文都教育®

2022

文都考研数学系列

考研数学复习大全

（适用：基础、强化）

策划◎文都考研数学命题研究组

编著◎汤家凤



数学一

Mathematics

基础复习串通考点 强化冲刺重点提炼

推荐搭配：《复习大全》+《接力题典1800》+《强化测试10套卷》

扫码看课：扫书内二维码，看知识点精讲，即扫即看

中国原子能出版社

智阅文都 助你轻松上岸!



考试资讯

考研热点话题实时更新

你关心的就是热点

配套课程

图书配套精品课程在线学习

你需要的名师就在身边

微信公众号【启尚考研】
(ID: djky66)

PDF资料

海量考研干货随手掌握

碎片时间成学霸

精品音频

图书配套音频随身听

学得明白，考得轻松

扫一扫，了解更多

智 知识共享学习平台

阅 海量资源浏览空间

文都教育®

2022

文都考研数学系列

考研数学复习大全

（适用：基础、强化）

策划◎文都考研数学命题研究组

编著◎汤家凤

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

数学一

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

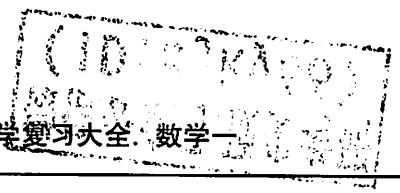
考研数学复习大全. 数学一 / 汤家凤编著. —北京：中国原子能出版社，2019.2(2020.10重印)
ISBN 978-7-5022-7754-3

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①汤… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第027599号



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



考研数学复习大全. 数学一

出版发行 中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号 100048)
责任编辑 王 青
特约编辑 贾俊峰
印 刷 北京铭传印刷有限公司
经 销 全国新华书店
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 39.75 字 数 992千字
版 次 2019年2月第1版 2020年10月第4次印刷
书 号 ISBN 978-7-5022-7754-3 定 价 89.00元

网址：http://www.aep.com.cn E-mail：atomep123@126.com
发行电话：010-68452845
版权所有 侵权必究

郑重声明

买正版图书　听精品课程

文都考研数学独家师资汤家凤老师编著的《考研数学复习大全.数学一》《考研数学复习大全.数学二》《考研数学复习大全.数学三》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷。

全国各地举报电话:010-88820418,13488713672

电子邮箱:tousu@wendu.com

中国原子能出版社

世纪文都教育科技集团股份有限公司

授权律师:北京市安诺律师事务所

刘　岩

2020年10月

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

前言 Preface

从1987年开始,工程类和经济类全国硕士研究生招生考试数学课程进行全国统一命题。到2008年,原来的数学一至数学四合并成数学一至数学三,经过若干年的调整,现在考试大纲基本稳定。为了帮助广大考生熟悉考试大纲和考试要求,在较短时间内全面、系统、扎实地掌握高等数学(微积分)、线性代数、概率统计的理论体系、方法体系,提高数学运算、逻辑推理、实际应用及应试能力,作者根据自己二十多年从事硕士研究生招生考试指导的经验,凭借多年担任硕士研究生招生考试阅卷组长的心得,精心组织材料、系统归纳整理而成本书。

本书的特点体现在如下几个方面:

1. 以独特的视角建立完善的理论体系和方法体系,让数学变得不再可怕和晦涩难懂,使理论和方法通俗易懂、浑然一体。考研数学涉及的三个科目均有其自身的理论体系,如果孤立地看每一个考点,若干个概念、性质、定理堆砌,那么考生很难真正掌握这些知识点;而本书对知识从发展的角度来分析其背景,挖掘其来源,使结论的得出显得水到渠成,更容易接受。同时,数学学习与考试离不开解题,这就必然离不开解题方法的探索。作者将考研数学会用到的基本方法进行总结分类,也归纳整理出自己独创的处理某一类问题的方法体系,可以帮助考生轻松解决相应问题。

2. 对重点的理论和方法增加了拓展延伸的内容,这部分内容可以更好地帮助考生理解考试的重点,便于考生掌握学习数学的独特方法。理论拓展内容将基础知识拓宽加深,或将边缘的易于混淆的结论整合讲解以正视听;方法拓展内容是作者多年一线教学中发现的行之有效且巧妙的方法的汇总。之所以说作者的方法行之有效,不仅仅是因为它能快速准确地解答题目,更重要的是使用过的考生觉得这样的方法易接受、易掌握。

3. 本书内容具有前瞻性和权威性。作者一直在教学和科研第一线,二十多年的数学考试指导经验和阅卷经验使得其对研究生招生考试重点与命题趋势熟稔于心,同时又充分了解考生复习之瓶颈所在,二者的结合决定了本书既能够体现未来考试方向,又足够专业到位。

4. 本书颠覆了传统数学复习理念,倡导理清知识本源,建立方法体系,从源头上解决解题瓶颈。

本书的体系结构包括:

1. 大纲点击。介绍各章的考试要求,考生通过此板块了解考试范围与重点。

2. 基础复习模块。搭建各部分的理论体系,将考试中要求的基本概念、原理、考点逐一讲

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解,并突出重点内容,难以理解或容易混淆的结论作者特别给出了理解与记忆的方法。

3. 知识延拓模块。对重要理论和方法以及考试的重点给出了知识体系的进一步深化延展。

4. 重点题型分析。建立知识点的方法体系,对常考点、难点及重要方法进行全面总结和梳理。

5. 测试题。巩固所学的理论和方法,检测各部分的学习效果,更好地适应考试。

广大学子的殷切期盼和文都教育领导的大力鼓励是作者写作本书的动力,在写作过程中广大同仁给予了巨大和无私的帮助。由于本书写作时间紧,加之作者水平所限,不足和错误在所难免,欢迎广大学子和同仁指教。

欢迎各位同学在学习之余能关注作者微博、微信公众号及一直播。

汤老师微博　　汤老师微信公众号

汤老师一直播 ID:186288809

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

编者

2020 年 10 月

目录 Contents

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续 …… 3
大纲点击 …… 3
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 3
第一节　函数 …… 3
第二节　极限 …… 6
第三节　函数的连续性 …… 11
知识延拓模块——极限存在性问题 …… 12
重点题型分析 …… 14
测试题 …… 34
测试题参考答案 …… 36
第二章　导数与微分 …… 42
大纲点击 …… 42
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 42
重点题型分析 …… 45
测试题 …… 59
测试题参考答案 …… 61
第三章　中值定理与一元函数微分学的应用 …… 65
大纲点击 …… 65
引言 …… 65
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 65
第一节　中值定理 …… 65
第二节　函数的单调性与极值 …… 68
第三节　函数的凹凸性与拐点 …… 69
知识延拓模块——推广、专题讲解 …… 71
重点题型分析 …… 71
测试题 …… 97
测试题参考答案 …… 99
第四章　不定积分 …… 104
大纲点击 …… 104

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 104
第一节 不定积分理论——概念、性质、基本公式与积分法 …… 104
第二节 两类特殊函数的不定积分 …… 110
重点题型分析 …… 114
测试题 …… 119
测试题参考答案 …… 120
第五章 定积分及应用 …… 124
大纲点击 …… 124
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 124
第一节 定积分的基本概念、基本性质与基本定理 …… 124
第二节 定积分的特殊性质与定积分法 …… 125
第三节 广义积分 …… 129
第四节 定积分的实际应用 …… 132
知识延拓模块——定积分理论的推广 …… 135
重点题型分析 …… 136
测试题 …… 160
测试题参考答案 …… 164
第六章 空间解析几何 …… 173
大纲点击 …… 173
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 173
第一节 向量的概念与向量的运算 …… 173
第二节 向量的应用 …… 176
知识延拓模块 …… 179
重点题型分析 …… 182
测试题 …… 190
测试题参考答案 …… 192
第七章 多元函数微分学 …… 195
大纲点击 …… 195
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 195
第一节 多元函数的基本概念与性质 …… 195
第二节 多元函数微分学基本理论 …… 197
第三节 偏导数计算法则 …… 199
第四节 多元函数微分学在极值中的应用 …… 201
第五节 多元函数微分学在物理及几何上的应用 …… 203
知识延拓模块——推广、专题讲解 …… 205
重点题型分析 …… 206
测试题 …… 225
测试题参考答案 …… 228
第八章 多元函数积分学 …… 234
大纲点击 …… 234

微信公众号【顶尖考研】
ID：djky66)

基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 234
第一节 二重积分的概念、性质、计算与应用 …… 234
第二节 三重积分的概念、性质、计算与应用 …… 237
重点题型分析 …… 241
测试题 …… 252
测试题参考答案 …… 253
第九章 级 数 …… 258
大纲点击 …… 258
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 258
第一节 常数项级数的概念与理论 …… 258
第二节 幂级数 …… 264
第三节 函数的傅里叶级数 …… 269
知识延拓模块——幂级数的和函数及函数展成幂级数的技巧 …… 273
重点题型分析 …… 276
测试题 …… 292
测试题参考答案 …… 294
第十章 微分方程 …… 300
大纲点击 …… 300
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 300
第一节 微分方程的基本概念 …… 300
第二节 一阶微分方程的种类与解法 …… 301
第三节 可降阶的高阶微分方程及解法 …… 302
第四节 高阶线性微分方程理论 …… 303
知识延拓模块——高阶常系数非齐次线性微分方程特解求法 …… 305
重点题型分析 …… 306
测试题 …… 319
测试题参考答案 …… 321
第十一章 曲线积分与曲面积分 …… 324
大纲点击 …… 324
引言 …… 324
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 325
第一节 对弧长的曲线积分 …… 325
第二节 对坐标的曲线积分 …… 327
第三节 对面积的曲面积分 …… 335
第四节 对坐标的曲面积分 …… 337
第五节 场论初步 …… 343
重点题型分析 …… 344
测试题 …… 358
测试题参考答案 …… 361

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第二部分　线性代数

第一章　行列式 …… 369
大纲点击 …… 369
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 369
重点题型分析 …… 372
测试题 …… 377
测试题参考答案 …… 378
第二章　矩　阵 …… 380
大纲点击 …… 380
第一节　矩阵概况 …… 380
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 380
重点题型分析 …… 384
第二节　矩阵的逆矩阵 …… 386
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 386
重点题型分析 …… 390
第三节　矩阵的秩 …… 394
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 394
重点题型分析 …… 395
测试题 …… 400
测试题参考答案 …… 401
第三章　向　量 …… 404
大纲点击 …… 404
第一节　向量的基本概念及相关性理论 …… 404
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 404
重点题型分析 …… 406
第二节　向量组的秩与向量组等价 …… 411
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 411
重点题型分析 …… 412
第三节　向量空间、基及向量的坐标 …… 413
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 413
重点题型分析 …… 414
测试题 …… 414
测试题参考答案 …… 416
第四章　线性方程组 …… 419
大纲点击 …… 419
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 419
知识延拓模块——方程组的若干理论问题 …… 422
重点题型分析 …… 423

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

测试题 …… 436
测试题参考答案 …… 438
第五章　特征值与特征向量 …… 445
大纲点击 …… 445
引言 …… 445
第一节　特征值与特征向量的概念与性质 …… 445
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 445
重点题型分析 …… 446
第二节　矩阵对角化 …… 450
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 450
答疑解惑 …… 453
知识延拓模块 …… 454
重点题型分析 …… 457
测试题 …… 463
测试题参考答案 …… 466
第六章　二次型及其标准形 …… 473
大纲点击 …… 473
第一节　二次型及其标准形 …… 473
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 473
知识延拓模块 …… 476
重点题型分析 …… 478
第二节　正定矩阵与正定二次型 …… 484
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 484
重点题型分析 …… 485
测试题 …… 486
测试题参考答案 …… 487

第三部分　概率统计

第一章　随机事件与事件的概率 …… 495
大纲点击 …… 495
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 495
知识延拓模块——古典概型、伯努利概型与几何概型 …… 500
重点题型分析 …… 502
测试题 …… 506
测试题参考答案 …… 507
第二章　随机变量及其分布 …… 510
大纲点击 …… 510
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 510
重点题型分析 …… 516

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

测试题 …… 522
测试题参考答案 …… 524
第三章 多维随机变量及其分布 …… 527
大纲点击 …… 527
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 527
重点题型分析 …… 535
测试题 …… 545
测试题参考答案 …… 547
第四章 随机变量的数字特征 …… 552
大纲点击 …… 552
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 552
重点题型分析 …… 554
测试题 …… 564
测试题参考答案 …… 565
第五章 大数定律与中心极限定理 …… 569
大纲点击 …… 569
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 569
重点题型分析 …… 570
测试题 …… 573
测试题参考答案 …… 574
第六章 数理统计的基本概念 …… 576
大纲点击 …… 576
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 576
重点题型分析 …… 580
测试题 …… 584
测试题参考答案 …… 586
第七章 参数估计 …… 589
大纲点击 …… 589
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 589
重点题型分析 …… 595
测试题 …… 600
测试题参考答案 …… 602
第八章 假设检验 …… 605
大纲点击 …… 605
基础复习模块——基本概念、原理、考点 …… 605
重点题型分析 …… 612
测试题 …… 613
测试题参考答案 …… 614

微信公众号【顶尖考研】
(ID: dijy66)

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续
第二章 导数与微分
第三章 中值定理与一元函数微分学的应用
第四章 不定积分
第五章 定积分及应用
第六章 空间解析几何
第七章 多元函数微分学
第八章 多元函数积分学
第九章 级数
第十章 微分方程
第十一章 曲线积分与曲面积分

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第一章　函数、极限、连续

大纲点击

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续和右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

第一节　函　数

一、基本概念

1. 邻域与去心邻域 —— 设 $\delta>0$，称集合 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$；称集合 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 为 a 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，如图 1-1-1.

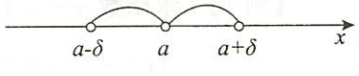


图 1-1-1

2. 函数 —— 设 D 为一个数集，x，y 为两个变化的量，若对任意的 $x\in D$，总有唯一确定的 y 与之对应，称 y 为 x 的函数，记为 $y=f(x)$.

3. 函数的常用表示法

(1) 显函数表示法 —— 即将 x，y 构成的函数关系表示为 $y=f(x)$.

① 扫描书中二维码，观看汤老师讲解视频.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(2) 隐函数表示法 —— 设 D 为数集，若对任意的 $x \in D$，由等式 $F(x,y)=0$ 有唯一确定的 y 与之对应，称由 $F(x,y)=0$ 确定 y 为 x 的隐函数.

(3) 参数方程表示法 —— 设 D 为数集，若对任意的 $x \in D$，由 $x=\varphi(t)$ 唯一确定一个 t，再由 $y=\psi(t)$ 唯一确定一个 y 的值，称 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定 y 为 x 的函数.

4. 复合函数 —— 设 $y=f(u)(u \in D_0)$，$u=\varphi(x)(x \in D)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域 $D_1 \subset D_0$，称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数.

5. 反函数 —— 设 $y=f(x)$ 为单调函数，由 $y=f(x)$ 解出 $x=\varphi(y)$，称 $x=\varphi(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

6. 基本初等函数 —— 以下函数称为基本初等函数：

(1) 幂函数：x^{α}；

(2) 指数函数：$a^x(a>0$ 且 $a \neq 1)$；

(3) 对数函数：$\log_a x(a>0$ 且 $a \neq 1)$；

(4) 三角函数：$\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$；

反三角函数：$\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x$.

7. 初等函数 —— 由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而成的式子称为初等函数.

【注解】

常见的特殊函数有：

(1) 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x \in \mathbf{Q},\\ 0, x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}.\end{cases}$$

(2) 取整函数

$$f(x)=[x],$$

取整函数 $f(x)=[x]$ 的函数值即 x 左边最近的整数，如：$[-\sqrt{2}]=-2,[1.5]=1,[3]=3,[-2]=-2$ 等.

取整函数 $f(x)=[x]$ 常见的性质有：

$x \geqslant [x]$；

$[x+k]=[x]+k$，其中 k 为整数.

【例 1】 求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域.

【解】 由 $\begin{cases}x^2-x-6 \geqslant 0,\\ -1 \leqslant \dfrac{2x-1}{7} \leqslant 1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x \leqslant -2 \text{ 或 } x \geqslant 3,\\ -3 \leqslant x \leqslant 4.\end{cases}$

故函数的定义域为 $D=\{x \mid -3 \leqslant x \leqslant -2 \text{ 或 } 3 \leqslant x \leqslant 4\}$.

【例 2】 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，求 $f\{f[f(x)]\}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 $f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{1+f(x)}=\dfrac{\dfrac{x}{1+x}}{1+\dfrac{x}{1+x}}=\dfrac{x}{1+2x}$,

$f\{f[f(x)]\}=\dfrac{f[f(x)]}{1+f[f(x)]}=\dfrac{\dfrac{x}{1+2x}}{1+\dfrac{x}{1+2x}}=\dfrac{x}{1+3x}$.

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|>1,\\ x^2, & |x|\leqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}e^x, & |x|>1,\\ 1+x, & |x|\leqslant 1,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$ 的表达式.

【解】 $g[f(x)]=\begin{cases}e^{f(x)}, & |f(x)|>1,\\ 1+f(x), & |f(x)|\leqslant 1.\end{cases}$

$|f(x)|>1$ 等价于 $\begin{cases}|x|>1,\\ |x|>1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|x^2|>1,\\ |x|\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $|x|>1$;

$|f(x)|\leqslant 1$ 等价于 $\begin{cases}|x|\leqslant 1,\\ |x|>1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|x^2|\leqslant 1,\\ |x|\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$,故

$$g[f(x)]=\begin{cases}e^x, & x>1 \text{ 或 } x<-1,\\ 1+x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

【例 4】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x+1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ 2x+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 $f[g(x)]=\begin{cases}e^{g(x)}, & g(x)<1,\\ g(x)+1, & g(x)\geqslant 1,\end{cases}$

由 $\begin{cases}x<0\\ x^2<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ 2x+1<1\end{cases}$ 得 $-1<x<0$;

由 $\begin{cases}x<0\\ x^2\geqslant 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ 2x+1\geqslant 1\end{cases}$ 得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 0$,

故
$$f[g(x)]=\begin{cases}e^{x^2}, & -1<x<0,\\ x^2+1, & x\leqslant -1,\\ 2x+2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

【例 5】 求 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数.

【解】 由 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 得 $x+\sqrt{1+x^2}=e^y$;

因为 $(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)=1$,所以 $\sqrt{1+x^2}-x=e^{-y}$,

两式相减,得 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数为 $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$.

二、函数的初等特性

1. 单调性—— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数,若对任意的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$,称函数 $f(x)$ 在 D 上为单调增函数,若有 $f(x_1)>f(x_2)$,称函数 $f(x)$ 在 D 上为单调减函数.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

2. 有界性 —— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数，若存在 $M>0$，对一切的 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，称 $f(x)$ 在 D 上为有界函数.

3. 奇偶性 —— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数，且 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 在 D 上为偶函数，若 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 在 D 上为奇函数. 奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

4. 周期性 —— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数，$T>0$ 且对任意的 $x\in D$，$x+T\in D$，若对任意 $x\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$，称 $f(x)$ 为周期函数.

第二节 极 限

一、基本概念

1. 极限

定义 1($\varepsilon-N$) 设 $\{a_n\}$ 为无穷数列，A 为常数，若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

成立，称常数 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，或 $a_n\to A(n\to\infty)$.

定义 2($\varepsilon-\delta$) 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域内有定义，A 为常数，若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to a)$.

【注解】

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$

(1) $x\to a$ 时，$x\neq a$，即与 $f(a)$ 无关，如：

$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ 在 $x=1$ 处没有定义，但 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$；

(2) $x\to a$ 包含 $x\to a^-$ 及 $x\to a^+$；

(3) 若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a)$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的左极限，记为 $f(a-0)=A$；

若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，有

$$|f(x)-B|<\varepsilon$$

成立，称常数 B 为函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的右极限，记为 $f(a+0)=B$.

极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $f(a-0)$ 与 $f(a+0)$ 存在且 $f(a-0)=f(a+0)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djkj666)

定义 3($\varepsilon-X$)　(1) 设函数 $f(x)$ 在 $|x|>a$ 内有定义，若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to\infty)$；

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x<a$ 内有定义，若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，当 $x<-X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$；

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $x>a$ 内有定义，若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$.

2. 无穷小与无穷大



(1) 无穷小 —— 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)=0$，称 $\alpha(x)$ 为当 $x\to\Delta$ 时的无穷小.

(2) 无穷大 —— 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)=\infty$，称 $\alpha(x)$ 为当 $x\to\Delta$ 时的无穷大.

(3) 无穷小的比较

设 $\alpha\to0,\beta\to0$，

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，称 β 为 α 的高阶无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$；

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=k(\neq0,\infty)$，称 α 与 β 为同阶无穷小，记为 $\beta=O(\alpha)$，

特别地，若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，称 α 与 β 为等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【注解】

(1) 无穷小与无穷大互为倒数.

(2) 无穷小即以零为极限的函数，一个函数只有在自变量的某种趋向下，以零为极限才称为无穷小，一般情况下一个函数是否为无穷小与自变量的趋向有关.

(3)0 是无穷小，且与自变量的趋向无关，但无穷小不一定是 0.

二、极限的性质

(一) 极限的基本性质

定理 1(唯一性定理)　极限若存在必唯一.

定理 2(有界性定理)

(1)(数列极限的有界性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，则存在 $M>0$，使得 $|a_n|\leqslant M$，反之不对.

(2)(函数极限的局部有界性) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在，则存在 $\delta>0$ 及 $M>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

函数极限大于零，则函数在去心邻域内大于零；函数极限小于零，则函数在去心邻域内小于零

定理 3(极限的保号性)

(1)(极限第一保号性)　若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0(<0)$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $f(x)>0(<0)$.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

(2)(极限第二保号性) 若 $f(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$,且 $\lim f(x)=A$,则 $A\geqslant 0(\leqslant 0)$.

(3)(极限第三保号性) 若 $f(x)\geqslant g(x)$,且 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则 $A\geqslant B$.

函数不负,则极限不负;
函数不正,则极限不正

定理 4(列与子列极限的关系) 若列极限存在,则其任意子列极限也存在且相等.

推论 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}$ 都存在且相等.

【例 1】 研究 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 是否存在.

【解】 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}(n=1,2,\cdots)$,显然 $x_n\to 0(n\to\infty)$ 为 $x\to 0$ 的一个子列,

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0;$$

取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}(n=1,2,\cdots)$,显然 $y_n\to 0(n\to\infty)$ 为 $x\to 0$ 的又一个子列,

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 2】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan n\right)$.

【解】 $n\to\infty$ 为 $x\to+\infty$ 的子列,

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan n\right)=1$.

(二) 极限的存在性质

1. 夹逼定理

定理 1 设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 满足:

(1) $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ 存在且相等,

则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$.

定理 2 设函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域内有定义且满足:

(1) $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a}h(x)$ 存在且相等,

则极限 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)$.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 1】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

【解】　因为 $\frac{i}{n^2+n}\leqslant\frac{i}{n^2+i}\leqslant\frac{i}{n^2+1}(i=1,2,\cdots,n)$，所以

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2+1},$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2+n}=\frac{1}{2}$，由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

【例 2】　设 $a\geqslant0,b\geqslant0,c\geqslant0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}$.

【解】　不妨设 a 为 a,b,c 中的最大值，显然 $a\leqslant(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant3^{\frac{1}{n}}a$，

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，根据夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=a$.

一般地，$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a,b,c\}$.

【例 3】　求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}(x\geqslant0)$ 的表达式.

【解】　由例 2 得 $f(x)=\max\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{x^2}{2}, & x\geqslant2.\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

2. 单调有界的数列必有极限

【注解】

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 单调递增，则

若数列 $\{a_n\}$ 无上界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$；

若存在常数 M，使得 $a_n\leqslant M$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $a_n\leqslant A(n=1,2,\cdots)$.

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调递减，则

若数列 $\{a_n\}$ 无下界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$；

若存在常数 M，使得 $a_n\geqslant M$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $a_n\geqslant A(n=1,2,\cdots)$.

(三) 极限的运算性质

1. 极限的四则运算性质 —— 设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

(2) $\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\lim g(x)=AB$.

(3) $\lim kf(x)=k\lim f(x)=kA$.

(4) $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq0)$.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

2. 极限的复合运算性质

(1) 设$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=A$.

(2) 设$\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]=f(a)$.

【注解】

(1) 若$\lim f(x)$或$\lim g(x)$不存在时，极限四则运算法则不成立.

(2) 若$\lim f(x)$与$\lim g(x)$都不存在时，$\lim[f(x)\pm g(x)]$、$\lim f(x)g(x)$、$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$不一定不存在，例如：

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin2x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)$与$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1-x)}{x}-\dfrac{1}{x}\right]$都不存在，但

$$\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{\sin2x}{x}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{1}{x}\right)\right]=1.$$

(四) 无穷小的性质

1. 无穷小的基本性质

(1) 有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

(2) 设$|\alpha|\leqslant M$，$\beta\to0$，则$\alpha\beta\to0$，即有界函数与无穷小之积仍是无穷小，例如：

$$\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0.$$

(3) 设$\alpha\to0$，则$k\alpha\to0$(其中k为常数)，即常数与无穷小之积仍为无穷小.

(4)$\lim f(x)=A$的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha$，其中$\alpha\to0$.

2. 等价无穷小的性质

(1) $\alpha\sim\alpha$.

(2) 若$\alpha\sim\beta$，则$\beta\sim\alpha$.

(3) 若$\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则$\alpha\sim\gamma$.

(4)(重要性质) 若$\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$，且$\lim\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}=A$，则$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=A$.

(5)$\alpha\sim\beta$的充分必要条件是$\beta=\alpha+o(\alpha)$.

3. 当$x\to0$时常用的等价无穷小

(1)$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$.

(2)$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$1-\cos^a x\sim\dfrac{a}{2}x^2$.

(3)$(1+x)^a-1\sim ax$.　　(4)$a^x-1\sim x\ln a$.

三、两个重要极限

1. $\lim\limits_{\Delta\to0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=1$.

2. $\lim\limits_{\Delta\to0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=e$.

微信公众号：顶尖考研 (ID: djky66)

第三节　函数的连续性

一、基本概念



1. 连续

(1) 函数在一点连续的定义 —— 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，即 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的充分必要条件是

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

(2) 函数在闭区间上连续的定义 —— 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，若满足：1) $f(x)$ 在 (a,b) 内点点连续；2) $f(a)=f(a+0)$，$f(b)=f(b-0)$，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，记为 $f(x)\in C[a,b]$.

2. 间断点的分类 —— 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的去心邻域内有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处间断. 间断点按照不同情况可分为如下两类：

(1) 若 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在，称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点. 进一步地，

若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)(\neq f(x_0))$，称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点；

若 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点.

(2) 若 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 至少有一个不存在，称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

微信公众号：顶尖考研（ID：djky66）

二、闭区间上连续函数的性质



定理 1(最值定理)　设 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最小值 m 和最大值 M.

定理 2(有界定理)　设 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

定理 3(零点定理)　设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

推论(零点定理的推广)　设 $f(x)\in C[a,+\infty)$，且 $f(a)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<0$，则存在 $c\in(a,+\infty)$，使得 $f(c)=0$.

闭区间上的连续函数可以取到每一个介值

定理 4(介值定理)　设 $f(x)\in C[a,b]$，且 m,M 分别为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值，则对任意的 $\eta\in[m,M]$，总存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\eta$.

【例 1】　设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)+2f(1)+3f(2)=6$，证明：存在 $c\in[0,2]$，使得 $f(c)=1$.

【证明】　$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，

因为 $6m\leqslant f(0)+2f(1)+3f(2)\leqslant 6M$，即 $m\leqslant 1\leqslant M$，

所以由介值定理，存在 $c\in[0,2]$，使得 $f(c)=1$.

【例 2】　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$p>0,q>0$，证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$pf(a)+qf(b)=(p+q)f(\xi).$$

【证明】　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，

微信公众号：顶尖考研
（ID：djky66）

因为$(p+q)m \leqslant pf(a)+qf(b) \leqslant (p+q)M$，即$m \leqslant \dfrac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \leqslant M$，

所以由介值定理，存在$\xi \in [a,b]$，使得$f(\xi)=\dfrac{pf(a)+qf(b)}{p+q}$，

故$pf(a)+qf(b)=(p+q)f(\xi)$.

知识延拓模块 —— 极限存在性问题

数列极限存在性证明是极限部分重点的考查题型，也是极限部分的难点所在. 一般情况下，证明数列$\{a_n\}$极限存在需要证明其具有单调性和有界性，一般分为两种类型：

类型一：数列存在递推关系$a_{n+1}=f(a_n)$

单调性证明常见方法有：

方法一：重要不等式

(1) 当$x>0$时，$\ln(1+x)<x$；

(2) 当$x \geqslant 0$时，$\sin x \leqslant x$；

(3) 当$x \neq 0$时，$e^x > 1+x$.

方法二：数学归纳法

方法三：判断$a_{n+1}-a_n$的正负得数列$\{a_n\}$的单调性

方法四：单调法

令$y=f(x)$，若$f'(x) \geqslant 0$，则数列$\{a_n\}$单调，其中

(1) 若$a_1 \leqslant a_2$，则数列$\{a_n\}$单调递增；

(2) 若$a_1 \geqslant a_2$，则数列$\{a_n\}$单调递减.

方法五：中值定理

【例 1】 设$0<a_1<\pi$，又$a_{n+1}=\sin a_n$，

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在，并求此极限；

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{a_n^2}}$.

【证明】 (1) 显然$a_n>0(n=1,2,\cdots)$；

因为当$x>0$时，$\sin x<x$，所以$a_{n+1}=\sin a_n<a_n$，即$\{a_n\}$单调递减，故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，$a_{n+1}=\sin a_n$两边取极限得$A=\sin A$，解得$A=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{a_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin a_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{a_n^2}} \overset{a_n=t}{=\!=\!=} \lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin t-t}{t}\right)^{\frac{t}{\sin t-t}}\right]^{\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\sin t-t}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

【例 2】 设$a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，…，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在，并求此极限.

【证明】 该数列的递推关系为$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}(n=1,2,\cdots)$，

显然数列$\{a_n\}$单调递增，$a_1=\sqrt{2}\leqslant 2$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: dijky66)

设 $a_k \leqslant 2$，

当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k} \leqslant \sqrt{2+2}=2$，

由数学归纳法，对任意的正整数 n，有 $a_n \leqslant 2$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，由 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 得 $A=\sqrt{2+A}$，解得 $A=2$.

【例 3】　设 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

【证明】　由 $a_n+\dfrac{1}{a_n} \geqslant 2$ 得 $a_{n+1} \geqslant 1$，即数列 $\{a_n\}$ 有下界；

令 $y=f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$，

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)>0(x>1)$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调，

又因为 $a_1=2>a_2=\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调递减，

故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

【例 4】　设 $a_1>0$，且 $a_{n+1}=\ln(1+a_n)$，

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求此极限；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}\right)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(1)【证明】　**方法一**　显然 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，

因为 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$，所以 $a_{n+1}=\ln(1+a_n)<a_n$，即数列 $\{a_n\}$ 单调递减，

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，

$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$ 两边取极限得 $A=\ln(1+A)$，解得 $A=0$.

方法二　显然 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，

令 $f(x)=\ln(1+x)$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，由拉格朗日中值定理得

$$a_{n+1}=\ln(1+a_n)=f(a_n)=f(a_n)-f(0)$$

$$=f'(\xi)\cdot a_n=\frac{a_n}{1+\xi}<a_n，\text{其中 } 0<\xi<a_n，$$

则数列 $\{a_n\}$ 单调递减，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，

$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$ 两边取极限得 $A=\ln(1+A)$，解得 $A=0$.

方法三　显然 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，

令 $f(x)=\ln(1+x)$，

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}>0$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调，

又因为 $a_2=\ln(1+a_1)<a_1$，所以 $\{a_n\}$ 单调递减，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，

$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$两边取极限得$A=\ln(1+A)$，解得$A=0$.

(2)【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n\ln(1+a_n)}$

$$\overset{a_n=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}.$$

类型二：数列无递推关系式

【例 5】 证明：

(1) 方程$x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{1}{2}$存在唯一的正根$x_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限.

【证明】 (1) 令$f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-\dfrac{1}{2}$，

$f_n(0)=-\dfrac{1}{2}$，$f_n(1)=n-\dfrac{1}{2}$，

因为$f_n(0)f_n(1)<0$，所以存在$x_n\in(0,1)$，使得$f_n(x_n)=0$；

因为$f'_n(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0(x>0)$，

所以$f_n(x)$在$[0,+\infty)$上严格递增，故$f_n(x)$在$(0,+\infty)$内存在唯一的零点，

故方程$x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{1}{2}$存在唯一的正根$x_n$.

(2) 由$x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}+x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n+1}=\dfrac{1}{2}$得

$$(x_{n+1}-x_n)+(x_{n+1}^2-x_n^2)+\cdots+(x_{n+1}^n-x_n^n)=-x_{n+1}^{n+1}<0,$$

从而有$x_{n+1}-x_n<0$，即$x_{n+1}<x_n$，故数列$\{x_n\}$单调递减；

又因为$x_n>0(n=1,2,\cdots)$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，显然$0\leqslant A\leqslant\dfrac{1}{2}$，

由$x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=\dfrac{1}{2}$得$\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=\dfrac{1}{2}$，

取极限得$\dfrac{A}{1-A}=\dfrac{1}{2}$，解得$A=\dfrac{1}{3}$.

重点题型分析

题型一 概念问题

【例 1】 设$\{a_n\}$为数列，若对任意的$\varepsilon>0$，总存在$N>0$，当$n\geqslant N$时有$|a_n-A|\leqslant3\varepsilon$，问$A$是否为数列$\{a_n\}$的极限？

微信公众号：厉尖考研 (ID: djky66)

【解】 A 是数列$\{a_n\}$的极限. 因为对任意$\varepsilon>0$,极限定义中强调 $N>0$ 是否存在而不在于其大小,且 $|a_n-A|\leqslant 3\varepsilon$ 中右边为 3ε 本质上仍然为任意小,只不过 ε 与 3ε 对应的 N 不同而已.

【例 2】 用极限定义证明:$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x}{2x-1}=3$.

【证明】 对任意的 $\varepsilon>0$,取 $|x-1|<\dfrac{1}{4}$,

令 $\left|\dfrac{3x}{2x-1}-3\right|=\dfrac{3|x-1|}{|2x-1|}<6|x-1|<\varepsilon$ 得 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{6}$,

于是对任意的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{\varepsilon}{6}\right\}$,当 $0<|x-1|<\delta$ 时,有 $\left|\dfrac{3x}{2x-1}-3\right|<\varepsilon$,

由极限定义得$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x}{2x-1}=3$.

【例 3】 设$\{a_n\},\{b_n\}$为两个数列,下列结论正确的是(　　).

(A) 若$\{a_n\},\{b_n\}$无界,则$\{a_nb_n\}$无界

(B) 若$\{a_n\},\{b_n\}$无界,则$\{a_n+b_n\}$无界

(C) 若$\{a_n\},\{b_n\}$为无穷大,则$\{a_nb_n\}$一定为无穷大

(D) 若$\{a_n\},\{b_n\}$一个有界一个无界,则$\{a_nb_n\}$无界

【解】 取 $a_n=n[1+(-1)^n],b_n=n[1-(-1)^n]$,显然$\{a_n\},\{b_n\}$都无界,但 $a_nb_n=0$,即$\{a_nb_n\}$有界,不选(A);

取 $a_n=\dfrac{1+n}{2},b_n=\dfrac{1-n}{2}$,显然$\{a_n\},\{b_n\}$无界,但$\{a_n+b_n\}$有界,不选(B);

取 $a_n=0,b_n=n$,显然$\{a_n\},\{b_n\}$一个有界一个无界,但$\{a_nb_n\}$有界,不选(D),应选(C).

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

题型二　若干项之和或之积的极限问题

【例 1】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$.

【解】 因为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),\end{aligned}$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]=\dfrac{1}{2}$.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 2】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}(x\neq 0)$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

【例 3】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^3-1}{k^3+1}$.

