaneous linear equations, but also to determine whether or not the equations have solution and the solution is unique.

(4) The advent of the computer makes matrix methods be effectively used in the solution of systems of hundreds linear equations.

(5) The conclusion is contradictory to the assumptions of this problem, hence the proven proposition holds.

(6) The example makes the following question clear, i.e. why two straight lines in space could neither intersect nor be parallel.

(7) Let V be an n-dimensional vector space over the field F and let W be an m-dimensional vector space over F. Let $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B}'$ be the ordered basses for V and W respectively. Then any linear transformation T from V into W is determined by the matrix of T relative to $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B}'$.

(8) It is possible to establish a one-one correspondence between the set of all linear transformations from V into W and the set of all $m\times n$ matrices over the field F.

4. (1) 若 V 和 W 是域 F 上的向量空间，那么从 V 到 W 上的任何到上的一一线性变换称为是 V 到 W 上的同构。如果存在一个 V 到 W 上的同构，则称 V 同构于 W。

(2) 矩阵只不过是一种由数组成的矩形阵列(这里指的是实数)。我们把由 p 行 q 列的数组成的阵列称为 $p\times q$ 矩阵(或 p 行 q 列矩阵)，而矩阵里的数称为矩阵的元，其中在第 i 行第 j 列的数称为(i, j)元。有时用下标来指明位置，于是，可以用 a_{ij} 或 b_{ij} 来表示(i, j)元。

(3) 一个 $p\times q$ 矩阵当 $p=1$ 时只有一行，称它为一个行向量。而当 $q=1$ 时，这个矩阵只有一列，称它为一个列向量。当 p 和 q 都是 1 时，这一情形没什么意思，在这里我们不讨论。一个有 p 个元的列向量，称作 p 向量，那么一个 p 向量是一个 $p\times 1$ 矩阵。

(4) 行数和列数相等的矩阵称为方阵，一个 n 阶方阵(记作 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$)由 n 行和 n 列总共 n^2 个数组成。对于任意的由实数元组成的矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$，存在唯一称为行列式的数(记为$|\boldsymbol{A}|$)与之对应，$|\boldsymbol{A}|$也称为 n 阶行列式。

(5) 一个 $m\times n$ 矩阵具有 m 个行向量和 n 个列向量。设 $\boldsymbol{A}$ 是一个实 n 阶方阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量线性无关当且仅当行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$。而且，$\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量线性相关当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量线性无关。

(6) 一个全部由 0 组成的方阵称为零矩阵。若一个方阵沿着从左上方到右下方的对角

线(这条斜线称为主对角线)的元都是1,而其他元都是0,则称之为单位矩阵,记作 I。单位矩阵具有性质:若 A 是一个与 I 的行、列数都相同的方阵,则 $AI=IA=A$。

§2.8

3. (1) In the seventeenth century, the function relation was regarded as nothing but a formula since the concept of function originated in physics.

(2) The relation between temperature and time is a function, but it can only be denoted by tabulation or figure.

(3) If a variable y depends on another variable x in such a way that to each value of x corresponds a definite value of y, then y is a function of x.

(4) The modern mathematical view that a function is simply a mapping from a space to another space, which is worthy to extend the concept of function.

(5) If f is a mapping from a space X to another space Y, g is a mapping from the space Y to a space Z, then we define a composite function $h=g\circ f$, which is a mapping from X to Z.

4. (1) 函数提供了研究随其他量而变化的量的工具,也就是说,一个量的变化引起了另一个量的相应变化。

(2) 重要的是要认识到,等式(i)与等式(ii)仅仅是表示同一个关系的两种不同的方式,其中一种是指数方式,另一种是对数方式。须要记住的最重要的事实是,对数即指数。

(3) 对函数 $f: D\to\mathbf{R}$,我们定义 $f(D)=\{y\in\mathbf{R}\mid y=f(x), x\in D\}$,并称 $f(D)$ 是 f 的像。假若 $f(D)$ 有一个最大值,即 D 中存在一个点 x_0 使得 $f(x)\leqslant f(x_0)$,则称 $f: D\to\mathbf{R}$ 取到最大值。

(4) 考虑函数 $f: D\to\mathbf{R}$ 和 $g: U\to\mathbf{R}$,其中 $f(D)$ 包含在 U 中,假定函数 $f: D\to\mathbf{R}$ 在 D 中的点 x_0 连续且 $g: U\to\mathbf{R}$ 在点 $f(x_0)$ 连续,则复合函数 $g\circ f: D\to\mathbf{R}$ 在点 x_0 连续。

(5) 要画出一个新函数 $y=f(x)$,即一个我们不熟悉的函数的图形时,我们可以采用下面建议的步骤:

(a) 确定这个函数的定义域。

(b) 确定这个方程所具有的对称性,如果 $f(-x)=f(x)$,则函数图像关于 y 轴对称。如果 $f(x)=-f(-x)$,则函数图像关于原点对称。

(c) 通过计算 $f(x)$ 的值求出 y 截距,通过求使 $f(x)=0$ 的 x 值求出 x 截距。

(d) 建立一个满足方程 $y=f(x)$ 的有序对的表格。

(e) 描出这些有序对所对应的点,用一条光滑的曲线连结这些点,然后,在需要时,可根据图像所具有的对称性,作出与已画出的部分对称的那部分的曲线。

§2.9

3. (1) A sequence is called monotonic if it is increasing or decreasing.

(2) A sequence $\{f(n)\}$ is called bounded if there exists a positive number M such that $|f(n)|\leqslant M$ for all n.

(3) If a sequence $\{a_n\}$ converges, then for any positive number ε, there exists a positive integer N such that $|a_n|<\varepsilon$ for all $n\geqslant N$.

(4) The function $f(x)$ has the limit A at a point c if and only if $f(x)$ has both the left limit and right limit at the point and each of them equals A.

(5) Suppose the function $f(x)$ is defined on the interval $(a,+\infty)$. If for any $\varepsilon>0$, there exists a positive integer K such that $|f(x)-A|<\varepsilon$ for all $x\geqslant K$, where A is a constant, then we say $f(x)$ converges to A as $x\to+\infty$. If $g(x)=-f(x)$ converges to A as $x\to+\infty$, then we say $f(x)$ converges to A as $x\to-\infty$. If $f(x)$ converges to A both as $x\to+\infty$ and as $x\to-\infty$, then we say $f(x)$ converges to A as $x\to\infty$.

4. (1) 称数列$\{a_n\}$具有极限 L，如果对任意正数 ε 都存在另一个正数 N(N 可能与 ε 有关)使得 $|a_n-L|<\varepsilon$ 对所有 $n\geqslant N$ 成立。一个数列不收敛就称为发散。

(2) 一个复值序列 $u_n=a_n+ib_n$ 收敛于 $L=a+ib$ 当且仅当其实部 a_n 和虚部 b_n 分别收敛，即 $a_n\to a$ 且 $b_n\to b$，此时我们得到 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\mathrm{i}\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。

(3) 术语“收敛序列”只适用于具有有限极限的序列。具有无限极限的序列称为发散序列。当然，也有一些发散序列不具有无限的极限，由下面公式定义的序列就是这种例子：

$$f(n)=(-1)^n,\quad f(n)=\sin\frac{n\pi}{2},\quad f(n)=(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad f(n)=\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{2}\mathrm{i}}。$$

(4) 函数 $f:D\to\mathbf{R}$ 称为在 D 中的点 x_0 连续，如果 D 中的任何序列$\{x_n\}$收敛于 x_0，必有序列$\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(x_0)$。函数 $f:D\to\mathbf{R}$ 称为连续函数，如果它在 D 内的每一点 x 都连续。

(5) **引理**　设序列$\{d_n\}$收敛于一个数 d，且 $d_n\geqslant0$ 对每个自然数 n 成立，则$d\geqslant0$。

上一引理断言，非负收敛序列的极限也是非负的。但是，正数序列所具有的极限并非总是正的。例如，$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是一个收敛于 0 的正数序列。

§2.10

3. (1) The study of the tangent line to a curve and the instantaneous velocity of moving body leads to the establishment of the concept of derivative.

(2) I. Newton and G. W. Leibniz set up independently the differential and integral theoretical basis upon which others could work.

(3) The tangent problem provides a visual interpretation of the derivative and it leads people to define the derivative as the limit of a difference quotient.

(4) If the function f has a derivative at each point of a subdomain of the domain of f, then f is said to be differentiable on the subdomain.

(5) If $f(x)$ has derivatives $f'(x)$ of the first order in an interval, then we use the derivatives to define the differential of $f(x)$ in the interval.

(6) The process to find the primitive function is the reverse process of finding derivative, applying the basic integral formulas, integration by substitution and integration by parts etc. are all important methods to find indefinite integrals.

4. (1) 导数的例子

例 1 (常值函数的导数) 假设 f 是一个常值函数,例如 $f(x)=c$ 对所有 x 成立。它的差商是

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0。$$

因为差商对所有 $h\neq 0$ 都是 0,所以其极限 $f'(x)$对每一个 x 也都是 0. 换言之,常值函数的导数处处为 0.

例 2 (线性函数的导数) 假设 f 是一个线性函数,例如 $f(x)=mx+b$ 对所有 x 成立。如果 $h\neq 0$,则

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h}=\frac{mh}{h}=m。$$

因为当 h 趋于 0 时,差商保持不变,所以得到

$$f'(x)=m$$

对每个 x 成立。于是,线性函数的导数是一个常值函数。

(2) 如下三个数,即 $f'_-(a)$, $f'(a)$和 $f'_+(a)$分别称为 $f(x)$在 $x=a$ 的左导数、导数和右导数。例如,若 $f(x)=|x|$, 则 $f'(0)$不存在,但是$f'_-(0)=-1$ 且 $f'_+(0)=1$.

(3) **方向导数** 我们现在介绍偏导数的一个自然推广。在$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$的定义中,差商的分子包含了 $f(x,y)$在两点$(x_0+\Delta x,y_0)$和(x_0,y_0)的值。当 Δx 趋于 0 时,前面的点沿着直线 $y=y_0$ 趋近于后面的点。对于$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$,则是点$(x_0,y_0+\Delta y)$沿着直线 $x=x_0$ 趋近于(x_0,y_0)。

(4) 不定积分也称为反导数,是微分的逆过程。即假设已知一个函数 f,要求出满足等式 $F'=f$ 的函数 F。求出反导数是微积分中的一个重要过程。反导数是用来求曲线围成的面积的方法,也是许多科学家和工程师经常用来得出物理方程和电子方程的方法。

(5) **相差一个常数的反导数** 如果 F 是连续函数 f 的反导数,那么 f 的任何反导数就可以表示成如下形式:$G(x)=F(x)+C$。这就说明同一个函数的两个反导数仅相差一个积分常数值,这个常数值可以是 0。

(6) 常常有这样情形,一些积分太过复杂以至于不能简单地用一个法则来计算。求解复杂积分的一种方法是变量替换法,这时,用一个新的变量代替被积函数的一部分,再对函数关于新的变量进行积分,然后用原来的变量代入。这就是链式法则的积分版本。

§2.11

3. (1) The definite integral satisfies the linearity with respect to the integrand, the additivity with respect to the interval of integration and invariance under translation.

(2) The definite integral of the nonnegative function is nonnegative. Also we can prove that if strict inequality $g(x)>0$ holds for every $x\in[a,b]$, then the integral of $g(x)$on $[a, b]$ is also greater than 0.

(3) We can use step functions or simple functions to approximate the integrand above and below to find the approximate value of the integral of the function discussed.

(4) If two measurable solids have the same cross-sectional area at each point on L-axis, then their volumes are equal.

(5) Let $y=f(x)$is nonnegative on the interval $[a, b]$. When the ordinate set of the function is revolved about the x-axis, it sweeps out a solid of revolution, whose volume can be computed by the integral of the function $\pi[f(x)]^2$.

(6) Suppose $s=s(x)$is a step function on the interval $[a, b]$. Then there exists $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=b$ such that s can be represented by the linear combination of characteristic functions χ_{Δ_i} on the subintervals $\Delta_i=[a_{i-1}, a_i]$, $i=1,2,\cdots,n$, i.e. $s(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{\Delta i}(x)$, therefore the integral $\int_a^b s(u)\mathrm{d}u=\sum_{i=1}^{n} c_i(a_i-a_{i-1})$.