【解】 因为 $\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{k-1}{k+1}\cdot\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\dfrac{k-1}{k+1}\cdot\dfrac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}$,

所以 $\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{3^2-3+1}{2^2-2+1}\cdot\dfrac{4^2-4+1}{3^2-3+1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{2^2-2+1}=\frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n^2+n},$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{2}{3}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 4】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})(|x|<1)$.

【解】 由 $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=\dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ 及 $|x|<1$,得

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}.$$

【例 5】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

【解】 令 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}=b_n$,

因为 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}(i=1,2,\cdots,n)$,

所以 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant b_n\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$,

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

【例 6】 (1) 证明:$\ln(1+n)\leqslant1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\leqslant1+\ln n$;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{\ln n}$.

(1)【证明】　当 $x\in[1,2]$ 时，由 $1\geqslant\frac{1}{x}$ 得 $1\geqslant\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；

当 $x\in[2,3]$ 时，由 $\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{x}$ 得 $\frac{1}{2}\geqslant\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；

⋮

当 $x\in[n,n+1]$ 时，由 $\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{x}$ 得 $\frac{1}{n}\geqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，

从而 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(n+1)$.

当 $x\in[1,2]$ 时，由 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{x}$ 得 $\frac{1}{2}\leqslant\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；

当 $x\in[2,3]$ 时，由 $\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{x}$ 得 $\frac{1}{3}\leqslant\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；

⋮

当 $x\in[n-1,n]$ 时，由 $\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{x}$ 得 $\frac{1}{n}\leqslant\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，

从而 $\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln n$，于是 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant1+\ln n$，

故 $\ln(1+n)\leqslant1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant1+\ln n$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(2)【解】　由 $\ln(1+n)\leqslant1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant1+\ln n$ 得 $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\leqslant\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}\leqslant\frac{1+\ln n}{\ln n}$，

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/(1+x)}{1/x}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{\ln n}=1$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 7】　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\frac{i}{n^2}\sqrt{1-\frac{i^4}{n^4}}$.

【解】　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\frac{i}{n^2}\sqrt{1-\frac{i^4}{n^4}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\frac{i}{n}\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^4}=\int_0^1x\sqrt{1-x^4}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-(x^2)^2}\,\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}.$$

【例 8】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{i+\sqrt{n^2-i^2}}$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i+\sqrt{n^2-i^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\frac{i}{n}+\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$

$\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=I,$

因为 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t,$

所以 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2},$

故原式 $=\dfrac{\pi}{4}.$

【例 9】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2}\sin^2\dfrac{\pi i}{n}.$

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2}\sin^2\dfrac{\pi i}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n}\sin^2\dfrac{\pi i}{n}=\int_0^1 x\sin^2\pi x\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}x\sin^2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi^2}\times\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2\pi}\times2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{4}.$

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

【例 10】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+(2n)^2}\right].$

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+(2n)^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{2n}\dfrac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$

$=\int_0^2\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^2=\arctan2.$

【例 11】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}.$

微信公众号·顶尖考研 (ID: diky66)

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x},$

因为 $\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x}{1+x}\mathrm{d}x=\ln2-\int_0^1\dfrac{x}{1+x}\mathrm{d}x$

$=\ln2-\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=2\ln2-1=\ln\dfrac{4}{\mathrm{e}},$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=\dfrac{4}{\mathrm{e}}.$

【例 12】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right).$

【解】　令$\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}=b_n$，

由$\frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+1}\leqslant\frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\frac{2^{\frac{i}{n}}}{n}(i=1,2,\cdots,n)$得$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}\leqslant b_n\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2},$$

由夹逼定理得$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{\ln 2}$.

题型三　不定型求极限

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

不定型极限共分为两类七种：

(1) 基本不定型：$\frac{0}{0}$ 型，$\frac{\infty}{\infty}$ 型，1^{∞} 型.

(2) 其他不定型：$0\cdot\infty$ 型，$\infty-\infty$ 型，∞^0 型，0^0 型.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

情形一：$\frac{0}{0}$ 型

【思路分析】

在计算$\frac{0}{0}$ 型极限时，注意如下习惯思路：

(1) 若极限表达式中出现 $u(x)^{v(x)}$，一般化为 $\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$；

(2) 若极限表达式中出现对数函数，一般使用 $\ln(1+\Delta)\sim\Delta$；

(3) 若极限表达式中出现 $\varphi(x)-1$，一般使用 $\mathrm{e}^{\Delta}-1\sim\Delta$ 或 $(1+\Delta)^{a}-1\sim a\Delta$；

(4) x，$\sin x$，$\tan x$，$\arcsin x$，$\arctan x$ 中任意两个函数的差为三阶无穷小；

(5) 求$\frac{0}{0}$ 型极限的常用方法有：等价无穷小、洛必达法则、麦克劳林公式.

【例 1】　求下列极限：

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{\ln(1+x)}$；　　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin 2x)^{x^2}-1}{x-\sin x}$.

【解】　(1) **方法一**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+\sin 2x)^{\frac{1}{2}}-1]-[(1-\sin 2x)^{\frac{1}{2}}-1]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}(-\sin 2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2;$$

方法二

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}}\cdot\frac{2\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2.$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin 2x)^{x^2}-1}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2\ln(1+\sin 2x)}-1}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln(1+\sin 2x)}{x-\sin x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=2\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=12.$$

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x}{x^3}$.

【解】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3},$$

由 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{\sin^3 x}\overset{\sin x=t}{=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=-\frac{1}{6},$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x}{x^3}=-\frac{1}{3}.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 3】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2}$.

【解】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\arcsin x}-e^{\sin x}}{x^3}$.

【解】 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin x}-e^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\frac{e^{\arcsin x-\sin x}-1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin x-\sin x}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1]+(1-\cos x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

【例 5】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{x}-1}{(1-\sqrt{\cos x})\ln(1+2x)}$.

【解】　由 $\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{x}-1=\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{2}\right)}-1\sim x\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{2}\right)\sim x\cdot\dfrac{\cos x-1}{2}\sim-\dfrac{x^{3}}{4}$,

$1-\sqrt{\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{1+\sqrt{\cos x}}\sim\dfrac{x^{2}}{4}$，$\ln(1+2x)\sim 2x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{x}-1}{(1-\sqrt{\cos x})\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^{3}}{4}}{\dfrac{x^{2}}{4}\cdot 2x}=-\frac{1}{2}.$$

【例 6】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+\tan x}}{x[x-\ln(1+x)]}$.

【解】　由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^{2}}{2}+o(x^{2})$ 得 $x[x-\ln(1+x)]\sim\dfrac{x^{3}}{2}$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+\tan x}}{x[x-\ln(1+x)]}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+\tan x}}{x^{3}}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x\cos x}+\sqrt{1+\tan x}}\cdot\frac{x\cos x-\tan x}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\tan x}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-x}{x^{3}}+\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^{2}}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^{2}x}{3x^{2}}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=-\frac{5}{6}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 7】　求 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{x^{x}-(\sin x)^{x}}{x^{3}}$.

【解】　$\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{x^{x}-(\sin x)^{x}}{x^{3}}=-\lim\limits_{x\to 0^{+}}x^{x}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{x}-1}{x^{3}}=-\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{x}-1}{x^{3}}$

$$=-\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\mathrm{e}^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1}{x^{3}}=-\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^{2}}$$

$$=-\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)}{x^{2}}$$

$$=-\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sin x-x}{x^{3}}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x-\sin x}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1-\cos x}{3x^{2}}=\frac{1}{6}.$$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

【例 8】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^{2}}+\sqrt{1-x^{2}}-2}{x^{4}}$.

【解】　**方法一**

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^{2}}}-\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^{2}}}}{4x^{3}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^{4}}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^{2}}-\sqrt{1+x^{2}}}{x^{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}\frac{-2x^2}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

方法二

由$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2)$得

$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$，$\sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$，

则$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}-2\sim-\frac{1}{4}x^4$，

故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}-2}{x^4}=-\frac{1}{4}$.

【例 9】 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

【解】 由$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$，$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$，

$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$，于是$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$，

故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=-\frac{1}{12}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 10】 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^t\cos t\,dt-x-\frac{x^2}{2}}{(x-\tan x)(\sqrt{1+x}-1)}$.

【解】 因为$\sqrt{1+x}-1=(1+x)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{x}{2}$，

又因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}=-\frac{1}{3}$，所以$x-\tan x\sim-\frac{x^3}{3}$，

于是$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^t\cos t\,dt-x-\frac{x^2}{2}}{(x-\tan x)(\sqrt{1+x}-1)}=-6\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^t\cos t\,dt-x-\frac{x^2}{2}}{x^4}$

$=-6\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1-x}{4x^3}=-\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1-x}{x^3}$，

因为$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$，

所以$e^x\cos x=1+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，于是$e^x\cos x-1-x\sim-\frac{x^3}{3}$，

故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^t\cos t\,dt-x-\frac{x^2}{2}}{(x-\tan x)(\sqrt{1+x}-1)}=\frac{1}{2}$.

情形二：1^{∞} 型

【思路分析】

计算 1^{∞} 型的极限时，按照如下步骤进行：

(1) 凑 $(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$ 的形式.

(2) 凑重要极限形式时，保持恒等变形.

(3) 1^{∞} 的极限也可以采用先取对数再极限的方式计算.

【例 11】 求 $\lim\limits_{x\to 0}[e^{x}+\ln(1+2x)]^{\frac{2}{x}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}[e^{x}+\ln(1+2x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+e^{x}-1+\ln(1+2x)]^{\frac{1}{e^{x}-1+\ln(1+2x)}}\right\}^{\frac{2[e^{x}-1+\ln(1+2x)]}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2[e^{x}-1+\ln(1+2x)]}{x}}=e^{2\left[\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}\right]}=e^{6}$.

【例 12】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+\dfrac{\ln(1+\sin x)-x}{x}\right]^{\frac{x}{\ln(1+\sin x)-x}}\right\}^{\frac{\ln(1+\sin x)-x}{x^{2}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)-x}{x^{2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)-\sin x}{x^{2}}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^{2}}}$，

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)-\sin x}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)-\sin x}{\sin^{2}x}\xlongequal{\sin x=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^{2}}=-\dfrac{1}{2}$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^{2}}=0$ 得 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 13】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{2x^{2}-x+1}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{2x^{2}-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}-1}}\right\}^{(2x^{2}-x+1)(\cos\frac{1}{x}-1)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^{2}-x+1)(\cos\frac{1}{x}-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^{2}-x+1}{x^{2}}\cdot x^{2}\cdot(\cos\frac{1}{x}-1)}$

$=e^{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^{2}}}}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}e^{2\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^{2}}}=e^{-1}$.

【例 14】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\arcsin x}{1+\arctan x}\right)^{\frac{1}{x^{3}}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\arcsin x}{1+\arctan x}\right)^{\frac{1}{x^{3}}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\arcsin x-\arctan x}{1+\arctan x}\right)^{\frac{1+\arctan x}{\arcsin x-\arctan x}}\right]^{\frac{1}{x^{3}}\cdot\frac{\arcsin x-\arctan x}{1+\arctan x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{3}}\cdot\frac{\arcsin x-\arctan x}{1+\arctan x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{x^{3}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x^{2})^{-\frac{1}{2}}-(1+x^{2})^{-1}}{3x^{2}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{[(1-x^{2})^{-\frac{1}{2}}-1]-[(1+x^{2})^{-1}-1]}{3x^{2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-\frac{1}{2})(-x^{2})-(-1)(x^{2})}{3x^{2}}}=e^{\frac{1}{2}}$.

【例 15】 设 $f(x)$ 连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$ 得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，则 $f(0)=0$，$f'(0)=0$；

由 $e^3=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x+\frac{f(x)}{x}}}\right\}^{\frac{1}{x}\cdot\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]}$ 得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[x+\dfrac{f(x)}{x}\right]=3$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$；

再由 $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\dfrac{1}{2}f''(0)$ 得 $f''(0)=4$，

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}}\right\}^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$.

情形三：$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

【例 16】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2\ln x}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=4\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=4\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=0.$

【例 17】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{e^x}=0.$

【注解】

当 $x\to+\infty$ 时，$\ln^k x(k>0)$，$x^m(m>0)$，$a^x(a>1)$ 都趋于无穷大，且其阶数是由低到高的，即三个无穷大中前面除以后面极限总是零.

【例 18】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-2x\sin x}{2x^2+x\cos x+1}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-2x\sin x}{2x^2+x\cos x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\sin x}{2+\frac{1}{x}\cos x+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{3}{2}.$

【例 19】 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+3}{(x-1)^a-(x+1)^a}=b(\neq 0,\infty)$，求常数 a，b.

【解】 由 $(x-1)^a=x^a-ax^{a-1}+\cdots$，$(x+1)^a=x^a+ax^{a-1}+\cdots$ 得

$(x-1)^a-(x+1)^a=-2ax^{a-1}+\cdots$，

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

再由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+3}{(x-1)^a-(x+1)^a}=b$ 得 $\begin{cases}a-1=2,\\ \dfrac{1}{-2a}=b,\end{cases}$ 解得 $a=3,b=-\dfrac{1}{6}$.

【例 20】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}{\mathrm{e}^x}$.

【解】 **方法一**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

方法二

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=-\frac{1}{2},$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}{\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

情形四：$0\cdot\infty$ 型

【例 21】 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot\left(\arctan x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot\left(\arctan x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\arctan x+\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-1.$

【例 22】 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\tan 2x\cdot\ln x$.

【解】 $\lim\limits_{x\to0^+}\tan 2x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan 2x}{x}\cdot x\ln x=2\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=2\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

$$=2\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim_{x\to0^+}x=0.$$

【注解】

$0\cdot\infty$ 的极限一般转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

情形五：$\infty-\infty$ 型

【例 23】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

【例 24】 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+8}+x)$.

【解】 **方法一** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+8}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+8}{\sqrt{x^2+4x+8}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4+\dfrac{8}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{8}{x^2}}-1}=-2$.

方法二 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+8}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{8}{x^2}}\right)$

$\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=}-\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{(1+4t+8t^2)^{\frac{1}{2}}-1}{t}$,

由 $(1+4t+8t^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim 2t+4t^2$ 得 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+8}+x)=-2$.

微信公众号【顶尖考研】

【例 25】 设 $f(x)$ 二阶可导且 $f'(a)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f'(a)(x-a)}-\dfrac{1}{f(x)-f(a)}\right]$.

【解】 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f'(a)(x-a)}-\dfrac{1}{f(x)-f(a)}\right]$

$=\dfrac{1}{f'(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)[f(x)-f(a)]}$

$=\dfrac{1}{f'(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}\cdot\dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$

$=\dfrac{1}{f'^2(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$

$=\dfrac{1}{2f'^2(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\dfrac{f''(a)}{2f'^2(a)}$.

情形六：∞^0 型

【例 26】 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot x\ln x}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=e^0=1$.

情形七：0^0 型

【例 27】 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)} = e^0 = 1.$

【例 28】 求 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)^{\frac{1}{x}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}+\arctan x}} = e^{\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}} = e^0 = 1.$

题型四　变积分限函数求极限问题

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶可导，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^4}$.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ 得 $f(0)=0, f'(0)=2$.

由 $\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^4} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u}{x^4} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{4x^3} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x^2}$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2} = \frac{1}{4}f'(0) = \frac{1}{2}.$$

微信公众号【张少考研】(ID：djky66)

【例 2】 设 $f(x)$ 连续，$f(0)=0, f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$.

【解】 由 $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}(xt) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{2}f'(0).$$

【例 3】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1+xt)\mathrm{d}t$.

【解】 由 $\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1+xt)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{xt}\ln(1+xt)\mathrm{d}(xt) = \int_0^{x^2}\frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1+xt)\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}{2x} = 1.$$

【例 4】 设函数 $f(x)$ 连续且 $f(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}$.

【解】 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，

$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 (x-u)f(u)(-\mathrm{d}u) = x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\Big/x + f(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\Big/x},$$

由 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ 得 $\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t} = \frac{f(0)+f(0)}{f(0)} = 2.$

【例 5】 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$，求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}$.

【解】 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，

$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 (x-u)f(u)(-\mathrm{d}u) = x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2} + \frac{f(x)}{x}}{\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}},$$

因为 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$，所以 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} = 3.$

【例 6】 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}(t>0)$，求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\tan t - \sin t}.$$

【解】 $\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r$，

则原式 $= \lim_{t\to 0}\frac{2\pi\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r}{\tan t(1-\cos t)} = 4\pi\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r}{t^3}$

微信公众号【顶尖考研 (ID: djky66)

$$=\frac{4\pi}{3}\lim_{t\to 0}\frac{tf(t)}{t^2}=\frac{4\pi}{3}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{4\pi}{3}f'(0)=\frac{4\pi}{3}.$$

题型五　左、右极限问题

【例 1】 $f(x)=\dfrac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{2+2^{\frac{2}{x-1}}}$，讨论$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

【解】 当 $x\to 1^-$ 时，$2^{\frac{1}{x-1}}\to 0$，$2^{\frac{2}{x-1}}\to 0$，则 $f(1-0)=\dfrac{1}{2}$；

当 $x\to 1^+$ 时，$2^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty$，$2^{\frac{2}{x-1}}\to+\infty$，则 $f(1+0)=0$，
因为 $f(1-0)\neq f(1+0)$，所以$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在.

【例 2】 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=2-1=1$，得 $f(0-0)=1$；

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=0+1=1$，得 $f(0+0)=1$，

因为 $f(0-0)=f(0+0)=1$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

题型六　极限存在问题

【例 1】 设 $a_1>0$，$a_{n+1}=\ln(\mathrm{e}+a_n)-1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

【证明】 已知 $a_1>0$，
设 $a_k>0$，则 $a_{k+1}=\ln(\mathrm{e}+a_k)-1>\ln\mathrm{e}-1=0$，
由数学归纳法，对任意的正整数 n，有 $a_n>0$；

由 $a_{n+1}=\ln(\mathrm{e}+a_n)-1=\ln\left[\mathrm{e}\left(1+\dfrac{a_n}{\mathrm{e}}\right)\right]-1=\ln\left(1+\dfrac{a_n}{\mathrm{e}}\right)<\dfrac{a_n}{\mathrm{e}}<a_n$ 得
数列 $\{a_n\}$ 单调递减，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

【例 2】 设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛.

【证明】 显然数列 $\{a_n\}$ 单调递增.

由 $\ln a_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$\leqslant\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}\leqslant 1$$

得 $a_n \leqslant e$，即数列 $\{a_n\}$ 单调增加有上界，故数列 $\{a_n\}$ 收敛.

【例 3】 设 $a_1=1$，且 $a_{n+1}+\sqrt{1-a_n}=0(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在并求此极限.

【证明】 令 $y=-\sqrt{1-x}$，因为 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}>0$，所以 $\{a_n\}$ 单调.

又因为 $a_1=1>a_2=0$，所以 $\{a_n\}$ 单调减少.

现证明 $a_n \geqslant -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

当 $n=1$ 时，$a_1=1 \geqslant -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，设 $a_k \geqslant -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，

由 $a_k \geqslant -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 得 $1-a_k \leqslant 1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$，

于是 $-\sqrt{1-a_k} \geqslant -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，而 $a_{k+1}=-\sqrt{1-a_k}$，所以 $a_{k+1} \geqslant -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，

由归纳法，对一切的 n，有 $a_n \geqslant -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

由极限存在准则，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$a_{n+1}+\sqrt{1-a_n}=0$ 两边令 $n\to\infty$ 得

$A+\sqrt{1-A}=0$，解得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

【例 4】 设 $0<a_1<6$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n(6-a_n)}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

【证明】 由 $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant \dfrac{a_n+6-a_n}{2}=3$，得 $\{a_n\}$ 有界.

由 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2a_n(3-a_n)}{\sqrt{a_n(6-a_n)}+a_n} \geqslant 0$ 得 $\{a_n\}$ 单调增加，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、单调减少且非负，令 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

【证明】 $a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$，

由 $f(x)$ 单调减少，得 $\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_n^{n+1}f(n+1)\mathrm{d}x=f(n+1)$，从而 $a_{n+1}-a_n \leqslant 0$，即 $\{a_n\}$ 单调减少.

由 $a_n=\left[f(1)-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right]+\cdots+\left[f(n-1)-\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x\right]+f(n)$，

再由 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 f(1)\mathrm{d}x=f(1),\cdots,\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{n-1}^n f(n-1)\mathrm{d}x=f(n-1)$ 及 $f(n) \geqslant 0$ 得 $a_n \geqslant 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

题型七 含参数的极限问题

【例 1】 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=2$，求 a，b 的值.

【解】　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)$，所以由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=2$ 得 $a=1$，又

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1-t+t^2}-1-bt}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1-t+t^2}-1}{t}-b,$$

因为 $\sqrt{1-t+t^2}-1\sim\frac{1}{2}(-t+t^2)\sim-\frac{1}{2}t$，所以 $-\frac{1}{2}-b=2$，$b=-\frac{5}{2}$.

【例 2】　设 $\lim\limits_{x\to0}(x^{-3}\sin3x+ax^{-2}+b)=0$，求常数 a,b.

【解】　$\lim\limits_{x\to0}(x^{-3}\sin3x+ax^{-2}+b)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x+ax+bx^3}{x^3}$，

因为　　$\sin3x=3x-\frac{(3x)^3}{3!}+o(x^3)=3x-\frac{9}{2}x^3+o(x^3)$，

所以　　$\sin3x+ax+bx^3=(a+3)x+\left(b-\frac{9}{2}\right)x^3+o(x^3)$，

又因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x+ax+bx^3}{x^3}=0$，所以 $a=-3$，$b=\frac{9}{2}$.

题型八　列与子列的极限

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 1】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan n\right)^n$.

【解】　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}}\right\}^{x\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\frac{2}{\pi}},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan n\right)^n=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

【例 2】　极限 $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$(　　).

(A) 等于 0　　(B) 等于 1　　(C) 不存在但不是 ∞　　(D) 等于 ∞

【解】　取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}\to0(n\to\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{x_n}=1$；

取 $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to0(n\to\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{y_n}=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在，但不是 ∞，应选(C).

题型九　间断点的判别与分类问题

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】 $f(0)=0, f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1,$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1,$$

因为 $f(0+0)=f(0-0)\neq f(0)$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

【例 2】 讨论 $f(x)=\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续性.

【解】 当 $x=0$ 及 $x=1$ 时，$f(x)$ 间断.

因为当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x}{1-x}\sim x$，所以 $1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\sim-\dfrac{x}{1-x}\sim-x$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

当 $x\to 1^-$ 时，$\dfrac{x}{1-x}\to+\infty$，从而 $\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to+\infty$，于是 $f(1-0)=0$；

当 $x\to 1^+$ 时，$\dfrac{x}{1-x}\to-\infty$，从而 $\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to 0$，于是 $f(1+0)=1$.

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

【例 3】 求 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{\tan x}}$ 的间断点及类型.

【解】 当 $x=k\pi$ 及 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$ 间断.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\mathrm{e}$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=1$，所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；

又因为 $\lim\limits_{\substack{x\to k\pi\\ k\neq 0}}f(x)$ 不存在(左、右极限中一个为 0 一个为 ∞)，所以 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0)$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

【例 4】 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin x}{\sin t}\right)^{\frac{t^2}{\sin x-\sin t}}$，求 $f(x)$ 的间断点.

【解】 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left[\left(1+\dfrac{\sin x-\sin t}{\sin t}\right)^{\frac{\sin t}{\sin x-\sin t}}\right]^{\frac{t^2}{\sin t}}=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{\sin x}}$,

$f(x)$ 的间断点为 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$，得 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

由 $f(\pi-0)=+\infty$ 得 $x=\pi$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点，同理 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0)$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

【例 5】　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 连续，求 a,b 的值.

【解】　当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx$；

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$；

当 $x=-1$ 时，$f(-1)=\dfrac{1}{2}(a-b-1)$；

当 $x=1$ 时，$f(1)=\dfrac{1}{2}(a+b+1)$.

于是
$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx, & |x|<1,\\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1,\\ \dfrac{1}{2}(a-b-1), & x=-1,\\ \dfrac{1}{2}(a+b+1), & x=1.\end{cases}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$f(-1-0)=-1,f(-1+0)=a-b,f(1-0)=a+b,f(1+0)=1$，

因为 $f(x)$ 连续，所以

$f(-1-0)=-1=f(-1+0)=f(-1),f(1-0)=f(1+0)=f(1)$，

解得 $a=0,b=1$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题型十　闭区间及无限区间上连续函数的性质

【例 1】　设 $f(x)\in C[a,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【证明】　取 $\varepsilon_0=1$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，所以存在 $X_0>0$，当 $x>X_0$ 时，$|f(x)-A|<1$，从而 $|f(x)|<|A|+1$.

因为 $f(x)\in C[a,X_0]$，所以 $f(x)$ 在 $[a,X_0]$ 上有界，即存在 $M_0>0$，当 $x\in[a,X_0]$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M_0$.

取 $M=\max\{M_0,|A|+1\}$，则当 $x\in[a,+\infty)$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

【例 2】　设 $f(x)\in C[a,b]$，证明：对任意的 $x_i\in[a,b](1\leqslant i\leqslant n)$ 及 $k_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$ 且 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$，存在 $\xi\in[a,b]$，使得
$$k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n)=f(\xi).$$

【证明】　因为 $f(x)\in C[a,b]$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，

由 $m\leqslant f(x_i)\leqslant M$ 且 $k_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$ 得 $k_im\leqslant k_if(x_i)\leqslant k_iM(1\leqslant i\leqslant n)$，相加得 $m\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n)\leqslant M$，由介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使得
$$k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n)=f(\xi).$$

测试题

一、选择题

1. 下列结论正确的是(　　).

(A) 若数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都无界,则数列$\{a_nb_n\}$也无界

(B) 若数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都发散,则数列$\{a_nb_n\}$也发散

(C) 若数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都发散,则数列$\{a_n\pm b_n\}$也发散

(D) 若数列$\{a_n\}$有界且$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$,则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$

2. 设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$,则下列结论正确的是(　　).

(A) 若$\{a_n\}$发散,则$\{b_n\}$发散　　(B) 若$\{a_n\}$无界,则$\{b_n\}$一定有界

(C) 若$\{a_n\}$有界,则$\{b_n\}$为无穷小　　(D) 若$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$为无穷小,则$\{b_n\}$也为无穷小

3. 函数$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$当$x\to0$时为(　　).

(A)1　　(B)0　　(C) 无穷大　　(D) 不存在但不是无穷大

4. 设$f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2\,dt$,$g(x)=x^3+x^4$,当$x\to0$时,$f(x)$是$g(x)$的(　　).

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小　　(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但非等价无穷小

5. 下列结论正确的是(　　).

(A) 若函数$f(x)$在点$x=a$处连续,则$f(x)$在$x=a$的邻域内连续

(B) 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界,则$f(x)$在区间$[a,b]$上连续

(C) 若$f(x)$在点$x=a$处间断,则$f^2(x)$在$x=a$处也间断

(D) 若$f(x)$连续,而$g(x)$在$x=a$处间断,则$f[g(x)]$在$x=a$处不一定间断

6. 设$f(x)$在$x=a$处连续且$f(a)\neq0$,$g(x)$在$x=a$处间断,则(　　).

(A)$g[f(x)]$在$x=a$处间断　　(B)$f[g(x)]$在$x=a$处间断

(C)$g^2(x)$在$x=a$处间断　　(D) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$在$x=a$处间断

7. 设$x=0$为函数$y=\dfrac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}$的可去间断点,则$a$,$b$满足(　　).

(A)$a=1$,b为任意常数　　(B)$a\neq1$,b为任意常数

(C)a为任意常数,$b=-1$　　(D)a为任意常数,$b\neq-1$

二、填空题

1. 当$x\to0$时,$\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\sim ax^b$,则$a=$_____,$b=$_____.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2+x)^x-2^x}{x^2}=$_____.

3. 设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-A}{x-a}=B$,则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)}-e^A}{x-a}=$_____.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=$_____.

5. 当$x\to0$时,函数$\arcsin(\sin^2x)\ln(1+x^2)$是$(e^x-1)\sin x^n$的高阶无穷小,而函数$\sin(\sqrt{1+x^{n+1}}-1)$又是$\ln^2(e^{\sin^2x}+\sqrt{1-\cos x})$的高阶无穷小,则$n=$_____.

6. 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=3$,则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=$_____.

7. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t-\arctan t}{t^{3}}$，则 $a=$ _____.

8. 设 $f(x)$ 可导且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=$ _____.

9. 曲线 $y=x^{n}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线交 x 轴于点 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^{n}=$ _____.

10. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2012}}{(n+1)^{a}-(n-1)^{a}}=k(k\neq 0,\infty)$，则 $a=$ _____，$k=$ _____.

11. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\dfrac{t^{2}}{\sqrt{a+t^{2}}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=2$，则 $a=$ _____，$b=$ _____.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{2ax}+\sin 4x-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ _____.

13. $f(x)=\dfrac{2-\arctan\dfrac{1}{x}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点为_____，且为_____间断点.

三、解答题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & |x|>1,\\ 2-x^{2}, & |x|\leqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^{2}, & |x|<2,\\ \mathrm{e}^{x}, & |x|\geqslant 2,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-\cos^{2}x}}+\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}\right)$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{|x|}+\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}\right)$.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x}-1}{x^{2}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{3}(2x)}{x^{4}}\left(1-\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}-1}\right)$；　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{x}-x}{\ln x-x+1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}-\sin^{2}x\cos^{2}x}{x^{2}\sin^{2}x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{x}}{\sin x-x\cos x}$；　(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{\arctan x-\arcsin x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^{2}+2x+2}+x)$.

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^{2}}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^{2}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^{2}\sin\dfrac{1}{x^{2}}}{\sin x}+\left(\dfrac{3-\mathrm{e}^{x}}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}}\right]$.

6. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{(x-\sin x)\ln(1+x)}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1+x^{2}}}{x-\ln(1+x)}$.

7. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{2}}(\sqrt{n^{2}-1^{2}}+\sqrt{n^{2}-2^{2}}+\cdots+\sqrt{n^{2}-n^{2}})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^{2}+1^{2}}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^{2}+2^{2}}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^{2}+n^{2}}}\right)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

8. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\arctan\dfrac{1}{x}-\arctan\dfrac{1}{x+1}\right)$.

9. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}}\ (x>0)$.

10. 设 $a>0,x_1=\sqrt{a},x_{n+1}=\sqrt{x_n+a}\ (n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求之.

11. 设 $x_1=2,x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)\ (n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求之.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-4x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & x>0,\\ a, & x=0,\\ ax^2-b, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a,b.

13. 设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{x}{2-x}}-1}{x}\arctan\dfrac{1}{x^2-1}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

14. 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln|x|}{x^3-x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 的间断点并判断其类型.

测试题参考答案

一、选择题

1. 取 $a_n=n[1+(-1)^n],b_n=n[1-(-1)^n]$，显然 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都无界，而 $a_nb_n\equiv 0$，所以(A)，(B) 不对；取 $a_n=\dfrac{1+n}{2},b_n=\dfrac{1-n}{2}$，显然 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都发散，但 $a_n+b_n\equiv 1$，$\{a_n+b_n\}$ 收敛，所以(C) 不对；因为 $\{a_n\}$ 有界，所以存在 $M>0$，对一切的 n，有 $|a_n|\leqslant M$，于是有 $|a_nb_n|\leqslant M|b_n|$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}M|b_n|=+\infty$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，选(D).

2. 取 $a_n=n,b_n=\dfrac{1}{n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$ 且 $\{a_n\}$ 发散，但 $\{b_n\}$ 收敛，(A) 不对；取 $a_n=n[1+(-1)^n],b_n=n[1-(-1)^n]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，但 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都无界，(B) 不对；取 $a_n=\dfrac{1}{n^2},b_n=n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$ 且 $\{a_n\}$ 有界，但 $\{b_n\}$ 不是无穷小，(C) 不对，选(D).

3. 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0(n\to\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}\sin\dfrac{1}{x_n}=0$；取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\to 0(n\to\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}\sin\dfrac{1}{y_n}=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在但不是无穷大，选(D).

4. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin(\sin x)^2}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{nx^{n-1}}$，所以 $n=3,f(x)\sim\dfrac{x^3}{3}$，又因为 $g(x)\sim x^3$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶而非等价的无穷小，选(D).

5. 取 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Q},\\ x^3, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$ 显然 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，任取 $x=a\neq 0$，因为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在，所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处间断，即 $f(x)$ 只有一个连续点 $x=0$，(A) 不对；

取 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[a,b]\cap\mathbf{Q},\\ 0, & x\in[a,b]\cap(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}),\end{cases}$ 显然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，但 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上点点间断，(B) 不对；

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

取 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ -1, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$ 显然 $f(x)$ 点点间断，但 $f^2(x)\equiv 1$ 处处连续，(C) 不对；

取 $f(x)=3x^2, g(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ -1, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$ $g(x)$ 处处间断，但 $f[g(x)]\equiv 3$ 处处连续，选(D).

6. 取 $f(x)\equiv 1, g(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ -1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 处处连续，$g(x)$ 在 $x=0$ 处间断，而 $f[g(x)]\equiv 1$，$g[f(x)]\equiv -1, g^2(x)\equiv 1$ 都处处连续，所以选(D).

7. 由 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ 得 $ax-\ln(1+x)=(a-1)x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，又由 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ 得 $x+b\sin x=(b+1)x-\frac{b}{6}x^3+o(x^3)$，因为 $x=0$ 为 $y=\frac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}$ 的可去间断点，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}$ 存在，而只有 $b\neq -1$ 时极限存在，应选(D).

二、填空题

1. $\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\sim \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1\sim x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)=x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)\sim x\cdot\frac{\cos x-1}{3}\sim -\frac{1}{6}x^3$，于是 $a=-\frac{1}{6}, b=3$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2+x)^x-2^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}2^x\cdot\frac{\left(\frac{2+x}{2}\right)^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}=\frac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\mathrm{e}^{f(x)}-\mathrm{e}^A}{x-a}=\mathrm{e}^A\lim\limits_{x\to a}\frac{\mathrm{e}^{f(x)-A}-1}{x-a}=\mathrm{e}^A\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-A}{x-a}=B\mathrm{e}^A$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x}=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

$=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}$.

5. $\arcsin(\sin^2 x)\ln(1+x^2)\sim x^4$，$(\mathrm{e}^x-1)\sin x^n\sim x^{n+1}$，因为 $\arcsin(\sin^2 x)\ln(1+x^2)$ 是 $(\mathrm{e}^x-1)\sin x^n$ 的高阶无穷小，所以 $n+1<4$，即 $n<3$；$\sin(\sqrt{1+x^{n+1}}-1)\sim\sqrt{1+x^{n+1}}-1\sim\frac{1}{2}x^{n+1}$，而 $\mathrm{e}^{\sin^2 x}-1+\sqrt{1-\cos x}\sim x^2+\frac{|x|}{\sqrt{2}}\sim\frac{|x|}{\sqrt{2}}$，所以 $\ln^2(\mathrm{e}^{\sin^2 x}+\sqrt{1-\cos x})=\ln^2[1+(\mathrm{e}^{\sin^2 x}-1+\sqrt{1-\cos x})]\sim\frac{x^2}{2}$，于是 $n+1>2$，即 $n>1$，故 $n=2$.

6. 因为 $\mathrm{e}^{2x}-1\sim 2x$，$\sqrt{1+f(x)\sin x}-1\sim\frac{f(x)\sin x}{2}\sim\frac{x}{2}f(x)$，所以 $3=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}f(x)}{2x}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=12$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{2a}$，$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t-\arctan t}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t-t}{t^3}+\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\arctan t}{t^3}$，而 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\arctan t}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{3t^2}=\frac{1}{3}$，$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t-t}{t^3}\overset{\arcsin t=u}{=\!=}\lim\limits_{u\to 0}\frac{u-\sin u}{\sin^3 u}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u-\sin u}{u^3}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{3u^2}=\frac{1}{6}$，于是有 $\mathrm{e}^{2a}=\frac{1}{2}$，故 $a=-\frac{1}{2}\ln 2$.

微信公众号【预类考研】(ID: djky66)

8. $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\left(1+\dfrac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{f(x+h)-f(x)}}\right]^{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}=\mathrm{e}^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$.

9. 曲线 $y=x^n$ 在点(1,1)处的切线为 $y-1=n(x-1)$，令 $y=0$ 得 $\xi_n=1-\dfrac{1}{n}$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

10. 由 $(n+1)^a-(n-1)^a=n^a+C_a^1n^{a-1}+\cdots-(n^a-C_a^1n^{a-1}+\cdots)=2an^{a-1}+\cdots$ 得 $a-1=2012$，于是 $a=2013$，$k=\dfrac{1}{2a}=\dfrac{1}{4026}$.

11. 由洛必达法则得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}$，则 $b=1$，而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{1-\cos x}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}=2$，所以 $a=1$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2ax}+\sin 4x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}+\dfrac{\sin 4x}{x}\right)=2a+4$，所以 $2a+4=a$，即 $a=-4$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

13. 因为 $f(0-0)=2+\dfrac{\pi}{2}$，$f(0+0)=0$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

三、解答题

1. $g[f(x)]=\begin{cases}f^2(x), & |f(x)|<2,\\ \mathrm{e}^{f(x)}, & |f(x)|\geqslant 2,\end{cases}$ $|f(x)|<2$ 等价于 $\begin{cases}|x+1|<2,\\ |x|>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|2-x^2|<2,\\ |x|\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $x\in(-3,-1)$ 或 $x\in[-1,0)\cup(0,1]$；$|f(x)|\geqslant 2$ 等价于 $\begin{cases}|x+1|\geqslant 2,\\ |x|>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|2-x^2|\geqslant 2,\\ |x|\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $x\in(-\infty,-3]\cup(1,+\infty)$ 或 $x=0$，于是 $g[f(x)]=\begin{cases}(x+1)^2, & x\in(-3,-1),\\ (2-x^2)^2, & x\in[-1,0)\cup(0,1],\\ \mathrm{e}^{x+1}, & x\in(-\infty,-3]\cup(1,+\infty),\\ \mathrm{e}^2, & x=0.\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

2. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}+\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x}{-\sin x}+\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}\right)=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}+\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{\sin x}+\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}\right)=1$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}+\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}\right)=1$.

3. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{|x|}+\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}\right)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sin x}{|x|}+\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}\right)$

$=-1+2=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{|x|}+\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}\right)=1$.

4. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^3(2x)}{x^4}\left(1-\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^3(\mathrm{e}^x-1-x)}{x^4(\mathrm{e}^x-1)}=8\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=8\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=4$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}x\cdot\dfrac{x^{x-1}-1}{\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{e}^{(x-1)\ln x}-1}{\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{e}^{(x-1)\ln[1+(x-1)]}-1}{\ln[1+(x-1)]-(x-1)}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\ln(1+t)}{\ln(1+t)-t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{\ln(1+t)-t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{\frac{1}{1+t}-1}=-2$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[x-\ln(1+x)](\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{1+x\sin x-\cos x}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\frac{x\sin x}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}}$

$=\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\dfrac{2}{3}.$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin x\cos x}{x}\cdot\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\sin2x}{x^3}$

$=8\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\sin2x}{(2x)^3}=8\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}=8\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\cos t}{3t^2}=\dfrac{4}{3}.$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{\sin x-x\cos x}=\lim e^x\cdot\dfrac{e^{\tan x-x}-1}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}\cdot\dfrac{x^3}{\sin x-x\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{x\sin x}=1.$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}$，由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{x^2}=-\dfrac{1}{3}$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}\xlongequal{x=\sin t}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t-t}{\sin^3t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t-t}{t^3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\cos t-1}{3t^2}=-\dfrac{1}{6}$ 得$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\arcsin x}{x^3}=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\arctan x-\arcsin x\sim-\dfrac{x^3}{2}$，于是原式 $=-2\lim e^{\sin x}\cdot\dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{x^3}=-2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=-2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}=-1.$

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\sqrt{1+2t+2t^2}}{t}$，

因为 $\sqrt{1+2t+2t^2}-1\sim\dfrac{1}{2}(2t+2t^2)=t+t^2$，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}+x)=-1.$

5. (1) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\left\{[1+(1-x)]^{\frac{1}{1-x}}\right\}^{(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{\tan\frac{\pi}{2}(1-x)}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-x)\cos\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\right)^{\frac{n}{e^x+\cdots+e^{nx}-n}}\right]^{\frac{e^x+\cdots+e^{nx}-n}{nx}}$

$=e^{\frac{1}{n}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}+\cdots+\frac{e^{nx}-1}{x}\right)}=e^{\frac{n+1}{2}}.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0}(t^2+\cos t)^{\frac{1}{t^2}}=\lim\limits_{t\to0}\left\{[1+(t^2+\cos t-1)]^{\frac{1}{t^2+\cos t-1}}\right\}^{\frac{t^2+\cos t-1}{t^2}}$

$=e^{\lim\limits_{t\to0}\left(1-\frac{1-\cos t}{t^2}\right)}=e^{\frac{1}{2}}.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{\sin x}+\left(\dfrac{3-e^x}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\sin\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1-e^x-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1-e^x-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{1-e^x-x}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{1-e^x-x}}\right]^{\frac{1-e^x-x}{x(2+x)}}=e^{-1}.$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

6. (1) 由 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ 得 $(x - \sin x)\ln(1+x) \sim \frac{x^4}{6}$，又 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$，于是 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)[x - \ln(1+\tan x)]}{(x-\sin x)\ln(1+x)} = 3\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+\tan x)}{x^2}$，又 $\ln(1+\tan x) = \tan x - \frac{1}{2}\tan^2 x + o(x^2)$.

故原式 $= 3\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \tan x + \frac{1}{2}\tan^2 x + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2}$.

(2) 由 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ 得 $x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$；由 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$，$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ 得 $\cos x - \sqrt{1+x^2} \sim -x^2$，于是 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+x^2}}{x - \ln(1+x)} = -2$.

7. (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(\sqrt{n^2-1^2} + \sqrt{n^2-2^2} + \cdots + \sqrt{n^2-n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}} + \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^2+1}} + \cdots + \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\left(\frac{n}{n}\right)^2+1}}\right)$

$= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1$.

8. 由微分中值定理得 $\arctan\frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+\xi^2}\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{1+\xi^2}\cdot\frac{1}{x(x+1)}$，其中 ξ 介于 $\frac{1}{x+1}$ 与 $\frac{1}{x}$ 之间，于是原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+\xi^2}\cdot\frac{x}{x+1} = 1$.

9. 当 $0 < x < 1$ 时，由 $x \leqslant \sqrt[n]{x^n + x^{2n}} \leqslant \sqrt[n]{x^n + x^n} = 2^{\frac{1}{n}}x$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + x^{2n}} = x$；当 $x \geqslant 1$ 时，由 $x^2 \leqslant \sqrt[n]{x^n + x^{2n}} \leqslant \sqrt[n]{x^{2n} + x^{2n}} = 2^{\frac{1}{n}}x^2$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + x^{2n}} = x^2$.

10. 由 $x_{n+2} - x_{n+1} = \sqrt{a + x_{n+1}} - \sqrt{a + x_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt{a + x_{n+1}} + \sqrt{a + x_n}}$ 及 $x_2 - x_1 > 0$ 得 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调增加. 现证 $x_n \leqslant \sqrt{a} + 1$. $x_1 = \sqrt{a} \leqslant \sqrt{a} + 1$，设 $x_k \leqslant \sqrt{a} + 1$，则 $x_{k+1} = \sqrt{x_k + a} \leqslant \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} \leqslant \sqrt{a} + 1$，由归纳法，对一切的 n 总有 $x_n \leqslant \sqrt{a} + 1$，由极限存在准则得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$x_{n+1} = \sqrt{x_n + a}$ 两边取极限得 $A = \sqrt{A + a}$，解得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A = \frac{\sqrt{4a+1} + 1}{2}$.

11. 由 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \geqslant \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n\cdot\frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}$，得 $x_n \geqslant \sqrt{2}\ (n = 1, 2, \cdots)$，即 $\{x_n\}$ 有下界. 由 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} \leqslant 0$ 得 $\{x_n\}$ 单调减少，由极限存在准则，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ 两边求极限得 $A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{2}{A}\right)$，解得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A = \sqrt{2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-4x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-4x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2x} = -4$，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (ax^2 - b) = -b$，因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，所以 $f(0-0) = f(0) = f(0+0)$，于是 $a = -4$，$b = 4$.

13. 当 $x=0,x=\pm1,x=2$ 时，$f(x)$ 间断. 因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{x}{2-x}}-1}{x}\arctan\dfrac{1}{x^2-1}=-\dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x}{2-x}}{x}$ $=-\dfrac{\pi}{8}$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；由 $f(1-0)=-\dfrac{\pi(e-1)}{2}$，$f(1+0)=\dfrac{\pi(e-1)}{2}$ 得 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点；由 $f(-1-0)=\dfrac{\pi(1-e^{-\frac{1}{3}})}{2}$，$f(-1+0)=-\dfrac{\pi(1-e^{-\frac{1}{3}})}{2}$ 得 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点；由 $f(2-0)=+\infty$，$f(2+0)=-\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{3}$ 得 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

14. $x=0,x=-1,x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点，因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{2}$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，同理 $x=-1$ 也为 $f(x)$ 的可去间断点.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第二章　导数与微分

大纲点击

1. 理解导数和微分的概念，理解导数与微分的关系，理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量，理解函数的可导性与连续性之间的关系.

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式. 了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分.

3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数.

4. 会求分段函数的导数，会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

一、基本概念



1. 导数—— 设 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的邻域内有定义，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，称此极限为函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数，记为 $f'(x_0)$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

若 $y=f(x)$ 在 I 上处处可导，称 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 为 $y=f(x)$ 在 I 上的导函数，简称导数.

2. 高阶导数—— 设 $f(x)$ 为可导函数，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ 存在，称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，此极限称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的二阶导数，记为 $f''(x_0)$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$，类似可定义三阶及以上的导数.

3. 可微—— 设函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的邻域内有定义，若

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是一个只与 x_0 有关的常数，称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，且称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分，记为 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$，即 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}=A\Delta x$，习惯上记 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}=A\mathrm{d}x$.

【注解】

(1) $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微与可导等价.

(2) 若 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微,则 $A=f'(x_0)$.

(3) 若 $y=f(x)$ 处处可微,则 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

二、导数理论

(一) 导数基本公式

1. $(C)'=0$.

2. $(x^a)'=ax^{a-1}$,特别地,有 $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

3. $(a^x)'=a^x\ln a$,特别地,有 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

4. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$,特别地,有 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

5. 三角函数求导公式

(1) $(\sin x)'=\cos x$.　(2) $(\cos x)'=-\sin x$.

(3) $(\tan x)'=\sec^2 x$.　(4) $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

(5) $(\sec x)'=\sec x\tan x$.　(6) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

6. 反三角函数求导公式

(1) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.　(2) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.　(4) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

7. 高阶导数公式

(1) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$;　(2) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

(3) $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!\,a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

(二) 导数四则运算法则

设 $u(x)$, $v(x)$ 为可导函数,则有

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

2. $(uv)'=u'v+uv'$,特别地 $(ku)'=ku'$ (k 为常数).

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

4. $(uv)^{(n)}=C_n^0u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^nuv^{(n)}$.

(三) 复合函数导数链式运算法则

设 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 都是可导函数且 $\varphi'(x)\neq 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

（四）函数与其反函数一阶导数与二阶导数之间的关系

定理 1 设 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)\neq 0$，又设 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，则

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

定理 2 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)\neq 0$，又设 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，则

$$\varphi''(y)=-\frac{f''(x)}{f'^{3}(x)}.$$

（五）隐函数与参数方程确定的函数的导数

1. 隐函数的导数

设 $y=f(x)$ 是由隐函数 $F(x,y)=0$ 确定的函数，在 $F(x,y)=0$ 中将 y 看成 x 的函数，$F(x,y)=0$ 两边对 x 求导数即得 $\dfrac{dy}{dx}$.

2. 设 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 二阶可导且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]/dt}{dx/dt}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^{3}(t)}.$$

微信公众号【数学考研】(ID: dikv66)

【注解】

(1) 若 $L:r=r(\theta)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 时，先将 L 表示为参数方程的形式，即 $L:\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta,\end{cases}$ 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\dfrac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$.

(2) 若 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}F(x,t)=0,\\ G(y,t)=0\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 时按参数求导方法，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$，其中 $\dfrac{dx}{dt}$ 与 $\dfrac{dy}{dt}$ 按隐函数求导方法将 $F(x,t)=0$ 及 $G(y,t)=0$ 对 t 求导.

(3) 若 $y=u(x)^{v(x)}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 时一般有以下两种方法：

方法一：将 $y=u(x)^{v(x)}$ 化为 $y=e^{v(x)\ln u(x)}$，则

$$\frac{dy}{dx}=u(x)^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\ln u(x)+\frac{u'(x)v(x)}{u(x)}\right].$$

方法二：$y=u(x)^{v(x)}$ 两边取自然对数得 $\ln y=v(x)\ln u(x)$，两边求导得

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=v'(x)\ln u(x)+\frac{u'(x)v(x)}{u(x)},\text{则}\frac{dy}{dx}=u(x)^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\ln u(x)+\frac{u'(x)v(x)}{u(x)}\right].$$

重点题型分析

题型一　导数与微分的定义及函数可导性判断

【例 1】　设 $f(x)=x(x-1)(x+2)\cdots(x+98)(x-99)$，求 $f'(0)$.

【解】　方法一

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(x-1)(x+2)\cdots(x+98)(x-99)=99!.$$

方法二

由 $f'(x)=(x-1)(x+2)\cdots(x+98)(x-99)+x\varphi(x)$ 得 $f'(0)=99!$.

【例 2】　设 $f(x)$ 连续且在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^4}=\dfrac{1}{2}$，求 $f'(0)$.

【解】　由 $\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2)\xlongequal{x^2-t^2=u}-\dfrac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u$

得　$$\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{4x^2},$$

显然 $f(0)=0$，

再由 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=\dfrac{1}{4}f'(0)$ 得 $f'(0)=2$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【例 3】　(1) 设 $f'(a)$ 存在，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a-h)}{h}$；

(2) 若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在，问 $f'(a)$ 是否存在？

【解】

(1) 因为 $f'(a)$ 存在，

所以 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a-h)}{h}=3\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{3h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}=4f'(a)$.

(2) 若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在，$f'(a)$ 不一定存在，

如：$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 2,\\ 1, & x=2.\end{cases}$

取 $a=2$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2-(2-h)^2}{h}=8$，

因为 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}x^2=4\neq f(2)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续，故也不可导.

【例 4】　设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)}{\sin h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在

【解】 若$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$存在，设$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=A$，因为当$h\to0$时，$1-\cos h\to0^+$，所以 $A=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}=\dfrac{1}{2}f'_+(0)$，于是$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$存在只能保证函数$f(x)$在$x=0$处存在右导数，(A) 不对；

若$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)}{\sin h}$存在，设$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)}{\sin h}=A$，因为当$h\to0$时，$1-\mathrm{e}^h$可以从两侧趋于零，又因为$A=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)}{\sin h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)-f(0)}{1-\mathrm{e}^h}\cdot\dfrac{1-\mathrm{e}^h}{\sin h}=-\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}$，所以$f(x)$在$x=0$处可导，应选(B)；

若$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$存在，设$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=A$，

$$A=\lim_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot\frac{h-\sin h}{h^3}\cdot h$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot h,$$

因为$h\to0$，即使$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}$不存在，即$f(x)$在$x=0$处不可导，但是只要$\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}$在$h=0$的去心邻域内有界，就有$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=0$，(C) 不对；

设$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$显然$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=1$，因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1\neq f(0)=0$，所以$f(x)$在$x=0$处不连续，更不可导，所以若$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$存在，$f(x)$在$x=0$处不一定可导，(D) 不对.

【例 5】 设$f(x)$在$x=0$处连续，则下列命题不正确的是(　　).

(A) 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，则$f(0)=0$

(B) 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}=A$，则$f(0)=0$

(C) 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，则$f'(0)=A$

(D) 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=A$，则$f'(0)=\dfrac{A}{2}$

【解】 因为$f(x)$在$x=0$处连续，所以由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$得$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，故$f(0)=0$；又因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=A$，所以$f'(0)=A$，于是(A)，(C) 正确；

因为$f(x)$在$x=0$处连续，所以由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}=A$，$\lim\limits_{x\to0}[f(x)+f(-x)]=0$，于是$f(0)=0$，(B) 正确；

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

取 $f(x)=|x|$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=0$，而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，应选(D).

【例 6】　设 $f(x)$ 连续，$g(x)=|x-a|f(x)$，讨论 $g(x)$ 在 $x=a$ 处的可导性.

【解】　$g'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{|x-a|}{x-a}f(x)=-f(a)$，

$g'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{|x-a|}{x-a}f(x)=f(a)$，

当 $f(a)=0$ 时，$g(x)$ 在 $x=a$ 处可导；当 $f(a)\neq 0$ 时，$g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

【例 7】　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}\ln x, & x>0\text{ 且 }x\neq 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的可导性.

【解】　$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln x}{x-1}\cdot\dfrac{2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}\cdot\dfrac{2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0$；

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{x-1}\cdot\dfrac{2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}\cdot\dfrac{2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1$，

因为 $f'_-(1)\neq f'_+(1)$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: dijy68)

【例 8】　设 $f(x)$ 可导且为偶函数，$f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(1+3x)-f(-1+x)}$.

【解】　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+3x)-f(-1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+3x)-f(1-x)}{x}$

$=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+3x)-f(1)}{3x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}$

$=3f'(1)+f'(1)=4f'(1)=8$ 得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(1+3x)-f(-1+x)}=\dfrac{1}{8}$.

【例 9】　设 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\dfrac{xy}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(0)=4$，求 $y(x)$.

【解】　因为 $\Delta y=\dfrac{xy}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$，所以 $y(x)$ 可微，从而 $y(x)$ 可导且 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy}{1+x^2}$ 或 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{x}{1+x^2}y=0$，由一阶齐次线性微分方程通解公式得 $y=Ce^{-\int-\frac{x}{1+x^2}dx}=C\sqrt{1+x^2}$，因为 $y(0)=4$，所以 $C=4$，故 $y=4\sqrt{1+x^2}$.

题型二　显函数求导数

【例 1】　设 $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}+\ln(\tan^2 2x+\sec x)$，求 y'.

【解】　$y'=-\frac{1}{x^2}e^{\sin^2\frac{1}{x}}\sin\frac{2}{x}+\frac{4\tan 2x\sec^2 2x+\sec x\tan x}{\tan^2 2x+\sec x}$.

【例 2】　设 $y=x^{\sin x}$，求 y'.

【解】　由 $y=e^{\sin x\ln x}$ 得 $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$.

【例 3】　设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}(a>0)$，求 y'.

【解】　由 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}=x^{a^a}+e^{x^a\ln a}+e^{a^x\ln a}$ 得

$$y'=a^a x^{a^a-1}+ax^{a-1}\ln a\cdot e^{x^a\ln a}+a^x\ln^2 a\cdot e^{a^x\ln a}$$
$$=a^a x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x a^{a^x}\ln^2 a.$$

题型三　由参数方程确定的函数的导数

【例 1】　设 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】　$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)'}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

【例 2】　设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 确定的函数，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

【解】　$\frac{dx}{dt}=6t+2$，$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=2$；

$e^y\sin t-y+1=0$ 两边对 t 求导数得 $e^y\frac{dy}{dt}\sin t+e^y\cos t-\frac{dy}{dt}=0$，将 $t=0$ 代入得 $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=e$.

于是 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=0}=\frac{e}{2}$.

【例 3】　设 $\begin{cases}x=\int_0^t e^{-u^2}du,\\ y=\int_0^t\sin(t-u)^2du,\end{cases}$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】　$\frac{dx}{dt}=e^{-t^2}$，$y=\int_0^t\sin(t-u)^2du=-\int_0^t\sin(t-u)^2d(t-u)\xlongequal{t-u=v}\int_0^t\sin v^2dv$，

$\frac{dy}{dt}=\sin t^2$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=e^{t^2}\sin t^2$，

微信公众号【顶尖考研】
(IDjyk66)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=2te^{2t^2}(\sin t^2+\cos t^2).$$

【例 4】　设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}-x=1,\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{x(t)-1}{t}=1\\ 2^{(t-1)y}=y\end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}$.

【解】　由 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-x=1$ 得 $x=C_1e^{-t}+C_2e^{t}-1$，再由 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{x(t)-1}{t}=1$ 得 $x(0)=1,x'(0)=1$，于是 $x=\dfrac{1}{2}e^{-t}+\dfrac{3}{2}e^{t}-1$，故 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=1}=\dfrac{3e-e^{-1}}{2}$.

当 $t=1$ 时，$y=1$，将 $2^{(t-1)y}=y$ 两边对 t 求导得 $2^{(t-1)y}\ln 2\left[y+(t-1)\dfrac{dy}{dt}\right]=\dfrac{dy}{dt}$，于是 $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1}=\ln 2$，故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=1}=\dfrac{2\ln 2}{3e-e^{-1}}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

题型四　隐函数求导数

【例 1】　设 $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【解】　$\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$ 两边取对数得 $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$，

两边对 x 求导数得 $\dfrac{x+y\dfrac{dy}{dx}}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{x^2}$，

整理得 $x+y\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{dy}{dx}-y$，于是 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)(x-y)-(x+y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right)}{(x-y)^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

【例 2】　设函数 $y=y(x)$ 由 $e^{xy}+3x=x^2+y$ 确定，求 $y''(0)$.

【解】　当 $x=0$ 时，$y=1$.

$e^{xy}+3x=x^2+y$ 两边对 x 求导得 $e^{xy}\cdot(y+xy')+3=2x+y'$，

$x=0,y=1$ 代入得 $y'(0)=4$；

将上式再对 x 求导得 $e^{xy}\cdot(y+xy')^2+e^{xy}\cdot(2y'+xy'')=2+y''$，

$x=0,y=1,y'=4$ 代入得 $y''(0)=7$.

【例 3】　设 $y=y(x)$ 是由 $x-\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=0$ 确定的函数，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

【解】　当 $x=0$ 时 $y=1$，$x-\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=0$ 两边对 x 求导数得

$$1-e^{-(x+y)^2}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

将 $x=0, y=1$ 代入得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\mathrm{e}-1$.

题型五　分段函数可导性判断

情形一：分段函数

【例 1】　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 研究 $f'(0)$ 是否存在.

【解】　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$,

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=0$ 得 $f'_-(0)=0$；由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=1$ 得 $f'_+(0)=1$,

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f'(0)$ 不存在.

【例 2】　设 $f(x)=\begin{cases}\sin x+2a\mathrm{e}^x, & x<0,\\ 9\arctan x+2b(x-1)^3, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 且 $f'(0)$ 存在，求常数 a, b.

【解】　$f(0-0)=2a, f(0)=f(0+0)=-2b$,

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，于是 $2a=-2b$.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x+2a(\mathrm{e}^x-1)}{x}=1+2a,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{9\arctan x+2b(x-1)^3+2b}{x}=9+6b,$$

因为 $f'(0)$ 存在，所以 $f'_-(0)=f'_+(0)$，于是 $1+2a=9+6b$，由 $\begin{cases}2a=-2b,\\ 1+2a=9+6b\end{cases}$ 得 $a=1, b=-1$.

【例 3】　设 $f(x)$ 连续可导，且 $f(0)=0$，且 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$

(1) 确定常数 a，使得 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

(2) 在结论(1)基础上求 $g'(x)$，并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】　(1) $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}f(0)=0$,

当 $a=0$ 时，$g(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)=\dfrac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}$;

当 $x=0$ 时，$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{3x}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{3}f'(0),$$

即 $g'(0)=\dfrac{1}{3}f'(0)$，于是

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{3}f'(0), & x=0.\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f'(x)}{3x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\dfrac{1}{3}f'(0)$，

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【例 4】　设 $f(x)=\int_0^1 t\,|x-t|\,\mathrm{d}t(x>0)$，求 $f'(x)$.

【解】　当 $0<x<1$ 时，

$$f(x)=\int_0^1 t\,|x-t|\,\mathrm{d}t=\int_0^x t(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x t\,\mathrm{d}t-\int_0^x t^2\mathrm{d}t+\int_x^1 t^2\mathrm{d}t-x\int_x^1 t\,\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3};$$

当 $x\geqslant 1$ 时，

$$f(x)=\int_0^1 t(x-t)\mathrm{d}t=\frac{x}{2}-\frac{1}{3},$$

即
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}, & 0<x<1,\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=x^2-\dfrac{1}{2}$；

当 $x>1$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{2}$；

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{x-1}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^3-3x+1}{x-1}=\frac{1}{2},$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{x-1}=\frac{1}{2},$$

因为 $f'_-(1)=f'_+(1)=\dfrac{1}{2}$，所以 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$，

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

故 $$f'(x)=\begin{cases}x^2-\dfrac{1}{2}, & 0<x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

情形二:含绝对值的函数

【例 5】 设 $f(x)$ 可导且 $f(a)=0$,$F(x)=|f(x)|$,证明:$F(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充分必要条件是 $f'(a)=0$.

【证明】

$$F'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=-|f'(a)|,$$

$$F'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=|f'(a)|,$$

$F(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充分必要条件是 $F'_-(a)=F'_+(a)$,即 $f'(a)=0$.

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分条件为(　　).

(A) $f(a)=0$,$f'(a)=0$　　(B) $f(a)=0$,$f'(a)\neq 0$

(C) $f(a)\neq 0$,$f'(a)=0$　　(D) $f(a)\neq 0$,$f'(a)\neq 0$

【解】 若 $f(a)=0$,当 $f'(a)\neq 0$ 时,$|f(x)|$ 的左、右导数不等,故 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导,应选(B).

【注解】

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,则

(1) 若 $f(a)\neq 0$,则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导;

(2) 若 $f(a)=0$,则当 $f'(a)=0$ 时,$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导;当 $f'(a)\neq 0$ 时,$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导.

【例 7】 设 $f(x)=|x^3-x|\sqrt[3]{x^2-x-2}$,求 $f(x)$ 的不可导点.

【解】 $f(x)=|x^3-x|\sqrt[3]{x^2-x-2}=|x||x-1||x+1|(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}$,$f(x)$ 可能的不可导点为 $x=-1$,$x=0$,$x=1$,$x=2$.

由 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=0$ 得 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导.

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 不存在,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 不存在,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

由 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\infty$ 得 $f(x)$ 在 $x=2$ 处不可导.

【例 8】 设 $f(x)=|x||x-1||(x-2)^2||\ln(1+|x|)|$,求 $f(x)$ 的不可导点.

【解】 显然 $f(x)$ 的可能不可导点只有 $x=0$,$x=1$,$x=2$. 因为

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x(1-x)(x-2)^2\ln(1-x)}{x}=0,$$

微信公众号【顶尖考研】

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(1-x)(x-2)^2\ln(1+x)}{x}=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$；因为

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x(1-x)(x-2)^2\ln(1+x)}{x-1}=-\ln2,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x(x-1)(x-2)^2\ln(1+x)}{x-1}=\ln2,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导；因为

$$\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{x(x-1)(x-2)^2\ln(1+x)}{x-2}=0,$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{x(x-1)(x-2)^2\ln(1+x)}{x-2}=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导.

【例 9】 讨论函数 $f(x)=(x-1)\,|\,x^2+x-2\,|$ 的不可导点.

【解】 $f(x)=(x-1)\,|\,x^2+x-2\,|=\begin{cases}(x-1)^2(x+2), & x<-2\text{ 或 }x>1,\\ -(x-1)^2(x+2), & -2\leqslant x\leqslant1,\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $f'(1)=0$.

由 $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x+2}=9$ 得 $f'_-(-2)=9$；

由 $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{-(x-1)^2(x+2)}{x+2}=-9$ 得 $f'_+(-2)=-9$.

因为 $f'_-(-2)\neq f'_+(-2)$，所以 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处不可导.

【例 10】 设 $f(x)=\int_0^1|\,x^2-t\,|\,\mathrm{d}t\,(x>0)$，求 $f'(x)$.

【解】 当 $0<x<1$ 时，

$$f(x)=\int_0^1|\,x^2-t\,|\,\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}(x^2-t)\mathrm{d}t+\int_{x^2}^1(t-x^2)\mathrm{d}t$$

$$=x^4-\frac{x^4}{2}+\frac{1-x^4}{2}-x^2(1-x^2)=\frac{1}{2}-x^2+x^4;$$

当 $x\geqslant1$ 时，

$$f(x)=\int_0^1|\,x^2-t\,|\,\mathrm{d}t=\int_0^1(x^2-t)\mathrm{d}t=x^2-\frac{1}{2},$$

即 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-x^2+x^4, & 0<x<1,\\ x^2-\dfrac{1}{2}, & x\geqslant1.\end{cases}$

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=4x^3-2x$；

当 $x>1$ 时，$f'(x)=2x$；

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{2}-x^2+x^4-\frac{1}{2}}{x-1}=2;$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x-1}=2,$$

因为 $f'_-(1)=f'_+(1)=2$,所以 $f'(1)=2$,

故 $f'(x)=\begin{cases}4x^3-2x, & 0<x<1,\\ 2x, & x\geqslant1.\end{cases}$

情形三:带极限的函数

【例 11】 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　).

(A) 处处可导　(B) 有一个不可导点　(C) 有两个不可导点　(D) 有三个不可导点

【解】 设 $0\leqslant a\leqslant b$,因为 $b^n\leqslant a^n+b^n\leqslant 2b^n$,所以 $b\leqslant(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant 2^{\frac{1}{n}}b$,注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$,于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=b$,同理

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\left[1^n+(|x|^3)^n\right]^{\frac{1}{n}}=\max\{1,|x|^3\}=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ |x|^3, & |x|\geqslant1,\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处连续.因为

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-1}{x-1}=0,\quad \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=3,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导,同理 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处也不可导,故 $f(x)$ 有两个不可导点,应选(C).

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 12】 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$ 可导,求常数 a,b.

【解】 当 $x=1$ 时,$f(1)=\dfrac{1}{2}(1+a+b)$;

当 $x<1$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}=ax+b$;

当 $x>1$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}=x^2$,

于是 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x<1,\\ \dfrac{1}{2}(1+a+b), & x=1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$

$f(1-0)=a+b$,　$f(1)=\dfrac{1}{2}(1+a+b)$,　$f(1+0)=1$.

因为 $f(x)$ 可导,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,由 $f(1-0)=f(1+0)=f(1)$ 得 $a+b=1$;

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{ax+b-a-b}{x-1}=a,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,所以 $a=2$,于是 $a=2,b=-1$.

题型六　变积分限函数的导数

【思路分析】

变积分限函数求导时，首先将被积函数处理成不含积分限变量的函数再求导.

【例 1】 设 $f(x)$ 连续，且 $\varphi(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$，求 $\varphi''(x)$.

【解】 $\varphi(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 (x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u.$

$\varphi'(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,\quad \varphi''(x)=f(x).$

【例 2】 设 $f(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)=12$，且当 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t\sim ax^b$，则 $a=$_____，$b=$_____.

【解】 $F(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 (x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u$

$=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{n(n-1)x^{n-2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{x}{n(n-1)x^{n-2}}=12\lim_{x\to 0}\frac{x}{n(n-1)x^{n-2}},$$

取 $n=3$，则 $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3}=2$，于是 $F(x)\sim 2x^3$，故 $a=2$，$b=3$.

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(x)=\int_0^1 |x-t|f(t)\mathrm{d}t$，求 $F''(x)$.

【解】 $F(x)=\int_0^1 |x-t|f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t+\int_x^1 (t-x)f(t)\mathrm{d}t$

$=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x\int_1^x f(t)\mathrm{d}t-\int_1^x tf(t)\mathrm{d}t,$

则 $F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t,\quad F''(x)=2f(x).$

【例 4】 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，又 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】 由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ 得 $f(0)=0$，$f'(0)=A$.

当 $x=0$ 时，$\varphi(0)=0$；

当 $x\neq 0$ 时，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}(xt)=\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x},$

微信公众号【硕尖考研】(ID: djky66)

于是 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时，$\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$；

当 $x=0$ 时，$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{A}{2}$，

于是 $\varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{A}{2}, & x=0.\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=f'(0)-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$

$=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}=\varphi'(0)$，

所以 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 5】 设 $f(x)$ 一阶连续可导，$f''(1)=4$ 且

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0,\quad \varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]\mathrm{d}t.$$

(1) 求 $\varphi'(x)$；(2) 讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$ 得 $f(1)=0, f'(1)=0$.

当 $x=1$ 时，$\varphi(1)=\int_0^1 f'(1)\mathrm{d}t=0$；

当 $x\neq 1$ 时，$\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x-1}\int_0^1 f'[1+(x-1)t]\mathrm{d}[1+(x-1)t]$

$=\dfrac{1}{x-1}\int_1^x f'(u)\mathrm{d}u$，

于是 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x=1,\\ \dfrac{1}{x-1}\int_1^x f'(u)\mathrm{d}u, & x\neq 1.\end{cases}$

(1) 当 $x\neq 1$ 时，$\varphi'(x)=\dfrac{(x-1)f'(x)-\int_1^x f'(u)\mathrm{d}u}{(x-1)^2}$；

因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_1^x f'(u)\mathrm{d}u}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{x-1}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\frac{f''(1)}{2}=2,$$

所以 $\varphi'(1)=2$，于是 $\varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)f'(x)-\int_1^x f'(u)\mathrm{d}u}{(x-1)^2}, & x\neq1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)f'(x)-\int_1^x f'(u)\mathrm{d}u}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{f'(x)}{x-1}-\dfrac{\int_1^x f'(u)\mathrm{d}u}{(x-1)^2}\right]$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f'(u)\mathrm{d}u}{(x-1)^2}=f''(1)-2=2=\varphi'(1),$$

所以 $\varphi'(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

【例 6】 设 $f(x)=\int_0^1|x-t|\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\ (0<x<1)$，求 $f''(x)$.

【解】 $f(x)=\int_0^1|x-t|\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_x^1(t-x)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$

$$=\int_0^x(x-t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_1^x(x-t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=x\int_0^x\mathrm{e}^t\mathrm{d}t-\int_0^x t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+x\int_1^x\mathrm{e}^t\mathrm{d}t-\int_1^x t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t,$$

则 $f'(x)=\int_0^x\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+x\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x+\int_1^x\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+x\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x=\int_0^x\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_1^x\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，

于是 $f''(x)=2\mathrm{e}^x$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

题型七　导数的几何应用

【例 1】 曲线 $y=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴交于点 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^{2n}=$_____.

【解】 $y'=nx^{n-1}$，$y'|_{x=1}=n$，曲线 $y=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=n(x-1)$，令 $y=0$ 得 $\xi_n=1-\dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1-\dfrac{1}{n})^{-n}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

【例 2】 求过原点与曲线 $y=\ln x$ 相切的切线方程.

【解】 设切点坐标为 $M(a,\ln a)$.

由 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{\ln a}{a}$ 得切点坐标为 $M(\mathrm{e},1)$，于是切线方程为 $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$.

【例 3】 求曲线 $L:r=\mathrm{e}^\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 对应点处的切线方程.

【解】 曲线 L 的参数方程为 $L:\begin{cases}x=\mathrm{e}^\theta\cos\theta,\\ y=\mathrm{e}^\theta\sin\theta,\end{cases}\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 对应的点为 $M_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}},\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}\right)$.

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$，故所求切线方程为

$$y-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}=(2+\sqrt{3})\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{6}}\right).$$

题型八　高阶导数

【思路分析】

求函数高阶导数的方法通常有：归纳法、公式法、泰勒公式法等.