4. (1) 微积分基本定理详述了微积分学的两种核心运算 —— 微分与积分之间的关系。

定理的第一部分，有时也被称为微积分第一基本定理，表明不定积分是微分的逆运算。第一部分也很重要，这是因为它保证了连续函数的反导数的存在性。

第二部分，有时也被称为微积分第二基本定理，它允许人们可以运用一个函数的无穷多个反导数中的任何一个来计算该函数的定积分。定理的这一部分有着不可估量的实用价值，因为它明显简化了对定积分的计算。

(2) 定理(**微积分第一基本定理**) 设 f 为定义在闭区间$[a, b]$上的实值连续函数，对于所有的$[a, b]$中的 x，令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.则 F 也是定义在闭区间$[a, b]$上的实值连续函数，它在(a, b)上可微且对(a, b)上所有的 x 满足$F'(x)=f(x)$。

根据这个定理，当 f 连续时，f 的反导数总是存在的。

(3) **推论** 基本定理通常被运用于计算函数 f 的定积分(当其原函数 F 为已知时)。特别地，如果 f 是 $[a, b]$上的实值连续函数，且 F 是 f 在$[a, b]$上的原函数，则：

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)\ .$$

这个推论假定函数在整个区间上连续。这个结果在下面的定理中有所加强。

(4) **定理(微积分第二基本定理或牛顿－莱布尼茨法则)**

设 f 是定义在闭区域$[a,b]$上的实值函数，且有一个定义在$[a,b]$上的原函数 F。那么，f 和 F 满足：$F'(x)=f(x)$对$[a,b]$上的所有 x 成立，若 f 在$[a,b]$上可积，则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a)。$$

由于这里未假定 f 是连续的，所以第二基本定理略比推论强些。

§2.12

3. (1) The sequence of functions which converges uniformly on an open interval (a, b) must converge at every point in the interval, but the sequence of functions which converges pointwise on an interval (a, b) may not converge uniformly on the interval.

(2) If the sequence of functions which does converge uniformly on a domain D, then there exists a number $\varepsilon_0>0$ such that for any natural number N there exists $a\in D$ and some $n\geqslant N$ satisfying $|f_n(a)-f(a)|>\varepsilon_0$.

(3) A power series $\sum a_n z^n$ converges at least at the point $z=0$; if it converges on the entire complex plane, then its radius of convergence is $+\infty$.

(4) The familiar manipulations with finite sums do not always carry over to infinite series, but the power series can be manipulated in many respects as though they were finite sums.

(5) The general term must approach zero, which gives a necessary condition for convergence of the series. But it is not a sufficient condition because the series with its general term approaching zero may not converge.

(6) A set of real numbers with an upper bound has the least upper bound; on the other hand, a set of real numbers with a lower bound has the greatest lower bound. Hence, a bounded set of real numbers has both supremum and infimum.

4. (1) 这个特殊的幂级数在收敛圆的每个边界都发散，因为如果$|z|=r$，则通项的绝对值为 n。

(2) 幂级数在边界点的收敛性不能用根式判别法或比值判别法事先判定。我们要运用更为精细的判别法来判定它们。

(3) 一个级数$\sum a_n$ 称为绝对收敛指的是$\sum|a_n|$ 收敛。如果$\sum a_n$ 收敛而$\sum|a_n|$发散，则称$\sum a_n$ 条件收敛。

(4) 根式判别法和比值判别法实际上都是比较判别法的特殊情形。事实上，当 $n\to\infty$时若有 $a_n^{\frac{1}{n}}\to R<1$ 或$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L<1$，则所考虑的级数能被一个适当的几何级数$\sum x^n$ 所控制，据此可推出它的收敛性。

(5) 现在我们考虑各项具有共同的定义域 S(在实直线上或在复平面上)的实值或复值函数的序列$\{f_n\}$。假定 f_n 在 S 上一致收敛于一个函数 f。如果 f_n 在 S 中的某个点 P 连

续，则极限函数 f 也在 P 连续。

(6) 假定一个函数 f 可以在一个开区间 $(a-r, a+r)$ 表示成幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$，则 $f(x)$ 在该区间连续，而且 f 在任何闭子区间的积分可以通过对该级数逐项积分来计算。

§2.13

3. (1) The order of a differential equation is defined as the order of the highest derivative that appears in the equation.

(2) The solutions of the differential equations need not be unique. However, if some additional conditions such as the initial conditions are imposed, then the uniqueness may be valid.

(3) The study of existence and uniqueness of solutions of the differential equations is very important, because the practical problems require us to answer under what conditions the differential equation in question has solutions and only has a unique solution.

(4) To find the general solutions of homogeneous equation of second order, we must find its two solutions which are linearly independent at first, then the linear combinations of them are the desired general solutions.

(5) The general solution of a nonhomogeneous equation is of the form $y=y_c(x)+y_p(x)$, where $y_c(x)$ is the general solution of the corresponding homogeneous equation, and $y_p(x)$ is a particular solution of the nonhomogeneous equation.

(6) When a positive integer adds another positive integer, their sum is also a positive integer; but when a positive integer is subtracted from another positive integer, the difference may not be a positive integer.

4. (1) 一般的二阶微分方程具有形式 $F(x, y, y', y'')=0$。涉及这种方程的理论相当复杂。因此，我们只把自己的注意力集中在那些可以就 y'' 解出的方程，即可以写成形如 $y''=f(x, y, y')$ 的方程。

(2) 对一阶微分方程 $y'=f(x, y)$，我们发现，存在包含一个任意常数的解。因为二阶微分方程包含了二阶导数，因此大体上来说，要求出它的解就需要积分两次，所以自然希望能求出该方程的包含两个任意常数的解。

(3) 如果函数 p 和 q 在开区间 $a<x<b$ 上连续，那么微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 在区间 $a<x<b$ 上就有一个基础解组。集 $\{y_1, y_2\}$ 称为该方程的一个基础解组，如果 y_1 和 y_2 都是该方程的解且该方程的每一个解都可以表示成 y_1 与 y_2 的线性组合。

(4) 两个函数 f 与 g 称为在区间 $a<x<b$ 上线性相关，如果存在不全为零的常数 c_1 和 c_2 使得 $c_1f(x)+c_2g(x)=0$ 对区间 $a<x<b$ 中的每一个 x 都成立。如果两个函数 f 与 g 在区间 $a<x<b$ 不是线性相关的，就称它们线性无关。这个定义适用于任何区间，不论开

的或不是开的。

(5) 很多学者致力于研究常微分方程的求解方法。当方程是线性的情形,它可以通过分析方法求解方程。不幸的是,大多数有意义的微分方程是非线性的,除了少数以外,它们不能求得准确的解。其近似解可以通过计算机逼近求得。

§2.14

3. (1) 概率在字典中的定义是"一个事件可能发生的程度,用适合于事件的情形与所有可能的情形的总数之比来测量"。

(2) 按照集函数的语言,概率是定义在某个由集合组成的特定的布尔代数集 B 上的特殊函数,此处记作 P。

(3) 为了推广这个思想使得它能应用于任何一个这样的数据集,该集由单个变量在一定数量的个体所取的样本的值组成,下面的统计概念被认为是有用的。

(4) 在正态分布中,总体的绝大部分位于变量的两个值之间,这两个值分别是分布的算术平均(μ)减去或加上 4 个标准差(4σ)。

(5) 在概率论的许多应用中,令人感兴趣的随机变量是其他一些随机变量的和。例如,一次多局博弈的获利结果是其中每一局的获利之和。

(6) 随机变量无非是定义在一个集上的向量值函数。术语"随机"只是用来提醒我们,所考虑的集是一个样本空间。由于上述定义的一般性,所以有可能使一个给定的试验关联多个随机变量。

4. (1) The mathematical expectation $E(X)$ and variation $\mathrm{Var}(X)$ both are theoretically computed values associated with the random variable X.

(2) The true significance of mathematical expectation in probability theory is in connection with the laws of large numbers.

(3) For any random variable we can define a standardized random variable which has expectation 0 and variance 1.

(4) The random variables in question satisfy the central limit property if the distribution of the standardized variable T_n approaches a standard normal distribution as $n\to\infty$.

(5) Laplace was the first mathematician to realize that many sequences of random variables satisfy the central limit theorem, although a few other mathematicians had known earlier that some special sequences of radom variables had the property.

(6) In probability theory, "second moment" or "moment of inertia" is the variance. It measures the tendency of a distribution to spread out from its expected value.

§2.15

3. (1) By means of quantifiers and logical connectives, we can use logical expressions to

express more types of English sentences.

(2) The application of logical expressions can eliminate the ambiguity of statements and makes it possible to infer with these sentences.

(3) Use quantifiers to express the statements"every point of set A is in curve C but not in the figure D".

(4) Proposition is referred to a statement which has specified meaning and either true or false, but not both.

(5) Two compound propositions $P(x, y)$and $Q(x, y)$are called logically equivalent, if they have the same truth values for any logical values of variable x and y.

(6) The process of inferring the conclusion by one or a group of assumptions is the proof, and the direct proof is one of the most natural proofs. We can use the indirect proof to replace the direct proof when necessary.

4. (1) 数学逻辑(也称作符号逻辑)是一个与计算机科学和哲学逻辑有密切关联的数学分支学科。它的领域包括数理逻辑的研究和形式逻辑在其他数学领域的应用。

(2) "x 比 3 大"这个语句包括两部分。第一部分为变量,是这个语句的主语。第二部分是谓语"比 3 大",指的是语句的主语可能具有的性质。我们可以用 $P(x)$表示"x 比 3 大"这个语句,其中 P 表示"比 3 大"这个谓语,而 x 是变量。语句 $P(x)$也可以看成是命题函数 P 在 x 的值。变量 x 一经赋值,语句 $P(x)$就变成了命题并且有了真假值。

(3) 设 $Q(x, y)$表示语句"$x=y+3$"。那么命题 $Q(1,2)$ 和 $Q(3,0)$的真假值是什么?

解 为了求得 $Q(1,2)$,设语句 $Q(x,y)$中的 $x=1$ 而 $y=2$。因此 $Q(1,2)$表示语句"$1=2+3$",它是假的。语句 $Q(3, 0)$就是命题"$3 = 0+3$",它是真的。

(4) 考虑如下语句:"若 $x>0$,则 $x:=x+1$"。如果程序包含了这个语句,则当程序执行到这句时,变量 x 被代入 $P(x)$(即"$x>0$")。如果 $P(x)$对 x 的这个值是真的,赋值语句 $x:=x+1$ 就执行,结果 x 的值就增加 1;如果 $P(x)$对 x 的这个值是假的,这个赋值语句就不执行,结果 x 的值不会改变。

(5) 许多数学语句断言,某个性质对于一个变量在一个特定区域的所有的值都是真的,这个特定区域称为论域。这样一个语句可用全称量词化来表示。命题函数的全称量词化是这样的命题:它断言,对 x 在论域中的所有的值,$P(x)$都是真的。

(6) 许多数学语句断言,存在具有某一性质的元素。这种语句可以用存在量词化来表示。借助于存在量词我们构造这样一个命题,它是真的当且仅当$P(x)$至少对 x 在论域中的一个值为真。

§2.16

3. (1) The adopted way of describing a set often made it impossible to enumerate all the elements of this set.

(2) The number of distinct subsets of 7 elements that may be formed from a set of 10 ele-

ments is C_{10}^{7}.

(3) A direct enumeration of all the elements of a set is obviously not the best way to attack this problem; however, it can be easily solved by combinatorial analysis.

(4) This problem is a special case of the more general problems: how to find the sum of first n terms of an arithmetic sequence.

(5) Numerical analysis is the study of algorithms that use the numerical approximation to the problems of continuous mathematics.

(6) Although the Gauss elimination method can be used to find the solution of some problems within a finite number of steps, people can only adapt infinite precision arithmetic and their results are only the approximation of the exact solutions.