【例 1】　设 $f(x)=e^x\sin x$，求 $f^{(n)}(x)$.

【解】　$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$$f''(x)=\sqrt{2}\left[e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=(\sqrt{2})^2e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

由归纳法得 $f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^ne^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

【例 2】　设 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$，求 $f^{(n)}(x)$.

【解】　$f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$，

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)'=-\frac{1}{(x-2)^2},\quad\left(\frac{1}{x-2}\right)''=\frac{(-1)(-2)}{(x-2)^3},$$

由归纳法得 $\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^nn!}{(x-2)^{n+1}}$，同理 $\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^nn!}{(x-1)^{n+1}}$，故

$$f^{(n)}(x)=(-1)^nn!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

【例 3】　设 $f(x)=x^2\sin x$，求 $f^{(20)}(x)$.

【解】　由莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned}f^{(20)}(x)&=C_{20}^0x^2(\sin x)^{(20)}+C_{20}^12x(\sin x)^{(19)}+C_{20}^22(\sin x)^{(18)}\\&=x^2\sin\left(x+\frac{20\pi}{2}\right)+40x\sin\left(x+\frac{19\pi}{2}\right)+380\sin\left(x+\frac{18\pi}{2}\right)\\&=x^2\sin x-40x\cos x-380\sin x.\end{aligned}$$

【例 4】　求 $y=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数.

【解】　$y=\arctan x$ 两边对 x 求导数得 $(1+x^2)y'=1$，利用莱布尼茨公式得

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0,$$

令 $x=0$ 得 $y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0)$，

又 $y(0)=0,y'(0)=1$，所以当 n 为奇数时，$y^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$；当 n 为偶数时，$y^{(n)}(0)=0$.

【例 5】　设 $f(x)=(1+x^2)\ln(1+x)$，求 $f^{(25)}(0)$.

【解】　因为　$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{23}}{23}-\frac{x^{24}}{24}+\frac{x^{25}}{25}+o(x^{25})$，

微信公众号【顶尖考研】(ID: dingjian66)

所以 $f(x)=(1+x^2)\ln(1+x)=(1+x^2)\left[x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{23}}{23}-\frac{x^{24}}{24}+\frac{x^{25}}{25}+o(x^{25})\right]$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\left(1+\frac{1}{3}\right)x^3+\cdots+\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{23}\right)x^{25}+o(x^{25}),$$

又因为　$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(25)}(0)}{25!}x^{25}+o(x^{25})$,

所以 $\frac{f^{(25)}(0)}{25!}=\frac{1}{23}+\frac{1}{25}$,故 $f^{(25)}(0)=\left(\frac{1}{23}+\frac{1}{25}\right)\cdot 25!$.

【例 6】　设 $f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{1+x^2}$,求 $f^{(4)}(0)$.

【解】　$\ln(1+2x)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(2x)^4}{4}+o(x^4)$

$$=2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-4x^4+o(x^4),$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o(x^4),$$

则 $f(x)=\left[2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-4x^4+o(x^4)\right]\left[1-x^2+x^4+o(x^4)\right]$

$$=2x-2x^2+\frac{2}{3}x^3-2x^4+o(x^4),$$

又 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)$,

于是 $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=-2$,故 $f^{(4)}(0)=-48$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

测试题

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

一、选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x\arctan\frac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导

(C) 可导且 $f'(0)=-\frac{\pi}{2}$　　(D) 可导且 $f'(0)=\frac{\pi}{2}$

2. 设 $y=ax^2$ 与 $y=\ln x$ 相切,则 a 为(　　).

(A) $\sqrt{e}$　　(B) e　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{2e}$

3. 下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $f(x)$ 连续,则 $|f(x)|$ 连续　　(B) 若 $|f(x)|$ 连续,则 $f(x)$ 连续

(C) 若 $f(x)$ 可导,则 $|f(x)|$ 可导　　(D) 若 $|f(x)|$ 可导,则 $f(x)$ 可导

4. 下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}=3$,则 $f'(0)=3$

(B) 若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-\cos h)-f(1)}{h-\ln(1+h)}$存在,则 $f'(1)$ 存在

(C) 若 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(a)$ 存在,则 $f'(a)$ 存在

(D) 若 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(a)$ 存在,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

5. 设 $f(x)$ 可导,下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$,则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(D) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

二、填空题

1. 设 $f(x)$ 二阶可导且 $f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=2$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$_____.

2. 设 $f(x)$ 一阶可导且 $f(0)=2$,又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\ln(1+2x)}{x-\ln(1+x)}=4$,则 $f'(0)=$_____.

3. 设 $f(x)$ 二阶可导且 $f'(0)\neq 0$,又$\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\ y=f(\mathrm{e}^{3t}-1),\end{cases}$则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=$_____.

4. 设 $y=y(x)$ 是由 $x^2+xy+y-\tan(x-y)=0$ 确定的隐函数,且 $y(0)=0$,则 $y''(0)=$_____.

5. 曲线 $y=\arctan x$ 在 $x=1$ 对应点处的法线方程为_____.

6. 设 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 在(0,0)处有相同切线,则$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=$_____.

7. 设 $f(x)$ 二阶可导且 $f'(a)\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(a)}-\dfrac{1}{f'(a)(x-a)}\right]=$_____.

8. 设 $f(x)=x(x-1)(x+2)(x-3)\cdots(x+100)$,则 $f'(0)=$_____.

9. 设 $f'(x)=f^2(x)$,则 $f^{(n)}(x)=$_____.

10. 设曲线 $xy^3-2y-1=0$ 与曲线 $y=x^2+ax+b$ 在点(1,−1)处切线相同,则 $a=$_____,$b=$_____.

三、解答题

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$,又 $f'(0)=1$,求 $f(x)$ 的表达式.

2. 设 $f(x)$ 是以 5 为周期的连续函数且 $f'(1)$ 存在,其在 $x=0$ 的邻域内满足 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha$,其中 $\alpha=o(x)$. 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续可导且$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right]=2$,求 $f(0)$ 及 $f'(0)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 的反函数 $g(y)$;　(2) 讨论 $g(y)$ 的连续性及可导性.

5. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t(\mathrm{e}^{\frac{x}{t}}-1)\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{tx^2}$,求 $f'(x)$.

6. 求下列函数的导数:

(1) $y=x^{\sin^2\frac{1}{x}}$;　(2) $y=\tan^2\left[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]$;　(3) $y=x(\sin x)^{\cos x}$.

7. 求下列导数:

(1) 设 $\mathrm{e}^{xy}+\tan(xy)=y$,求 $y'(0)$;

(2) 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$,求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,0)}$.

微信公众号【顶尖考研】(Dingjiky66)

8. 求下列函数的导数：

(1) 设 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t), \\ y = t^2 \end{cases}$ 确定函数 $y = y(x)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

(2) 设 $\begin{cases} e^{xt} = t^2 + x^2, \\ y^t = t^y \end{cases}$ 确定函数 $y = y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

9. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 研究 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性与可导性.

10. 设 $f(x)$ 二阶可导且 $f(0) = 0$，令 $F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

(1) 确定 a，使得 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处连续；

(2) 对所求 a，求 $F'(x)$，并讨论 $F'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

11. 设 $f(x)$ 连续可导，且 $f(0) = 1, f'(0) = 3, f''(0) = 2$，令 $F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - e^{3x}}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

(1) 求 a，使得 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处连续；

(2) 求 $F'(x)$，并讨论 $F'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

12. 设 $f(x) = \dfrac{5x - 1}{2x^2 + x - 1}$，求 $f^{(n)}(0)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

测试题参考答案

一、选择题

1. 由 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ 得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，而 $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$，即 $f'_-(0) = -\dfrac{\pi}{2}$，同理 $f'_+(0) = \dfrac{\pi}{2}$，于是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导，应选(B).

2. 令切点为 $M(x_0, y_0)$，则有 $\begin{cases} 2ax_0 = \dfrac{1}{x_0}, \\ ax_0^2 = \ln x_0, \end{cases}$ 解得 $x_0 = \sqrt{e}$，故 $a = \dfrac{1}{2e}$，应选(D).

3. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$，由 $0 \leqslant \big||f(x)| - |f(a)|\big| \leqslant |f(x) - f(a)|$ 及夹逼定理得 $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|$，即 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处连续，应选(A).

4. 由 $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在得 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$，即 $f(a + 0) = f(a)$；由 $f'_-(a) = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在得 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$，即 $f(a - 0) = f(a)$，于是 $f(a + 0) = f(a - 0) = f(a)$，即 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续，应选(D).

5. 取 $f(x) = x$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$，而 $f'(x) = 1$，不选(A)，(C)；取 $f(x) = x^2$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ 而 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$，不选(B)，应选(D). 事实上，设 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$，对任意的 $M > 0$，存在 $X > 0$，当 $x > X$ 时，$f'(x) > M$，当 $x > X$ 时，$f(x) = f(X) + f'(\xi)(x - X) > f(X) + M(x - X)$，其中 $\xi \in (X, x)$，两边取极限得 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-1}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\dfrac{1}{2}f''(0)=1.$

2. 因为 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，所以 $x-\ln(1+x)\sim\dfrac{x^2}{2}$，于是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-\ln(1+2x)}{x-\ln(1+x)}=$

$2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x[f(x)-f(0)]+f(0)x-\ln(1+2x)}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-\dfrac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}\right]=$

$2\lim\limits_{x\to0}\left[f'(0)-\dfrac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}\right]=2f'(0)-2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{(2x)^2}{2}}{x^2}=2f'(0)+4=4$，所以 $f'(0)=0$.

3. 由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{3e^{3t}f'(e^{3t}-1)}{f'(t)}$ 得 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{3f'(0)}{f'(0)}=3.$

4. $x^2+xy+y-\tan(x-y)=0$ 两边对 x 求导得 $2x+y+x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dy}{dx}+\sec^2(x-y)\left(\dfrac{dy}{dx}-1\right)=0$，于是 $y'(0)=\dfrac{1}{2}$，上式再对 x 求导得 $2+2\dfrac{dy}{dx}+x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\sec^2(x-y)\tan(x-y)\left(\dfrac{dy}{dx}-1\right)^2+\sec^2(x-y)\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$，于是 $y''(0)=-\dfrac{3}{2}$.

5. 当 $x=1$ 时 $y=\dfrac{\pi}{4}$，又 $y'(1)=\left.\dfrac{1}{1+x^2}\right|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$，所以法线方程为 $y-\dfrac{\pi}{4}=-2(x-1)$ 或 $y=-2x+\dfrac{\pi}{4}+2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

6. 由题意得 $f'(0)=\left.\dfrac{e^{-\arctan^2x}}{1+x^2}\right|_{x=0}=1$，又 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{2}{n}}=2f'(0)=2.$

7. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(a)}-\dfrac{1}{f'(a)(x-a)}\right]=\dfrac{1}{f'(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(a)(x-a)-f(x)+f(a)}{[f(x)-f(a)](x-a)}$

$=\dfrac{1}{f'(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{f'(a)(x-a)-f(x)+f(a)}{(x-a)^2}}{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}=\dfrac{1}{f'^2(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(a)(x-a)-f(x)+f(a)}{(x-a)^2}$

$=\dfrac{1}{2f'^2(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(a)-f'(x)}{x-a}=-\dfrac{f''(a)}{2f'^2(a)}.$

8. 由 $f'(x)=(x-1)(x+2)(x-3)\cdots(x+100)+x(x+2)(x-3)\cdots(x+100)+\cdots+x(x-1)(x+2)(x-3)\cdots(x-99)$ 得 $f'(0)=(-1)^{50}100!=100!$.

9. $f''(x)=2f(x)f'(x)=2f^3(x)$，$f'''(x)=3\cdot2f^2(x)f'(x)=3!\,f^4(x)$，由归纳法得 $f^{(n)}(x)=n!\,f^{n+1}(x)$.

10. 因为 $(1,-1)$ 位于曲线 $y=x^2+ax+b$ 上，所以 $a+b=-2$，$xy^3-2y-1=0$ 两边对 x 求导得 $y^3+3xy^2\dfrac{dy}{dx}-2\dfrac{dy}{dx}=0$，解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^3}{2-3xy^2}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,-1)}=1$；$y=x^2+ax+b$ 对 x 求导得 $\dfrac{dy}{dx}=2x+a$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=2+a$，因为两曲线在 $(1,-1)$ 处切线相同，所以 $2+a=1$，解得 $a=-1$，$b=-1$.

三、解答题

1. 令 $x=0$，$y=0$，则 $f(0)=0$. $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}+2x=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+2x=1+2x$，于是 $f(x)=x+x^2+C$，因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)=x+x^2$.

2. 取 $x=0$ 得 $f(1)=0$，从而 $f(6)=0$. 由 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha$ 得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\alpha}{\sin x}=8$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+3\dfrac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}\right]=4f'(1)$，从而 $f'(1)=2$，于是 $f'(6)=2$，

故切线方程为 $y-f(6)=f'(6)(x-6)$，即 $y=2(x-6)$.

3. 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内连续可导，所以 $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$，又 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[1+f(0)]x+f'(0)x^2+o(x^2)}{x^2}=2$，故 $f(0)=-1$，$f'(0)=2$.

4. (1) $g(y)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}, & y<-1,\\ \sqrt[3]{y}, & -1\leqslant y\leqslant 8,\\ \dfrac{y+16}{12}, & y>8.\end{cases}$

(2) 显然 $g(y)$ 处处连续，由 $g'_-(-1)=\lim\limits_{y\to -1^-}\dfrac{g(y)-g(-1)}{y+1}=\dfrac{1}{4}$，$g'_+(-1)=\lim\limits_{y\to -1^+}\dfrac{g(y)-g(-1)}{y+1}=\dfrac{1}{3}$ 得 $g(y)$ 在 $y=-1$ 处不可导，再由 $g'_-(8)=\lim\limits_{y\to 8^-}\dfrac{g(y)-g(8)}{y-8}=\dfrac{1}{12}$，$g'_+(8)=\lim\limits_{y\to 8^+}\dfrac{g(y)-g(8)}{y-8}=\dfrac{1}{12}$ 得 $g(y)$ 在 $y=8$ 处可导，当 $y=0$ 时，$g'(0)$ 不存在，即 $g(y)$ 除 $y=-1,0$ 不可导外皆可导.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

5. 由 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t\left(e^{\frac{x}{t}}-1\right)\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{tx^2}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{t}}-1}{\frac{1}{t}}\cdot\left[\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\right]^{x^2}=xe^{x^2}$ 得 $f'(x)=e^{x^2}+x\cdot 2x\cdot e^{x^2}=(1+2x^2)e^{x^2}$.

6. (1) 由 $y=x^{\sin^2\frac{1}{x}}=e^{\sin^2\frac{1}{x}\ln x}$ 得 $y'=x^{\sin^2\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{\sin\frac{2}{x}\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x}\sin^2\dfrac{1}{x}\right)$.

(2) $y'=2\tan\left[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]\sec^2\left[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]\cdot\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}\tan\left[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]\sec^2\left[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]$.

(3) $y=x(\sin x)^{\cos x}=xe^{\cos x\ln\sin x}$，

$y'=e^{\cos x\ln\sin x}+xe^{\cos x\ln\sin x}\cdot\left(-\sin x\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)=(\sin x)^{\cos x}+x(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$.

7. (1) 当 $x=0$ 时，$y=1$. $e^{xy}+\tan(xy)=y$ 两边对 x 求导数得 $e^{xy}\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)+\sec^2(xy)\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{dy}{dx}$，于是 $y'(0)=2$.

(2) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 两边对 x 求导得 $\dfrac{x+y\dfrac{dy}{dx}}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{x^2}$，于是 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(1,0)}=1$.

8. (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{2t}{1-\dfrac{1}{1+t}}=2(1+t)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{1+t}}=\dfrac{2(1+t)}{t}$.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$, $e^{xt}=t^2+x^2$ 两边对 t 求导数得 $e^{xt}\left(x+t\dfrac{dx}{dt}\right)=2t+2x\dfrac{dx}{dt}$, 解得 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t-xe^{xt}}{te^{xt}-2x}$; 由 $y^t=t^y$ 得 $t\ln y=y\ln t$, 两边对 t 求导数得 $\ln y+\dfrac{t}{y}\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dt}\ln t+\dfrac{y}{t}$, 解得 $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{ty\ln y-y^2}{ty\ln t-t^2}$, 于是 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(ty\ln y-y^2)(te^{xt}-2x)}{(ty\ln t-t^2)(2t-xe^{xt})}$.

9. 由 $0\leqslant|f(x)|\leqslant|x|$ 得 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 由 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$ 得 $f'_-(0)=0$, 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$ 得 $f'_+(0)=1$, 因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

10. (1) $\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$, 当 $a=f'(0)$ 时, $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 当 $x\neq0$ 时, $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$; 当 $x=0$ 时, 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\dfrac{1}{2}f''(0)$ 得 $F'(0)=\dfrac{1}{2}f''(0)$,

于是 $F'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq0,\\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0.\end{cases}$ 因为 $\lim\limits_{x\to0}F'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf'(x)-xf'(0)}{x^2}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\dfrac{1}{2}f''(0)=F'(0)$, 所以 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

11. (1) $\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-e^{3x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-\dfrac{e^{3x}-f(0)}{x}\right]=f'(0)-3=0$, 当 $a=0$ 时, $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 当 $x\neq0$ 时, $F'(x)=\dfrac{x[f'(x)-3e^{3x}]-[f(x)-e^{3x}]}{x^2}$;

当 $x=0$ 时, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-e^{3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-3e^{3x}}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}-\dfrac{3e^{3x}-3}{x}\right]=\dfrac{1}{2}[f''(0)-9]=-\dfrac{7}{2}$, 于是 $F'(x)=\begin{cases}\dfrac{x[f'(x)-3e^{3x}]-[f(x)-e^{3x}]}{x^2}, & x\neq0,\\ -\dfrac{7}{2}, & x=0.\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to0}F'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x[f'(x)-3e^{3x}]-[f(x)-e^{3x}]}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f'(x)-3e^{3x}}{x}-\dfrac{f(x)-e^{3x}}{x^2}\right]=-\dfrac{7}{2}=F'(0)$, 所以 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

12. 令 $f(x)=\dfrac{5x-1}{2x^2+x-1}=\dfrac{5x-1}{(2x-1)(x+1)}=\dfrac{A}{2x-1}+\dfrac{B}{x+1}$, 解得 $A=1, B=2$, 即 $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{2}{x+1}$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n2^nn!}{(2x-1)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n2n!}{(x+1)^{n+1}}$, 故 $f^{(n)}(0)=2(-1)^nn!-2^nn!$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第三章　中值定理与一元函数微分学的应用

大纲点击

1. 理解并会用罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理和泰勒(Taylor)定理，了解并会用柯西(Cauchy)中值定理.

2. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.

3. 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其应用.

4. 会用导数判断函数图形的凹凸性(注：在区间(a,b)内，设函数$f(x)$具有二阶导数，当$f''(x)>0$时，$f(x)$的图形是凹的；当$f''(x)<0$时，$f(x)$的图形是凸的)，会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数的图形.

5. 了解曲率、曲率圆与曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径.

引　言

本章是一元函数微分学理论的深化和应用，其中包含了中值定理的理论体系，在此基础上研究函数许多重要的特性，如单调性、极值、凹凸性. 本章主要内容有：

1. 熟练掌握中值定理的理论，并能运用理论解决各种理论问题，尤其要重视辅助函数的构造方法.

2. 以导数作为工具研究函数的单调区间、极大值点与极小值点；研究函数的凹凸区间与拐点；研究函数的渐近线，从而进一步掌握作函数草图的几个基本步骤.

3. 本章问题技巧性非常强，如中值等式与不等式的证明、一般不等式的证明、单调性与极值及最值、方程根的讨论等，通过系统的总结掌握完整的方法体系.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

第一节　中值定理

一、预备知识

1. 极值点与极值 —— 设$y=f(x)(x\in D)$，其中$x_0\in D$，

(1) 若存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)<f(x_0)$，称x_0为$f(x)$的极大值点，$f(x_0)$为$f(x)$的极大值；

(2) 若存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>f(x_0)$，称x_0为$f(x)$的极小值点，$f(x_0)$为$f(x)$的极小值. 极大值点和极小值点统称为极值点，极大值与极小值统称为极值.

2. 函数极值点处导数各种情形分析

(1) 若 $f'(a)>0$，即 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，根据极限的保号性，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，则

$$\begin{cases} f(x)<f(a), x\in(a-\delta,a), \\ f(x)>f(a), x\in(a,a+\delta). \end{cases}$$

即 $f'(a)>0$ 时，左邻域函数值小于 $f(a)$，右邻域函数值大于 $f(a)$，故 $x=a$ 一定不是 $f(x)$ 的极值点.

(2) 若 $f'(a)<0$，即 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$，根据极限的保号性，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$，则

$$\begin{cases} f(x)>f(a), x\in(a-\delta,a), \\ f(x)<f(a), x\in(a,a+\delta). \end{cases}$$

即 $f'(a)<0$ 时，左邻域函数值大于 $f(a)$，右邻域函数值小于 $f(a)$，故 $x=a$ 一定不是 $f(x)$ 的极值点.

结　论

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取极值，则 $f'(a)=0$ 或 $f'(a)$ 不存在.

(2) 若 $f(x)$ 可导且在 $x=a$ 处取极值，则 $f'(a)=0$.

微信公众号：厉尖考研 (ID：djky66)

二、中值定理

定理 1(罗尔中值定理)　设 $f(x)$ 满足：(1) $f(x)\in C[a,b]$；(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内可导；(3) $f(a)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$(如图 1-3-1).

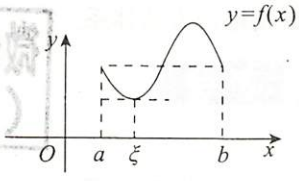


图 1-3-1

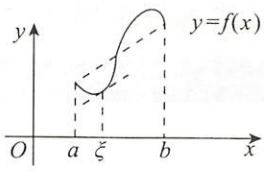


图 1-3-2

定理 2(拉格朗日中值定理)　设 $f(x)$ 满足：(1) $f(x)\in C[a,b]$；(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$(如图 1-3-2).

定理 3(柯西中值定理)　设 $f(x),g(x)$ 满足：(1) $f(x),g(x)\in C[a,b]$；(2) $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内可导；(3) $g'(x)\neq0, x\in(a,b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

定理 4(泰勒中值定理)　设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内有直到 $n+1$ 阶导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

且 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间，称此种形式的余项为拉格朗日型余项，若 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$，称此种形式的余项为皮亚诺型余项.

特别地，若 $x_0=0$，则称

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

为麦克劳林公式，其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)$.

常见函数的麦克劳林展开式

1. $e^x=1+x+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$.
2. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$.
3. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$.
4. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+\cdots+x^n+o(x^n)$.
5. $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$.
6. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$.
7. $-\ln(1-x)=x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$.
8. $(1+x)^a=1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.
9. $\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【注解】

泰勒公式的一个重要应用就是提高近似计算的精确度.

如 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$ 是错误的，因为分母是 3 阶无穷小，用 x 代替 $\sin x$ 精确度不够，若用 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$，因为其精确度达到 3 阶无穷小，所以代入会得到正确的结果，即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

三、柯西中值定理在不定型极限中的应用——洛必达法则



定理 1($\frac{0}{0}$ 型) 设

(1)$f(x),F(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内连续且 $f(x)\to 0,F(x)\to 0(x\to x_0)$;

(2)$f(x),F(x)$ 在 $x=x_0$ 的去心邻域内可导;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A$,

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{F(x)}=A$.

定理 2($\frac{\infty}{\infty}$ 型) 设

(1)$f(x),F(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内连续且 $f(x)\to\infty,F(x)\to\infty(x\to x_0)$;

(2)$f(x),F(x)$ 在 $x=x_0$ 的去心邻域内可导;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A$,

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{F(x)}=A$.

微信公众号【开心考研】(ID: djky66)

第二节 函数的单调性与极值

一、函数的单调性

1. 函数单调性的概念——设 $f(x)$ 定义于 I,若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$,称 $f(x)$ 在 I 上单调增加;若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)>f(x_2)$,称 $f(x)$ 在 I 上单调减少.

2. 单调性判别法

定理 设 $f(x)\in C[a,b]$,在 (a,b) 内可导,则

(1) 若 $f'(x)\geqslant 0(a<x<b)$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;

(2) 若 $f'(x)\leqslant 0(a<x<b)$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

二、求函数极值的步骤

1. 确定函数 $f(x)$ 的定义域 D.

2. 求函数 $f(x)$ 在定义域 D 的驻点及不可导点.

3. 判断所求的点是否为极值点.

定理 1(第一充分条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续,在 $x=x_0$ 的去心邻域内可导,则

(1) 若当 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

(2) 若当 $x<x_0$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>x_0$ 时,$f'(x)<0$,则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点;

定理 2(第二充分条件) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导,且 $f'(x_0)=0$,则

(1) 若 $f''(x_0)>0$,则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点;

(2) 若 $f''(x_0)<0$,则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点;

(3) 若 $f''(x_0)=0$,则无法确定 $x=x_0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点.

三、最值问题

1. 设 $f(x)\in C[a,b]$,求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最小值和最大值的步骤:

(1) 求出函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内所有的驻点及不可导点,设为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$;

(2) 求出 $f(a),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),f(b)$,则

$$m=\min\{f(a),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),f(b)\},$$

$$M=\max\{f(a),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),f(b)\}.$$

2. 无限区间上连续函数的最值

若函数在无限区间上只有唯一驻点,且该点为极值点,则此点一定为最值点.

【例 1】 当 $x\in[0,1]$ 时,证明:$\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$(其中 $p>1$).

【证明】 令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$,由 $f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}=0$ 得 $x=\dfrac{1}{2}$,

再由 $f(0)=f(1)=1,f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^{p-1}}$ 得 $m=\dfrac{1}{2^{p-1}},M=1$,故 $\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$.

【例 2】 求 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最值.

【解】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 且为偶函数,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,令 $f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}=0$,得 $x=\sqrt{2}$.

当 $x\in(0,\sqrt{2})$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(\sqrt{2},+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,所以 $x=\sqrt{2}$ 为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$(也是 $(-\infty,0]$) 上的最大值点,最大值为 $f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=e^{-2}+1$.

因为 $f(0)=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-t}dt-\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=1$,所以 $f(x)$ 的最大值为 $e^{-2}+1$,最小值为 0.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第三节　函数的凹凸性与拐点

一、函数凹凸性定义

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,

(1) 若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$,有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 I 内为凸函数,见图 1-3-3;

(2) 若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$,有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 I 内为凹函数，见图 1-3-4.

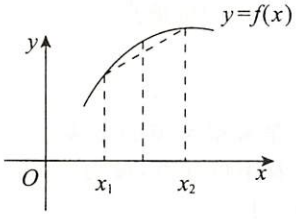


图 1-3-3

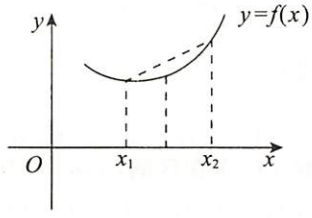


图 1-3-4

二、函数凹凸判别法

定理 (1) 若在 (a,b) 内有 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凹函数；

(2) 若在 (a,b) 内有 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凸函数.

【注解】

若曲线 $y=f(x)$ 在 $x<a$ 与 $x>a$ 内凹凸性不同，称 $(a,f(a))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

三、弧微分、曲率与曲率圆、渐近线

(一) 弧微分

弧微分 ds 与自变量的微分 dx，dy 的关系为 $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$，见图 1-3-5.

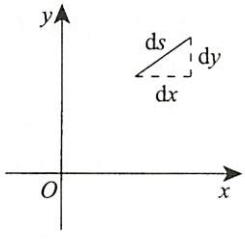


图 1-3-5

(1) 设 $L:y=f(x)(x\in[a,b])$，则 $ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$；

(2) 设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}(t\in[\alpha,\beta])$，则 $ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$；

(3) 设 $L:r=r(\theta)(\theta\in[\alpha,\beta])$，则 $ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$.

(二) 曲率与曲率圆

(1) 曲线 L 在一点处的曲率为 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$；

(2) 曲率圆的半径为 $R=\dfrac{1}{K}$.

(3) 设 $L:y=f(x)$，其中 $P(a,b)\in L$，则 P 点对应的曲率圆的圆心坐标为

$$x_0=a-f'(a)\frac{1+f'^2(a)}{f''(a)},\quad y_0=b+\frac{1+f'^2(a)}{f''(a)}$$

(三) 渐近线

(1) 水平渐近线 —— 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$，则称 $y=b$ 为 $y=f(x)$ 的水平渐近线；

(2) 铅直渐近线 —— 若 $f(a-0)=\infty$，$f(a+0)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，则称 $x=a$ 为 $y=f(x)$ 的铅直渐近线；

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(3) 斜渐近线 —— 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a(a\neq 0,\infty)$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$，则称 $y=ax+b$ 为 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

知识延拓模块 —— 推广、专题讲解

一、微分中值定理的推广

除罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理及泰勒中值定理外，还有如下常见的一些推广：

定理 1(导数零点定理)　设 $f(x)\in C[a,b]$，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

定理 2(导数介值定理)　设 $f(x)\in C[a,b]$，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$，不妨设 $f'_+(a)<f'_-(b)$，则对任意的 $\eta\in(f'_+(a),f'_-(b))$ 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\eta$.

定理 3(泰勒公式的推广)　设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内 n 阶连续可导，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

二、二阶导数的保号性问题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

中值定理问题及一元函数微分学应用中，若题中出现 $f''(x)>0$ 或 $f''(x)<0$ 时，一般有两种使用方法.

方法一：若 $f''(x)>0$(或 $f''(x)<0$)，则 $f'(x)$ 单调递增(或 $f'(x)$ 单调递减).

方法二：若 $f''(x)>0$(或 $f''(x)<0$)，可以使用泰勒公式得到重要不等式.

定理 1　设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f''(x)>0$(或 $f''(x)<0$)$(a<x<b)$，$x_0\in(a,b)$，

(1) 若 $f''(x)>0$，则 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，等号成立当且仅当“$x=x_0$”；

(2) 若 $f''(x)<0$，则 $f(x)\leqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，等号成立当且仅当“$x=x_0$”.

定理 2　设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f''(x)>0$(或 $f''(x)<0$)$(a<x<b)$，

(1) 若 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凹函数；

(2) 若 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凸函数.

重点题型分析

题型一　利用导数证明相关的等式

【例 1】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$.

【证明】　**方法一：导数法**

因为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,

所以$\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t=C_0$,取$x=0$得$C_0=0$,于是

$$\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t.$$

方法二:原函数法

令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则

左边$=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=xF(x)-\int_0^x t\mathrm{d}F(t)=\int_0^x F(t)\mathrm{d}t$,

右边$=\int_0^x\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t=\int_0^x F(u)\mathrm{d}u=\int_0^x F(t)\mathrm{d}t$,故$\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$.

【例 2】 证明:$\arctan x=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}(-1<x<1)$.

【证明】 令$f(x)=\arctan x-\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$,

因为$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}=0$,

所以$f(x)$在$(-1,1)$内为常数,由$f(0)=0$得$\arctan x=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}(-1<x<1)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 3】 证明:$\arctan e^x+\arctan e^{-x}=\dfrac{\pi}{2}$.

【证明】 令$f(x)=\arctan e^x+\arctan e^{-x}$,

因为$f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}=0$,所以$f(x)\equiv C_0$,

取$x=0$得$C_0=\dfrac{\pi}{2}$,故$\arctan e^x+\arctan e^{-x}=\dfrac{\pi}{2}$.

【例 4】 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)=f(b)=0$,且当$x\in[a,b]$时有$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)\equiv 0$,证明:$f(x)\equiv 0(a\leqslant x\leqslant b)$.

【证明】 因为$f(x)$在$[a,b]$上连续,所以$f(x)$在$[a,b]$上取到最小值m与最大值M,因为$f(a)=f(b)=0$,所以$m\leqslant 0,M\geqslant 0$.

若$m<0$,则存在$c\in(a,b)$,使得$f(c)=m<0$,显然$f'(c)=0$,

因为$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)\equiv 0$,所以$f''(c)=f(c)<0$,根据极值判别的第二充分条件,$x=c$为$f(x)$的极大值点,矛盾,所以$m=0$,同理可证$M=0$,故$f(x)\equiv 0(a\leqslant x\leqslant b)$.

题型二 求中值定理中ξ与θ以及极限的问题

【例 1】 设$f(x)=\begin{cases}e^x-1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \ln(1+x), & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$验证拉格朗日中值定理的正确性.

【解】 显然$f(x)\in C[-1,1]$,当$x\in(-1,0)$时,$f'(x)=e^x$;当$x\in(0,1)$时,$f'(x)$

$=\dfrac{1}{1+x}$. 当 $x=0$ 时，因为 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，所以 $f'(0)=1$，于是 $f'(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & -1<x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & 0<x<1,\end{cases}$ 即 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可导，故 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上满足微分中值定理的条件.

令 $f(1)-f(-1)=2f'(\xi)$，即 $\ln2+1-\mathrm{e}^{-1}=2f'(\xi)$，

若 $\xi\in(-1,0]$，则 $\ln2+1-\mathrm{e}^{-1}=2\mathrm{e}^{\xi}$，解得 $\xi=\ln\left[\dfrac{1}{2}(\ln2+1-\mathrm{e}^{-1})\right]$；

若 $\xi\in[0,1)$，则 $\ln2+1-\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{2}{1+\xi}$，解得 $\xi=2(\ln2+1-\mathrm{e}^{-1})^{-1}-1$，

所以拉格朗日中值定理正确，且两个中值都满足条件.

【例 2】　设 $x>0$ 且 $\mathrm{e}^x-1=\mathrm{e}^{\theta x}x$，求 $\lim\limits_{x\to0}\theta$.

【解】　由 $\mathrm{e}^x-1=\mathrm{e}^{\theta x}x$，得 $\theta=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$，于是

$$\lim_{x\to0}\theta=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 3】　设 $f(x)=\arctan x$，在 $[0,a]$ $(a>0)$ 应用微分中值定理求 ξ^2，并求 $\lim\limits_{a\to0}\dfrac{\xi^2}{a^2}$.

【解】　显然 $f(x)=\arctan x$ 在 $[0,a]$ 上满足微分中值定理的条件，由微分中值定理，$f(a)-f(0)=f'(\xi)a$，即 $\arctan a=\dfrac{a}{1+\xi^2}$ $(0<\xi<a)$，解得 $\xi^2=\dfrac{a}{\arctan a}-1$.

$$\lim_{a\to0}\frac{\xi^2}{a^2}=\lim_{a\to0}\frac{\dfrac{a}{\arctan a}-1}{a^2}=\lim_{a\to0}\frac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}=\lim_{a\to0}\frac{a-\arctan a}{a^3}$$

$$=\lim_{a\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+a^2}}{3a^2}=\frac{1}{3}\lim_{a\to0}\frac{1}{1+a^2}=\frac{1}{3}.$$

【例 4】　设 $f(x)$ 二阶连续可导，且 $f''(x)\neq0$，又 $f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)h$，求 $\lim\limits_{h\to0}\theta$.

【解】　由泰勒公式得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2!}h^2,\text{其中 }\xi\text{ 介于 }x\text{ 与 }x+h\text{ 之间.}$$

因为 $f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)h$，所以

$$f'(x+\theta h)h=f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2!}h^2,\text{即 }f'(x+\theta h)=f'(x)+\frac{f''(\xi)}{2!}h,$$

整理得 $\dfrac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{h}=\dfrac{f''(\xi)}{2}$，两边求极限，

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{\theta h}\cdot\theta=f''(x)\lim_{h\to0}\theta,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f''(\xi)}{2}=\lim_{\xi\to x}\frac{f''(\xi)}{2}=\frac{1}{2}f''(x),$$

所以 $f''(x)\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}f''(x)$，注意到 $f''(x)\neq 0$，所以 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$.

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)\neq 0$.

(1) 证明：对任意的 $x\in(-l,l)$ 且 $x\neq 0$，存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)];$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

【解】 (1) $\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=-u}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)=-\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t$，

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t,$$

因为 $f(x)$ 连续，所以由积分中值定理，

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)],\text{其中}\theta\in(0,1).$$

(2) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$ 两边同除以 x^2 并求极限得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x},$$

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right]=f'(0),$$

又
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\theta\cdot\frac{f(\theta x)-f(0)}{\theta x}+\theta\cdot\frac{f(-\theta x)-f(0)}{-\theta x}\right]=2f'(0)\lim_{x\to 0}\theta,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$.

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内 n 阶连续可导，$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h\ (0<\theta<1)$，且 $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，$f^{(n)}(a)\neq 0$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

【解】 由推广的泰勒公式得

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+o(h^n)=f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+o(h^n),$$

再由 $f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h$ 得

$$f'(a+\theta h)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^{n-1}+o(h^{n-1}),$$

再由 $f'(a+\theta h)=f'(a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}+o(h^{n-1})=\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}+o(h^{n-1})$ 得

$$\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}+o(h^{n-1})=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^{n-1}+o(h^{n-1}),\text{或}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}\theta^{n-1}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(h^{n-1})}{h^{n-1}},$$

两边取极限得　$\lim\limits_{h\to 0}\theta^{n-1}=\dfrac{1}{n}$，故$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

题型三　关于命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明

【思路分析】

证明 $f^{(n)}(\xi)=0$ 最常用的方法是罗尔定理，只要证明 $f^{(n-1)}(x)$ 至少有两个零点，另外少数问题可以使用极值法和泰勒公式法进行证明.

【例 1】 设 $f(x)\in C[0,1]$，在$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

【证明】 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$F'(x)=f(x)$，

由拉格朗日中值定理，

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=F(1)=F(1)-F(0)=F'(c)(1-0)=f(c)$，其中 $c\in(0,1)$，

从而 $f(0)=f(c)$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

【例 2】 设 $f(x)\in C[0,2]$，在$(0,2)$ 内可导，又 $3f(0)=f(1)+2f(2)$，证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

【证明】 因为 $f(x)\in C[1,2]$，所以 $f(x)$ 在$[1,2]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，

由 $3m\leqslant f(1)+2f(2)\leqslant 3M$ 得 $m\leqslant\dfrac{f(1)+2f(2)}{3}\leqslant M$，

由介值定理，存在 $c\in[1,2]$，使得 $f(c)=\dfrac{f(1)+2f(2)}{3}$，或 $f(1)+2f(2)=3f(c)$，

从而 $f(0)=f(c)$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

【例 3】 设 $f(x)\in C[0,1]$，在$(0,1)$ 内二阶可导，连接曲线 $L:y=f(x)$ 的两个端点 $A(0,f(0))$ 及 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 L 交于点 $C(c,f(c))(0<c<1)$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【证明】 由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(0,c)$，$\xi_2\in(c,1)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0},\ f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c},$$

因为点 A,C,B 在一条直线上，所以 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，

再由罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 4】 设 $f(x)$ 二阶可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=-1$ 且 $f(1)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【证明】 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=-1$ 得 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$；

由拉格朗日中值定理，存在 $c \in (0,1)$ 使得

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=-1;$$

因为 $f(x)$ 二阶可导且 $f'(0)=f'(c)=-1$，所以存在 $\xi \in (0,c) \subset (0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【例 5】 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，又 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内取相等的最大值，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

【证明】 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内取最大值 M，

情形一：存在 $c \in (a,b)$，使得 $f(c)=g(c)=M$，则 $\varphi(c)=0$；

情形二：存在 $x_1,x_2 \in (a,b)$ 且 $x_1 \neq x_2$，使得

$f(x_1)=M,g(x_1)<M,f(x_2)<M,g(x_2)=M$，

显然 $\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)<0$，由零点定理，存在 $c \in (a,b)$，使得 $\varphi(c)=0$.

因为 $\varphi(a)=\varphi(c)=\varphi(b)=0$，所以由罗尔定理，存在 $\xi_1 \in (a,c),\xi_2 \in (c,b)$，使得

$\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0$，

再由罗尔定理，存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (a,b)$，使得 $\varphi''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

【例 6】 设 $f(x)$ 三阶可导，且 $f(1)=0$，令 $g(x)=x^3f(x)$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $g'''(\xi)=0$.

【证明】 $g(0)=g(1)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi_1 \in (0,1)$，使得 $g'(\xi_1)=0$；

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$，

$g'(0)=g'(\xi_1)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi_2 \in (0,\xi_1)$，使得 $g''(\xi_2)=0$；

$g''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f''(x)$，

$g''(0)=g''(\xi_2)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi \in (0,\xi_2) \subset (0,1)$，使得 $g'''(\xi)=0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

题型四 所证结论中只含 ξ、无其他字母



【例 1】 设 $f(x) \in C[a,b]$，且在 (a,b) 内可导 $(ab>0)$，$f(a)=f(b)=0$，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$.

【分析】 将 $\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$ 中的 ξ 改成 x，得 $xf'(x)+3f(x)=0$，变形得 $\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{3}{x}=0$，还原得 $[\ln f(x)]'+(\ln x^3)'=0$，合并得 $[\ln x^3f(x)]'=0$，辅助函数为 $\varphi(x)=x^3f(x)$.

【证明】 令 $\varphi(x)=x^3f(x)$，因为 $f(a)=f(b)=0$，所以 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$.

而 $\varphi'(x)=x^3f'(x)+3x^2f(x)$，所以 $\xi^3f'(\xi)+3\xi^2f(\xi)=0$，注意到 $\xi \neq 0$，故 $\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

【分析】 将 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$ 中的 ξ 改成 x，得 $f''(x)=\frac{2f'(x)}{1-x}$，变形得 $\frac{f''(x)}{f'(x)}+\frac{2}{x-1}=$

0，还原得$[\ln f'(x)]'+[\ln(x-1)^2]'=0$，合并得$[\ln(x-1)^2 f'(x)]'=0$，辅助函数为$\varphi(x)=(x-1)^2 f'(x)$.

【证明】　令$\varphi(x)=(x-1)^2 f'(x)$，显然$\varphi(1)=0$.

因为$f(0)=f(1)$，所以由罗尔定理，存在$c\in(0,1)$，使得$f'(c)=0$，于是$\varphi(c)=0$.

因为$\varphi(c)=\varphi(1)=0$，所以由罗尔定理，存在$\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使得$\varphi'(\xi)=0$.

而$\varphi'(x)=(x-1)^2 f''(x)+2(x-1)f'(x)$，所以$(\xi-1)^2 f''(\xi)+2(\xi-1)f'(\xi)=0$，注意到$\xi-1\neq 0$，故$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

【例3】　设$f(x),g(x)\in C[a,b]$，且在(a,b)内可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

【分析】　将$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$中的ξ改成x，得$f'(x)+f(x)g'(x)=0$，变形得$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)=0$，还原得$[\ln f(x)]'+[g(x)]'=0$，合并得$[\ln f(x)\mathrm{e}^{g(x)}]'=0$，辅助函数为$\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{g(x)}$.

【证明】　令$\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{g(x)}$，因为$f(a)=f(b)=0$，所以$\varphi(a)=\varphi(b)=0$，由罗尔定理，存在$\xi\in(a,b)$，使得$\varphi'(\xi)=0$.

而$\varphi'(x)=\mathrm{e}^{g(x)}[f'(x)+f(x)g'(x)]$，且$\mathrm{e}^{g(x)}\neq 0$，所以$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

【例4】　设$f(x)\in C[1,2]$，且在$(1,2)$内可导，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，$f(2)=2$，证明：存在$\xi\in(1,2)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【分析】　将$f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$中的$\xi$改成$x$，得$f'(x)=\dfrac{2f(x)}{x}$，变形得$\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{2}{x}=0$，还原得$[\ln f(x)]'+(\ln x^{-2})'=0$，合并得$\left[\ln\dfrac{f(x)}{x^2}\right]'=0$，辅助函数为$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$.

【证明】　令$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，显然$\varphi(x)\in C[1,2]$，在$(1,2)$内可导，且$\varphi(1)=\varphi(2)=\dfrac{1}{2}$，由罗尔定理，存在$\xi\in(1,2)$，使得$\varphi'(\xi)=0$.

而$\varphi'(x)=\dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$，所以$\dfrac{\xi f'(\xi)-2f(\xi)}{\xi^3}=0$，故$f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$.

【例5】　设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

【分析】　将$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$中的ξ改成x，得$f'(x)=2xf(x)$，变形得$\dfrac{f'(x)}{f(x)}-2x=0$，还原得$[\ln f(x)]'+(\ln\mathrm{e}^{-x^2})'=0$，合并得$[\ln\mathrm{e}^{-x^2}f(x)]'=0$，辅助函数为$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x^2}f(x)$.

【证明】　令$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x^2}f(x)$，因为$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$，所以由积分中值定理，$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{1-c^2}f(c)\cdot\dfrac{1}{2}=\mathrm{e}^{1-c^2}f(c)$，于是$\mathrm{e}^{-1}f(1)=\mathrm{e}^{-c^2}f(c)$，即$\varphi(c)=\varphi(1)$，

其中 $c \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$. 由罗尔定理,存在 $\xi \in (c,1) \subset (0,1)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$.

而 $\varphi'(x)=e^{-x^2}[f'(x)-2xf(x)]$,且 $e^{-x^2} \neq 0$,所以 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

【例 6】 设 $f(x)$ 在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,且 $f(0)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1, f(1)=\frac{1}{2}$.

(1) 证明:存在 $c \in (0,1)$,使得 $f(c)=c$;

(2) 对任意的 $k \in \mathbf{R}$,证明:存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f'(\xi)+k[f(\xi)-\xi]=1$.

【分析】 将 $f'(\xi)+k[f(\xi)-\xi]=1$ 中的 ξ 改成 x,得 $f'(x)+k[f(x)-x]=1$,即 $[f(x)-x]'+k[f(x)-x]=0$,变形得 $\frac{[f(x)-x]'}{f(x)-x}+k=0$,还原得 $[\ln(f(x)-x)]'+(\ln e^{kx})'=0$,合并得 $[\ln e^{kx}(f(x)-x)]'=0$,辅助函数为 $\varphi(x)=e^{kx}[f(x)-x]$.

【证明】 (1) 令 $h(x)=f(x)-x$, $h(0)=0, h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}, h(1)=-\frac{1}{2}$. 因为 $h\left(\frac{1}{2}\right)h(1)<0$,所以由零点定理,存在 $c \in \left(\frac{1}{2},1\right) \subset (0,1)$,使得 $h(c)=0$,即 $f(c)=c$.

(2) 令 $\varphi(x)=e^{kx}[f(x)-x]$,因为 $\varphi(0)=\varphi(c)=0$,所以由罗尔定理,存在 $\xi \in (0,c) \subset (0,1)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,而 $\varphi'(x)=e^{kx}[f'(x)-1+k(f(x)-x)]$,且 $e^{kx} \neq 0$,所以有 $f'(\xi)+k[f(\xi)-\xi]=1$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 7】 设 $f(x)$ 在[0,1]上连续,在(0,1)内二阶可导,$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1, f(1)=1$.

证明:(1) 存在 $c \in (0,1)$,使得 $f'(c)=1$.

(2) 存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f''(\xi)-2f'(\xi)+2=0$.

【证明】 (1) 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1$ 得 $f(0)=0, f'(0)=1$.

令 $h(x)=f(x)-x$,则 $h(0)=h(1)=0$,

由罗尔定理,存在 $c \in (0,1)$,使得 $h'(c)=0$,

而 $h'(x)=f'(x)-1$,故 $f'(c)=1$.

(2) 令 $\varphi(x)=e^{-2x}[f'(x)-1]$, $\varphi(0)=\varphi(c)=0$,

由罗尔定理,存在 $\xi \in (0,c) \subset (0,1)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,

而 $\varphi'(x)=e^{-2x}[f''(x)-2f'(x)+2]$ 且 $e^{-2x} \neq 0$,故 $f''(\xi)-2f'(\xi)+2=0$.

【例 8】 设 $f(x) \in C[a,b]$,在 (a,b) 内二阶可导,$f(a)=f(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,证明:存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f''(\xi)=f(\xi)$.

【分析】 $f''(x)-f(x)=0$ 分组得 $[f'(x)+f(x)]'-[f'(x)+f(x)]=0$,显然辅助函数为 $\varphi(x)=e^{-x}[f'(x)+f(x)]$.

【证明】 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $F(a)=F(b)=0$,由罗尔定理,存在 $c \in (a,b)$,使得 $F'(c)=0$,即 $f(c)=0$.

令 $h(x)=e^x f(x)$,则 $h(a)=h(c)=h(b)=0$,由罗尔定理,存在 $\xi_1 \in (a,c), \xi_2 \in (c,b)$,

使得 $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$，而 $h'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]$，且 $e^x\neq 0$，所以有

$$f(\xi_1)+f'(\xi_1)=0,\quad f(\xi_2)+f'(\xi_2)=0.$$

令 $\varphi(x)=e^{-x}[f(x)+f'(x)]$，显然 $\varphi(\xi_1)=\varphi(\xi_2)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$.

而 $\varphi'(x)=e^{-x}[f''(x)-f(x)]$，且 $e^{-x}\neq 0$，所以 $f''(\xi)=f(\xi)$.

【例 9】　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $g''(x)\neq 0(a<x<b)$，又 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：

(1) 在 (a,b) 内有 $g(x)\neq 0$；

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

【分析】　将 $\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$ 中 ξ 改成 x，得 $\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，整理得 $f''(x)g(x)-f(x)g''(x)=0$，还原得 $[f'(x)g(x)-f(x)g'(x)]'=0$，于是辅助函数为 $\varphi(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$.

【证明】　(1)(反证法) 设存在 $c\in(a,b)$，使得 $g(c)=0$.

由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$，再由罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $g''(\xi)=0$，矛盾，故当 $x\in(a,b)$ 时，$g(x)\neq 0$.

(2) 令 $\varphi(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$，因为 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，所以存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，而 $\varphi'(x)=f''(x)g(x)-f(x)g''(x)$，且 $g(x)\neq 0$ 及 $g''(x)\neq 0$，所以有 $\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

微信公众号【阿华考研】(ID: djky66)

【例 10】　设 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上二阶可导，$f(0)=f'(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，证明：存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

【分析】　本题若采用还原法构造辅助函数 $\varphi(x)=(1-2x)^{\frac{3}{2}}f'(x)$，已知条件不保证 $\varphi(x)$ 可以使用罗尔定理，故本题辅助函数采用凑微法，构造如下：

由 $f''(x)=\dfrac{3f'(x)}{1-2x}$ 得 $(2x-1)f''(x)+3f'(x)=0$，分组得

$(2x-1)f''(x)+2f'(x)+f'(x)=0$，即 $[(2x-1)f'(x)+f(x)]'=0$，

故辅助函数为 $\varphi(x)=(2x-1)f'(x)+f(x)$.

【证明】　令 $\varphi(x)=(2x-1)f'(x)+f(x)$，

$\varphi(0)=f(0)-f'(0)=0$，　$\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，故 $f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

题型五　所证结论中含 ξ，且含 a,b

【思路分析】

此类问题一般有如下两种情形：

(1) 结论中的中值 ξ 与 a,b 可分离

首先将结论中 ξ 与 a,b 分离，对 a,b 一侧使用拉格朗日中值定理或柯西中值定理.

(2) 结论中的中值 ξ 与 a,b 不可分离

用凑微法，将结论中 ξ 改为 x、去分母、移项，将所得式子还原，即可得辅助函数.

【例 1】 设 $f(x)\in C[a,b](a>0)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

【分析】 将 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$ 中的中值与端点 a,b 分离得

$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\xi f'(\xi)$，显然对等式的左边使用柯西中值定理即可得结论.

【证明】 令 $F(x)=\ln x$，$F'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$，由柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$，整理得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.

【例 2】 设 $ab>0(a<b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $ae^b-be^a=(a-b)(1-\xi)e^\xi$.

【分析】 将 $ae^b-be^a=(a-b)(1-\xi)e^\xi$ 中的中值与端点 a,b 分离得

$\frac{ae^b-be^a}{a-b}=(1-\xi)e^\xi$，整理得 $\frac{\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=(1-\xi)e^\xi$，显然对等式的左边使用柯西中值定理即可得结论.

【证明】 令 $f(x)=\frac{e^x}{x}$，$F(x)=\frac{1}{x}$，显然 $f(x),F(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，

且 $F'(x)=-\frac{1}{x^2}\neq 0$，由柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$，整理得 $ae^b-be^a=(a-b)(1-\xi)e^\xi$.

【例 3】 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内二阶可导，$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}=0$ 且 $f''(x)>0(a<x<b)$，证明：

(1) $f(x)>0(a<x\leqslant b)$.

(2) 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}=\frac{2\xi}{f(\xi)}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$.

微信公众号【顶尖考研】

【证明】 (1) 由 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{x-a}=0$ 得 $f(a)=0, f'(a)=0$.

由 $\begin{cases}f'(a)=0,\\ f''(x)>0(a<x<b)\end{cases}$ 得 $f'(x)>0(a<x<b)$,

再由 $\begin{cases}f(a)=0,\\ f'(x)>0(a<x<b)\end{cases}$ 得 $f(x)>0(a<x\leqslant b)$.

(2) 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, F'(x)=f(x)\neq 0$,由柯西中值定理,存在 $\xi\in(a,b)$,

使得 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}=\dfrac{b^2-a^2}{F(b)-F(a)}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$,

由拉格朗日中值定理得 $f(\xi)=f(\xi)-f(a)=f'(\eta)(\xi-a)(a<\eta<\xi)$,

故
$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}=\frac{2\xi}{f(\xi)}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}.$$

【例 4】 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $g'(x)\neq 0(a<x<b)$,

证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

【分析】 将 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 中的 ξ 换成 x、去分母、移项得

$f(x)g'(x)+f'(x)g(x)-f(a)g'(x)-f'(x)g(b)=0$,还原得

$[f(x)g(x)-f(a)g(x)-f(x)g(b)]'=0$,于是得辅助函数为

$\varphi(x)=f(x)g(x)-f(a)g(x)-f(x)g(b)$.

【证明】 令 $\varphi(x)=f(x)g(x)-f(a)g(x)-f(x)g(b)$,

$\varphi(a)=-f(a)g(b)$, $\varphi(b)=-f(a)g(b)$,显然 $\varphi(a)=\varphi(b)$,

由罗尔定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,而

$\varphi'(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)-f(a)g'(x)-f'(x)g(b)$,将 ξ 代入整理得

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

【例 5】 设 $f(x), g(x)\in C[a,b]$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(\xi)\int_a^\xi g(t)\mathrm{d}t=g(\xi)\int_\xi^b f(t)\mathrm{d}t.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【分析】 $f(\xi)\int_a^\xi g(t)\mathrm{d}t=g(\xi)\int_\xi^b f(t)\mathrm{d}t$ 中 ξ 改为 x 化简得

$f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t+g(x)\int_b^x f(t)\mathrm{d}t=0$,即 $\left[\int_b^x f(t)\mathrm{d}t\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right]'=0$,

辅助函数为 $\varphi(x)=\int_b^x f(t)\mathrm{d}t\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$.

【证明】 令 $\varphi(x)=\int_b^x f(t)\mathrm{d}t\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$, $\varphi(a)=\varphi(b)=0$,

由罗尔定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,即 $f(\xi)\int_a^\xi g(t)\mathrm{d}t=g(\xi)\int_\xi^b f(t)\mathrm{d}t$.

题型六　所证结论中只含 ξ,η

【思路分析】

此类问题大致有三种情形：

(1) 所证结论中除常数外只含 $f'(\xi),f'(\eta)$，证明方法是找三个点，两次使用拉格朗日中值定理.

(2) 所证结论中含 ξ,η，但涉及两个中值的项复杂程度不同，证明方法一般是将复杂中值项取出，使用拉格朗日中值定理或柯西中值定理.

(3) 所证结论中含 ξ,η，涉及两个中值的项形式对等，证明方法一般是对一个中值项还原构造辅助函数，再两次使用拉格朗日中值定理.

【例 1】 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

【分析】 结论中关于 η 含有两项以上，含 η 的部分为 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$，显然使用的辅助函数为 $e^{x}f(x)$，由于涉及的辅助函数只有一个，故使用拉格朗日中值定理.

【证明】 令 $\varphi(x)=e^{x}f(x)$，由拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\varphi'(\eta),\text{或}\frac{e^{b}f(b)-e^{a}f(a)}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)],$$

因为 $f(a)=f(b)=1$，所以 $\dfrac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$.

令 $h(x)=e^{x}$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}=h'(\xi)$，于是 $\dfrac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=e^{\xi}$，故 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

【例 2】 设 $f(x)\in C[a,b](a>0)$，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$abf'(\xi)=\eta^{2}f'(\eta).$$

【分析】 结论中关于 η 的项为 $\eta^{2}f'(\eta)$，即 $\dfrac{f'(\eta)}{\dfrac{1}{\eta^{2}}}$，显然使用柯西中值定理，其中 $F(x)=\dfrac{1}{x}$.

【证明】 令 $F(x)=\dfrac{1}{x}$，显然 $F'(x)=-\dfrac{1}{x^{2}}\neq0$，由柯西中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\eta)}{F'(\eta)},\text{或}\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=-\eta^{2}f'(\eta),$$

整理得 $ab\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\eta^{2}f'(\eta)$，

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，

故 $abf'(\xi)=\eta^{2}f'(\eta)$.

【例 3】 设 $f(x)\in C[a,b](a>0)$，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=(a+b)\frac{f'(\eta)}{2\eta}.$$

【分析】　结论中含 η 的项为 $\frac{f'(\eta)}{2\eta}$，显然应使用柯西中值定理，其中 $F(x)=x^2$.

【证明】　令 $F(x)=x^2$，$F'(x)=2x\neq 0$，由柯西中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\eta)}{F'(\eta)}，或\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}，$$

整理得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a+b)\frac{f'(\eta)}{2\eta}$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，于是 $f'(\xi)=(a+b)\frac{f'(\eta)}{2\eta}$.

【例 4】　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$.

(1) 证明：存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=1-c$.

(2) 证明：存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

【分析】　结论 $f'(\xi)f'(\eta)=1$ 中含 ξ,η 皆为一项，故两次使用拉格朗日中值，找三个不同的点成为关键，显然已知条件中给出了 $f(0)$，$f(1)$，第(1)问中给出了 $f(c)$.

【证明】　(1) 令 $h(x)=f(x)-1+x$，因为 $h(0)=-1<0$，$h(1)=1>0$，所以由零点定理，存在 $c\in(0,1)$，使得 $h(c)=0$，即 $f(c)=1-c$.

(2) 由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,c)$，$\eta\in(c,1)$，使得

$$\begin{cases}f(c)-f(0)=f'(\xi)c, & 0<\xi<c,\\ f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c), & c<\eta<1\end{cases}\text{整理得}\begin{cases}1-c=f'(\xi)c,\\ c=f'(\eta)(1-c),\end{cases}$$

两式相乘得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

【例 5】　设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=\frac{1}{3}$.

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{2}{f'(\eta)}=3$.

【证明】　(1) 令 $h(x)=f(x)-\frac{1}{3}$，$h(0)=-\frac{1}{3}$，$h(1)=\frac{2}{3}$，

因为 $h(0)h(1)<0$，所以存在 $c\in(0,1)$，使得 $h(c)=0$，从而 $f(c)=\frac{1}{3}$.

(2) 根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,c)$，$\eta\in(c,1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{1}{3c},\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{2}{3(1-c)},$$

从而 $\frac{1}{f'(\xi)}=3c$，$\frac{2}{f'(\eta)}=3(1-c)$，两式相加得 $\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{2}{f'(\eta)}=3$.

【例 6】　设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}$，$f(1)=1$，证明：存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)+2\xi=f'(\eta)-\eta.$$

微信公众号【高类考研】(ID：djky66)

【证明】 令 $\varphi_1(x)=f(x)+x^2$，$\varphi_2(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得

$$\varphi'_1(\xi)=\frac{\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)-\varphi_1(0)}{\frac{1}{2}}=2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\right]=\frac{7}{8},$$

$$\varphi'_2(\eta)=\frac{\varphi_2(1)-\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2\left[\frac{1}{2}-f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}\right]=\frac{7}{8},$$

从而 $\varphi'_1(\xi)=\varphi'_2(\eta)$，即 $f'(\xi)+2\xi=f'(\eta)-\eta$.

题型七 拉格朗日中值定理的常规证明问题

【思路分析】

(1) 若 $f(x)$ 可导，且出现 $f(b)-f(a)$ 时，往往使用拉格朗日中值定理.

【例 1】 设 $f(x)$ 二阶可导，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，$dy=f'(x_0)\Delta x$，其中 $\Delta x>0$，下列选项正确的是(　　).

(A) $dy>\Delta y>0$　(B) $\Delta y>dy>0$　(C) $dy<\Delta y<0$　(D) $\Delta y<dy<0$

【解】 因为 $\Delta x>0$ 及 $f'(x)>0$，所以 $dy=f'(x_0)\Delta x$，故排除选项(C)、(D).

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(\xi)\Delta x\ (x_0<\xi<x_0+\Delta x),$$

因为 $f''(x)>0$，即 $f'(x)$ 单调增加，所以 $f'(\xi)\Delta x>f'(x_0)\Delta x$，即 $\Delta y>dy>0$，选(B).

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

【证明】 取 $\varepsilon_0=\frac{A}{2}>0$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$，所以存在 $X_0>0$，当 $x>X_0$ 时，

$|f'(x)-A|<\frac{A}{2}$，于是 $f'(x)>\frac{A}{2}$.

当 $x>X_0$ 时，$f(x)-f(X_0)=f'(\xi)(x-X_0)>\frac{A}{2}(x-X_0)$，其中 $\xi\in(X_0,x)$，

于是 $f(x)>f(X_0)+\frac{A}{2}(x-X_0)$，两边取极限得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

【例 3】 设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，若 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$，求 a.

【解】 由拉格朗日中值定理得

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)，\text{其中 } x-1<\xi<x,$$

于是 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}f'(\xi)=e$；

又由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{x\cdot\frac{2a}{x-a}}=e^{2a}$ 得

$e^{2a}=e$，故 $a=\dfrac{1}{2}$.

【例 4】　设 $f''(x)>0$，比较 $f(1)-f(0)$，$f'(0)$，$f'(1)$ 的大小.

【解】　$f(1)-f(0)=f'(c)$，其中 $0<c<1$，

由 $f''(x)>0$ 得 $f'(x)$ 单调增加，

由 $0<c<1$ 得 $f'(0)<f'(c)<f'(1)$，即 $f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$.

(2) 若 $f(x)$ 可导(或二阶可导)，且至少涉及 $f(x)$ 的三个点的函数值时，往往两次使用拉格朗日中值定理.

【例 5】　设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，$|f'(x)|\leqslant M$ 且 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点，证明：$|f(a)|+|f(b)|\leqslant M(b-a)$.

【证明】　存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$，由拉格朗日中值定理得

$$f(c)-f(a)=f'(\xi_1)(c-a)，\text{其中 } \xi_1\in(a,c)，$$

$$f(b)-f(c)=f'(\xi_2)(b-c)，\text{其中 } \xi_2\in(c,b)，$$

取绝对值得 $|f(a)|\leqslant M(c-a)$ 及 $|f(b)|\leqslant M(b-c)$，

相加得 $|f(a)|+|f(b)|\leqslant M(b-a)$.

【例 6】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$，且 $f(x)$ 的最小点在 (a,b) 内，证明：

$$|f'(a)|+|f'(b)|\leqslant M(b-a).$$

【分析】　因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内取最小值，所以存在 $c\in(a,b)$ 内，使得 $f(c)$ 最小，同时 $f'(c)=0$，本题涉及 $f'(x)$ 三个点，首选拉格朗日中值定理.

【证明】　因为 $f(x)$ 的最小点在 (a,b) 内，所以存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$，显然 $f'(c)=0$.

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(c)-f'(a)=f''(\xi_1)(c-a)，\quad f'(b)-f'(c)=f''(\xi_2)(b-c)，$$

即　$-f'(a)=f''(\xi_1)(c-a)$，$f'(b)=f''(\xi_2)(b-c)$，

取绝对值得　$|f'(a)|\leqslant M(c-a)$，$|f'(b)|\leqslant M(b-c)$，

两式相加得　$|f'(a)|+|f'(b)|\leqslant M(b-a)$.

【例 7】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$，且 $f(x)$ 不恒为常数，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f'(\xi)|>0$.

【证明】　存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)\neq f(a)$，不妨设 $f(c)>f(a)$，则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$，$f'(\eta)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$，显然 $|f'(\xi)|>0$ 及 $|f'(\eta)|>0$.

【例 8】　设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，且 $f(x)$ 非直线，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

【分析】　过两个端点的直线为 $y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，令 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，显然 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，因为 $y=f(x)$ 非直线，所以 $\varphi(x)$ 不恒为零，即在 (a,b) 内有点 c，使得 $\varphi(c)\neq 0$，由于涉及 $\varphi(x)$ 三个点，首选拉格朗日中值定理.

【证明】　令 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$，

微信公众号(考研)(ID:djky66)

因为 $y=f(x)$ 非直线，所以 $\varphi(x)$ 不恒为零，存在 $c\in(a,b)$，使得 $\varphi(c)\neq 0$，不妨设 $\varphi(c)>0$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(c)-\varphi(a)}{c-a}>0,\quad \varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(b)-\varphi(c)}{b-c}<0.$$

而 $\varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，于是 $f'(\xi_1)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$f'(\xi_2)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant 0$ 时，$|f'(\xi_1)|>\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$，取 $\xi=\xi_1$；

当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ 时，由 $f'(\xi_2)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 得 $|f'(\xi_2)|>\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$，取 $\xi=\xi_2$.

(3) 设 $f(x)$ 可导，且涉及 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 之间关系时，一般使用拉格朗日中值定理.

【例 9】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，对任意的 $x\in[0,1]$ 有 $|f'(x)|\leqslant p|f(x)|$ $(0<p<1)$，且 $f(0)=0$，证明：$f(x)\equiv 0(0\leqslant x\leqslant 1)$.

【证明】 令 $M=|f(c)|=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$，

则 $M=|f(c)|=|f(c)-f(0)|=|f'(\xi)|c\leqslant|f'(\xi)|$，其中 $0<\xi<c$.

由 $|f'(\xi)|\leqslant p|f(\xi)|\leqslant pM$ 得 $M\leqslant pM$，

注意到 $0<p<1$，故 $M=0$，即 $f(x)\equiv 0(0\leqslant x\leqslant 1)$.

微信公众号【顶尖考研】

题型八 泰勒中值定理的常规证明问题

【例 1】 设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\geqslant 8$.

【分析】 $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$ 表明函数 $f(x)$ 最小值在内部达到，即存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=-1$，特别注意 $f'(c)=0$. 本题显然取 $x=0$，$x=1$，取 $x_0=c$.

【证明】 因为 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$，所以存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=-1$，且 $f'(c)=0$.

由泰勒公式得

$$f(0)=f(c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}c^2,\text{其中 }\xi_1\in(0,c),$$

$$f(1)=f(c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2,\text{其中 }\xi_2\in(c,1),$$

于是有 $f''(\xi_1)=\dfrac{2}{c^2}$，$f''(\xi_2)=\dfrac{2}{(1-c)^2}$.

当 $c\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 时，$f''(\xi_1)=\dfrac{2}{c^2}\geqslant 8$，取 $\xi=\xi_1$；

当 $c\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ 时，$f''(\xi_2)=\dfrac{2}{(1-c)^2}\geqslant 8$，取 $\xi=\xi_2$，

故存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\geqslant 8$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶连续可微，证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使得

$$\frac{f'''(\xi)}{6}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0).$$

【分析】　本题使用泰勒公式，首先确定 x_0 及 x. x_0 往往与一阶导数相关，故本题 $x_0=0$；x 往往与函数值相关，故本题 x 取 -1 和 1.

【证明】　由泰勒公式得

$$f(-1)=f(0)+f'(0)(-1-0)+\frac{f''(0)}{2!}(-1-0)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(-1-0)^3,$$

其中 $\xi_1\in(-1,0)$，

$$f(1)=f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{f''(0)}{2!}(1-0)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(1-0)^3,\text{其中 }\xi_2\in(0,1),$$

两式相减得　$f(1)-f(-1)=2f'(0)+\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}$，

或　$\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0)=\dfrac{1}{6}\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$.

因为 $f'''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$ 上连续，所以 $f'''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，因为 $m\leqslant\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}\leqslant M$，所以由介值定理，存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$，故 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0)=\dfrac{f'''(\xi)}{6}$.

微信公众号【顶尖考研】

【例 3】　从开始启动（速度为零）到刹车停止用单位时间走完单位路程，证明至少有一个时间点其加速度的绝对值不小于 4.

【分析】　设物体的运动规律为 $S=S(t)$，因为 $v(0)=S'(0)=0$，$v(1)=S'(1)=0$，所以本题在使用泰勒中值定理时，x_0 为 0 和 1，由于已知条件中除 0 和 1 外没有给出具体点的函数值，所以 x 取区间的中点.

【证明】　设物体的运动规律为 $S=S(t)$，显然 $S(0)=0$，$S'(0)=0$，$S(1)=1$，$S'(1)=0$，由泰勒公式得

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=S(0)+\frac{1}{2}S'(0)+\frac{S''(\xi_1)}{2!}\cdot\frac{1}{4},\text{其中 }\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=S(1)-\frac{1}{2}S'(1)+\frac{S''(\xi_2)}{2!}\cdot\frac{1}{4},\text{其中 }\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right),$$

两式相减得 $S''(\xi_1)-S''(\xi_2)=8$，取绝对值得 $|S''(\xi_1)|+|S''(\xi_2)|\geqslant 8$.

当 $|S''(\xi_1)|\geqslant|S''(\xi_2)|$ 时，$|S''(\xi_1)|\geqslant 4$；当 $|S''(\xi_1)|<|S''(\xi_2)|$ 时，$|S''(\xi_2)|\geqslant 4$，因为路程的二阶导数即为加速度，故至少有一点其加速度的绝对值不小于 4.

【例 4】　设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内四阶可导且 $|f^{(4)}(x)|\leqslant M$，设 x 为 $x=x_0$ 邻域内一点，x' 是该邻域内 x 关于 x_0 的对称点，证明：

$$\left|\frac{f(x)+f(x')-2f(x_0)}{(x-x_0)^2}-f''(x_0)\right|\leqslant\frac{M}{12}(x-x_0)^2.$$

【分析】　本题涉及四阶导数，显然使用泰勒公式，x 取两个端点，x_0 取中点.

【证明】　由泰勒公式得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}(x-x_0)^4,\text{其中 }\xi_1\text{ 位于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间;}$$

$$f(x')=f(x_0)+f'(x_0)(x'-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x'-x_0)^2+$$

$$\frac{f'''(x_0)}{3!}(x'-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}(x'-x_0)^4,\text{其中 }\xi_2\text{ 位于 }x_0\text{ 与 }x'\text{ 之间,}$$

注意到 x,x' 关于 x_0 对称,两式相加得

$$f(x)+f(x')-2f(x_0)=f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{(x-x_0)^4}{24}[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)],$$

或 $$\frac{f(x)+f(x')-2f(x_0)}{(x-x_0)^2}-f''(x_0)=\frac{(x-x_0)^2}{24}[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)],$$

两边取绝对值得 $$\left|\frac{f(x)+f(x')-2f(x_0)}{(x-x_0)^2}-f''(x_0)\right|\leqslant\frac{M}{12}(x-x_0)^2.$$

【例 5】 设 $f(x)\in C[a,b]$,在 (a,b) 内二阶连续可导,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

【分析】 本题不涉及一阶导数,所以一般 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$,又已知条件中无函数值的条件,故取 $x=a$ 及 $x=b$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:dijy66)

【证明】 由泰勒公式得

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2,\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right);$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2,\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right),$$

两式相加得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)].$$

因为 $f''(x)\in C(a,b)$,所以 $f''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上有最小值 m 和最大值 M,故

$$2m\leqslant f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\leqslant 2M,\quad m\leqslant\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\leqslant M,$$

由介值定理,存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset[a,b]$,使得 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$,故

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

题型九 二阶导数保号性问题

【例 1】 设 $f(x)$ 二阶可导,且 $f''(x)>0$,比较 $2f(1)$ 与 $f(0)+f(2)$ 的大小.