4. (1) 组合学是纯数学的一个研究离散对象的分支,它与数学的许多领域,比如代数学、概率论、遍历理论和几何学都有联系,同时也与计算机科学和统计物理学的应用分支关联。

(2) 组合学既要完善其理论建构,又要解决大量的应用问题,尽管它已经(特别是在20世纪末)形成了强大的理论方法。组合学中最成熟,最容易入门的部分是图论,它和其他领域有许多自然的联系。

(3) 下面是组合学的一个简单问题的例子:一副桥牌由52张不同的牌组成,它们可能的排序个数是多少?这个答案是52!(52阶乘),大约等于8.0658×10^{67}。

在计算机科学中经常用组合学来对某些集的元素个数作出估计。

(4) 组合分析是数学的一个分支,它致力于根据给定的规则解决某些集(通常是有限集)的元素的选取和排列的问题。每一条这样的规则定义了一个构造给定的集合的元素的某种结构的办法,这种结构称为组合结构。因此也可以说,组合分析以组合结构为研究目标。

(5) 数值分析延续了数学的实用计算这一悠久传统。就像古代的巴比伦人求$\sqrt{2}$的近似值一样,现代数值分析不去寻求准确的答案,这是因为准确的答案在实际操作时经常是不可能求得的。反之,多数的数值分析只涉及在保持适当的误差限的条件下求出近似解。

(6) 在现代计算机出现之前,数值方法常常依赖于在打印的大张表格上作手动插值。自从20世纪中期以来,取而代之的是计算机对所需的函数的计算。尽管如此,插值算法仍然可用作解各种方程的软件的一部分。

第 三 章

§3.1

1. (1) 若已知该锐角的某个三角比,我们就可以利用毕达哥拉斯定理及三角比的定义来求出该角的其他三角比。(分词短语表示方式。)

(2) 我们只能应用上一段给出的公理和基本概念来证明这个数学的基本定理。(分词短语当时间状语。)

(3) 与x^n相比,当$x\to+\infty$时函数e^x是更高阶的无穷大量,其中n是任意给定的正数。

(分词短语当方式状语。)

(4) 设线性方程组$\begin{cases} x-y=k, \\ 4x+hy=1 \end{cases}$有无穷多个解,求 h 和 k 的值。(分词短语表示条件。)

(5) 这个指定的值称为初始值,而确定这样的解的问题称为初值问题。(分词短语当定语。)

(6) 人们引入了称为复数的新型数,用来提供这种方程的解。(分词短语插入成分,当定语。)

2. (1) Dividing both sides by the coefficient of the unknown, we obtain the solution of the equation.

(2) Using mathematical induction, we can prove many theorems related to natural numbers.

(3) The integrand being always negative on the integration interval, the integral value is negative.

(4) Based on the study on the roots of algebraic equations, a new theory —— group theory was established in 19th century.

§3.2

1. (1) 知道三角形的两边长度及它们的夹角,就确定了这个三角形的形状和大小。(动名词短语,当主语。)

(2) 这种平移变换是通过加上一个常向量 x 而得到的。(动名词短语,当介词宾语。)

(3) 柯西-施瓦茨不等式是证明各种各样不等式的重要工具。(动名词短语,当介词宾语。)

(4) 把这个结果应用于 $f(x)$,就推出了所要的恒等式。(分词短语,当状语。)

(5) 应用这个结果于 $f(x)$,就推出了所要的恒等式。(动名词短语,当主语。)

(6) 新的计算方法建议避免对变量的指数进行运算。(动名词短语,当宾语。)

2. (1) It requires using electronic computers to solve the systems of equations of this kind.

(2) The principle of mathematical modeling seems very simple, but the practical modeling procedure is very complex.

(3) The difficulties to evaluate these integrals is not only dealing with large amounts of calculation.

(4) Solving an important and difficult mathematical problem is not only depending on the development of computation techniques, but also requiring the establishment of new theory.

§3.3

1. (1) 这个想法被如下余弦定理证明是正确的。(不定式短语充当主语补足语。)

(2) 解三角形就是求该三角形未知的部分。(第一个不定式当主语,第二个不定式当表语。)

(3) 本文的目的是研究中学数学的教学现状并提出一些提高教学效果的建议。(并列不定式短语 to investigate…和(to)give…当整句的表语,to improve…当第二个不定式短语(to)give…的目的状语。)

(4) 每个学习数学的大学生都有必要了解现代集合论及其应用。(不定式短语当主语。)

(5) 我们认为用加上逆元的方式来表达减法是方便的,如 $x-y=x+(-y)$。(不定式短语当宾语从句中的真正主语。)

(6) 人们经常把表达式 $a_1+\cdots+a_n$ 缩写,即通过在大写的符号$\sum$的右边写出通项 a_n,并指明将要求和的那些项的范围来表示这个和式(如果由上下文已知求和范围,也可不在此指明)。(不定式短语 to show…当目的状语,to be taken 和 to be summed 都当表语。)。

2. (1) You can attempt to prove the proposition that the sum of any three consecutive even numbers can not be 56.

(2) This is easily seen to be an equivalence relation.

(3) It is clearly of interest to replace the bounded interval $[0,1]$ by the unbounded interval $(-\infty,+\infty)$.

(4) To prove the existence of the decomposition we have to introduce a new concept at first.

§3.4

1. (1) 于是,我们推出了一个重要的公式 $E=V+F$,称为欧拉公式。(形容词、名词、分词短语作定语。)

(2) 我们把 $f'(x)=\frac{dy}{dx}$当做函数 $f(x)$关于 x 的导数的符号来处理。(介词短语作定语。)

(3) 这个结果告诉我们,速度每一秒都以 32 m/s 的速率在减少。(介词短语、形容词作定语。)

(4) 定义导数的过程的几何解释以自然的方式导出曲线的切线的思想。(分词短语、定语从句、介词短语、形容词等作定语。译法的灵活性,把"有一个"改成"的",把主句译成主语。)

(5) 差商本身称为 f 在连接 x 到 $x+h$ 的区间上的平均变化率。(名词、介词短语、分词短语等作定语。)

(6) 我们可以根据一个运动着的质点的速度或加速度来计算它的位置。(介词短语、分词短语、物主代词等作定语。)

2. (1) Every continuous function attains its least upper bound, i.e. the supremum on the closed interval where it is defined.

(2) The normal line of the curve at point P is perpendicular to the tangent at the point.

(3) For any $\varepsilon>0$, find the smallest positive integer N satisfying $|a_n-A|<\varepsilon$ for all $n>N$.

(4) The range of the function is a set composed of the rational numbers which is greater than 2 and smaller than 5.

§3.5

1. (1) 有时，了解能使一个不等式中的等号成立的条件是很有用的。

(2) A 的伴随矩阵(记作 adj A)是这样的方阵，它的元素刚好是 A 中对应元素的余子式。

(3) 我们又称 $P(A)$为在该试验中事件 A 出现的概率。

(4) 它的历史开始于 17 世纪，那时牛顿、莱布尼茨和伯努利家族就解决了一些来自于几何及力学的简单微分方程。

(5) 其中有一些是从各种科学问题中产生的所谓线性微分方程。

(6) 本章我们的学习将从可以就 y' 解出且表成 $y'=f(x, y)$的一阶方程开始，其中右边的表达式 $f(x, y)$具有某种特殊的形式。

2. (1) This is the reason why we are required to check the roots when we solve a fractional equation.

(2) For a long time, people study arithmetic in elementary schools in which only four operations —— addition, subtraction, multiplications and division are considered.

(3) Now the proposition that the two triangles are similar is verified, from which follows the conclusion AB is two third of CD.

(4) In the preceding paragraph, we cited several practical examples where collection and arrangement of data is essential for establishing mathematical models.

§3.6

1. (1) 当不至于产生混淆时，术语“直线线段 AB”经常说成“线段 AB”或简称为“线 AB”。

(2) 只要集 A 的每一个元素也属于集 B，就称 A 是 B 的子集，并记作$A\subseteq B$。

(3) 如果变量 y 按如下方式依赖于变量 x，即对 x 的每个值，y 中有一个确定的值与之对应，则 y 是 x 的函数。

(4) 每个序列的最基本的特征是，存在一个定义在正整数集上的函数 f 使得对于每个 $n=1, 2, 3, \cdots$, $f(n)$为该序列的第 n 项。

(5) 集合的概念在现代数学中已经应用得如此广泛，以至所有的大学生都有必要了解它。

(6) 尽管这些特殊的技巧只适用于为数较少的一些情形，但是它们确实使我们有可能解许多来自几何和力学的微分方程，所以对它们的研究仍然具有重要的实际意义。

2. (1) The equality in the inequality can not hold unless $x=y$.

(2) Determine the constant C in the linear equation $y=2x+C$ such that the straight line passes through the point (1, 2).

(3) Since the quadratic equation $f(x)=0$ has no real root, the graph of the function $y=f(x)$ does not intersect x-axis.

(4) No matter how large is the positive number A, there exists an integer number N such that $|a_n|>A$ for each $n>N$.

§3.7

1. (1) 这个章节是解释"解微分方程的含义是什么,通解与特解的区别是什么"的好地方,也是描述和说明初值问题的合适场所。

(2) 由任何两个事物可以构成一个列(x, y),它称为一个有序对;而且除非$x=y$,否则它当然不同于(y, x)。

(3) 最后的例子使如下事实变得清楚了:双射的概念的约束太多,不能把像x^2这样简单的函数考虑在内。

(4) 我们进一步注意到,如果把映射写在左边,(2)式就要写成$(fg)x=g(fx)$。正是为了避免对因子作这样的次序调换,我们才把映射放在它们的自变量的右边。

(5) 另一方面,只要用一点时间就可以让自己熟悉这些抽象的概念;这时,那些(在某种程度上较为具体的)曾经为公理系统提供根据的模型将是有帮助的,尽管这不是绝对必需的而且确实并非是理论的一部分。

(6) 对一个矩阵的特征值的考察可能仍无法搞清楚是否可以求出一个由特征向量组成的基。

2. (1) It follows from the distributive law that $x\cdot 0=0$ for all x.

(2) It is this occurrence of infinite sets in mathematics that requires a finer analysis.

(3) It is important to distinguish between the set $\{x\}$ and the object x (which may itself be a set).

(4) It shows that $A\wedge B$ is true when A is true and B is true, and false in all other cases.

§3.8

1. (1) 例如,如果f是一个线性函数,比如$f(x)=mx+b$,差商(8.4)的值是m,所以m就是该直线的斜率。

(2) 例如在等式$81=3^4$中,给定的数是81,底数是3,而对数是4,也就是说$\log_3 81=4$。

(3) 这个源于力学的术语,就像上例一样,该指定的值在力学中表示在某个初始时间的位移。

(4) 除非另作说明,否则,对本章讨论的序列,都假设它们具有实数项或复数项。

(5) 我们通常不是孤立地讨论面积本身,而是讨论某种事物的面积。

(6) 例如，我们可以认为语句“从现在起一年之内，我将会在巴黎”既不是真，也不是假，它具有第三个值，不确定的值，该值可以用符号记作“1/2”。

2. (1) There are, of course, divergent sequences that do not have infinite limits.

(2) In fact, if the conclusion were untrue, then it follows that n is odd, which contradicts the hypotheses.

(3) The condition that the function $f(x)$is continuous is only sufficient but not necessary for the theorem to be valid.

(4) Fractal geometry, a new mathematical branch is widely applied in many fields of science and technique.

§3.9

1. (1) 有很多方法可以对 xy 平面作变换。

(2) 点 A 和 B 在阿尔冈图中分别用复数 $-1+i$ 和 $4-3i$ 来表示。

(3) 给定直线的向量方程由 $r=a+t(b-a)$给出，其中 t 是标量参数。

(4) 这些符号可以通过设置一个棋盘的模式来确定，使得正号与负号互相间隔地出现且在主对角线上取正号。

(5) 我们已经看到行列式是如何用于表示两个向量的向量积的。

(6) 当一个抛掷硬币两次时，第二次抛掷的结果不受第一次抛掷结果的影响。

2. (1) The volume is measured in cubed meter, but not in meter, neither in square meter.

(2) The algebraic methods have been applied widely to all branches of pure mathematics and applied mathematics.

(3) Since the mathematical model has been set up, it remains to verify its effects.

(4) Considering the prompt development of information and wide applications of electronic computers, it is required for all college students to study the higher mathematics and the knowledge of computers.

§3.10

1. (1) 假定从 200 中减去 x 的两倍，然后让这个差增加 20%。如果这个增加的部分等于把 x 减少 40%后的值，求 x。

(2) 一支笔做了 10%的折扣之后以 \$5.4 卖出。如果折扣改为 20 %，求售价。

(3) 旧款式手机的重量是 132 g。如果新款式手机的重量减少了 10%，那么新款式手机的重量是多少？

(4) 一个店主以 \$330 卖出一个计算器时，获得的利润是 10%。如果店主想要获得三倍的利润，那么计算器的卖价应为多少？

(5) 考虑函数 $y=\frac{k}{x}$，其中 k 是正常数。如果 x 增加 3 倍，则 y 减少了三分之二。

(6) 今年这个省的粮食产量比去年多了一半以上。

2. (1) The speed of a train is as high as 120km per hour, it is faster than that of a bus by 40km per hour.

(2) The marked price of this kind of mobile telephones is half as high again as the cost. If the selling price is 70% of the marked price, find the profit percentage, i.e., by what percentage is the selling price higher than the cost?

(3) If the amount N of the bacteria in a laboratory increases by 20% each 8 minutes, then it will increases by more than half the amount in 20 minutes, and will be doubled in 30 minutes.

(4) There are four numbers A, B, C and D, among which A is double B, C is three fourth of B and D is two third of the sum of B and C. Find the continued ratio of A, B, C and D.