【解】 由拉格朗日中值定理,存在 $\xi_1\in(0,1),\xi_2\in(1,2)$,使得

$$f(1)-f(0)=f'(\xi_1),f(2)-f(1)=f'(\xi_2),$$

因为 $f''(x)>0$,且 $\xi_1<\xi_2$,所以 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$,即 $f(1)-f(0)<f(2)-f(1)$,

故 $2f(1)<f(0)+f(2)$.

【例 2】 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$ 且 $f''(x)>0(x>0)$，$f(0)=0$，证明：当 $0<a<b$ 时，$f(a)+f(b)<f(a+b)$.

【证明】 由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(0,a)$，$\xi_2\in(b,a+b)$，使得

$$f(a)-f(0)=f'(\xi_1)a,\ f(a+b)-f(b)=f'(\xi_2)a,$$

因为 $f''(x)>0$，且 $\xi_1<\xi_2$，所以 $f'(\xi_1)a<f'(\xi_2)a$，即 $f(a)-f(0)<f(a+b)-f(b)$，再由 $f(0)=0$ 得 $f(a)+f(b)<f(a+b)$.

【例 3】 设 $f''(x)>0$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，证明：当 $x\neq0$ 时，$f(x)>x$.

【证明】 **方法一**　由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 得 $f(0)=0$，$f'(0)=1$；

当 $x<0$ 时，$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，其中 $x<\xi<0$，

因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 单调递增，又因为 $x<\xi<0$，所以 $f'(\xi)<f'(0)=1$，从而 $f'(\xi)x>x$，即 $f(x)>x$；

当 $x>0$ 时，$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，其中 $0<\xi<x$，

因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 单调递增，又因为 $0<\xi<x$，所以 $f'(\xi)>f'(0)=1$，从而 $f'(\xi)x>x$，即 $f(x)>x$，

故当 $x\neq0$ 时，$f(x)>x$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

方法二　由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 得 $f(0)=0$，$f'(0)=1$；

由麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,\text{其中 }\xi\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间},$$

因为 $f''(x)>0$ 且 $x\neq0$，所以 $f(x)>f(0)+f'(0)x=x$.

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导且 $f''(x)>0$，对任意的 $x_i\in[a,b](i=1,2,\cdots,n)$ 及 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$，证明：

$$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n).$$

【证明】 令 $x_0=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n$，

因为 $f''(x)>0$，所以 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

从而

$$\begin{cases}f(x_1)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0),\\ f(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0),\\ \cdots\\ f(x_n)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_n-x_0)\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}k_1f(x_1)\geqslant k_1f(x_0)+f'(x_0)k_1(x_1-x_0),\\ k_2f(x_2)\geqslant k_2f(x_0)+f'(x_0)k_2(x_2-x_0),\\ \cdots\\ k_nf(x_n)\geqslant k_nf(x_0)+f'(x_0)k_n(x_n-x_0)\end{cases}$$

相加得　　$f(x_0)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n)$,

即 $$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n).$$

题型十　关于 $f^{(n)}(\xi)=C_0(\neq 0)$ 的命题证明

【例 1】 设 $a<b<c$，且函数 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上二阶可导，证明：存在 $\xi\in(a,c)$，使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

【分析】 证明关于特殊点的表达式等于 $f^{(k)}(\xi)$ 的问题，通常的做法是令结论中与 $f^{(k)}(\xi)$ 相等的表达式为常数 k，再令其中一个点为 x，从而得到辅助函数.

【证明】 令 $\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=k$，或

$$(b-c)f(a)+(c-a)f(b)+(a-b)f(c)-k(a-b)(a-c)(b-c)=0,$$

设 $\varphi(x)=(b-x)f(a)+(x-a)f(b)+(a-b)f(x)-k(a-b)(a-x)(b-x)$，显然 $\varphi(a)=0,\varphi(c)=0,\varphi(b)=0$.

根据罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,b),\xi_2\in(b,c)$，使得 $\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0$.

再根据罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,c)$，使得 $\varphi''(\xi)=0$.

而 $\varphi''(x)=(a-b)f''(x)-2k(a-b)$，所以 $(a-b)f''(\xi)-2k(a-b)=0$，于是 $\frac{1}{2}f''(\xi)=k$，即 $\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(\xi)$.

微信公众号【西数考研】(ID: xjkyks)

【例 2】 设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 为 n 个不同的实数，函数 $f(x)$ 在 $[a_1,a_n]$ 上有 n 阶导数，并满足 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$，则对每个 $c\in[a_1,a_n]$，存在 $\xi\in(a_1,a_n)$ 满足等式

$$f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi).$$

【分析】 显然当 $c=a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 时，结论显然成立；当 $c\neq a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 时，结论等价于 $\frac{n!\,f(c)}{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}=f^{(n)}(\xi)$，令 $\frac{n!\,f(c)}{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}=k$ 或 $n!\,f(c)-k(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)=0$，所作的辅助函数为 $\varphi(x)=n!\,f(x)-k(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$.

【证明】 (1) 当 $c=a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 时，对任意的 $\xi\in(a_1,a_n)$，结论成立；

(2) 当 $c\neq a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 时，令 $\varphi(x)=n!\,f(x)-k(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，因为 $\varphi(c)=\varphi(a_1)=\cdots=\varphi(a_n)$，所以 $\varphi(x)$ 有 $n+1$ 个零点，使用罗尔定理 n 次，则存在 $\xi\in(a_1,a_n)$，使得 $\varphi^{(n)}(\xi)=0$，而 $\varphi^{(n)}(x)=n!\,f^{(n)}(x)-kn!$，所以 $f^{(n)}(\xi)=k$，即原结论成立.

题型十一　不等式的证明

【思路分析】

不等式证明是考查的重点内容，一般有如下方法：

(1) 用单调性证明不等式　　(2) 用中值定理证明不等式

(3) 用凹凸性证明不等式　　(4) 用最值证明不等式

【例 1】　设 $0<a<b$，证明：$\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

【证明】　令 $\varphi(x)=\ln x-\ln a-\dfrac{x-a}{\sqrt{ax}}=\ln x-\ln a-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$，　$\varphi(a)=0$.

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{ax}}-\frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{ax}-a-x}{2\sqrt{a}x\sqrt{x}}=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}x\sqrt{x}}<0(x>a),$$

由 $\begin{cases}\varphi(a)=0,\\ \varphi'(x)<0(x>a)\end{cases}$ 得 $\varphi(x)<0(x>a)$，因为 $b>a$，所以 $\varphi(b)<0$，故 $\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

【例 2】　设 $e<a<b$，证明：$b^a<a^b$.

【证明】　$b^a<a^b$ 等价于 $b\ln a-a\ln b>0$，

令 $f(x)=x\ln a-a\ln x$，显然 $f(a)=0$，

因为当 $x>a$ 时，$f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}>0$，所以当 $x>a$ 时，$f(x)$ 单调增加，而 $f(a)=0$，

所以当 $x>a$ 时，$f(x)>0$，又 $b>a$，所以 $f(b)>0$，故 $b^a<a^b$.

【例 3】　证明：$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$.

【证明】　令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，　$f(0)=0$.

$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，　$f'(0)=0$，

因为 $f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$，所以 $f'(x)$ 单调增加，于是当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的最小值点，最小值为 $f(0)=0$，

故 $f(x)\geqslant 0$，即 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$.

【例 4】　证明：当 $x>0$ 时，$e^x-1>(1+x)\ln(1+x)$.

【证明】　令 $f(x)=e^x-1-(1+x)\ln(1+x)$，　$f(0)=0$，

$f'(x)=e^x-1-\ln(1+x)$，　$f'(0)=0$，

当 $x>0$ 时，$f''(x)=e^x-\dfrac{1}{1+x}>0$，则 $f'(x)$ 单调增加，而 $f'(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，即当 $x>0$ 时 $f(x)$ 单调增加，而 $f(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，即 $e^x-1>(1+x)\ln(1+x)$.

【例 5】　证明：当 $x>0$ 时，有 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

【证明】　令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，　$f(1)=0$，

$f'(x)=2x\ln x-x-\dfrac{1}{x}+2$，　$f'(1)=0$，

$f''(x)=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2}$，　$f''(1)=2$，

$f'''(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x^3}$，从而有 $\begin{cases}f'''(x)<0,0<x<1,\\ f'''(x)>0,x>1,\end{cases}$ 于是 $x=1$ 为 $f''(x)$ 的最小值点，

而 $f''(1)=2>0$，所以 $f''(x)>0$，于是 $f'(x)$ 单调增加，而 $f'(1)=0$，所以得

$\begin{cases}f'(x)<0,0<x<1,\\ f'(x)>0,x>1,\end{cases}$ 则 $x=1$ 为 $f(x)$ 的最小值点，而 $f(1)=0$，所以有 $f(x)\geqslant 0$，即

$$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2.$$

微信公众号【顶尖考研】
ID：djkyss

【例 6】 设 $f(x)\in C[0,1]$，$f(0)=0$，$0<f'(x)<1(0<x<1)$，证明：

$$2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>f^2(1).$$

【证明】 令 $\varphi(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，$\varphi(0)=0$，

$\varphi'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)]$，

由 $\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(x)>0(0<x<1)\end{cases}$ 得 $f(x)>0(0<x\leqslant 1)$，于是 $\varphi'(x)>0(0<x<1)$，

再由 $\begin{cases}\varphi(0)=0,\\ \varphi'(x)>0(0<x<1)\end{cases}$ 得 $\varphi(x)>0(0<x\leqslant 1)$，

故 $\varphi(1)>0$，即 $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>f^2(1)$.

【例 7】 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，证明：$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x$.

【证明】 令 $g(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$，

因为 $g''(x)=-\sin x<0(0<x<\dfrac{\pi}{2})$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内为凸函数，

又因为 $g(0)=g(\dfrac{\pi}{2})=0$，所以当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$g(x)>0$，即 $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x$.

微信公众号【顶尖考研】
QD：djky66

【例 8】 设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$，证明：$\dfrac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

【证明】 由拉格朗日中值定理，存在 $c\in(a,b)$，使得 $\dfrac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=\dfrac{2\ln c}{c}$.

令 $\varphi(x)=\dfrac{2\ln x}{x}(\mathrm{e}\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^2)$，由 $\varphi'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}<0(\mathrm{e}<x<\mathrm{e}^2)$ 得 $\varphi(x)$ 在 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上单调减少，故 $\varphi(x)$ 在 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上的最小值为 $m=\varphi(\mathrm{e}^2)=\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$，于是 $\varphi(c)>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$，

即 $$\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{4}{\mathrm{e}^2}.$$

【例 9】 证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{\arctan x}{\ln(1+x)}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

【证明】 由柯西定理得 $\dfrac{\arctan x}{\ln(1+x)}=\dfrac{\arctan x-\arctan 0}{\ln(1+x)-\ln(1+0)}=\dfrac{1}{1+c^2}\Big/\dfrac{1}{1+c}=\dfrac{1+c}{1+c^2}$，

其中 $0<c<x$. 令 $\varphi(t)=\dfrac{1+t}{1+t^2}(t>0)$，由 $\varphi'(t)=\dfrac{1-2t-t^2}{(1+t^2)^2}=0$ 得 $t=\sqrt{2}-1$.

当 $t\in(0,\sqrt{2}-1)$ 时，$\varphi'(t)>0$，当 $t\in(\sqrt{2}-1,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)<0$，则 $t=\sqrt{2}-1$ 为 $\varphi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值点，最大值为 $\varphi(\sqrt{2}-1)=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，则 $\varphi(c)\leqslant\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，

即 $$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}\leqslant\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

【例 10】 设 $f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^2 t\,\mathrm{d}t(x\geqslant 0)$，证明：$f(x)\leqslant\dfrac{1}{20}$.

【证明】　令 $f'(x)=(x-x^2)\sin^2 x=0$ 得 $x=1, x=k\pi(k=0,1,2,\cdots)$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，则 $x=1$ 为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值点，最大值为 $M=f(1)=\int_0^1(t-t^2)\sin^2 t\,dt\leqslant\int_0^1(t-t^2)t^2\,dt=\frac{1}{20}$，故 $f(x)\leqslant\frac{1}{20}$.

题型十二　函数的单调、极值与函数作图问题

【例 1】　设 $f(x)$ 连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=-1$，则(　　).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是 $y=f(x)$ 的拐点

【解】　**方法一**　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=-1$ 得 $f'(0)=0$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=-1<0$，由极限保号性，存在 $\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，$\dfrac{f'(x)}{x}<0$，所以当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,\delta)$ 时，$f'(x)<0$，由极值第一充分条件，$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，选(B).

方法二　由 $f(x)$ 连续可导及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=-1$ 得 $f'(0)=0$ 且 $f''(0)=-1<0$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，应选(B).

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 2】　设 $f(x)$ 二阶可导，$f'(1)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f''(x)}{\sin^2\pi x}=-1$，判断 $x=1$ 是否为极值点.

【解】　存在 $\delta>0$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\dfrac{f''(x)}{\sin^2\pi x}<0$，即 $f''(x)<0$，

从而 $f'(x)$ 在 $(1-\delta,1+\delta)$ 内单调递减，

因为 $f'(1)=0$，所以当 $x\in(1-\delta,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,1+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

【例 3】　求函数 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的单调区间、极值、凹凸区间、拐点、渐近线.

【解】　函数 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

$y'=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0$ 得 $x_1=-\sqrt{3}, x_2=0, x_3=\sqrt{3}$；

$y''=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0$ 得 $x=0$.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

作表格如下：

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	正		负	负		负	负		正
y''	负		负	正		负	正		正
y	单调增加且凸	极大	单调下降且凸	单调下降且凹	拐点	单调下降且凸	单调下降且凹	极小	单调增加且凹

函数的单调增区间为$(-\infty,-\sqrt{3}]$及$[\sqrt{3},+\infty)$；

函数的单调减区间为$[-\sqrt{3},-1),(-1,1)$及$(1,\sqrt{3}]$.

函数的极大值点为$x=-\sqrt{3}$，函数的极小值点为$x=\sqrt{3}$.

曲线的凸区间为$(-\infty,-1)$及$(0,1)$，曲线的凹区间为$(-1,0)$及$(1,+\infty)$，曲线的拐点为$(0,0)$.

因为$\lim\limits_{x\to\infty}=\infty$，所以曲线没有水平渐近线；

因为$\lim\limits_{x\to\pm1}y=\infty$，所以曲线有两条铅直渐近线$x=-1$和$x=1$；

因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=0$，所以曲线有斜渐近线$y=x$.

【例4】 设$f(x)$连续可导，又$f(0)=0$，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=2$，判断$x=0$是否为$f(x)$的极值点.

【解】 由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=2$得$\lim\limits_{x\to0}[f(x)+f'(x)]=0$，

再由$f(x)$连续可导得$f(0)+f'(0)=0$，从而$f'(0)=0$；

由$2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f'(0)+f''(0)$得$f''(0)=2$，

因为$f'(0)=0$，$f''(0)=2>0$，所以$x=0$为$f(x)$的极小值点.

【例5】 设$f(x)$满足：$xf''(x)-2xf'(x)=e^{-x}-1$，且$x=a\neq0$为$f(x)$的极值点，问$x=a$是极大值点还是极小值点？

【解】 因为$x=a\neq0$为$f(x)$的极值点，所以$f'(a)=0$，

将$x=a$代入$xf''(x)-2xf'(x)=e^{-x}-1$得

$$f''(a)=\frac{e^{-a}-1}{a}.$$

当$a<0$时，$f''(a)=\dfrac{e^{-a}-1}{a}<0$；当$a>0$时，$f''(a)=\dfrac{e^{-a}-1}{a}<0$，

故$x=a$是极大值点.

【例6】 求曲线$y=f(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$的渐近线.

【解】 因为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，所以$y=f(x)$没有水平渐近线；

由$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$得$x=-1$为曲线$y=f(x)$的铅直渐近线；

由$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$得$x=0$为曲线$y=f(x)$的铅直渐近线；

由$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$，

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x-2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}-2x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-2}{x+1}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x-2}{x+1}-2x\right)=2+\lim_{x\to\infty}\frac{-5x-2}{x+1}=-3$$得

$y=2x-3$为曲线$y=f(x)$的斜渐近线.

【例 7】　求曲线 $y=\sqrt{4x^2-2x+11}+2x$ 的渐近线.

【解】　由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+11}{\sqrt{4x^2-2x+11}-2x}=\dfrac{1}{2}$ 得 $y=\dfrac{1}{2}$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=4$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-4x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-2x+11}-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+11}{\sqrt{4x^2-2x+11}+2x}=-\dfrac{1}{2}$ 得

$y=4x-\dfrac{1}{2}$ 为曲线的斜渐近线.

题型十三　函数零点或方程根的个数讨论

【思路分析】

讨论函数零点的方法通常有：(1) 零点定理；(2) 罗尔定理.

【例 1】　设 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，证明：$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 至少有一个正根.

【证明】　令 $F(x)=a_0x+\dfrac{a_1}{2}x^2+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，显然 $F'(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，

因为 $F(0)=F(1)=0$，所以由罗尔定理，存在 $c\in(0,1)$，使得 $F'(c)=0$，

故 $a_0+a_1c+\cdots+a_nc^n=0$.

【例 2】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点.

【证明】　令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(a)=F(b)=0$，

由罗尔定理，存在 $c\in(a,b)$，使得 $F'(c)=0$，故 $f(c)=0$.

【例 3】　证明：方程 $\mathrm{e}^x-1-x+\dfrac{x^2}{2}=0$ 不可能有三个不同的实根.

【证明】　(反证法) 令 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x+\dfrac{x^2}{2}$，

不妨设存在 $c_1<c_2<c_3$，使得 $f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(c_1,c_2)$，$\xi_2\in(c_2,c_3)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，

再由罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f''(\xi)=0$，

而 $f''(x)=\mathrm{e}^x+1\neq0$，矛盾，所以方程 $\mathrm{e}^x-1-x+\dfrac{x^2}{2}=0$ 不可能有三个不同的实根.

【例 4】　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(x)\geqslant0$，证明：

存在 $c\in(0,1)$，使得在 $[0,c]$ 上以 $f(c)$ 为高的矩形面积与 $[c,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积相等.

【证明】　$S_1(c)=cf(c)$，　$S_2(c)=\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t$，

微信公众号【顶尖考研】
QQ：djky66

令 $\varphi(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t=xf(x)+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$,

再令 $F(x)=x\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$,显然 $F'(x)=\varphi(x)$.

因为 $F(0)=F(1)=0$,所以存在 $c\in(0,1)$,使得 $F'(c)=0$,即 $cf(c)=\int_c^1 f(x)\mathrm{d}x$.

【例 5】 证明:方程 $\ln x=\frac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 有且仅有两个正根.

【证明】 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}$.

令 $f(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+2\sqrt{2}\,(x>0)$,

由 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}=0$ 得 $x=\mathrm{e}$,因为 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$,所以 $x=\mathrm{e}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值点,最大值为 $f(\mathrm{e})=2\sqrt{2}>0$,

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,所以函数 $f(x)$ 有且仅有两个正的零点,分别位于 $(0,\mathrm{e})$ 及 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内,故方程 $\ln x=\frac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 有且仅有两个正的根.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:dijky66)

【例 6】 讨论方程 $x\mathrm{e}^{-x}=a\,(a>0)$ 根的个数.

【解】 设 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}-a\,(x>0)$.

令 $f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}=0$ 得 $x=1$.

因为当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的最大值点,最大值为 $M=f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}-a$.

当 $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$f(x)$ 无零点,所以方程无解;

当 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$f(x)$ 只有一个零点 $x=1$,所以方程只有一个根 $x=1$;

当 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-a<0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a<0$,所以 $f(x)$ 有且仅有两个零点,故方程有且仅有两个根,分别位于 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 之间.

【例 7】 讨论方程 $\ln x=ax\,(a>0)$ 的根的个数.

【解】 令 $f(x)=\ln x-ax\,(x>0)$,

由 $f'(x)=\frac{1}{x}-a=0$ 得 $x=\frac{1}{a}$,因为 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$,所以 $x=\frac{1}{a}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值点,最大值为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a\mathrm{e}}$.

(1) 当 $\ln\frac{1}{a\mathrm{e}}<0$,即 $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,函数 $f(x)$ 没有零点,故方程无解;

(2) 当 $\ln\frac{1}{a\mathrm{e}}=0$,即 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,函数 $f(x)$ 只有一个零点 $x=\mathrm{e}$,方程只有一个零点 $x=\mathrm{e}$;

(3) 当 $\ln\frac{1}{ae}>0$，即 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点，故方程有且仅有两个根，分别位于 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 与 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 内.

【例 8】　当 $x>0$ 时，方程 $\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=k$ 有解，求 k 的范围.

【解】　令 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}$，

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{x^2e^x-(e^x-1)^2}{x^2(e^x-1)^2},$$

令 $h(x)=x^2e^x-(e^x-1)^2$，$h(0)=0$，

$$h'(x)=e^x(2x+x^2-2e^x+2),h'(0)=0,$$

令 $\varphi(x)=2x+x^2-2e^x+2$，$\varphi(0)=0$，

$$\varphi'(x)=2+2x-2e^x=2(1+x-e^x)<0(x>0),$$

由 $\begin{cases}\varphi(0)=0,\\ \varphi'(x)<0(x>0)\end{cases}$ 得 $\varphi(x)<0(x>0)$，从而 $h'(x)<0(x>0)$；

再由 $\begin{cases}h(0)=0,\\ h'(x)<0(x>0)\end{cases}$ 得 $h(x)<0(x>0)$，于是 $f'(x)<0(x>0)$，

即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，再由 $f(0+0)=\frac{1}{2}$，$f(+\infty)=0$ 得 $0<k<\frac{1}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

测试题

一、选择题

1. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 的大小次序为(　　).

(A) $f'(0)<f'(1)<f(1)-f(0)$　　(B) $f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$

(C) $f(1)-f(0)<f'(0)<f'(1)$　　(D) $f(1)-f(0)<f'(1)<f'(0)$

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f'(x)$ 的图像如图 1-3-7 所示，则(　　).

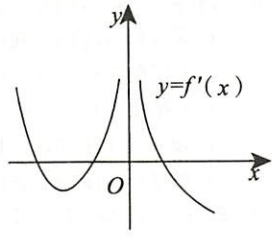


图 1-3-7

(A) $y=f(x)$ 有一个极大值点，两个极小值点，两个拐点

(B) $y=f(x)$ 有两个极大值点，一个极小值点，两个拐点

(C) $y=f(x)$ 有两个极大值点，一个极小值点，一个拐点

(D) $y=f(x)$ 有一个极大值点，两个极小值点，一个拐点

3. 设 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)^2}=3$，则下列结论正确的是(　　).

(A) $f(2)=0$ 且 $x=2$ 为极小值点　　(B) $f(2)=0$ 且 $x=2$ 为极大值点

(C) $f(x)$ 在 $x=2$ 处不可导但 $x=2$ 为极值点　(D) $x=2$ 不是 $f(x)$ 的极值点

4. 设 $f(x)$ 三阶可导，且 $f'(a)=f''(a)=0$，$f'''(a)<0$，则下列结论正确的是(　　).

(A) $f(a)$ 为 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(a)$ 为 $f(x)$ 的极小值

(C) $(a,f(a))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(a)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5. 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内二阶可导，$f(0)=0$，$f'(0)=2$，且 $f''(x)>0$，则(　　).

(A) 当 $x \in (-a,0)$ 时 $f(x) > 2x$，当 $x \in (0,a)$ 时 $f(x) < 2x$

(B) 当 $x \in (-a,0)$ 时 $f(x) < 2x$，当 $x \in (0,a)$ 时 $f(x) > 2x$

(C) 当 $x \in (-a,0) \cup (0,a)$ 时 $f(x) > 2x$

(D) 当 $x \in (-a,0) \cup (0,a)$ 时 $f(x) < 2x$

6. 设 $k > 0$，$f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 的零点个数为(　　).

(A)0 个　　(B)1 个　　(C)2 个　　(D)3 个

7. 曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$(　　).

(A) 无渐近线　　(B) 只有一条渐近线

(C) 只有两条渐近线　　(D) 只有三条渐近线

二、填空题

1. 设 $e^x - 1 = x e^{\theta x}$，则 $\lim\limits_{x \to 0} \theta =$ _____.

2. 函数 $f(x) = x e^x$ 的最小值为_____.

3. $y = \frac{x^2+1}{x} \arctan x$ 的斜渐近线为_____.

三、解答题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f(x) \neq 0$，若 $f(a) = f(b) = 0$，证明：对任意的实数 k，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = k$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\cos \pi x} = 0$，$f(1) = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi \in (0,2)$，使得 $f''(\xi) = 0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: dijk66)

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上二阶可导，且 $f(0) = 0$，$f(1) = 1$，$f(4) = 2$，证明：存在 $\xi \in (0,4)$，使得 $f''(\xi) = -\frac{1}{3}$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\xi f'(\xi) = f(a) - f(\xi)$.

5. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，当 $x \in (a,b)$ 时，$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$，证明：若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个零点，则介于这两个零点之间 $g(x)$ 至少有一个零点.

6. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明：

(1) 存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 2f(\xi)$；

(2) 存在 $\eta \in (a,b)$，使得 $f'(\eta) = -3f(\eta)g'(\eta)$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，证明：至少存在一点 $\xi \in (0,\pi)$，使得 $f'(\xi) = -f(\xi)\cot\xi$.

8. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f(a) = f(b) = 0$，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) + 2f(\xi)g'(\xi)g(\xi) = 0$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1) = 0$，$\int_0^{\frac{2}{\pi}} e^{f(x)} \arctan x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)\arctan\xi = -\frac{1}{1+\xi^2}$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导且 $f(0) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $\xi f(\xi) = \int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f'(x) \neq 0$. 证明：存在 $\xi, \eta \in (a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta}.$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格增加，证明：当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)<0$.

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

14. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大与最小值.

15. 证明：当 $x>0$ 时，$\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

16. 设 $a>e$，证明：当 $x>0$ 时有 $(a+x)^a<a^{a+x}$.

17. (1) 证明：当 $x>0$ 时，$x^2>(1+x)\ln^2(1+x)$；

(2) 证明：当 $0<x<1$ 时，$\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

18. 证明：$2x\arctan x\geqslant\ln(1+x^2)$.

19. 设 $0<a<b$，证明：$\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}$.

20. 设 $f(x)$ 二阶可导，$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$ 且 $f''(x)>0$，证明：$f(x)\geqslant2x-2$.

21. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 当 $x>a$ 时，$f'(x)>A>0$ 且 $f(a)<0$，证明：$f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内有且仅有一个根.

22. 讨论方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 在 $(0,+\infty)$ 内根的个数.

23. 求由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=t-\ln(1+t)\end{cases}$ 确定的函数 $y=f(x)$ 的单调区间与极值、凹凸区间与拐点.

24. 从半径为 R 的圆形铁片中去掉一个扇形，将剩余部分做成一个圆锥形漏斗，问扇形的圆心角多大时，圆锥形漏斗的体积最大？

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

测试题参考答案

一、选择题

1. $f(1)-f(0)=f'(c)(1-0)=f'(c)$，其中 $0<c<1$. 因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 单调增加，从而 $f'(0)<f'(c)<f'(1)$，应选(B).

2. 选(B).

3. 由 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)^2}=3$ 得 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$，再由 $f(x)$ 的连续性得 $f(2)=0$. 由极限保号性，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$\frac{f(x)}{(x-2)^2}>0$，从而 $f(x)>0=f(2)$，于是 $x=2$ 为极小值点，选(A).

4. $f'''(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{x-a}<0$，由极限保号性，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $\frac{f''(x)}{x-a}<0$. 当 $x\in(a-\delta,a)$ 时，因为 $x-a<0$，所以 $f''(x)>0$；当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，因为 $x-a>0$，所以 $f''(x)<0$，于是 $(a,f(a))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点，故选(C).

5. 由泰勒公式得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$，其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 当 $x\in(-a,0)\cup(0,a)$ 时，因为 $\frac{f''(\xi)}{2!}x^2>0$，所以 $f(x)>f(0)+f'(0)x=2x$，应选(C).

6. 令 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=0$ 得 $x=e$，因为 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，所以 $x=e$ 为 $f(x)$ 的最大值点，最大值为 $f(e)=k>0$，因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以 $f(x)$ 有且仅有两个零点，应选(C).

7. 由 $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$ 得 $x=1$ 为一条铅直渐近线；由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=2$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x\left(e^{\frac{1}{x-1}}-1\right)-e^{\frac{1}{x-1}}\right]=1$ 得 $y=2x+1$ 为一条斜渐近线，即曲线只有两条渐近线，应选(C).

二、填空题

1. 由 $e^x-1=xe^{\theta x}$ 得 $\theta=\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to0}\theta=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{e^x-1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{e^x-1-x}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$.

2. 令 $f'(x)=(1+x)e^x=0$ 得 $x=-1$，当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，则 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的最小值点，最小值为 $f(-1)=-\frac{1}{e}$.

3. 由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(y+\frac{\pi}{2}x\right)=-1$ 得一条斜渐近线为 $y=-\frac{\pi}{2}x-1$；由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(y-\frac{\pi}{2}x\right)=-1$ 得另一条斜渐近线为 $y=\frac{\pi}{2}x-1$.

三、解答题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

1. 令 $\varphi(x)=e^{-kx}f(x)$，因为 $f(a)=f(b)=0$，所以 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，而 $\varphi'(x)=-ke^{-kx}f(x)+e^{-kx}f'(x)$ 且 $e^{-kx}\neq0$，所以 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=k$.

2. 由 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=0$ 得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，又由 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\cdot\frac{x-\frac{1}{2}}{\cos\pi x}=-f'\left(\frac{1}{2}\right)\times\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sin\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{\pi}f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 得 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 令 $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，$F'(x)=f(x)$，由 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(1)=F'(c)(2-1)=f(c)$(其中 $c\in(1,2)$) 得 $f(1)=f(c)$，由罗尔定理，存在 $\eta\in(1,c)$，使得 $f'(\eta)=0$. 因为 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\eta)=0$，所以由罗尔定理，存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},\eta\right)\subset(0,2)$，使得 $f''(\xi)=0$.

3. 过点(0,0)，(1,1)，(4,2) 的抛物线方程为 $y=(ax+b)x$，解得 $a=-\frac{1}{6}$，$b=\frac{7}{6}$. 令 $\varphi(x)=f(x)-\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{7x}{6}\right)$，因为 $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi(4)=0$，所以由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(0,1)$，$\xi_2\in(1,4)$，使得 $\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0$. 再由罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,4)$，使得 $\varphi''(\xi)=0$，而 $\varphi''(x)=f''(x)+\frac{1}{3}$，所以 $f''(\xi)=-\frac{1}{3}$.

4. 令 $\varphi(x)=x[f(x)-f(a)]$，由 $f(a)=f(b)$ 得 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，再由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，而 $\varphi'(x)=xf'(x)+f(x)-f(a)$，故 $\xi f'(\xi)=f(a)-f(\xi)$.

5. 设 $f(x_1)=f(x_2)=0$，其中 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$，不妨设 $g(x)$ 在 (x_1,x_2) 没有零点，显然 $g(x_1)\neq0$，$g(x_2)\neq0$，否则与 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq0$ 矛盾.

令 $\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，显然 $\varphi(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，且 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$，由罗尔定

理，存在 $c\in(x_1,x_2)$，使得 $\varphi'(c)=0$，从而 $f'(c)g(c)-f(c)g'(c)=0$，与 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$ 矛盾，故在 $f(x)$ 的两个零点之间 $g(x)$ 至少有一个零点.

6.(1) 令 $\varphi(x)=e^{-2x}f(x)$，因为 $f(a)=f(b)=0$，所以 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，而 $\varphi'(x)=e^{-2x}[f'(x)-2f(x)]$ 且 $e^{-2x}\neq 0$，所以 $f'(\xi)=2f(\xi)$.

(2) 令 $h(x)=f(x)e^{3g(x)}$，因为 $f(a)=f(b)=0$，所以 $h(a)=h(b)=0$，由罗尔定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $h'(\eta)=0$，而 $h'(x)=e^{3g(x)}[f'(x)+3f(x)g'(x)]$ 且 $e^{3g(x)}\neq 0$，所以 $f'(\eta)=-3f(\eta)g'(\eta)$.

7. 令 $\varphi(x)=f(x)\sin x$，$\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，而 $\varphi'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$，所以 $f'(\xi)\sin\xi=-f(\xi)\cos\xi$，注意到 $\sin\xi\neq 0$，于是有 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

8. 令 $\varphi(x)=f(x)e^{g^2(x)}$，因为 $f(a)=f(b)=0$，所以 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，而 $\varphi'(x)=e^{g^2(x)}[f'(x)+2f(x)g'(x)g(x)]$ 且 $e^{g^2(x)}\neq 0$，于是有 $f'(\xi)+2f(\xi)g'(\xi)g(\xi)=0$.

9. 令 $\varphi(x)=e^{f(x)}\arctan x$，$\varphi(1)=e^{f(1)}\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$，由积分中值定理得 $\dfrac{1}{2}=\displaystyle\int_0^{\frac{2}{\pi}}e^{f(x)}\arctan x\,dx=e^{f(c)}\arctan c\cdot\frac{2}{\pi}$（其中 $c\in\left[0,\dfrac{2}{\pi}\right]$），于是 $e^{f(c)}\arctan c=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\varphi(c)=\dfrac{\pi}{4}$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，于是 $f'(\xi)\arctan\xi=-\dfrac{1}{1+\xi^2}$.

10. 令 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=\varphi(0)$ $=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\varphi(1)$，所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，于是 $\dfrac{\xi f(\xi)-\displaystyle\int_0^\xi f(x)\,dx}{\xi^2}=0$，故 $\xi f(\xi)=\displaystyle\int_0^\xi f(x)\,dx$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djly66)

11. 由柯西中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$，从而有 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$，再由微分中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，故 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

12. 方法一：任取 $x\in(a,b)$，由拉格朗日中值定理得 $f(x)-f(a)=f(x)=f'(\xi_1)(x-a)$，其中 $\xi_1\in(a,x)$；$f(x)-f(b)=f(x)=f'(\xi_2)(x-b)$，其中 $\xi_2\in(x,b)$，解得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)}{x-a}$，$f'(\xi_2)=\dfrac{f(x)}{x-b}$，因为 $f'(x)$ 严格增加且 $\xi_1<\xi_2$，所以 $\dfrac{f(x)}{x-a}<\dfrac{f(x)}{x-b}$，注意到 $x-a>0$，$x-b<0$，所以 $f(x)<0$.

方法二(反证法)：设存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)\geqslant 0$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=\dfrac{f(c)}{c-a}\geqslant 0$，$f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}=-\dfrac{f(c)}{b-c}\leqslant 0$，而 $f'(x)$ 严格增加且 $\xi_1<\xi_2$，矛盾，故对一切的 $x\in(a,b)$，有 $f(x)<0$.

13. 由泰勒公式得 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(a)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\dfrac{a+b}{2}-a\right)^2$，其中 $\xi_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(b)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\dfrac{a+b}{2}-b\right)^2$，其中 $\xi_2\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$，两式相减得 $f(b)-f(a)=\dfrac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$，于是 $|f(b)-f(a)|\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{8}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]$. 当 $|f''(\xi_1)|\geqslant|f''(\xi_2)|$ 时，$|f''(\xi_1)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}\times|f(b)-f(a)|$，取 $\xi=\xi_1$；当 $|f''(\xi_1)|<|f''(\xi_2)|$ 时，$|f''(\xi_2)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$，取 $\xi=\xi_2$.