§3.11

1. (1) 全集 S 可以看成是试验的所有可能出现的结果组成的集，正如在上一段讨论抛掷骰子的例子中的情形一样。

(2) 如果 $P(A)>P(B)$，则称事件 A 比事件 B 具有更大的可能性，而当 $P(A)\geqslant P(B)$ 时，则称事件 A 至少和事件 B 具有同样的可能性。

(3) 特别应当指出，空集 $\varnothing$ 和 $\{\varnothing\}$ 不一样。事实上，空集 $\varnothing$ 不含任何元素，而 $\{\varnothing\}$ 含有一个元素，即 $\varnothing$。

(4) 而且，正如空间的概念与现代数学融为一体一样，这种推广对函数概念的一般化作出很大的贡献。

(5) 人们并不把这些事物看成是实际存在的，而是看成现实情形的抽象模型。

(6) 直线 AB 的斜率大于直线 CD 的斜率。

(7) 概率是定义在某个博雷尔环的满足如下条件的集函数。

(8) 假定圆柱体的高固定不变，则它的体积与底半径的平方成正比。

2. (1) If the sequence $\{a_n\}$ tends to $+\infty$ as $n\to\infty$, then a_n will greater than the positive number A, no matter how large, whenever n is large enough.

(2) This equation can be solved by factorization method, as was done in Example 2 above.

(3) Random variables take values not so regularly as the ordinary variables.

(4) It is known to us that the attitude of the base of an isosceles triangle is also the bisector of its vertical angle.

(5) The conditions assumed must be sufficient that the differential equation has a unique

solution.

(6) The speed of the steam boat is 20 km/h as downstream and is only two third of it as upstream.

§3.12

1. (1) 但是，有一些概率为零的事件却不是不可能事件。

(2) 允许有不包含任何元素的集，这种集称为空集，并用记号∅来表示。

(3) **R** 中有一些子集很重要，因为它们具有一些并非所有实数都具有的特殊性质。

(4) 早期得到的那些计算结果远远不如近期的那么准确。

(5) 这个定义并没有对建立对应的方式作任何规定。

(6) 按照这种意义，一个集的元素的总数固定不变，也不必考虑元素的次序及重复出现的情形。

(7) 类似地，**N** 上的"x 和 y 分别除以 2 之后具有相同余数"这种关系把所有的偶数归为一类，而所有的奇数归为另一类。

(8) 向量含有方向的概念，而标量则不然。

2. (1) A positive number, however small, is always greater than any negative number.

(2) Each term a_n of a sequence has a successor a_{n+1} and hence there is no "last" term.

(3) If one of the sets A and B contains an element not in the other, we say the sets are unequal and we write $A \neq B$.

(4) Only after the rise of modern analysis in the early 19th century could the concept of function be extended.

(5) Not every matrix has an inverse.

(6) It is customary to consider y-components which are directed upward as positive and those downward as negative.

第　四　章

§4.1.1

(1) **存在问题**　(i) 这句本意指的是读者对象。但是原译把主语直译成"本书的仅有的必要条件"，使整句意思表达不清楚。(ii) 专业术语 real and complex analysis 应译成"实分析和复分析"；(iii) 把"扎实基础"与"基本结论"并列，不符合表达规范。

建【学习本书的读者只需具有实分析和复分析方面的扎实基础，并了解泛函分析的一些基本结论就够了。】

(2) **存在问题**　develop 在这里的意思不是"发展"，而是"开发"；短语"处理……表达式"的含义不清；况且 manipulate 的主要意思是"操作"或"运作"；"许多"二字出现的位置不妥。

建【作为这本教材的补充，作者还开发了一个可操作调和函数理论中的许多算式的软件

包。】

§4.1.2

(1) **存在问题** proper 未译出;construct an example of a space 应译成"构造一个空间作为例子",而不是"在空间中构造一个例子"。

㊣【为了判定一类拓扑向量空间 C_1 是另一类拓扑向量空间 C_2 的真推广,必须构造一个属于 C_1 的、但不属于 C_2 的拓扑向量空间作为例子,这样的例子称为反例。】

(2)**存在问题** 这里 introduction 是名词,意思是"引言"或"引子"。原译的毛病主要在于把 introduction 译成动词"引入",与原文意思不符;又,后半句也表达得不够清楚。

㊣【此后每章都用一个"引言"开头,在其中给出了相关定义及定理和命题的陈述,同时指明可以找到它们的证明的文献。】

§4.1.3

(1) **存在问题** 这句的主要问题是没把术语 specific and general solution 译成"特解与通解"。

㊣【这是一个用来解释解微分方程的含义是什么、解释特解与通解的区别、描述和说明初值问题的合适章节。】

(2) **存在问题** 译文句子太长,表达不清楚;saw-tooth, and the like 没有译好。

㊣【本章始于用传统方法引入拉普拉斯变换,同时介绍该变换在分段连续的力函数(方波、锯齿波及类似的波)上的应用。】

§4.2.1

(1) **存在问题** 原译表达的意思不够清楚。

㊣【设 S,T 是任意的集,我们把关于 $x\in S,y\in T$ 的所有有序对 (x,y) 构成的集记作 $S\times T$。】

(2) **存在问题** 译文中"众所周知,罗素悖论"表达的意思不够清楚,而且没把 may be 译出。

㊣【这类情况最为人所知的要数罗素悖论:一个集可能是它本身的一个元素,例如,所有已注册的慈善机构的联盟可能也是一个已注册的慈善机构。】

(3) **存在问题** 1) Most 本身是形容词,in most cases 意思是"在多数情形下",这不同于 the most 所表示的 more 的最高级;2) 译文中两个"在……情况下"的表达容易造成混乱。可适当更换用词以达到清楚表达的目的:

㊣【在多数情况下,不论任意给定的具体情形如何,所考虑的集都是某个称为"论域"的集 U 的子集。】

§4.2.2

(1) [**分析**] 本句由三个分句组成,它们中间用分号隔开。第二个分句可看成是一个条

件复合句，as in that case 是 as we are in that case 的省略。句中第二个 that 引导的宾语从句“as our knowledge widens we recognize more landmarks”又是一个主从复合句，其中 as 引导一个条件从句 our knowledge widens，主句是 we recognize more landmarks。

存在问题　1）原译文把第二个分句与第三个分句看成一个复合句是错误的，因为它们之间已经用分号隔开；2）第二个 as 错译成“好像”。

㊣【学习这些抽象的概念好比学习一门新的语言。在这种情况下我们将发现：知识面一旦拓宽了，就可以认识更多的指引标记，从而使得我们的学习变得容易多了。】

（2）**存在问题**　be able 没译出，导致译文不确切。

㊣【但是我们再也不可能用常识来检验这些结论。】

§4.2.3

（1）**存在问题**　第一句完全错了，因为原文的意思是：S 的元素是有限序列，其中每个序列由 0 和 1 构成。而 block 在这里最好译成“字段”或“字块”。

㊣【设 S 为所有由 0 和 1 构成的有限序列组成的集，定义 S 到它本身的映射 f 为：若 $a = a_1a_2\cdots a_n(a_i = 0$ 或 $1)$，则 $af = a'_1a'_2\cdots a'_n$，其中 $0' = 01$，$1' = 10$. 证明 af 不含字段 000 和 111，而 af^2 中任何长度不少于 5 个数字的字段都含有 00 或 11。】

（2）**存在问题**　因为 I_S 是随 S 而变化的，按中文的习惯要先讲 S 再讲 I_S。再者，“它”代表的对象不明确。可采用意译，修改成：

㊣【每一个集合 S 都指定了一个把 S 的每一个元素映成自己的恒等映射 $I_S: x \mapsto x$。】

§4.2.4

（1）**存在问题**　1）没根据上下文把 then 译出；2）对应关系没译清楚。

㊣【于是，我们就定义一个映射 λ：$S \to S/\sim$，这时，对每一个 $x \in S$ 都对应着分块 S_x，λ 称为从 S 到 $S/\sim$ 的自然投射。】

（2）**存在问题**　这句英语有两处省略，都被错译。

㊣【类似地，关系“x 和 y 分别除以 2 之后的余数一样”在 $\mathbf{N}$ 上把所有偶数归为一类，而所有奇数归为另一类。】

§4.2.5

（1）**存在问题**　第二句未译出 again；第三句未译出 start，结果与原意不一致。词组 lose sight of it 在这里的意思是“没看到它”，而不是“忘记它”。

㊣【你应从哪里开始？可从问题的表述重新开始。而且是在这种情形下开始的，即当你对这个表述很清楚，并在心中留下深刻的印象，以至于你即使在短时间内不去温习它也不担心会把它全部忘掉。】

（2）**存在问题**　if… at all 意思为“既然”、“只要”，if you have any idea at all 不可错译成“如果你有了任何全部思路”。Distinctly 的意思是“明确地”、“清晰地”，而不是“不同地”。同时应注意，整段都是在讲有益的思路，如果把后面的 idea 当成一般的思路则是不妥的。

㊣【一个思路怎样才能是有益的？这种思路向你展示了解决问题的整个或部分方法；它或多或少清晰地向你建议如何继续前进？这样的思路或多或少是完整的。只要你有了某个这样的思路，那你就很幸运了。】

§4.3.1

(1) **存在问题** 短语 whenever $m\in S$ for all $m< n$ 没译好，逻辑关系没理清。

㊣【设 S 是 $\mathbf{N}$ 的子集使得 $1\in S$，而且只要 $m\in S$ 对所有 $m< n$ 成立就有 $n\in S$；那么 $S=\mathbf{N}$。】

(2) **存在问题** 1)没认识到 for 引导的原因从句采用的是虚拟语气，把 otherwise("否则")错译成"别的"。2)错把 $S'=\mathbf{N}$ 和 S 并列作为"必须是空的"的主语；其实，"$S'=\mathbf{N}$"和"S 必须是空的"分别是两个结论，而且由上下文及数学知识知，这里先推出"$S'=\mathbf{N}$"，然后再由它推出"S 必须是空的"。

㊣【现在，因为 S 没有最小元素，所以 $1\notin S$，即 $1\in S'$；如果 $m\in S'$ 对所有 $m<n$ 成立，则 $n\in S'$；因为若非如此，n 就成了 S 中的最小元素。于是由 I′知 $S'=\mathbf{N}$，从而 S 必须是空的。】

§4.3.2

(1) **存在问题** 条件部分表达得不够简洁明了，结论把 either…or…译成"或……或……"不够顺达。

㊣【设 p 是素数而 m 是任意整数，则要么 p 整除 m，要么 $(p,m)=1$。】

(2) **存在问题** 译者不懂 in general 的数学含义(m 是 3 的推广)，译文含混不清。

㊣【证明 3^n-1 以及更一般的数 m^n-1 都是合数，这里 n 是大于 1 的整数，而 m 是大于 2 的整数。】

§4.3.3

(1) **存在问题** 标点符号未能正确使用，意群表达不清楚。

㊣【多项式 $10x^6$ 可以看做一个系数为 10 的、关于变量 x 的 6 次多项式，或一个系数为 $\frac{5}{2}$ 的、关于变量 $2x^3$ 的 2 次多项式，或一个系数为 10 的、关于变量 $\sqrt{x}$ 的 12 次多项式，或用其他形式表示的多项式。】

(2) **存在问题** 原文对句首提及的方程附加的条件太长，译文保持原来词序来翻译，结果使整句的主谓语相隔太远，造成译文含混不清。这类句子应采用意译，必要时先介绍附加条件，改变句型。

㊣【假定其中 $f(x,y)$ 是一个关于变量 y 的多项式，其系数取自以 x 为变量的复系数多项式环，那么多项式方程 $f(x,y)=0$ 定义了一个代数函数 y(见 3.16 节)，它的实图是一条代数平面曲线。】

§4.3.4

(1) **存在问题**　by sth. it follows that (从句)是数学上常用的表达形式，应译成“由……推出(结论)”；division 的一般含义是“除法”，这里根据群论的基本知识知道它指 cancellation (消元法)。译文根据猜测译成“比较”虽不算大错，但是不确切。

㊣【如果这个式子成立，则$(1_G f)^2 = 1_G f$，其中 1_G 是 G 的单位元；于是，由消元法推出，$1_G f$ 也是 H 的单位元。】

(2) **存在问题**　译文中出现∀是不妥的。实际上，在数学译文中，如果不是内容的需要，不能突然间冒出一个与全文不一致的特殊符号来。顺便指出，符号∀本身就表示“对所有(for all)”或“对任意的(for every)”，因此，即使在允许采用逻辑符号来表达的情况下，在∀前面添上“对”字也是画蛇添足的错误。

㊣【这样，对任意 $b \in S$，$bx=1$ 都有一个解，所以 S 满足定理 1 中的条件(c)，从而 S 是一个群。】

§4.3.5

(1) **存在问题**　短语 be conditioned to sth. 的意思是“习惯于”，译文没准确译出；in terms 的意思不是“在术语上”，而是“用术语”；may 没译出。

㊣【你也许会觉得这似乎“很显然”，因为你很可能习惯于用欧几里得术语来思考。】

(2) **存在问题**　惯用语 it turns out to be 在一般情况下的意思是“后来证明是”，这里应据上下文译成“后来也被证明是”。译文没把这一点译出；此外 the section 也没准确译出。

㊣【这个平行判别法的问题在于：它后来也被证明在逻辑上等价于前面所述的欧几里得平行公设(参看第二章平行公设的等价性那一节)。】

§4.3.6

(1) **存在问题**　短语 in terms of sth. 的意思是“用某种符号或语言来……”，不可译成“根据”；用“当”作引导条件句的连词时，通常要用“时”搭配(如把“当”改成若，就不可用“时”搭配)。此外，应把“this”明确化，不用直译成“它”。translate 本意为“翻译”，这里译成“表示”虽然基本合意，但不如译成“改写”确切。

㊣₁【当我们用 x 和 y 来表示该式时，就得到(6.1)。】

或意译成：

㊣₂【若用 x 和 y 来改写该式，就得到(6.1)。】

(2) **存在问题**　译文的主要问题是没分清 or 是连接哪两个对象。对这类问题，常要靠数学知识来判断。从上下文推知，这里的长度指的是向量的长度，也就是向量的范数(在有限维空间二者一致)。

㊣【柯西－施瓦茨不等式在向量的长度(或称为范数)的性质方面有很重要的应用，这个概念我们将在下面讨论。】

§4.3.7

(1) **存在问题** 译文没理清意群之间的逻辑关系，也不理解生成圆锥的直接因素是直线。应注意，这里第一句只是“设 Π 是任意的实平面”而已，并没说在 Π 上给出一个圆。所以，不应把 a given… as above 译成“上述给定的”，而应据上下文译成“如上所说的、一个给定的”，即按以前的办法，在平面上取定一个圆。

对于这个含多个修饰语且关系复杂的句子，译文未采用分段译出，也增加了产生逻辑混乱的可能。

㊣【设 Π 是任意的实平面，考虑由如下直线所生成的正圆锥：这些直线通过固定点 P 和如上所说的，一个给定的、以 Q 为圆心的非退化圆。】

(2) **存在问题** 首先，根据数学知识，这里 α 表示角而不是表示角度；再者，constant 在这里是形容词，constant angle 意思是“定角”(不变的角)。因此译成“夹角为常数 α”是不妥的。

㊣【设母线和 PQ 之间的夹角为定角 α。】

§4.3.8

(1) **存在问题** 这句的条件很长，译者想按汉语的习惯把条件先译出，但没注意到不能简单地把原文的主句与从句调换次序，结果没表达清楚。其实，对这类句子，翻译时一般应参照原文把结论放在前，把条件放在后；这时若有需要，在结论之前补充一个提示。

㊣【一般地，一条 n 阶曲线如果满足下面条件，则它在奇异点 P 有 k 条切线：每一条通过点 P 的直线与该曲线在点 P 相交的重数至少为 k 且存在一条直线与该曲线在点 P 相交的重数恰好为 k。】

(2) **存在问题** 把 has a node at the origin 直译成“有一结点在原点上”，不符合汉语的习惯；第一个分句最好译成“原点是笛卡儿叶线 $x^3+y^3=3axy$(图 4.3.3)的一个结点”；其他分句类似。此外，译文中笛卡儿叶线后面的两个逗号是多余的，应去掉。

㊣【原点是笛卡儿叶线 $x^3+y^3=3axy$ (图 4.3.3)的一个结点，而直线 $x+y+a=0$ 是它的一条渐近线；原点是半三次抛物线 $y^2=x^3$(图 4.3.4)的一个尖点；原点也是曲线 $y^2=x^2(x-1)$(图 4.3.5)的一个孤立点。】

§4.3.9

(1) **存在问题** 译文 1 和译文 3 都有表达不清的毛病，使人不知所云。译文 2 表达是清楚的，但不合原意。注意，no 放在开头的这类句子是完全否定句，在这里表示“不存在”。

㊣【多项式的另一个性质是：不存在有界的非常数的多项式。】

(2) **存在问题** 根据数学内容知，are all 在这里的意思是“是所有的”，而不是“都是”；no zeros 不表示非零(non-zero)，而表示“没有任何零点”。此外，“n = 多项式 $p(z)$ 的阶”的表达方式不规范，应译成“多项式 $p(z)$ 的阶为 n”或“$p(z)$ 是一个 n 阶多项式”。

㊣【如果多项式 $p(z)$ 的阶为 n 且 a_1，…，a_k 是 $p(z)$ 的所有的不同的零点，则 $p(z)=$

$(z-a_1)^{m_1}\cdots(z-a_k)^{m_k}s(z)$，其中 $s(z)$ 是一个没有零点的多项式。】

§4.4.1

(1) **存在问题**　译文忽略了连接词 for(因为)，也忽略了 only approximate，结果译文的意思不完整，各个意群之间的关系缺乏逻辑性。

㊣【我们强调“近似”这个词，这是因为，虽然数学常常被当做一门精确的科学，但是数学只应用于那些仅仅近似于现实世界的模型。】

(2) **存在问题**　短语 generalize…to…的意思是“把……推广至……”，译文没译出。

㊣【把练习 1.1 的结果推广至一个由 N 个质点组成的坚硬物体上。】

§4.4.2

(1) **存在问题**　in the last section 的意思不是“最后一部分”，而是“在上一节”。此处 think 应译成“认为”；“对于任何一段扩展时期”的表达不通顺。

㊣【在上一节，我们看到增长性不受限制的微分方程是 $\frac{dy}{dt}=ry$。然而，没有理由认为，任何一个支持系统可以在任意延长的时期内经受无限制的增长性。】

(2) **存在问题**　译者对句子法语法结构分析有误，译文表达不清。How does one account for the fact 的意思是“人们如何解释这个事实”。

㊣$_1$【但是，所有这些都是假定，当 $b>d$ 时任何一种可能的增长性都是不受限制的。那么，要如何解释自然资源(如一个皮氏培养皿的琼脂培养基，或是一片热带雨林，或是太平洋)为有限的事实呢?】

㊣$_2$【但是，所有这些都是假定，当 $b>d$ 时任何一种可能的增长性都是不受限制的。那么，要如何解释这样的事实，即自然资源 —— 如一个皮氏培养皿的琼脂培养基，或是一片热带雨林，或是太平洋，是有限的呢?】

(3) **存在问题**　句中 following 应译成“遵循”；虽然 carrying 有时可译成“进位”，但没有“进位容量”这一术语，所以 carrying capacity 宜意译成“饱和量”。第二句 if we were past half-way 中的 we 指的是“人口”，不宜直译成“我们”。第三句 the flaw in this reasoning 译成“裂痕的原因”不妥，因为 in this reasoning 意思是“在这个推理过程中”；又，连接最后的分句的 and 有进一步推断的意思，应译成“那么”。

㊣【如果地球上的人口变化遵循逻辑斯谛曲线，那么目前人口还未达到饱和量的一半，这是因为至今其增长率仍然在增加。假如人口超过饱和量的一半，增长率就会下降。当然，这个推理过程的漏洞很可能是人口变化并不遵循逻辑斯谛曲线，那么我们可能陷入的困境会比上述分析所预示的更为严重。】

§4.4.3

(1) **存在问题**　表达不清楚，特别，译文可能使人误以为“算法和图论”具有同一个定语。此外，像 the study of discrete structures 这类名词化结构必要时可译成动宾结构的短语。

㊣【离散数学 —— 研究离散结构(通常是有限集)及其性质的学科 —— 包括组合学(关于各种对象的组合与计数的研究)、关于对象集的计算性质的算法、图论(关于各种对象及其关系的研究)。】

(2) **存在问题** as 在这里不是引导原因从句的连接词,而是引导(前置的)定语从句的关联词,可译成"这种情形"。

㊣$_1$【读了这一章后以下事实就会变得明显:图论是优秀的建模工具。】

或进一步意译成:

㊣$_2$【读了这一章后就能明显地看到,图论是优秀的建模工具。】

§4.4.4

(1) **存在问题** 动词 represent 虽有"代表"的含义,但一般只有个体(或局部)代表整体或另一个局部,而不会用整体去代表个体(或局部)。本句中 represent 的含义是"表现"或"描绘"。

㊣【也可回顾如下事实:在单纯形算法中,初始系统描绘了原点,那时原点是可行解,且在随后的每一个步骤中都产生了另一个基本可行解。】

(2) **存在问题** the constant constraint bounds 是数学术语"约束的常数界"。这里译错了。

㊣【假如需要的话,我们阶段算法的第一步是通过乘以 -1,把约束的常数界的负号去掉。参照例题 4.2,在去除负号后,出现在(4.4)中的第一个约束条件变成了 $x_1-x_2\leqslant 1$。】

§4.4.5

(1) **存在问题** dependent variables 指的是"应变量",不是"相关变量"。

㊣【模型寻求的用于解释有关现象的变量是应变量,而应变量可能有多个。】

(2) **存在问题** 句子的后半部分拘泥于直译,译得不准确。

㊣【在第二个步骤所作的假设,在自变量的某个限定的范围内可能是合理的,但在这范围之外却是不合理的。】

(3) **存在问题** 表达不够清楚。动词 demonstrate 虽有"证明"的意思,但在这里的意思是"展示"。

㊣【正像我们不能通过展示许多支持定理的情形来证明一个定理一样,我们不能只由收集到的关于模型的特殊证据就推断其具有广泛的普遍性。】

§4.5.1

(1) **存在问题** 词组 be concerned with 的意思是"涉及",这里介绍学科,所以可转译成"研究的是"。

㊣【数值分析这门学科研究的是各种求得数学问题之可靠的数值答案的方法的推导、分析与实现。】

(2) **存在问题** 未能正确翻译 correct to some specified tolerance。

㊣【在 6.8 章，我们将描述一种应用区间的细化来估计定积分的方法，它能精确到指定的容许误差。】

(3) **存在问题**　译文的句子太长，表达不够清晰。

㊣【根据直观观察，我们会想到按这样的办法来改进精确度：把积分区间划分成很多子区间，然后在子区间依次应用梯形规则。】

§4.5.2

(1) **存在问题**　术语 the linearized method 的意思是“线性化方法”，而不是“线性方法”。动词 conduct 虽有“操作”的意思，但这里宜译成“指导”或“引导”。

㊣【当我们阐述一些可能适用于这些非线性问题的线性方法时，数值实验应当采用试图求解非线性问题的线性化方法来引导。】

(2) **存在问题**　第一句的时态是现在完成时，过去分词 done 引导的短语作定语修饰 work。所以译文的第一句不合原文的意思。第二句定语从句 which is not especially useful to us 修饰的对象是 solution，而不是 the problem。所以第二句也译错。译文的第三句基本正确，只是 since 引导的原因从句翻译得不够准确。

㊣【读者应当知道，人们对以上问题已经做了大量工作。这个问题存在着对我们并不特别有用的精确解。试着在未知精确解的情况下解这个问题可能更好，因为从事数值分析工作的人必须在这种环境下运作。】

§4.5.3

(1) **存在问题**　译文对 among the consequences… 的含义理解有错，后一个分句中“它”字指代不清。

㊣【这一意义深远的成果所产生的一个结果是关于计算机理论模型的思想的发展，后者帮助人们最终造出真实的计算机。】

(2) **存在问题**　第一句基本正确，第二句表达的不够准确，如 computability 和 complexity 应并列译成 theories 的定语。第三句连词 as 在这里的意思不应是“像”，因为上下文没有涉及“它引入与计算机科学的其他非理论领域有关的概念”。作为专业术语，formal definitions 应译成“形式定义”。

㊣【自动机理论是学习计算理论的极好起点。可计算性理论和复杂性理论需要给计算机下一个精确定义。自动机理论在引入与计算机科学的其他非理论领域有关的概念时，允许使用计算的形式定义。】

§4.5.4

(1) **存在问题**　“一个 NP 的完全性也需要”的表达不妥。译者只抓住动词 find 有“认为”的含义，没有认真分析句子的语法结构，未考虑 find 的其他含义，结果把第二句译错了。

㊣【如果 NP 中的任何问题需要的时间都超过多项式时间，则任何 NP 完全问题也是如此。因此，那些试图证明 NP 等于 P 的研究者只需对某个 NP 完全问题找到多项式算法，就