14. 注意到 $f(x)$ 为偶函数，所以只研究 $x\in[0,+\infty)$. 令 $f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}=0$ 得 $x=0,x=\sqrt{2}$. 当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\sqrt{2}$ 时，$f'(x)<0$，于是 $x=0$ 为极小值点，$x=\sqrt{2}$ 为极大值点，$f(0)=0$，$f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=1+\frac{1}{e^2}$. 因为 $f(+\infty)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=1$，所以 $f(x)$ 的最小值为 0，最大值为 $1+\frac{1}{e^2}$.

15. 令 $\varphi(x)=\arctan x+\frac{1}{x}$，因为 $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\frac{\pi}{2}$，所以当 $x>0$ 时，$\varphi(x)>\frac{\pi}{2}$，即 $\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

16. $(a+x)^a<a^{a+x}$ 等价于 $a\ln(a+x)<(a+x)\ln a$，令 $f(x)=(a+x)\ln a-a\ln(a+x)$，显然 $f(0)=0$，$f'(x)=\ln a-\frac{a}{a+x}>0(x>0)$. 由 $\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(x)>0(x>0)\end{cases}$ 得 $f(x)>0(x>0)$，于是 $(a+x)^a<a^{a+x}$.

17. (1) 令 $f(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$，$f(0)=0$；$f'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x)$，$f'(0)=0$；$f''(x)=2\left[1-\frac{\ln(1+x)+1}{1+x}\right]$，$f''(0)=0$；$f'''(x)=2\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}>0(x>0)$. 由 $\begin{cases}f''(0)=0,\\ f'''(x)>0(x>0)\end{cases}$ 得 $f''(x)>0(x>0)$；由 $\begin{cases}f'(0)=0\\ f''(x)>0(x>0)\end{cases}$ 得 $f'(x)>0(x>0)$；由 $\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(x)>0(x>0)\end{cases}$ 得 $f(x)>0(x>0)$，故当 $x>0$ 时，$x^2>(1+x)\ln^2(1+x)$.

(2) 令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$，$f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)}$，由 (1) 得 $f'(x)<0$，于是 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调减少，又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}$，$f(1)=\frac{1}{\ln2}-1$，故 $\frac{1}{\ln2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

18. 令 $\varphi(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$，$\varphi(0)=0$. 令 $\varphi'(x)=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=2\arctan x=0$ 得 $x=0$，$\varphi''(x)=\frac{2}{1+x^2}$，因为 $\varphi''(0)=2>0$，所以 $x=0$ 为 $\varphi(x)$ 的最小值点，而 $\varphi(0)=0$，所以 $\varphi(x)\geqslant0$，即 $2x\arctan x\geqslant\ln(1+x^2)$.

19. $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}$ 等价于 $(a+b)(\ln b-\ln a)-2(b-a)>0$.

令 $f(x)=(a+x)(\ln x-\ln a)-2(x-a)$，$f(a)=0$.

$f'(x)=\ln x-\ln a+\frac{a}{x}-1$，$f'(a)=0$. $f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}>0(x>a)$，

由 $\begin{cases}f'(a)=0\\ f''(x)>0(x>a)\end{cases}$ 得 $f'(x)>0(x>a)$，再由 $\begin{cases}f(a)=0\\ f'(x)>0(x>a)\end{cases}$ 得 $f(x)>0(x>a)$，

因为 $b>a$，所以 $f(b)>0$，即 $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}$.

20. 由 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$ 得 $f(1)=0$，$f'(1)=2$，因为 $f''(x)>0$，所以 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，取 $x_0=1$ 得 $f(x)\geqslant f(1)+f'(1)(x-1)$，即 $f(x)\geqslant2x-2$.

21. 当 $x>a$ 时，由 $f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)>A(x-a)(\xi\in(a,x))$ 得 $f(x)>f(a)+A(x-a)$，两边令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 由 $f(a)<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 及 $f(x)$ 的连续性，存在 $c\in(a,+\infty)$，使得 $f(c)=0$. 因为 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 单调增加，于是 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内的零点是唯一的.

微信公众号（顶尖考研）(ID:djky66)

22. 令 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$，$f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$，当 $k<0$ 时，因为 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 单调减少，又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以当 $k<0$ 时，方程只有一个根；当 $k=0$ 时，显然方程只有一个根 $x=1$；当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=k-\frac{2}{x^3}=0$ 得唯一驻点为 $x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$，因为 $f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$，所以 $f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)=3\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-1$ 为最小值，当 $3\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>1$ 即 $k>\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 时，方程无解；当 $3\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=1$，即 $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 时，方程有且仅有一根；当 $3\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<1$ 即 $0<k<\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 时，因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，所以方程有两个根.

23. 显然 $t>-1$，$\frac{dx}{dt}=2t+2>0$. 令 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{t}{2(t+1)^2}=0$ 得 $t=0$. 当 $t\in(-1,0)$ 时，$\frac{dy}{dx}<0$；当 $t>0$ 时，$\frac{dy}{dx}>0$，故 $x(0)=0$ 为函数的极小点，极小值为 $y(0)=0$. 当 $x\in(-1,0)$ 时，函数 $y=f(x)$ 单调减少；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，函数 $y=f(x)$ 单调增加. 令 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{1-t}{4(t+1)^4}=0$ 得 $t=1$. 当 $t\in(-1,1)$ 时，$\frac{d^2y}{dx^2}>0$；当 $t>1$ 时，$\frac{d^2y}{dx^2}<0$，即当 $x\in(-1,3)$ 时，$\frac{d^2y}{dx^2}>0$；当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$\frac{d^2y}{dx^2}<0$，故 $(-1,3)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的凹区间，$(3,+\infty)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的凸区间，$(3,1-\ln2)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

24. 设去掉扇形后余下的部分的圆心角为 x，圆周底的周长为 Rx，设圆周底圆半径为 r，则有 $2\pi r=Rx$，解得 $r=\frac{R}{2\pi}x$，圆锥的高为 $h=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2\pi}x\right)^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$，圆锥的底面积为 $S=\pi r^2=\frac{R^2}{4\pi}x^2$，圆锥的体积为 $V(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{R^2}{4\pi}x^2\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$，令 $\varphi(x)=x^4(4\pi^2-x^2)$，由 $\varphi'(x)=16\pi^2x^3-6x^5=0$ 得 $x=2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi$，故当去掉的扇形的圆心角为 $2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 时，圆锥的体积最大.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第四章　不定积分

大纲点击

1. 理解原函数的概念，理解不定积分的概念.
2. 掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分的性质，掌握换元积分法与分部积分法.
3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分.

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

第一节　不定积分理论 —— 概念、性质、基本公式与积分法

微信公众号【顶尖考研】

一、基本概念

1. 原函数 —— 设 $f(x)$，$F(x)$ 为定义于 I 上的两个函数，若对任意的 $x \in I$ 有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.

2. 不定积分 —— 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数为 $F(x)+C$，称其为 $f(x)$ 的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$.

二、不定积分的基本性质

1. $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$；

2. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$.

三、不定积分基本公式

1. $\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$.

2. (1) $\int x^a\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a+1}x^{a+1} + C(a \neq -1)$；　　(2) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$，特别地 $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

4. (1) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$；　　(2) $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$；

(3)$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$;

(4)$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$;

(5)$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$;

(6)$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$;

(7)$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$;

(8)$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$;

(9)$\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C$;

(10)$\int \csc x\cot x\,dx = -\csc x + C$.

5. (1)$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$;

(2)$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

(3)$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$;

(4)$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$;

(5)$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$;

(6)$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$;

(7)$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

(8)$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

6. $\int [f'(x)+kf(x)]e^{kx}\,dx = e^{kx}f(x) + C$.

四、不定积分的积分法

(一) 换元积分法

1. 第一类换元积分法(凑微积分法) 设 $\varphi(x)$ 可导,则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx = \int f[\varphi(x)]\,d\varphi(x) \xrightarrow{\varphi(x)=t} \int f(t)\,dt$$
$$= F(t) + C = F[\varphi(x)] + C.$$



【例 1】 计算下列不定积分:

(1)$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$;　(2)$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$;　(3)$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}dx$;

(4)$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$;　(5)$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

【解】 (1)$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

$$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

(2) **方法一** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}=\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\arcsin(x-1)+C$;

方法二 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}}=2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}+C.$

(3) 因为$(\cos^2 x)'=-\sin 2x$,

所以 $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}\mathrm{d}x=-\int \frac{\mathrm{d}(\cos^2 x)}{1+(\cos^2 x)^2}=-\arctan(\cos^2 x)+C.$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-2}}=2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{x-2})^2}=\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}+C.$

(5) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x=\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$=\arcsin x-\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C.$

【例 2】 计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{(\sqrt{2})^2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C.$

(2) $\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+1}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{(\sqrt{3})^2+(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{3}}+C.$

【例 3】 计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{\arcsin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{1+\ln x}{x\ln x\cdot(2+x\ln x)}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\int \frac{\arcsin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=2\int \frac{\arcsin^2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\int \frac{\arcsin^2\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\mathrm{d}(\sqrt{x})$

$=2\int \arcsin^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\arcsin\sqrt{x})=\frac{2}{3}\arcsin^3\sqrt{x}+C.$

(2) $\int \frac{1+\ln x}{x\ln x\cdot(2+x\ln x)}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{x\ln x\cdot(x\ln x+2)}$

$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{x\ln x+2}\right)\mathrm{d}(x\ln x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x\ln x}{x\ln x+2}+C.$

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

2. 第二类换元积分法

设 $x=\varphi(t)$ 可导且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x \overset{x=\varphi(t)}{=\!=\!=} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int g(t)\mathrm{d}t$$
$$= G(t)+C = G[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

【例 4】 计算下列不定积分：

$$(1)\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x}}; \qquad (2)\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x.$$

【解】 $(1)\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x}} \overset{\sqrt{x}=t}{=\!=\!=} \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{2+t} = 2\int\left(1-\frac{2}{t+2}\right)\mathrm{d}t = 2t-4\ln(t+2)+C$

$$= 2\sqrt{x}-4\ln(\sqrt{x}+2)+C;$$

$$(2)\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x \overset{\sqrt[6]{x}=t}{=\!=\!=} \int \frac{t\cdot 6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^4}{t+1}\mathrm{d}t = 6\int\left(t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= 6\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right]+C$$
$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}-6x^{\frac{1}{6}}+6\ln\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)+C.$$

【例 5】 计算下列不定积分：

$$(1)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}; \qquad (2)\int x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【解】 $(1)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} \overset{x=\tan t}{=\!=\!=} \int \frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\sec^4 t} = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C$$
$$= \frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(x^2+1)}+C.$$

$$(2)\int x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{x=2\sin t}{=\!=\!=} 16\int \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int \sin^2 2t\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\int(1-\cos 4t)\mathrm{d}t = 2t-\frac{1}{2}\sin 4t+C$$
$$= 2t-2\sin t\cos t\cdot(1-2\sin^2 t)+C$$
$$= 2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+C.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 6】 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^4+1}}$.

【解】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^4+1}} \overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=} \int \frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{t^3}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}} = -\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}} = -\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(t^4+1)}{\sqrt{t^4+1}}$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^4+1)}{2\sqrt{t^4+1}} = -\frac{1}{2}\sqrt{t^4+1}+C = -\frac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2}+C.$$

(二) 分部积分法

1. 分部积分法公式为: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

2. 分部积分法常见使用情形:

情形一:被积函数为幂函数与指数函数之积

【例 1】 求不定积分:(1)$\int x e^{-2x}\,dx$; (2)$\int x e^{\sqrt{x}}\,dx$.

【解】 (1)$\int x e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int x\,d(e^{-2x}) = -\frac{1}{2}x e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$.

(2)$\int x e^{\sqrt{x}}\,dx \xlongequal{x=t^2} 2\int t^3 e^t\,dt = 2\int t^3\,d(e^t) = 2t^3 e^t - 6\int t^2 e^t\,dt = 2t^3 e^t - 6\int t^2\,d(e^t)$

$= 2t^3 e^t - 6t^2 e^t + 12\int t e^t\,dt = 2t^3 e^t - 6t^2 e^t + 12\int t\,d(e^t)$

$= 2t^3 e^t - 6t^2 e^t + 12t e^t - 12\int e^t\,dt = 2t^3 e^t - 6t^2 e^t + 12t e^t - 12e^t + C$

$= 2x\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 6x e^{\sqrt{x}} + 12\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 12e^{\sqrt{x}} + C$.

情形二:被积函数为幂函数与对数函数之积

【例 2】 计算$\int x^2 \ln x\,dx$.

【解】 $\int x^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3}\int \ln x\,d(x^3) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

情形三:被积函数为幂函数与三角函数之积

【例 3】 求不定积分:(1)$\int x\sin^2 x\,dx$; (2)$\int \frac{x}{1+\cos x}dx$.

【解】 (1)$\int x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\int x\,d(\sin 2x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{4}\int \sin 2x\,dx$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$.

(2)$\int \frac{x}{1+\cos x}dx = \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int x\,d\left(\tan\frac{x}{2}\right) = x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}dx$

$= x\tan\frac{x}{2} - 2\int \tan\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right) = x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$.

情形四:被积函数为幂函数与反三角函数之积

【例 4】 求下列不定积分:

(1)$\int x\arcsin x\,dx$; (2)$\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx$; (3)$\int x^2\arctan x\,dx$; (4)$\int (\arcsin x)^2\,dx$.

【解】 (1)$\int x\arcsin x\,dx = \frac{1}{2}\int \arcsin x\,d(x^2) = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

而$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin t} \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t$

$= \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin t\cos t + C = \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$,

所以$\int x\arcsin x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$.

(2)$\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x = \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}x - \int \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x - \int \arctan x\,\mathrm{d}(\arctan x)$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$.

(3)$\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \arctan x\,\mathrm{d}(x^3) = \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$.

(4)$\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x = x(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x$

$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x\,\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$

$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

情形五：被积函数为指数函数与三角函数之积

【例 5】　求不定积分：(1)$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\ (a\neq 0, b\neq 0)$；　(2)$\int \mathrm{e}^x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

【解】　(1) $I = \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}(\sin bx) = \frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}(\cos bx) = \frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}\mathrm{e}^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}\mathrm{e}^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I$,

则 $I = \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(2)$\int \mathrm{e}^x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\cos 2x\,\mathrm{d}x$,

$I = \int \mathrm{e}^x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(\sin 2x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\sin 2x\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sin 2x + \frac{1}{4}\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(\cos 2x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sin 2x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^x\cos 2x - \frac{1}{4}\int \mathrm{e}^x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sin 2x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^x\cos 2x - \frac{1}{4}I$,

$I = \frac{\mathrm{e}^x}{5}(2\sin 2x + \cos 2x) + C$,

所以$\int e^x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}e^x + \frac{e^x}{10}(2\sin 2x + \cos 2x) + C$.

情形六：被积函数为 $\sec x$ 及 $\csc x$ 的奇次方

【注解】

(1) 若被积函数为 $\sec x$ 及 $\csc x$ 的偶次方，往往用换元积分法，

如$\int \sec^4 x\,dx = \int (1+\tan^2 x)\,d(\tan x) = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$,

$\int \sec^3 x \tan x\,dx = \int \sec^2 x\,d(\sec x) = \frac{1}{3}\sec^3 x + C$.

(2) 对被积函数为 $\sec x$ 或 $\csc x$ 的一次方，有公式：

$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$, $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$.

【例 6】 计算$\int \sec^3 x\,dx$.

【解】 $I_3 = \int \sec^3 x\,dx = \int \sec x\,d(\tan x) = \sec x \tan x - \int \tan x\,d(\sec x)$

$= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\,dx = \sec x \tan x - I_3 + \int \sec x\,dx$,

于是$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}[\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|] + C$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第二节 两类特殊函数的不定积分

一、有理函数的不定积分

对积分$\int R(x)\,dx$，若 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$，$Q(x)$ 为多项式，称$\int R(x)\,dx$ 为有理函数的不定积分，有理函数的不定积分关键是对 $R(x)$ 的处理，$R(x)$ 分为如下两种情况：

1. 若 $\deg P(x) \geqslant \deg Q(x)$，称 $R(x)$ 为假分式，若 $R(x)$ 为假分式，则 $R(x) = P_1(x) + R_1(x)$，其中 $P_1(x)$ 为多项式，$R_1(x)$ 为真分式.

如：$R(x) = \frac{x^3 - 4x + 2}{x^2 + x + 1} = x - 1 - \frac{4x - 3}{x^2 + x + 1}$.

2. 若 $\deg P(x) < \deg Q(x)$，称 $R(x)$ 为真分式，若 $R(x)$ 为真分式，则先将 $R(x)$ 分母因式分解，再将 $R(x)$ 分解为部分和的形式，具体分解方法如下：

(1) 若分母中含$(x-a)^m$，则分解为$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m}$；

(2) 若分母中含$(ax^2 + bx + c)^m$ $(b^2 - 4ac < 0)$，则分解为

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_m x + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}.$$

【例 1】　求不定积分：(1)$\int \frac{1}{x^2-x-6}\mathrm{d}x$；　(2)$\int \frac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$.

【解】　(1) 令$\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}$，则 $A=-\frac{1}{5}$，$B=\frac{1}{5}$，

于是$\int \frac{1}{x^2-x-6}\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2}+\frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3}=-\frac{1}{5}\ln|x+2|+\frac{1}{5}\ln|x-3|+C$.

(2)$\int \frac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

【例 2】　求不定积分：(1)$\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$；　(2)$\int \frac{x-3}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$.

【解】　(1) 令$\frac{2x-1}{x^2-3x+2}=\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$，解得 $A=-1$，$B=3$，

于是$\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=-\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}+3\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2}=3\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$.

(2)$\int \frac{x-3}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)-4}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x-2\int \frac{1}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-2x+2}\mathrm{d}(x^2-2x+2)-2\int \frac{1}{1+(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1)$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)-2\arctan(x-1)+C$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 3】　求不定积分：(1)$\int \frac{3x+2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$；　(2)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}$.

【解】　(1) 令$\frac{3x+2}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$，解得 $A=2$，$B=-2$，$C=3$，

于是$\int \frac{3x+2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=2\int \frac{\mathrm{d}x}{x}-\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}+3\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=2\ln|x|-\ln(1+x^2)+3\arctan x+C$.

(2) 令$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$，由 $A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx=1$ 得 $A=1$，$B=-1$，$C=1$，则

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C$.

二、三角有理函数的不定积分

对三角有理函数的不定积分$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则有

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$

于是$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$.

【注解】

一般情况下不采用万能代换法将三角有理函数转化为有理函数. 涉及三角函数的不定积分方法非常丰富,常见有以下技巧:

情形一:若被积函数中出现 $1+\cos x$,一般用公式 $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$.

【例 1】 求下列不定积分:

$(1)\int\frac{1}{\cos x+1}\mathrm{d}x$; $(2)\int\frac{\sin x}{\sin x+1}\mathrm{d}x$; $(3)\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

【解】 $(1)\int\frac{1}{\cos x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\frac{x}{2}+C$.

(2) **方法一** $\int\frac{\sin x}{\sin x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}x=x-\int\frac{1}{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{d}x$

$$=x-\int\sec^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=x-\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

方法二

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=x-\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=x-\int\frac{1}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x=x-\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=x-2\int\frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2}=x+\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}+C.$$

$$(3)\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\int\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

情形二:若出现 $a\cos x+b\sin x$ 往往变换成 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$ 或 $\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\theta)$ 的形式.

【例 2】 求不定积分:$(1)\int\frac{1}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$; $(2)\int\frac{1}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$.

【解】 $(1)\int\frac{1}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

$$(2)\int\frac{1}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sec\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sec\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

情形三：若被积分函数中含 $\sin x\cos x$ 及 $\sin^2 x$、$\cos^2 x$，一般用

$\mathrm{d}(\sin^2 x)=\sin 2x\,\mathrm{d}x$，　$\mathrm{d}(\cos^2 x)=-\sin 2x\,\mathrm{d}x$，　$\mathrm{d}(\sin x\cos x)=\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

【例 3】　求 $\int\frac{\sin 2x}{1+4\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

【解】　$\int\frac{\sin 2x}{1+4\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+4\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin^2 x)=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+(2\sin x)^2}\mathrm{d}[(2\sin x)^2]$

$$=\frac{1}{4}\ln[1+(2\sin x)^2]+C.$$

情形四：若分子、分母中含 $\cos^2 x$，常使用分子、分母同除以 $\cos^2 x$ 的方法.

【例 4】　求 $\int\frac{1}{4+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

【解】　$\int\frac{1}{4+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2 x}{1+4\sec^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(\sqrt{5})^2+(2\tan x)^2}\mathrm{d}(2\tan x)$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{5}}+C.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

情形五：若被积分函数为 $\frac{a\cos x+b\sin x}{c\cos x+d\sin x}$，往往令

$$a\cos x+b\sin x=A(c\cos x+d\sin x)+B(c\cos x+d\sin x)'.$$

【例 5】　求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\tan x}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【解】　**方法一**　$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\tan x}=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2\sin x+\cos x}$，

令 $\cos x=A(2\sin x+\cos x)+B(2\sin x+\cos x)'$，由 $\begin{cases}2A-B=0\\A+2B=1\end{cases}$，得 $A=\frac{1}{5}$，$B=\frac{2}{5}$，

于是 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\tan x}=\frac{1}{5}\int\mathrm{d}x+\frac{2}{5}\int\frac{\mathrm{d}(2\sin x+\cos x)}{2\sin x+\cos x}=\frac{x}{5}+\frac{2}{5}\ln|2\sin x+\cos x|+C.$

方法二　令 $\tan x=t$，则 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\tan x}=\int\frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)(1+t^2)}$，

令 $\frac{1}{(2t+1)(1+t^2)}=\frac{A}{2t+1}+\frac{Bt+C}{1+t^2}$，解得 $A=\frac{4}{5}$，$B=-\frac{2}{5}$，$C=\frac{1}{5}$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\tan x}=\frac{2}{5}\ln|1+2\tan x|-\frac{2}{5}\ln|\sec x|+\frac{x}{5}+C.$$

重点题型分析

题型一　有理函数的不定积分

【例 1】　计算下列不定积分：

(1)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-12}$.　　(2)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+4}$.

(3)$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\mathrm{d}x$.　　(4)$\int \frac{x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x$.

【解】　(1)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-12}=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)(x+4)}$

$$=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+4}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C.$$

(2)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+4}=\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{(\sqrt{3})^2+(x-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$

(3) 令$\frac{5x-1}{x^2-x-2}=\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$,

由 $A(x+1)+B(x-2)=5x-1$ 得 $A=3,B=2$,则

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\mathrm{d}x=3\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2}+2\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}=3\ln|x-2|+2\ln|x+1|+C.$$

(4)$\int \frac{x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+2)}{x^2+x+2}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+2)+\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

【例 2】　计算下列不定积分：

(1)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^4+2)}$.　　(2)$\int \frac{1-x^5}{x(1+x^5)}\mathrm{d}x$.　　(3)$\int \frac{x+x^3}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$.

【解】　(1)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^4+2)}=\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^4(x^4+2)}=\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x^4)}{x^4(x^4+2)}$

$$=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^4+2}\right)\mathrm{d}(x^4)=\frac{1}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2}+C.$$

(2)$\int \frac{1-x^5}{x(1+x^5)}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int \frac{1-x^5}{x^5(1+x^5)}\mathrm{d}(x^5)\xlongequal{x^5=t}\frac{1}{5}\int \frac{1-t}{t(1+t)}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\ln|t|-\frac{2}{5}\ln|t+1|+C$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:dijkv66)

$$=\ln|x|-\frac{2}{5}\ln|x^5+1|+C.$$

$$(3)\int\frac{x+x^3}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}(x^2)$$

$$\overset{x^2=t}{=\!=}\frac{1}{2}\int\frac{1+t}{t^2+t+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\frac{(2t+1)+1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\ln(t^2+t+1)+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln(t^2+t+1)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln(x^4+x^2+1)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C.$$

【例 3】　计算不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$.

【解】　$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}\overset{x=\tan t}{=\!=}\int\frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}\mathrm{d}t=\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 4】　求下列不定积分：

$(1)\int\frac{3x^3+4x^2+7x+4}{(x+1)^2(1+x^2)}\mathrm{d}x.$　　$(2)\int\frac{(x^2+9)\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+4)}.$

【解】　(1) 令$\frac{3x^3+4x^2+7x+4}{(x+1)^2(1+x^2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{1+x^2}$,

解得 $A=3,B=-1,C=0,D=2$,

故$\int\frac{3x^3+4x^2+7x+4}{(x+1)^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x$

$$=3\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+2\arctan x+C.$$

(2) 令$\frac{x^2+9}{(x+1)(x^2+4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$,

由 $A(x^2+4)+(x+1)(Bx+C)=x^2+9$ 得 $A=2,B=-1,C=1$,

故$\int\frac{(x^2+9)\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+4)}=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{x-1}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x$

$$=2\ln|x+1|-\int\frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$$

$$=2\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C.$$

题型二　三角函数的不定积分

【例 1】　计算下列不定积分：

(1)$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.　　(2)$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

【分析】　计算不定积分时，出现 $1+\cos x$，一般使用 $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$.

【解】　(1)$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{1-2\cos x+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\int(\csc^2 x-2\csc x\cot x+\cot^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=-\cot x+2\csc x+\int(\csc^2 x-1)\mathrm{d}x$$

$$=-2\cot x+2\csc x-x+C.$$

(2)$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x-\int \frac{\mathrm{d}(1+\cos x)}{1+\cos x}$$

$$=\tan\frac{x}{2}-\ln(1+\cos x)+C.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: dijky66)

【例 2】　计算不定积分$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

【分析】　若被积函数的分子、分母中出现正弦及余弦的平方时，一般采用：

(1) 被积函数的分子、分母同时除以$\cos^2 x$.

(2) 利用$(\sin^2 x)'=\sin 2x$ 及$(\cos^2 x)'=-\sin 2x$.

【解】　$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int \frac{\sec^2 x}{1+\sec^2 x}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{(\sqrt{2})^2+\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C.$

题型三　无理函数的不定积分

【思路分析】

无理函数若可以用凑微分法计算，不需要将其转化为有理函数；否则应利用第二类换元积分法将其转化为有理函数；若出现平方和、平方差，则使用三角代换.

【例 1】　计算下列不定积分：

(1)$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}$.　　(2)$\int \frac{\sec^4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

【解】　(1) **方法一**　$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{4-x}}=2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{2^2-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C.$

方法二　$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}}=\int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$

$$(2)\int \frac{\sec^4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int \sec^4\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{x})\overset{\sqrt{x}=t}{=\!=}2\int \sec^4 t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int(1+\tan^2 t)\mathrm{d}(\tan t)=2\left(\tan t+\frac{1}{3}\tan^3 t\right)+C$$

$$=2\tan\sqrt{x}+\frac{2}{3}\tan^3\sqrt{x}+C.$$

【例 2】　计算下列不定积分：

$$(1)\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x.\qquad (2)\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$$

【解】　(1) 令 $x=t^6$，

$$\text{则}\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=6\int \frac{t^7}{1+t^2}\mathrm{d}t=3\int \frac{t^6}{1+t^2}\mathrm{d}(t^2)$$

$$\overset{t^2=u}{=\!=}3\int \frac{u^3}{1+u}\mathrm{d}u=3\int\left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$=u^3-\frac{3}{2}u^2+3u-3\ln|1+u|+C$$

$$=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-3\ln|1+x^{\frac{1}{3}}|+C.$$

$$(2)\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\overset{x=\sec t}{=\!=}\int \frac{\sec^2 t}{\tan t}\cdot\sec t\tan t\,\mathrm{d}t=\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t=I_3$$

$$=\int \sec t\,\mathrm{d}(\tan t)=\sec t\tan t-\int \tan^2 t\sec t\,\mathrm{d}t$$

$$=\sec t\tan t-I_3+\int \sec t\,\mathrm{d}t$$

$$=\sec t\tan t-I_3+\ln|\sec t+\tan t|,$$

$$\text{故}\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\sec t\tan t+\ln|\sec t+\tan t|)+C$$

$$=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}+\ln|x+\sqrt{x^2-1}|)+C.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

题型四　分部积分法计算不定积分

【思路分析】

除了教材上讲的六种情形可使用分部积分法外，被积函数中若出现指数函数、对数函数、反三角函数时，一般也可使用分部积分法.

【例 1】　计算下列不定积分：

$$(1)\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x.\qquad (2)\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.\qquad (3)\int \arcsin x\arccos x\,\mathrm{d}x.$$

【解】 (1)$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{[(x+1)-1]\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$

$=\int \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\mathrm{d}x+\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}+C.$

(2)$\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=2\int \sqrt{x}\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}\overset{\sqrt{x}=t}{=\!=\!=}2\int t\arctan t\,\mathrm{d}t$

$=2\left(\frac{1}{2}t^2\arctan t-\int \frac{1}{2}t^2\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)=t^2\arctan t-\int \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$=t^2\arctan t-t+\int \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$=t^2\arctan t-t+\arctan t+C$

$=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C.$

(3)$\int \arcsin x\arccos x\,\mathrm{d}x=x\arcsin x\arccos x-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(\arccos x-\arcsin x)\mathrm{d}x$

$=x\arcsin x\arccos x+\int (\arccos x-\arcsin x)\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$

$=x\arcsin x\arccos x+\sqrt{1-x^2}(\arccos x-\arcsin x)+2x+C.$

【例 2】 计算下列不定积分：

(1)$\int \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$. (2)$\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 (1)$\int \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x\overset{\sqrt{x}=t}{=\!=\!=}\int \ln(1+t)\mathrm{d}(t^2)=t^2\ln(1+t)-\int \frac{t^2}{t+1}\mathrm{d}t$

$=t^2\ln(1+t)-\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$

$=t^2\ln(1+t)-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|t+1|+C$

$=(x-1)\ln(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}x+\sqrt{x}+C.$

(2)$\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\overset{\arctan x=t}{=\!=\!=}\int \frac{\mathrm{e}^t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t=I$

$=\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}(\sin t)=\mathrm{e}^t\sin t-\int \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t\sin t+\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}(\cos t)$

$=\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t-I,$

则$\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)+C=\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}(1+x)}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$

题型五 分段函数的不定积分

【例 1】 求$\int |x-x^2|\,\mathrm{d}x$.

【解】 由 $|x-x^2|=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x-x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2-x, & x>1,\end{cases}$

得 $\int|x-x^2|\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C_1, & x<0,\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+C_2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C_3, & x>1,\end{cases}$

取 $C_2=C$，由 $\begin{cases}C_1=C_2,\\ \frac{1}{6}+C_2=-\frac{1}{6}+C_3\end{cases}$ 得 $C_1=C$，$C_3=C+\frac{1}{3}$，故

$$\int|x-x^2|\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C, & x<0,\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+C, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C+\frac{1}{3}, & x>1.\end{cases}$$

【例 2】 计算 $\int\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 由 $\max\{1,x^2\}=\begin{cases}x^2, & x<-1,\\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 得

$$\int\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1, & x<-1,\\ x+C_2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}x^3+C_3, & x>1,\end{cases}$$

令 $C_2=C$，由 $\begin{cases}C_1-\frac{1}{3}=C-1,\\ C_3+\frac{1}{3}=C+1\end{cases}$ 得 $C_1=C-\frac{2}{3}$，$C_3=C+\frac{2}{3}$，于是

$$\int\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C-\frac{2}{3}, & x<-1,\\ x+C, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}x^3+C+\frac{2}{3}, & x>1.\end{cases}$$

测试题

解答题

1. 计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$；(2) $\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$；(3) $\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x$；(4) $\int\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$；

(5)$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,dx$.

2. 计算下列不定积分：

(1)$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$；(2)$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$；(3)$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$；(4)$\int \frac{1}{3+\sin^2 x}dx$.

3. 计算下列不定积分：

(1)$\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\,dx$；(2)$\int \frac{x\,e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$；(3)$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$；

(4)$\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$；(5)$\int \frac{\ln x\,dx}{(1-x)^2}$.

4. 计算下列不定积分：

(1)$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$；(2)$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；(3)$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$；(4)$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$；

(5)$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$；(6)$\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$；(7)$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

5. 计算下列不定积分：

(1)$\int x\arctan x\,dx$；(2)$\int x^2\cos^2 x\,dx$；(3)$\int \frac{\arctan x}{x^2}dx$；

(4)$\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$；(5)$\int \frac{\arctan x}{x^2(x^2+1)}dx$；(6)$\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$；

(7)$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$；(8)$\int x\tan x\sec^4 x\,dx$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

6. 求$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$.

7. 计算$\int \max\{x,x^2\}dx$.

测试题参考答案

解答题

1. (1)$\int \frac{x}{1+4x^2}\,dx=\frac{1}{8}\int \frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2}=\frac{1}{8}\ln(1+4x^2)+C$.

(2)$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int \frac{1+x^{-2}}{x^2+x^{-2}}dx=\int \frac{1}{(\sqrt{2})^2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}d\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)+C$.

(3)$\int \frac{x^2-1}{1+x^4}dx=\int \frac{1-x^{-2}}{x^2+x^{-2}}dx=\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(\sqrt{2})^2}d\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$.

(4)$\int \frac{1}{1+x^4}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int \frac{x^2+1}{1+x^4}dx-\int \frac{x^2-1}{1+x^4}dx\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$.