可以达到目的。】

(2) **存在问题** 从句中的 necessary 当定语，the necessary mathematics 的意思是“必需的数学工具”，译成“没必要用数学知识”是错的；so 引导的分句表达不清楚。

㊣【尽管可能还没有必需的数学工具来证明 NP 问题在多项式时间内是不可解的，但是我们仍然相信 P 不等于 NP，因此，证明了一个问题是 NP 完全的，就得到了该问题的非多项式性的有力证据。】

(3) **存在问题** 不定冠词和定冠词没有译好。此外，assignment 既是名词，又有动词的含义，译者没有表达清楚。应注意，遇到这种不便于直译的情形，应采用意译。

㊣【一个布尔公式称为是可满足的，如果存在某个用 0 和 1 给各个变量赋值的指令能使该布尔公式的值为 1。例如，前述的公式(指 $\phi = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{z})$，译者注)是可满足的，因为指令 $x=0, y=1, z=0$ 可使 ϕ 的值为 1。我们就说该指令满足 ϕ。可满足性问题可用于验证布尔公式是否为可满足的。】

§ 4.5.5

(1) **存在问题** 译文的意思基本正确，只是表达得不够准确。

㊣【当然，这个定义的有效期略短，因为它只是参照计算机科学的现有状态给出的。而且它未能包括某些具有很大的潜在影响的领域，即那些目前既不能由计算机也不能由人解决的问题。】

(2) **存在问题** 动词 share 在这里不宜译成“分摊”，最好译成“都有”。

㊣【游戏的玩法和定理的证明都具有这种性质，即善于做这类事的人被认为是在展示智力。】

(3) **存在问题** 这里 again 应译成“同样地”；译文的句子应补充主语。

㊣【同样地，他们也不打算创建涉及某个特殊问题领域的大量知识的程序。】

§ 4.6.1

(1) **存在问题** while 引导状语从句，应译成“虽然……但是……”；localized 应译成“局部化的”；介词短语 for which 的意思是“因为如此”。

㊣【虽然这个方法适合滤除或压缩那些具有时间独立的波状特征的信号，但是其他信号可能会具有更多局部化特征，因此正弦波和余弦波不能很好地模拟它们。】

(2) **存在问题** 虽然在数学中动词 declare 常可译成“断言”，但在这里的意思是“令”或“设”。应注意词组“by declaring…”是修饰 truncating，说明如何“截断一个正弦或余弦波”，即前后两个 by 引导的短语不是并列的。

㊣【这就是为什么我们不能简单地通过截断一个正弦波或余弦波，即令它在一个或多个周期之外取 0 值来构造小波。】

§ 4.6.2

(1) **存在问题** the bibliography 在这里指附在书末的参考文献，不是通常意义下的“图

书目录”。第二个 which 引导的从句是非限制性的定语从句，因为它不长，可以直接译成主句中的定语。

㊣【当然，在这个方面有许多出色的工作，其中有部分已列举在参考文献中，它们将使读者进一步了解那些在这里作了概述性分析的工作。】

(2) **存在问题**　不合原文的意思。

㊣【我们首先要考虑的是表达的清晰性，而不是数学的严密性。】

(3) **存在问题**　exercise 在这里不应译成“运动”；too 在这里不能译成“也”，而应译成“很”或“非常”。

㊣【最后，读者将看到，这种自由可以在数学的平台上发挥，在那里可能比其他地方得到更多地发挥 —— 这是工程师很经常会忘记的一种东西。】

(4) **存在问题**　在数学中 initial value 常译成初始值，但副词 initially 的意思是“在起初”或“首先”。虽然同根词意思有联系，但具体含义却有差别，所以应多作查证。

㊣【我们说，该曲线用 $l(t)$ 当参数，对此我们首先假定它有定义且处处连续。】

§4.6.3

(1) **存在问题**　whenever 不等于 when，应译成“只要”。

㊣【这些类别称为模糊集，例如，只要我们采用数学模型来描述实验的现象的含混不清、模糊、不明朗性时，模糊集就出现了。】

(2) **存在问题**　虽然 a in B 常表示 $a \in B$(a 属于 B)，但是，在短语 a fuzzy set A in X 中就没有 $A \in X$ 的意思，因为 A 不是 X 的元素，这时只能译成“X 上的模糊集 A”。词组 the grade of membership of x in A 通常译成“x 对 A 的隶属度”(即“x 属于 A 的隶属程度”)，不译成“x 在 A 中的隶属度”。

㊣【那么，X 上的模糊集 A 是一个由有序对 $A = \{x, \chi_A(x)\}$，$x \in X$ 组成的集，其中 $\chi_A(x)$ 称为 x 对 A 的隶属度。】

(3) **存在问题**　mathematical formulation 的意思不是“数学公式”。

㊣【但是，在许多情况下，即使模型是精确的，模糊性也可能是复杂性的伴随物。在现实生活中高基数的系统是无法控制的，而它们的计算机模拟实验要求用某种数学方法去处理那些不精确的数据描述。】

(4) **存在问题**　译文采用直译，未能准确表达数学含义。在模糊数学中，往往需要根据数学知识进行意译。

㊣【模糊集理论在处理论域 X 的子集 A 时，成员由完全隶属于 A 到不隶属于 A 之间的转化过程是逐渐的而不是突变的。】

§4.7.1

(1) **存在问题**　数学术语翻译不当。事实上，the angle of elevation of P from A 表示从 A 观察 P 的仰角。俯角的情形类似。

㊣【设 P 是某个建筑物的顶部，A 是地上某处的一个人。若由 A 测到的 P 的仰角为

31°,求由 P 测到的 A 的俯角。】

(2) **存在问题** 第一句未用专业术语表达,实际上,a half-life of 20 years 的意思是该放射性物质的"半衰期为 20 年";to the nearest milligram 表示计算时应满足的精确程度是"精确到毫克"。

㊣【设某种放射性物质的半衰期为 20 年"。如果该物质现在有 2 500 毫克,40 年后将剩下多少(精确到毫克)? 50 年后呢?】

§4.7.2

(1) **存在问题** 译者由于只作呆板的翻译,文句不通顺,表达不清楚。

㊣【三个数的和是 20。第一个与第三个数的和比第二个数的两倍多 2。第三个数减去第一个数之后等于第二个数的三倍。】

(2) **存在问题** That 引导的整个从句是 don't forget 的宾语,说明如何检验;而原来的译文表达不清,似乎宾语是"检验像例 7 那样的题目"。

㊣【解下列方程组。不要忘记的是,检验像例 7 那样的题目时,必须把潜在的解代回原方程去检验。】

第 五 章

§5.1

1. Differential equation , linear combination, characteristic root, substitution method, hyperboloid, elliptic type, mathematical level, training.

2. (1) Zhang lidao, Linear algebra, Science press, 1990.

(2) Li dashi, Wang yuan, On the solution of some indeterminate equation of higher order, Applied Mathematics, 2(2007), 25-30.

§5.2

1. (1) Exploration of the mathematics teaching methods to improve the quality of mathematics teaching

(2) On some applications of the mean value theorem of integrals

(3) Solutions to a class of second-order ordinary differential equations by the method of undetermined coefficients

2. (1) On Riesz Mean Inequalities for Subelliptic Laplacian

(2) Analysis of the Soliton Resonances of the Nonisospectral Modified Kadomtsev-Petviashvili Equations

(3) Existence of solutions for some kind of integral equations

§5.3

1. (1) Positive solutions to the elliptic equations involving critical and subcritical terms

Abstract　A kind of elliptic equations involving critical and subcritical terms is studied. Under certain local $(PS)_c$ conditions, the existence of positive solutions to the equations is proved by using variation method and analytic techniques.

Keywords　positive solutions; critical terms; $(PS)_c$ conditions

(2) Some reform measures on the teaching method of mathematical analysis and their practical effects

Abstract　Based on a serious analysis on the main problems in the teaching method of the course "Mathematical Analysis", we propose some reform measures which have been proved in our practice to be helpful to improve the teaching effects.

Key words　mathematical analysis; teaching method; teaching reform; teaching effects

2. (1) **存在问题**　在摘要中采用祈使句。可改为

Abstract　In this paper, we apply Lagrange mean value theorem to solve a kind of inequalities and generalize some well-known results.

(2) **存在问题**　前后两句主语不协调。可改为

Abstract　This paper mainly focuses on the Riesz means of eigenvalues of the subelliptic Laplacian on the Heisenberg group H^n. The authors establish a trace formula of associated eigenvalues, then prove differential inequalities, difference inequalities and monotonicity formulas for the Riesz means of eigenvalues of the subelliptic Laplacian.

§5.4

1. 经济学中带有连续超额需求函数的 Walrasian 均衡理论的存在性可以用 Brouwer 不动点定理来证明。但人们已广泛认识到 Brouwer 不动点定理不是一个可用构造性方法证明的定理。

所谓的 Uzawa 等价定理([3])证明了 Walrasian 均衡理论的存在性等价于 Brouwer 不动点定理，即任意从 n 维单形到它自身的连续函数存在不动点。

然而均衡价格向量的存在性是不可判定的，在[4]中 Velupillai 证明了 Uzawa 等价定理蕴含图灵机停止问题的可判定性。

在本文中我们重新考察了 Uzawa 等价定理的可判定问题，准确地说，是 Walrasian 均衡价格向量的存在性的可判定问题，而该向量在 Uzawa 等价定理中被假设是当然存在的。我们利用一种广义的 Cantor 对角论证方法证明了均衡价格向量的存在性是不可判定的，该方法是由 Yanofsky [5] 在 Lawvere [2]工作的基础上提出的。

由文[5]，Cantor 定理的一种推广的版本可以叙述如下：设 Y 是一集合，$a: Y \to Y$ 是一个

没有不动点的函数(即对任意 $y\in Y,\alpha(y)\neq y$),T 和 S 都是集合,$\beta: T\to S$ 是满射(即存在逆映射 $\beta^{-1}: S\to T$),那么对所有的函数 $f: T\times S\to Y$,按下图表示的方法所构造的函数 $g: T\to Y$ 无法用 f 来表示,其中 Id 表示 T 上的恒等映射。

由著名的 Cantor 定理得出的推广知,正整数集 N 的幂集 $P(\mathbf{N})$ 的基数大于 N 的基数,换句话说,不存在 $\mathbf{N}\to P(\mathbf{N})$ 的满射。在我们的主要结果的证明中,我们将采用类似于证明 Cantor 定理的方法。

在本文的第二部分我们给出了 Walrasian 均衡理论的存在性定理和 Uzawa 等价定理。在第三部分我们给出了 Cantor 定理的一个推广和它的证明,并证明了,在 Uzawa 等价定理中所假设的均衡价格向量的存在性是不可判定的。

2. (1) 把[3]放在括号()中,作为插入语,表示附注,说明它前面的定理所刊登的文献。

(2) [4]作为介词宾语。

(3) [5]作为 Yanofsky 的同位语,两者同时充当介词宾语。

§5.5

1. (1) Let $N>1$ be an integer. N is called a prime number if it is not divided by any integer greater than 1 except N itself. If N is not a prime number, then it is said to be a composite number.

(2) Let AB and CD be two parallel lines, if AB and CD are cut by a line EF at E and F respectively, then the corresponding angles formed by them are equal.

(3) If a function $f(x)$is continuous on the interval $[a, b]$ with $a\leqslant f(x)\leqslant b$, then there exists a point $c\in(a, b)$such that $f(c)=c$.

(4) Suppose f is a mapping from topological space X to topologic space Y and $a\in X$, $b\in Y$ such that $f(a)=b$. If for any neighborhood U of b, there exists a neighborhood V of a satisfying $f(V)\subseteq U$, then we say the mapping f is continuous at a.

2. (1) If a triangle has two equal sides, we say it is an isosceles triangle.

(2) We define a triangle with two equal sides as an isosceles triangle.

(3) We refer to a triangle with two equal sides as an isosceles triangle.

3. (1) Theorem Suppose a function $f(x)$is continuous on $[a, b]$ and differentiable in (a, b). If $f(a)=f(b)$, then there is a point C in (a, b)such that $f'(C)=0$.

(2) Theorem Let $ABCD$ be a quadrilateral. If it has two sides which are parallel then it is a trapezium and it is a parallelogram if the sides are also equal.

(3) Definition If there exists a constant M such that $f(x)\geqslant M$ for all x in $[a, b]$, then M is called a lower bound of $f(x)$on $[a, b]$.

(4) Definition A triangle is said to be a regular triangle if its three sides are equal.

§5.6

1. (1) From the inequality A, we conclude that: m and n are coprime. This contradicts to the assumption.

(2) Without loss of generality, we assume k to be nonnegative integer, since the proof of the other cases is similar.

(3) We assert that this variable has no limit. In fact, it is easy to prove that the variable is unbounded by the following steps.

(4) Then, to obtain the conclusion, it is sufficient to verify that the polynomial has only one zero.

(5) The desired conclusion is followed by integrating both sides of the above inequality with respect to the variable t in $[a, b]$.

(6) By the equation (4)and the formula of Zensen, it follows that the propositions A and B are equivalent.

2. (1) Let t be the time of the car to catch the bus.

(2) Since $x > a$, $y > 0$, we have $xy > ay$, which implies the conclusion is valid.

(3) The house has a height of 25 meters.

(4) There exists a unique matrix $\boldsymbol{B}$ such that $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$ if and only if $\boldsymbol{A}$ is a nonsingular square matrix.

(5) To prove the conclusion, it remains to verify the necessary condition.

(6) It is sufficient to consider the case $a > 0$.

第　六　章

§6.2.1

一、模拟试卷 1

(一) 1. 高等代数;2. 带余除法;3. 柱面方程;4. 概率事件;5. 等边三角形;6. 坐标变换;7. 多元函数;8. 命题演算;9. 依幂级数展开;10. 依测度收敛;11. 等腰三角形。

(二) 1. 一个量与另一个同类量的比定义为第一个量除以第二个量所得的商。

2. 微分方程指的是包含未知函数的一个或多个导数的方程。

3. 基础集可根据应用的不同而改变,它称作每一个特定论域的全集。

4. 称向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是线性相关的,如果存在非零数组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 使得 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.

5. 序列$\{a_n\}$ 称为柯西列当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$ 都存在 $n^* \in \mathbf{N}$ 使得 $|a_m - a_n| < \varepsilon$ 对所有的 m 和 $n \geqslant n^*$ 都成立。

6. 可测空间 X 上的复函数 f 若其值域仅仅由有限多个点组成,则称之为简单函数。

7. 我们在 x 轴上作出定义域 X，且在 X 的每一点的上方画出点 (x, y)，这里 $y=f(x)$。

8. 通过存在量词化，我们所构成的命题是真的当且仅当在论域中至少存在 x 的一个值使得 $P(x)$ 为真。

（三）1. 我们经常借助于命题函数来描述 S 的子集，于是，$\{x\in S\mid P(x)\}$ 表示由（并且只由）使得 $P(x)$ 成立的那些元素 x 组成的 S 的子集。例如，如果所有自然数组成的集记作 $\mathbf{N}$，则所有奇数构成的子集可记作 $\{x\in\mathbf{N}\mid x$ 是奇数$\}$。

2. 笛卡儿是分析几何的发明者，也是现代代数符号的创立者之一，他曾相信所有问题最终都能简化为求解联立线性方程组。

3. 这个问题是如下更一般问题的特殊情形：计算由含 n 个元素的集可以构成的含 k 个元素的不同子集的个数，其中 $n>k$（当我们说一个集有 n 个元素时，指的是它有 n 个不同的元素。这样的集有时也称为 n-元集）。

4. 但是，为了更好地了解概率，需要考虑三个术语，即试验、实验和事件。它们也在日常生活中使用，但是在讨论概率时具有特别的含义。

5. 值得注意的是：由于指数函数（以正数为底）的定义域为整个实数集合，而值域为正实数的集合；相应的对数函数的定义域是正实数集合，而值域是全体实数的集合。

（四）1. 对学生来说，重要的是要懂得“比例是两个同类量的商”。一条线段的长与一个角的大小的比是没有意义的，这是因为它们不是同类量。我们可以求出一条线段与另一条线段长度的比，或者一个角与另一个角大小的比。为了求出它们的比例，我们只要对它们进行测量并求出它们的测量值的商就可以了。而这些测量值必须用相同的单位表示。

2. 在多数情况下，在任何一种给定的情形下所考虑的集都会是某个给定的称为“全集”的集 U 的子集。这样，集 U 可以是自然数集或是平面上的所有三角形组成的集等。在这种情形下，我们可以对任何集 S 构成它的补（集），即由 U 中不属于 S 的所有元素组成的集，记作 S'。于是，若 S 是所有奇数组成的集，则它（在所有自然数组成的集中）的补就是所有偶数组成的集。这个例子使得如下事实变得清楚起来，即为什么很有用的补集必须在一个给定的作为全集的集中来取。

3. 现在设 f 在 x 可导，这意味着当 h 趋于零时，差商趋于某个极限 $f'(x)$。其几何意义为，当 h 趋于 0 时，点 P 保持不动，而点 Q 沿曲线趋近 P；同时，经过 PQ 的直线以这样的方式改变方向，即其斜率趋于数 $f'(x)$，并以它为极限。为此，很自然地把曲线在点 P 的斜率定义为数 $f'(x)$。通过点 P 的斜率为 $f'(x)$ 的直线称为曲线在点 P 的切线。

4. 在初等几何中，你们学过了几何图形全等的概念。你们也懂得了判定三角形全等的条件。如“边角边”条件称：如果一个三角形的两边和它们之间的夹角与另一个三角形的两边和它们之间的夹角的度量分别相等，则这两个三角形全等。换言之，知道三角形的两边的长度和它们的夹角的大小就可确定这个三角形的形状与大小。

二、模拟试卷 2

（一）1. 等边三角形；2. 切线；3. 自变量；4. 单调序列；5. 连续函数；6. 方阵；7. 方程组；8. 不定积分；9. 线性组合；10. 两个向量的和。

（二）1. nonnegative integer; 2. finite interval; 3. polynomial in x; 4. determinant with

order 3; 5. the domain of the function; 6. a constant greater than zero; 7. addition, subtraction, multiplication, division; 8. the radius and center of a circle; 9. a sequence converging to A; 10. a straight line perpendicular to the plane P.

(三) 1. 解方程就是要求未知项的值。为此,当然要把各项进行变形,直到未知项单独放在方程的一边,并使它等于另一边的一些东西。

2. 假定 S 是由线性空间 V 中的 k 个元素组成的一个无关集,又设 $L(S)$ 是 S 张成的子空间。那么,每个由 $L(S)$ 中的 $k+1$ 个元素组成的集都是相关的。

3. 微分方程根据未知量是单变量函数或多变量函数分成两类:常微分方程和偏微分方程。

4. 一个序列称为有界的,如果存在正数 M 使得 $|f(n)|\leqslant M$ 对所有 n 都成立。一个序列若不是有界的,则称为无界的。

(四) 1. On the rectilinear motion, the first-order derivative of velocity is called the acceleration.

2. A is the set consisting of the positive integers less than 100 which are divisible by 3.

3. Integrating both sides of the equality with respect to t, we obtain all solutions of Equation (1).

4. This paper considers differential equations of second-order and proves the existence and uniqueness theorem under more general conditions.

(五) 1. 如果一个关系是自反的、对称的和可传递的,则称这个关系为等价关系。因为等价关系的作用与相等非常类似,所以常用符号"$\equiv$"表示等价关系(顺便提一下,"相等"关系在实数范围内是等价的)。

整数等价关系的另一个例子是 $a\equiv_2 b$,表示 $a-b$ 是偶数。值得注意的是关系 $\equiv_2$ 把整数集合划分为两个不相交的集合(称为等价类),偶数集合和奇数集合。

换句话说,这两类分别是与 0 等价的整数和 1 等价的整数。

2. **定理 1**　设 V 是有限维线性空间且维数是 n,则有如下结论成立:

(a) 空间 V 中任何(一组)线性无关的元素构成的集合是 V 的某个基的子集;

(b) 任意 n 个无关的元素构成的集合是空间 V 的一个基。

证明　(a) 部分的证明和定理 8.10 的(b)部分的证明一样,(b)部分的证明和定理 8.10 的(c)部分的证明一样。

设 V 是 n 维线性空间,考虑空间 V 的一个基,假定它的元素按次序排列为 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$。现在把这个有序基表示成一个 n 元组 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$。如果 $\boldsymbol{x}\in V$,则可将 $\boldsymbol{x}$ 表示成这些基元素的线性组合 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{e}_i$。等式中的系数确定了一个 n 元数组 $(c_1,\cdots,c_n)$,它由 $\boldsymbol{x}$ 唯一确定。

事实上,如果 $\boldsymbol{x}$ 表示成 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的另一个线性组合,比如说 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}d_i\boldsymbol{e}_i$,那么将(10.4)式减去此式,可得 $\sum_{i=1}^{n}(c_i-d_i)\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$。然而,由于基元素是线性无关的,这就蕴含着对于每个 i,都有 $c_i=d_i$,所以 $(c_1,\cdots,c_n)=(d_1,\cdots,d_n)$。

由等式(10.4)所确定的 n-元数组(c_1, …, c_n)的分量称为 x 关于有序基(e_1, …, e_n)的分量。

§6.2.2

一、硕士研究生入学复试试卷(真题)

(译文)应用数学是数学的一个分支,它主要研究可应用于科学、工程、商务和工业等领域中的数学方法。因此,可以这样认为,"应用数学"是一门与其他专业知识结合的数学科学。"应用数学"这个术语也描述了数学在解决实际问题中的专业特色。作为以实际问题为研究重点的一种专业,应用数学致力于数学模型的公式化表述和研究。在历史上,数学的实际应用激发了数学理论的发展,而后这些数学理论又成了纯数学的研究对象,而纯数学的发展主要为了数学自身的需要。所以,应用数学的工作与纯数学的研究有本质上的联系。

历史上,应用数学主要由应用分析(特别是微分方程)、逼近理论(大致上说,包括表示论、渐近法、变分法和数值分析)和应用概率论组成。这些数学领域与牛顿物理学有紧密的联系,而且在事实上,在19世纪中叶之前数学与物理还没有完全区分开来。这些历史现象也留下了一些"遗产":直到20世纪的早期,经典力学经常是在数学系而不是物理系讲授,流体力学则是在应用数学系讲授。类似于物理学,工程和计算机科学在传统上也一直使用应用数学。

流体力学通常被认为是应用数学的一个分支。今天,"应用数学"这个术语有更广泛的意义。它不仅包括以上的经典领域,而且包含了其他一些在应用中变得越来越重要的领域。即便是像数论这样一个纯数学领域的分支,现在在应用领域(如密码学)也变得很重要,尽管数论本身通常并不列为应用数学的一部分。有时,"可应用的数学"这个术语也用来区分那些伴随物理发展而来的传统应用数学和许多可用来解决当今现实世界中的问题的数学领域。

现代数值数学方法和软件的成功导致了计算数学、计算科学、计算工程的出现,它们把高速计算应用于现象的模拟和科学与工程中的问题的解决。这些分支通常被认为是跨学科的。

历史上,数学在自然数学和工程中的作用通常是最重要的。但是自从第二次世界大战以来,物理科学以外的领域促使了数学新领域的产生,比如从经济学的研究中产生的博弈论和社会选择理论,在对大脑神经科学的研究中产生了神经网络。

计算机的出现产生了新的应用领域:研究和学习新计算机技术本身(计算机科学),使用计算机研究其他科学领域的问题(计算科学),研究计算数学(比如,理论计算机科学,计算机代数,数值分析)。统计学可能是在社会科学中使用最为广泛的数学科学,但数学的其他领域在以上学科,特别是在经济学中,正在体现其越来越重要的作用。

许多数学家把致力于数学方法研究的应用数学和科学与工程中的数学应用区分开来。一个生物学家使用人口模型和应用已有的数学知识并不是在作应用数学的研究而是使用数学;但是许多数学生物学家已经提出了促进纯数学发展的数学问题。然而,像庞加莱和阿诺尔德这样的数学家拒绝承认"应用数学"的存在并且宣称只有"数学的应用";类似的,一些非数学家混淆了应用数学和数学的应用的界限。用于解决工业问题的数学应用及其发展也叫工业数学。

二、研究生入学复试模拟试卷

(一) 1. 线性无关；2. 数学模型；3. 参数方程；4. 定积分；5. 二阶微分方程。

(二) 1. right-angled triangle(或 right triangle)；2. the associative law of multiplication；3. mathematical induction；4. uniformly continuous；5. the second row of the matrix。

(三) This paper establishes, at first, an inequality by the differential mean theorem, then uses the inequality to find the maximum and minimum values of some kind of functions on intervals. Our results generalize some known relative conclusions.

(四) 1. 线性方程和线性不等式在许多研究领域发挥着重要的作用。各种各样的关系经常可以表示成一个或多个方程和不等式。

2. **定理 10.6**　假定 V 是一个有限维的线性空间，则 V 的每个基所含有的元素个数相同。

证明　设 S 和 T 是 V 的两个有限基。假定 S 由 k 个元素而 T 由 m 个元素组成。由于 S 是无关的且张成了空间 V，由定理 10.5 知，V 中任何 $k+1$ 个元素组成的集都是相关的。因此，V 中任何一个含有多于 k 个元素的集都是相关的。因为 T 是无关的，所以必有 $m \leqslant k$。类似地可得到 $m \leqslant k$。于是 $m=k$，证明完毕。

3. 加法原理：如果完成第一个任务有 m 种方法，完成第二个任务有 n 种方法，而这两个任务不能同时进行，那么完成这两个任务中的任一个就有 $m+n$ 种方法。例如，假设有 5 本红书和 6 本蓝书，假设第一个任务是选取一本红书，这有 5 种方法。假设第二个任务是选取一本蓝书，这有 6 种方法。因此有 $5+6=11$ 种方法来选取一本红书或蓝书。

4. 设 S 和 T 是集。那么 $S \times T$ 的任何子集称为是从 S 到 T 的一个对应。例如，假定 S 是平面上的所有的点组成的集，而 T 是该平面上的所有直线组成的集，关联关系(如果点 P 位于直线 l，就称 P 与 l 关联)定义了从点到直线的一种对应。对于每一点 P，经过 P 的所有直线都与之对应；同时，对每一条直线 l，l 上的所有点都与它对应。这是一种“多对多的对应”，其中对于 S 中的每个元素，T 中有无穷多个元素与之对应，反之也一样。在一般情形下，对于 S 的每个元素，T 中可能有多个、一个或没有元素与之对应。

对应的一种重要的特殊情形是一对一的映射或一一对应，也称为双射。这时，对于每个 $s \in S$ 刚好有一个 $t \in T$ 与它对应，而且对于每个 $t \in T$ 也刚好有一个 $s \in S$ 与它对应。

参考文献

[1] 吴炯圻．数学专业英语[M]．2版．北京：高等教育出版社，2009.

[2] 南京大学外文系公共英语教研室．数学专业英语文选[M]．北京：商务印书馆，1979.

[3] 孙娴媃．谈谈写作英语科技论文[M]．北京：科学出版社，1979.

[4] 张道真．实用英语语法[M]．北京：外语教学与研究出版社，2002.

[5] 薄冰．英语语法[M]．北京：开明出版社，1998.

[6] 秦荻辉．科技英语写作教程[M]．西安：西安电子科技大学出版社，2001.

[7] 韩其顺、王学铭．英汉科技翻译教程[M]．上海：上海外语教育出版社，1990.

[8] 西北工业大学外语教研室．科技英语翻译初步[M]．北京：商务印书馆，1979.

[9] 郑永金．科技英语语法精通[M]．台北：文桥出版社，1993.

[10] 俞炳丰．科技英语论文实用写作指南[M]．西安：西安交通大学出版社，2003.

[11] 秦荻辉．实用科技英语写作技巧[M]．上海：上海外语教育出版社，2001.

[12] 科学出版社名词室．新英汉数学词汇[M]．北京：科学出版社，2002.

[13] 童丽萍，陈治业．数、符号、公式、图形的英文表达[M]．南京：东南大学出版社，2000.

[14] 曾令坤．关于数学教育核心问题的思索[J]．数学教育学报，2002 (2)：99—102.

[15] K. S. Leung, M. k. Lai, C. P. Lai. Mathematics today: a programmed course [M]. London: Canotta Publishing Co., Ltd., 1997.

[16] K. F. Lam, W. H. Wong. Additional mathematical tutor [M]. Hong Kong: Hong Kong Educational Pub. Co., 1996.

[17] M. H. Chan, S. W. Leung, et al. New trend senior secondary mathematics [M]. Hong Kong: Chung Tai Educational Press, 2009.

[18] W. S. Earl. Fundamentals of college algebra [M]. 7th ed. Boston: PWS-Kent Pub. Co., 1989.

[19] E. D. Phillips, T. Butts, J. M. Shaughnessy. Intermediate algebra: applications and problem solving [M]. 2nd ed. New York: Harpercollins College Pub., 1994.

[20] J. E. Kaufmann. Algebra with trigonometry for college students [M]. 3rd ed. Boston: PWS-Kent Pub. Co., 1991.

[21] A. L. Shenk. Calculus and analytic geometry [M]. California: Goodyear Pub. Co., 1977.

[22] K. Hoffman, R. Kunze. Linear algebra [M]. 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 1971.

[23] W. E. Boyce, R. C. DiPrima. Introduction to differential equations [M]. New York: John Wiley & Sons, 1970.

[24] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence. Linear Algebra [M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2005.

[25] B. E. Meserve. Fundamental concepts of algebra [M]. New York: Dover Pub. Inc., 1982.

[26] T. M. Apostol. Calculus [M]. New York: John Wiley & Sons, 1967.

[27] K. T. Leung. Linear algebra and geometry [M]. Hong Kong: Hong Kong University Press, 1974.

[28] W. Rudin. Real and complex analysis [M]. 3rd ed. Beijing: China Machine Press, 2004.

[29] A. J. Kosmala. Advanced calculus: a friendly approach [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1999.

[30] R. Wrede, M. R. Spiegel. Schaum's outline of theory and problems of advanced calculus [M]. 3rd ed. New York: McGraw Hill, 2010.

[31] W. L. Voxman, R. H. Goetschel. Advanced calculus: an introduction to modern analysis [M]. New York: Marcel Dekker, 1981.

[32] K. H. Rosen. Discrete mathematics and its applications [M]. 4th ed. New York: McGraw Hill, 1999.

[33] Numerical Analysis [EB/OL]. http://en. wikipedia. org/wiki/Numerical_analysis.

[34] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, Harmonic functions theory [M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 2001.

[35] S. M. Khaleelulla. Counterexamples in topological vector spaces [M]. Berlin: Springer, 1982.

[36] J. Goldberg, M. C. Potter. Differential equations [M]. New York: John Wiley & Sons, 1982.

[37] P. M. Cohn. Algebra [M]. New York: John Wiley & Sons, 1982.

[38] G. Polya. How to solve it: a new aspect of mathematical method [M]. 2nd ed. Now Jersey: Princeton University Press, 1981.

[39] D. V. Singer. Geometry [M]. Berlin: Springer, 1998.

[40] J. B. Conway. Function of one complex variable [M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 2002.

[41] R. Haberman. Mathematical models [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1977.

[42] C. C. Ross. Differential Equations: An introduction with mathmatica [M]. Berlin: Springer, 1995.

[43] G. Agnarsson, R. Greenlaw. Graph theory: modeling, applications, and algorithms [M]. New Jersey: Prentice Hall, 2006.

[44] J. H. Kevin. Introduction to the mathematics of operations research [M]. New York: Marcel Dekker, 1989.

[45] F. R. Giordano, M. D. Weir, W. P. Fox. A first course in mathematical modeling [M]. 3rd ed. Beijing: China Machine Press, 2003.

[46] C. Phillips, B. Cornelius. Computational numerical methods [M]. New York: Ellis Horwood, 1986.

[47] J. W. Thomas. Numerical partial differential equations: finite difference methods [M]. Berlin: Springer, 1995.

[48] M. Sipser. Introduction to the theory of computation [M]. Boston: PES Pub. Co., 1997.

[49] E. Rich, K. Knight. Artificial intelligence [M]. 2nd ed. New York: McGraw Hill, 1991.

[50] A. Boggess, F. J. Narcowich. A first course in wavelets with fourier analysis [M]. New Jersey: Prentice Hall, 2001.

[51] A. Le Méhauté. Fractal geometries: theory and applications [M]. Florida: CRC Press, 1991.

[52] A. Kandel. Fuzzy mathematical techniques with applications [M]. Boston: Addison-Wesley, 1986.

[53] N. J. Higham. Handbook of writing for the mathematical sciences [DB/OL]. 2nd ed. http://www. ec-securehost. com/SIAM/ot63. ht-

ml, 1998.

[54] Y. Tanaka. Undecidability of uzawa equivalence theorem and cantor's diagonal Argument [J/OL]. Applied Mathematics E-Notes, 2009(9): 1−9.

[55] V. Laohakosol, P. Tangsupphathawat, S. Dangskul. Values taken by linear combinations of cosine functions[J/OL]. Applied Mathematics E-Notes, 2010(10): 184−190.

[56] CNKI 翻译助手[DB/OL]. http://dict. cnki. net.

[57] K. S. Ng, Y. K. Kwok. Advanced level pure mathematics [M]. Hong Kong: Hung Fung Book Co., 1992.

[58] T. W. Wong, M. S. Wong. New century mathematics [M]. London: Oxford University. Press, 2009.

[59] L. J. Paige, J. D. Swift, T. A. Slobko. Elements of linear algebra [M]. 2nd ed. Florida: R. E. Krieger Pub. Co., 1983.

[60] Y. F. So, M. S. Wong. New way additional mathematics [M]. 3rd ed. Hong Kong: Manhattan Press, 1996.

[61] A. G. Hamilton. A first course in linear algebra with concurrent examples [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

[62] K. S. Leung, W. M. Chu, M. L. Luk. Exploring mathematics [M]. 2nd ed. London: Oxford University Press, 2006.

[63] H. M. Chan, A. Cheng, et al. New progress in junior mathematics [M]. Hong Kong: Hong Kong Educational Pub. Co., 2008.

[64] W. Cox. Ordinary differential equations [M]. London: Edward Arnold, 1996.

[65] J. H. Hubbard, B. B. Hubbard. Vector calculus, linear algebra, and differential forms: a unified approach [M]. 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

[66] D. Applebaum. Probability and information: an integrated approach [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[67] B. Bolloba. Modern graph theory [M]. Beijing: China Science Press, 1998.

[68] Mathematical model [EB/OL]. http://en. wikipedia. org/wiki/Mathematical_model.

[General Information]
info：本信息由Onlyown终结版生成
图书名：实用数学专业英语教程
SS：13131685
页码：505
本书总页数：515
BookUrl：http://book.szdnet.org.cn/views/specific/2929/bookDetail.jsp?dxNumber=000008409318&d=6969593C6423337CAA83BD5C7FA721B6F&fenlei=08040112041#ctop
Str：/img45/EFF213A7254DED9DE400EA9855F26E64CAE8D373CE7893C5B9F6CEB6C934BB7EC01F88BCECCA321D546C4BCF2D15083586CF1DE3510ED6187D28BD6B1925E4C142BC436B1F92C51BB59CEE4805EEFC329C8C3A29428F7DEF4058364CBA93323C2F2BBDD1E9726948599 0FE7D25912A833CE7/n1/

封面
书名
版权
前言
目录
第一章　数学基本概念与术语简介
１．１基本运算符号及简单图形
１．２数及其基本运算
１．３代数式、方程与不等式
１．４集的概念与初等函数
１．５平面上的直线和三角形
１．６多边形与圆
１．７平面上的坐标几何
１．８常见立体图形与空间坐标几何
１．９数列与级数、数学归纳法
１．１０初等概率统计、近似与误差
第二章　阅读与翻译初步
２．１比、率与比例
２．２三角函数与解三角形
２．３素数与辗转相除法
２．４集合论简介
２．５平面点集与圆锥曲线
２．６空间的向量、直线与平面
２．７矩阵与线性变换
２．８函数的概念及其演变
２．９变量的极限
２．１０导数、微分与不定积分
２．１１定积分的性质与应用
２．１２函数项序列与级数
２．１３常微分方程
２．１４期望、方差与中心极限定理
２．１５数理逻辑入门
２．１６组合分析与数值分析
第三章　数学专业英语常用语法和译法选讲
３．１分词
３．２动名词
３．３动词不定式
３．４定语
３．５定语从句
３．６状语从句
３．７名词性从句与Ｉｔ的用法
３．８同位语与插入语
３．９被动语态
３．１０数量比较与倍数增减
３．１１常用多功能词
３．１２否定、省略与倒装
第四章　数学专业文献读译指导
４．１数学教材序言和导论的译例评析
４．２数学基础和数学方法的译例评析
４．３代数、几何与函数论的译例评析
４．４应用数学和数学应用文献的译例评析
４．５计算数学和计算机科学文献的译例评析
４．６新数学分支专业文献的译例评析
４．７数学练习题的译例评析
４．８减少误读错译，提高读译能力
第五章　数学论文的英语表达
５．１数学论文的英语表达提要
５．２论文标题的英语表达
５．３论文摘要的英语表达
５．４论文引言的英语表达
５．５定理和定义的英语表达
５．６数学推理与论证的英语表达
附录Ａ参考论文
附录Ｂ利用“ＣＮＫＩ翻译助手”辅助写作
第六章　扩展阅读与备考资料
６．１扩展阅读资料
６．２本科学期考试与研究生入学复试参考资料
附录　部分练习参考答案
参考文献