(5)$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)^2}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)^2}\,d\left(\frac{\ln x}{x}-1\right) = \frac{x}{x-\ln x}+C.$

2. (1)$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,d(\cos^2 x) = -\ln(\cos^2 x+1)+C.$

(2) 方法一:$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int (\sec^2 x+\csc^2 x)\,dx = \tan x-\cot x+C.$

方法二:$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = 2\int \frac{1}{\sin^2 2x}\,d(2x) = 2\int \csc^2 2x\,d(2x) = -2\cot 2x+C.$

(3)$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\sin x\cos x}{\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 2x}\,dx = \int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\cos^2 2x}\,d(\cos 2x) = -\frac{1}{2}\arctan\cos 2x+C.$

(4)$\int \frac{1}{3+\sin^2 x}dx = \int \frac{\sec^2 x}{3\sec^2 x+\tan^2 x}\,dx = \int \frac{1}{3+4\tan^2 x}\,d(\tan x) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+(2\tan x)^2}\,d(2\tan x)$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C.$

3. (1)$\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x\ln x)^2}\,d(x\ln x) = -\frac{1}{x\ln x}+C.$

(2)$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{e^x-1}}\,d(e^x-1) = 2\int \frac{x}{2\sqrt{e^x-1}}\,d(e^x-1) = 2\int x\,d(\sqrt{e^x-1})$

$= 2x\sqrt{e^x-1}-2\int \sqrt{e^x-1}\,dx,$

令 $\sqrt{e^x-1}=t$,则 $x=\ln(1+t^2)$,$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$,

则$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = 2t-2\arctan t+C = 2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+C,$

于是$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = 2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$

(3)$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,d(x^2+1) = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}\,d(x^2+1)$

$= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,d(x^2+1)-\int \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\,d(x^2+1) = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x^2+1}+C.$

(4)$\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx = \int \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^{-x}+1}}dx = -2\int \frac{1}{\sqrt{\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2+1}}d\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) = -2\ln\left(e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{e^{-x}+1}\right)+C.$

(5)$\int \frac{\ln x\,dx}{(1-x)^2} = \int \ln x\,d\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\ln x}{1-x}+\int \frac{1}{x(x-1)}dx = \frac{\ln x}{1-x}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$

4. (1)$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \overset{x=\tan t}{=\!=} \int \frac{\sec^2 t\,dt}{\tan t\sec t} = \int \csc t\,dt = \ln|\csc t-\cot t|+C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right|+C$

(2) 令 $x=\sec t$,则$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t\tan t}{\sec t\tan t}dt = t+C = \arctan\sqrt{x^2-1}+C.$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

(3)$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx \overset{x=\tan t}{=\!=\!=} \int \frac{\sec^2 t\,dt}{\tan^2 t\sec t} = \int \frac{\sec t\,dt}{\tan^2 t} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$

(4)$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx \overset{x=\sin t}{=\!=\!=} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt = \int (\csc^2 t - 1)dt = -\cot t - t + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$

(5) 方法一:$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{(\sqrt{x})^2+1}} = 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + C.$

方法二:$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \ln\left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(x+1)}\right| + C.$

(6)$\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}dx \overset{x=t^2}{=\!=\!=} 2\int t^2 e^t dt = 2\int t^2 d(e^t) = 2t^2 e^t - 4\int t e^t dt = 2t^2 e^t - 4\int t\,d(e^t) = 2t^2 e^t - 4te^t + 4\int e^t dt$

$= 2(t^2 - 2t + 2)e^t + C = 2(x - 2\sqrt{x} + 2)e^{\sqrt{x}} + C.$

(7)$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} \overset{x+1=\sec t}{=\!=\!=} \int \frac{\sec t\tan t\,dt}{\sec^3 t\tan t} = \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C$

$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{x+1} + \frac{\sqrt{x^2+2x}}{2(x+1)^2} + C.$

5.(1)$\int x\arctan x\,dx = \frac{1}{2}\int \arctan x\,d(x^2) = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + C.$

(2)$\int x^2\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int x^2(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}\int x^2 d(\sin 2x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\sin 2x - \frac{1}{2}\int x\sin 2x\,dx$

$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}\int x\,d(\cos 2x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{4}\int \cos 2x\,dx$

$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C.$

(3)$\int \frac{\arctan x}{x^2}dx = -\int \arctan x\,d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{x}{x^2(1+x^2)}dx$

$= -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}d(x^2) = -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)d(x^2)$

$= -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C.$

(4) 方法一:令 $x = \tan t$,则 $I = \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{e^t}{\sec^3 t}\cdot \sec^2 t\,dt = \int e^t\cos t\,dt = e^t\sin t - \int e^t\sin t\,dt$

$= e^t\sin t + e^t\cos t - \int e^t\cos t\,dt$,于是 $I = \frac{e^t}{2}(\sin t + \cos t) + C = \frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x} + C.$

方法二:$I = \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{d(e^{\arctan x})}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x\,e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x\,d(e^{\arctan x})}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{(1+x)e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$,于是 $I = \frac{(1+x)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$

(5)$\int \frac{\arctan x}{x^2(x^2+1)}dx = \int \frac{\arctan x}{x^2}dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = -\int \arctan x\,d\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\arctan^2 x$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\int\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\arctan^2 x=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{2}\arctan^2 x+C.$$

(6) $\int\frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\int\frac{t}{\sin^2 t\cos t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=\int t\csc^2 t\,\mathrm{d}t=-\int t\,\mathrm{d}(\cot t)=-t\cot t+\int\cot t\,\mathrm{d}t$

$$=-t\cot t+\ln|\sin t|+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+C.$$

(7) 令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $\int\frac{\arcsin\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}=-\int\arcsin t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{\arcsin t}{t}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t^2}}=-\frac{\arcsin t}{t}-$

$\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{\arcsin t}{t}-\ln\left|\frac{1}{t}+\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}\right|+C=-\frac{\arcsin\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}-\ln|\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}-1}|+C.$

(8) $\int x\tan x\sec^4 x\,\mathrm{d}x=\int x\sec^3 x\,\mathrm{d}(\sec x)=\frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}(\sec^4 x)=\frac{1}{4}x\sec^4 x-\frac{1}{4}\int\sec^4 x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}x\sec^4 x-\frac{1}{4}\int(1+\tan^2 x)\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{4}x\sec^4 x-\frac{1}{4}\tan x-\frac{1}{12}\tan^3 x+C.$$

6. 因为 $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sin x-\cos x)^2}}\mathrm{d}(\sin x-\cos x)=$

$\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}+C$，$\int\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}\mathrm{d}(\sin x+\cos x)=$

$\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})+C$，所以 $\int\frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x-\int\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x\right)=$

$\frac{1}{2}\left[\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}-\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})\right]+C.$

微信公众号【凯程考研】(ID：djky66)

7. $\max\{x,x^2\}=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x, & 0<x<1,\\ x^2, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $\int\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}x^2+C_2, & 0<x<1,\\ \frac{1}{3}x^3+C_3, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 令 $C_2=C$，由

$\begin{cases}C_1=C,\\ \frac{1}{2}+C=\frac{1}{3}+C_3\end{cases}$ 得 $C_1=C$，$C_3=\frac{1}{6}+C$，于是 $\int\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}x^2+C, & 0<x<1,\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}+C, & x\geqslant 1.\end{cases}$

第五章　定积分及应用

大纲点击

1. 理解定积分的概念.

2. 掌握定积分的性质及定积分中值定理，掌握换元积分法与分部积分法.

3. 理解积分上限的函数，会求它的导数，掌握牛顿-莱布尼茨公式.

4. 理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的比较判别法，会计算反常积分.

5. 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量（平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等）及函数的平均值.

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第一节　定积分的基本概念、基本性质与基本定理

一、定积分的概念

设函数 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数，

(1) 作 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(1\leqslant i\leqslant n)$.

(2) 任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](1\leqslant i\leqslant n)$，作 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$；

(3) 取 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，极限称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

二、定积分的基本性质

1. $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

4. $\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$.

5. 设 $f(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

推论 1　设 $f(x)\geqslant g(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

推论 2(重要性质)　设 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，则 $m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.

7. **(积分中值定理)**　设 $f(x)\in C[a,b]$，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

三、一元函数积分学基本定理



定理 1　设 $f(x)\in C[a,b]$，令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $\Phi(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，即 $\Phi'(x)=f(x)$.

【例】　设 $f(x)$ 连续，且 $\varphi(x)=\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$，求 $\varphi''(x)$.

【解】　$\varphi(x)=\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，

$$\varphi'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\quad \varphi''(x)=f(x).$$

定理 2(牛顿－莱布尼茨公式)　设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

第二节　定积分的特殊性质与定积分法

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

一、定积分的特殊性质

(一) 对称区间上定积分的性质

设 $f(x)\in C[-a,a]$，则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$，特别地，

1. 若 $f(-x)=-f(x)$，则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$；

2. 若 $f(-x)=f(x)$，则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

（二）三角函数定积分性质

1. 设 $f(x)\in C[0,1]$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$，特别地，

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$，且

$$\begin{cases} I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}, \\ I_1=1, \\ I_0=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2. 设 $f(x)\in C[0,1]$，则

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$，或 $\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^{\pi} f(|\cos x|)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$.

3. 设 $f(x)\in C[0,1]$，则

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

（三）周期函数定积分性质

设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的可积函数，则

1. $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$；

2. $\int_0^{nT} f(x)\,\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

【例 1】 求下列定积分：

(1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$；　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,\mathrm{d}x=2.$$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^{x}}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\right)\sin^4 x\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi} \sin^4 x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,\mathrm{d}x=2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}.$$

【例 2】 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^{2\pi} x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

【解】 (1)$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x}=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

(2)$\int_0^{2\pi}x\sin^2 x\,\mathrm{d}x\xlongequal{x-\pi=t}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\sin^2 t\,\mathrm{d}t=2\pi\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\pi^2.$

【例 3】 设 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$，求 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

【解】 令 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=A$，则

$$f(x)\sin x=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+A\sin x,$$

两边积分得

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}A\sin x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}x\cdot\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x}=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2},$$

则 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x\cdot\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\frac{\pi^3}{2}$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\frac{\pi^3}{2}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{1+\sec^2 x}\mathrm{d}x+\frac{\pi^3}{2}$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{(\sqrt{2})^2+\tan^2 x}+\frac{\pi^3}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi^3}{2}=\frac{\sqrt{2}\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{2}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

【例 4】 (1) 设 $f(x),g(x)\in[-a,a]$，$f(-x)+f(x)=A$，$g(-x)=g(x)$，证明：$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^{a}g(x)\mathrm{d}x$；

(2) 求 $\int_{-\pi}^{\pi}\arctan e^x\cdot\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

【证明】 (1)$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^{a}[f(x)g(x)+f(-x)g(-x)]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{a}[f(x)+f(-x)]g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^{a}g(x)\mathrm{d}x.$$

(2)$\int_{-\pi}^{\pi}\arctan e^x\cdot\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(\arctan e^x+\arctan e^{-x})\cdot\sin^2 x\,\mathrm{d}x$，

因为 $(\arctan e^x+\arctan e^{-x})'=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}=0$，

所以 $\arctan e^x+\arctan e^{-x}\equiv A$，

取 $x=0$ 得 $A=\frac{\pi}{2}$，故

$$\int_{-\pi}^{\pi}\arctan e^x\cdot\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

二、定积分的积分方法

(一) 换元积分法

设 $f(x)\in C[a,b]$，令 $x=\varphi(t)$，其中 $\varphi(t)$ 可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，其中 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

【例 1】 求 $\int_0^{\pi^2}\sin^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

【解】 $\int_0^{\pi^2}\sin^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=t^2}2\int_0^{\pi}t\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2}$.

【例 2】 求 $\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

【解】 **方法一** 由定积分的几何意义，$\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$ 等于曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$ 与 x 轴围成的面积，如图 1-5-1，则 $\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

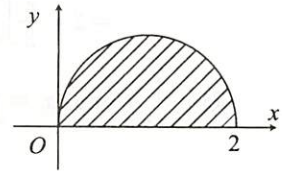


图 1-5-1

方法二

$$\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)$$

$$\xlongequal{x-1=t}\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=2\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{t=\sin u}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,\mathrm{d}u=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 3】 求 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

【解】 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$

$$=I_2-I_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}.$$

【注解】

(1) $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{4}$.

(2) 定积分被积函数中若含平方和或差时，一般采用三角代换. 注意：定积分中若使用变换 $x=a\sin t$ 时，要在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上确定 t 的范围；若使用 $x=a\tan t$ 时，要在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内确定 t 的范围；若使用 $x=a\sec t$ 时，要在 $[0,\pi]$ 上确定 t 的范围.

(二) 分部积分法

设 u,v 在 $[a,b]$ 上连续可导，则 $\int_a^b u\,\mathrm{d}v=uv\big|_a^b-\int_a^b v\,\mathrm{d}u$.

【注解】

(1) 定积分中当被积函数出现不定积分中需要使用分部积分情形时，定积分也采用分部积分法，尤其被积函数出现对数函数、指数函数、反三角函数与其他函数之积时，采用分部积分法.

(2) 计算变积分限函数的定积分时，采用分部积分法.

第三节　广义积分

广义积分是相对于正常积分而言的，所谓正常积分指：

(1) 积分区间有限.

(2) 被积函数在积分区间上连续或只有有限个第一类间断点.

若(1)(2)中至少有一个不满足，则是广义积分或反常积分，故广义积分一般分两类.

一、积分区间无限的广义积分

(一) 区间$[a,+\infty)$上的广义积分

1. 定义 —— 设$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$，

(1) 若$\lim\limits_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)]=A$，称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛于$A$，记为$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=A$.

(2) 若$\lim\limits_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)]$不存在，称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

2. 敛散判别法

定理 1　设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$f(x)\geqslant 0$，则

(1) 若$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k f(x)$存在且$k>1$，则广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

(2) 若$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k f(x)=A>0$或$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k f(x)=+\infty$且$k\leqslant 1$，则广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

(二) 区间$(-\infty,a]$上的广义积分

1. 定义 —— 设$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$，

(1) 若$\lim\limits_{b\to-\infty}[F(a)-F(b)]=A$，称广义积分$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$收敛于$A$，记为$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x=A$.

(2) 若$\lim\limits_{b\to-\infty}[F(a)-F(b)]$不存在，称广义积分$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$发散.

2. 敛散判别法

定理 2　设$f(x)$在$(-\infty,a]$上连续，且$f(x)\geqslant 0$，则

(1) 若$\lim\limits_{x\to-\infty} x^k f(x)$存在且$k>1$，则广义积分$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$收敛.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(2) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k f(x)=A>0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k f(x)=+\infty$ 且 $k\leqslant 1$,则广义积分 $\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(三) 区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分

定理 3 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $f(x)\geqslant 0$,则广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是广义积分 $\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 皆收敛,且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x+\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

【例 1】 判断 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$ 的敛散性,若收敛求其值.

【解】 **方法一** $\int_{1}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int_{1}^{b}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}=2\arctan\sqrt{x}\Big|_{1}^{b}=2\left(\arctan\sqrt{b}-\frac{\pi}{4}\right)$,

因为 $\lim\limits_{b\to+\infty}2\left(\arctan\sqrt{b}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$,所以 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$ 收敛,且 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=\frac{\pi}{2}$.

方法二 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}=1$ 且 $\frac{3}{2}>1$,所以 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$ 收敛,且

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}=2\arctan\sqrt{x}\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 2】 判断 $\int_{-\infty}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 的敛散性,若收敛求其值.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}=1$ 且 $2>1$,所以 $\int_{-\infty}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 收敛,且

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-\infty}^{1}=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

【例 3】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+4x^2}=0$ 是否正确?

【解】 不正确,

对 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+4x^2}$,因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^1\cdot\frac{x}{1+4x^2}=\frac{1}{4}$ 且 $1\leqslant 1$,所以 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+4x^2}$ 发散,

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+4x^2}$ 发散.

二、积分区间有限,但被积函数在积分区间上有无穷间断点

(一) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续,且 $f(a+0)=\infty$

1. 定义 —— 对任意 $\varepsilon>0$,$\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a+\varepsilon)$,

(1) 若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}[F(b)-F(a+\varepsilon)]=A$,则 $\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于 A,记为 $\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=A$.

(2) 若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}[F(b)-F(a+\varepsilon)]$ 不存在，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

2. 敛散判别法

定理 1　设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，$f(x)\geqslant0$，且 $f(a+0)=\infty$，

(1) 若 $k<1$ 且 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^k\cdot f(x)$ 存在，则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 若 $k\geqslant1$ 且 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^k\cdot f(x)=A>0$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^k\cdot f(x)=+\infty$，则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(二) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，且 $f(b-0)=\infty$

1. 定义 —— 对任意 $\varepsilon>0$，$\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x=F(b-\varepsilon)-F(a)$，

(1) 若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}[F(b-\varepsilon)-F(a)]=A$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于 A，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$.

(2) 若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}[F(b-\varepsilon)-F(a)]$ 不存在，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

2. 敛散判别法

定理 2　设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，$f(x)\geqslant0$，且 $f(b-0)=\infty$，

(1) 若 $k<1$ 且 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^k\cdot f(x)$ 存在，则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 若 $k\geqslant1$ 且 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^k\cdot f(x)=A>0$ 或 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^k\cdot f(x)=+\infty$，则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(三) $f(x)$ 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上连续，且 $f(c-0)=\infty$ 或 $f(c+0)=\infty$

定理 3　设 $f(x)$ 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上连续，且 $f(c-0)=\infty$ 或 $f(c+0)=\infty$，则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛.

【注解】

(1) 设 $f(x)=\dfrac{g(x)}{(x-a)^k}$，其中 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(a)\neq0$，

则当 $k<1$ 时，广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；当 $k\geqslant1$ 时，广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 设 $f(x)=\dfrac{g(x)}{(b-x)^k}$，其中 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(b)\neq0$，

则当 $k<1$ 时，广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；当 $k\geqslant1$ 时，广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

【例】　判断下列广义积分的敛散性：

(1) $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.　　(2) $\int_0^2\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

【解】 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}=1$ 且 $\dfrac{1}{2}<1$，所以广义积分 $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$ 收敛，

且 $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=2\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}(\sqrt{x-1})}{1+(\sqrt{x-1})^2}=2\arctan\sqrt{x-1}\,\Big|_1^2=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}(x-0)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\dfrac{1}{2}<1$，

又因为 $\lim\limits_{x\to2^-}(2-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\dfrac{1}{2}<1$，

所以广义积分 $\int_0^2\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}$ 收敛，

且 $\int_0^2\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}=\int_0^2\dfrac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$=2\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=2\arcsin x\,\Big|_0^1=\pi$.

第四节 定积分的实际应用

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

一、定积分的几何应用

1. 面积

(1) 设 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$，则 $A=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\mathrm{d}x$，如图 1-5-2.

(2) 设 $D=\{(r,\theta)\mid\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,0\leqslant r\leqslant r(\theta)\}$，则 $A=\dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$，如图 1-5-3.

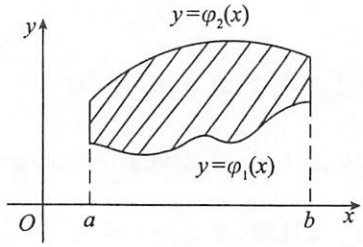


图 1-5-2

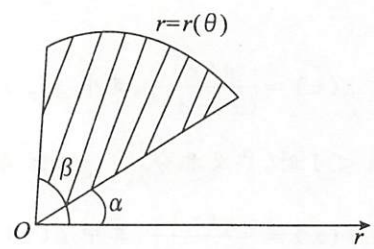


图 1-5-3

(3) 设 $D=\{(r,\theta)\mid\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)\}$，则 $A=\dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta$，如图 1-5-4.

(4) 旋转曲面的表面积：设 $L:y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则 L 绕 x 轴旋转一周(如图 1-5-5)所得旋转曲面的表面积为 $A=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

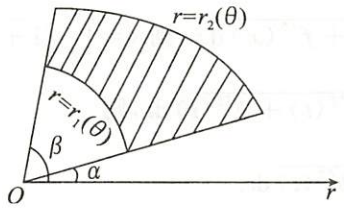


图 1-5-4

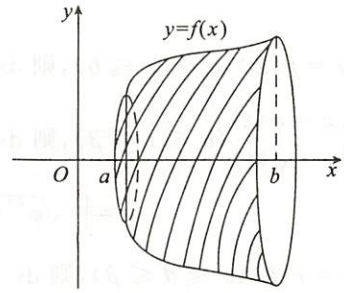


图 1-5-5

2. 体积

(1) 曲线绕 x 轴旋转所得旋转体的体积

设 $L:y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则 L 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积(如图 1-5-6) 为

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

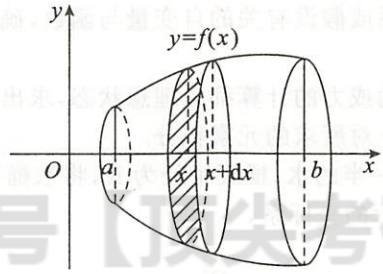


图 1-5-6

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(2) 曲线绕 y 轴旋转所得旋转体的体积

设 $L:y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，其中 $ab\geqslant 0$，则 L 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积(如图 1-5-7) 为 $V_y=2\pi\int_a^b |x||f(x)|\mathrm{d}x$.

(3) 截口面积已知的几何体的体积：

设一几何体介于 $x=a$ 与 $x=b$ 之间，对任意的 $x\in[a,b]$，截口面积为 $A(x)$，则该几何体的体积(如图 1-5-8) 为 $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$.

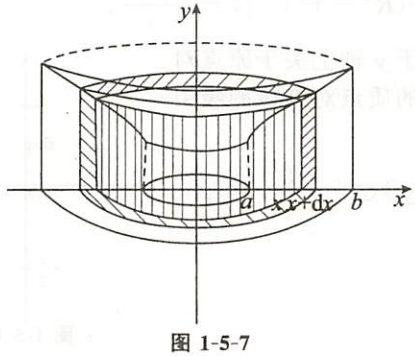


图 1-5-7

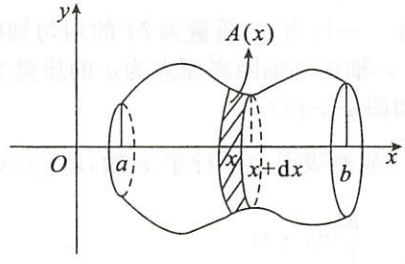


图 1-5-8

3. 弧长

(1) 设 $L:y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$，则 $s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

(2) 设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$，则

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

(3) 设 $L:r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$，则

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

二、定积分的物理应用

定积分的物理应用包括做功和力的计算，其中力又包括液体的压力和吸引力. 掌握好元素法的思想是解决物理应用的关键. 具体步骤为：

(1) 首先建立合适的坐标系或假设有关的自变量与函数，确定自变量的变化范围，然后取自变量的区间元素；

(2) 在该区间元素上假设功或力的计算都是理想状态，求出所求量的元素；

(3) 在自变量的变化区间上对所求的元素积分.

【例 1】 一圆柱形的桶装一半的水，桶底半径为 R，将水桶平放，求水对桶底的压力.

【解】 建立如图 1-5-9 所示的坐标系，

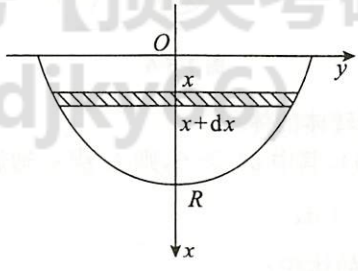


图 1-5-9

取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,R]$，$\mathrm{d}F=\rho g x\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$，则

$$F=-\rho g\int_0^R(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(R^2-x^2)=-\frac{2\rho g}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R=\frac{2\rho g R^3}{3}.$$

【例 2】 一长为 L、质量为 M 的均匀细棒位于 y 轴上关于原点对称，求位于 x 轴正半轴距离原点为 a 的质量为 m 的质点对细棒的吸引力大小.(如图 1-5-10).

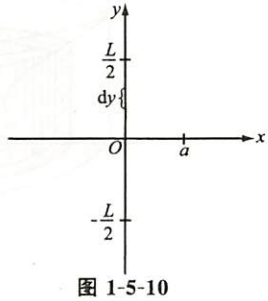


图 1-5-10

【解】 显然吸引力平行于 x 轴，取 $[y,y+\mathrm{d}y]\subset[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$，

$$\mathrm{d}F=k\cdot\frac{\frac{M}{L}\mathrm{d}y\cdot m}{y^2+a^2},$$

$$dF_x = k \cdot \frac{\frac{M}{L}dy \cdot m}{y^2+a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}} = \frac{kMma}{L} \cdot \frac{1}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dy,$$

于是 $F_x = \frac{kMma}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dy}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2kMma}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dy}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$,

由三角代换得 $\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} + C$,

故 $F_x = \frac{2kMm}{aL} \cdot \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2}} = \frac{2kMm}{a\sqrt{L^2+4a^2}}$.

知识延拓模块 —— 定积分理论的推广

1. 闭区间上连续保号函数定积分性质

(1) 设 $f(x) \in C[a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ 且 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 则 $f(x) \equiv 0 (x \in [a,b])$.

(2) 设 $f(x) \in C[a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ 且 $f(x)$ 不恒为零, 则 $\int_a^b f(x)dx > 0$.

(3) 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ 且 $f(x), g(x)$ 不恒等, 则

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

2. (柯西不等式)

设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 则

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

3. 定积分第一中值定理

定理　设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x) \geqslant 0$, 证明: 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

证明　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最小值 m 和最大值 M, 于是 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 而 $g(x) \geqslant 0$, 故 $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$, 积分得

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx.$$

当 $\int_a^b g(x)dx = 0$ 时, 结论显然成立;

当 $\int_a^b g(x)dx > 0$ 时, 由 $m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$ 得

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M$$, 由介值定理, 存在 $\xi \in [a,b]$,

使得 $f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$，即 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

4.（推广的积分中值定理） 设 $f(x)\in C[a,b]$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

证明 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，由牛顿－莱布尼茨公式及拉格朗日中值定理得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a)(\text{其中 }\xi\in(a,b)).$$

重点题型分析

题型一 定积分的概念与性质

【例 1】 设 $f(x)$ 为可导函数，$F(x)$ 为其原函数，则下列结论正确的是（　　）.

(A) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 及 $f'(x)$ 都是奇函数

(B) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 及 $f'(x)$ 都是偶函数

(C) 若 $f(x)$ 为周期函数，则 $F(x)$ 及 $f'(x)$ 都是周期函数

(D) 若 $f(x)$ 为单调增函数，则 $F(x)$ 及 $f'(x)$ 都是单调减函数

【解】 **方法一：排除法**

取 $f(x)=3x^2$，则有 $F(x)=x^3+C$. 若 $C\neq 0$，则 $F(x)$ 非奇非偶，(A) 不对；

取 $f(x)=\sin x+1$，则有 $F(x)=x-\cos x+C$，显然 $F(x)$ 不是周期函数，(C) 不对；

取 $f(x)=x^3$ 为单调增函数，而 $f'(x)=3x^2$ 为非增非减函数，(D) 不对，故选 (B).

方法二：直接证明法

设 $f(-x)=-f(x)$，则 $-f'(-x)=-f'(x)$ 或 $f'(-x)=f'(x)$，于是 $f'(x)$ 为偶函数；又 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F(-x)=\int_a^{-x} f(t)\mathrm{d}t\overset{t=-u}{=\!=\!=}\int_{-a}^{x} f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_{-a}^{x} f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-a}^{a} f(u)\mathrm{d}u+\int_a^x f(u)\mathrm{d}u=\int_a^x f(u)\mathrm{d}u=F(x),$$

所以 $F(x)$ 为偶函数，选 (B).

【例 2】 设 $f(x)$ 除 $x=a$ 为跳跃间断点外皆连续，令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）.

(A) $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数　　(B) $F(x)$ 处处可导

(C) $F(x)$ 在 $x=a$ 处间断　　(D) $F(x)$ 连续

【解】 因为 $f(x)$ 有第一类间断点，所以 $f(x)$ 无原函数，(A) 不对；

取 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 显然 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点，而 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=$

$$\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases} = |x|$$，显然 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，(B) 不对；

因为函数 $f(x)$ 只有有限个第一类间断点，所以 $f(x)$ 可积，于是 $F(x)$ 为连续函数，故选(D).

【例 3】　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}}{n}$.

【解】　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]}$

$=e^{\int_0^1\ln(1+x)\,dx}=\dfrac{4}{e}$.

【例 4】　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【分析】　本题首先用夹逼定理使分母由不齐化为齐再使用定积分定义计算.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】　令 $\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}=b_n$，因为

$$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

所以 $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}\leqslant b_n\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi},$$

所以由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\dfrac{2}{\pi}$.

【例 5】　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$.

【解】　$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$,

因为 $\dfrac{i^2}{n^2}\leqslant\dfrac{i^2+1}{n^2}\leqslant\dfrac{(i+1)^2}{n^2}$,

所以 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}$.

又因为 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{(n+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+(n+1)^2}$$

$$=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},$$

故原极限 $=\dfrac{\pi}{4}$.

微信公众号【顶尖考研】
顶尖考研公众号(88yqkdjy66)

【例 6】 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x t^2e^{t^2}\mathrm{d}t}{xe^{x^2}}$.

【解】 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x t^2e^{t^2}\mathrm{d}t}{xe^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^{x^2}}{e^{x^2}(1+2x^2)}=\frac{1}{2}$.

【例 7】 设 $f(x)$ 连续且在 $x=0$ 处可导,又 $f(0)=0$,求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t}{x^{2n}}$.

【解】 $$\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t=-\frac{1}{n}\int_0^x f(x^n-t^n)\mathrm{d}(x^n-t^n)$$

$$=-\frac{1}{n}\int_{x^n}^0 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u,$$

则 $$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t}{x^{2n}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u}{x^{2n}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to0}\frac{x^{n-1}f(x^n)}{x^{2n-1}}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to0}\frac{f(x^n)-f(0)}{x^n}=\frac{1}{2n}f'(0).$$

【例 8】 证明:$\dfrac{2}{3}<\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

【证明】 令 $f(x)=2+x-x^2$,由 $f'(x)=1-2x=0$ 得 $x=\dfrac{1}{2}$,

由 $f(0)=f(1)=2$,$f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{9}{4}$ 得 $\sqrt{2+x-x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $\sqrt{2}$,最大值为 $\dfrac{3}{2}$,

故 $\frac{2}{3}<\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

题型二　积分的计算

【思路分析】

定积分的计算是重要的考查知识点.定积分计算的常用方法:

(1) 常规定积分计算 —— 用牛顿－莱布尼茨公式及利用定积分的性质计算.

(2) 变积分限函数的定积分(一般采用分部积分法).

(3) 特殊计算方法,如对称法等.

情形一:常规定积分计算

【例 1】 计算:(1)$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$;　(2)$\int_{-1}^1 \frac{\sin t\,\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos t+1}(0<t<\pi)$.

【解】 (1)$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}(1+x)}=2\int_1^3 \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}=2\arctan\sqrt{x}\Big|_1^3=\frac{\pi}{6}$.

(2)$\int_{-1}^1 \frac{\sin t\,\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos t+1}=\int_{-1}^1 \frac{\sin t\,\mathrm{d}x}{\sin^2 t+(x-\cos t)^2}$

$=\arctan\frac{x-\cos t}{\sin t}\Big|_{-1}^{1}=\arctan\frac{1-\cos t}{\sin t}+\arctan\frac{1+\cos t}{\sin t}$

$=\arctan\left(\tan\frac{t}{2}\right)+\arctan\left(\cot\frac{t}{2}\right)$

$=\arctan\left(\tan\frac{t}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

微信公众号【启宏考研】(ID:djky66)

【注解】

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}\equiv\frac{\pi}{2}(x\neq 0).$$

【例 2】 计算:(1)$\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$;　(2)$\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

【解】 (1)$\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$

$=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=4\sqrt{2}$.

(2)$\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^2[(x-1)+1]^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)$

$=\int_{-1}^1(x+1)^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(1+x^2)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^1(1+x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx \xlongequal{x=\sin t} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 t)\cos^2 t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^4 t)dt=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5\pi}{8}.$$

【例 3】 计算$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^{2x}-1}\,dx$.

【解】 令$\sqrt{e^{2x}-1}=t$,则$x=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$,且当$x=0$时,$t=0$;当$x=\ln 2$时,$t=\sqrt{3}$,

于是$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^{2x}-1}\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

【例 4】 设$f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0,\\ \dfrac{1}{4+x^2}, & x\leqslant 0,\end{cases}$计算$\int_{-1}^{2}f(x-1)dx$.

【解】 $\int_{-1}^{2}f(x-1)dx=\int_{-1}^{2}f(x-1)d(x-1)=\int_{-2}^{1}f(x)dx$

$$=\int_{-2}^{0}\frac{1}{4+x^2}dx+\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{0}+x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$$

$$=\frac{\pi}{8}+\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{\pi}{8}+2\ln 2-1.$$

微信公众号【尚学考研】(ID: djky66)

【例 5】 设$f(x)=f(x-\pi)+\sin x$,且当$x\in[0,\pi]$时,$f(x)=x$,求$\int_{\pi}^{3\pi}f(x)dx$.

【解】 $\int_{\pi}^{3\pi}f(x)dx=\int_{\pi}^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]dx$

$$=\int_{\pi}^{3\pi}f(x-\pi)d(x-\pi)+\int_{\pi}^{3\pi}\sin x\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}f(x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}f(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}[f(x-\pi)+\sin x]dx$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\int_{\pi}^{2\pi}f(x-\pi)d(x-\pi)+\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\int_0^{\pi}f(x)dx-2=\frac{\pi^2}{2}+\int_0^{\pi}x\,dx-2=\pi^2-2.$$

【例 6】 计算$\int_0^{2\pi}|\cos x-\sin x|\,dx$.

【解】 $\int_0^{2\pi}|\cos x-\sin x|\,dx=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|d\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}}|\cos x|\,dx$

$$=\sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x|\,dx=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

$$=4\sqrt{2}.$$

【例 7】　设 $f(x)=x(x\geqslant 0)$，$g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 当 $x\geqslant 0$ 时，

求 $\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$.

【解】　$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u$，

当 $0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u=\int_0^x (x-u)\sin u\,\mathrm{d}u$

$$=x\int_0^x \sin u\,\mathrm{d}u-\int_0^x u\sin u\,\mathrm{d}u=x-\sin x;$$

当 $x>\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-u)\sin u\,\mathrm{d}u=x-1.$

所以　$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=\begin{cases}x-\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ x-1, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

情形二：变积分限函数的定积分

【思路分析】

变积分限函数的定积分一般直接使用分部积分法.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 8】　设 $f(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

【解】　$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\,|_0^\pi-\int_0^\pi xf'(x)\mathrm{d}x=\pi f(\pi)-\int_0^\pi \dfrac{x\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^\pi \frac{\pi\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x-\int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x=\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x=2.$$

【例 9】　设 $f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

【解】　$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)=\dfrac{1}{3}x^3 f(x)\,|_0^1-\dfrac{1}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(x^2)=-\frac{1}{6}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1 t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-t})=\frac{1}{6}t\mathrm{e}^{-t}\,|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{6}(2\mathrm{e}^{-1}-1).$$

【例 10】　设 $F'(x)=\arcsin(x-1)^2$，$F(0)=0$，求 $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$.

【解】　$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=xF(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xF'(x)\mathrm{d}x=F(1)-\int_0^1 x\arcsin(x-1)^2\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 \arcsin(x-1)^2\mathrm{d}x-\int_0^1 x\arcsin(x-1)^2\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1(x-1)\arcsin(x-1)^2\mathrm{d}(x-1)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin(x-1)^2\mathrm{d}(x-1)^2=\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\arcsin x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

情形三:对称型定积分计算

【例 11】 计算$\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{4-x^2}}$.

【解】 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{4-x^2}}\xlongequal{x=2\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos t\,\mathrm{d}t}{2\sin t+2\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=I$

$$\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos t+\sin t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x+\sin x},$$

由 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x+\sin x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=\frac{\pi}{2}$ 得$\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{4-x^2}}=\frac{\pi}{4}$.

【例 12】 计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$.

【解】 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\ln 2-I,$$

于是$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

【例 13】 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

【解】 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$,

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,\mathrm{d}(2x)$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I,$$

于是$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

【例 14】 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x$.

【解】 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cot^{\sqrt{2}}t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cot^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{\sqrt{2}}x}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x$,

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{\sqrt{2}}x}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

于是$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

【例 15】　计算$\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x$.

【解】　$I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x\overset{x+t=6}{=\!=\!=}\int_4^2\frac{\sqrt{\ln(t+3)}}{\sqrt{\ln(t+3)}+\sqrt{\ln(9-t)}}(-\mathrm{d}t)$

$$=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x,$$

则
$$\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x+\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{1}{2}\int_2^4\mathrm{d}x=1.$$

情形四：抽象函数的定积分计算

【思路分析】

被积函数含抽象函数时，一般采用定积分的特殊性质、微分方程先求出被积函数、分部积分等方法.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 16】　设$f(x),g(x)$满足$f'(x)=g(x),g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$，且$f(0)=0,g(0)=2$，求$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{x+1}-\frac{f(x)}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$.

【解】　由$f'(x)=g(x),g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$得$f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$，

该方程的特征方程为$\lambda^2+1=0$，特征值为$\lambda=\pm\mathrm{i}$，

该方程的通解为$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\mathrm{e}^x$.

由$f(0)=0,g(0)=2$得$f(0)=0,f'(0)=2$，代入通解得$C_1=-1,C_2=1$，

即$f(x)=\sin x-\cos x+\mathrm{e}^x$.

于是$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{x+1}-\frac{f(x)}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{x+1}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$$=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{x+1}\mathrm{d}x+\frac{f(x)}{x+1}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{f(\pi)}{\pi+1}-f(0)=\frac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{\pi+1}.$$

【例 17】　设$f(x)$连续，且$f(x)+f(-x)=2$，求

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[(\sin^2x+\cos x)f(x)+(\sin^2x-\cos x)f(-x)]\mathrm{d}x.$$

【解】　$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[(\sin^2x+\cos x)f(x)+(\sin^2x-\cos x)f(-x)]\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x,$$

因为$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,\mathrm{d}x=4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\pi$,

因为$f(x)-f(-x)$为奇函数,所以$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x=0$,

故$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[(\sin^2x+\cos x)f(x)+(\sin^2x-\cos x)f(-x)]\mathrm{d}x=\pi$.

题型三 被积分函数连续的定积分的证明

情形一:被积函数只有连续性

【例 1】 设$f(x)\in C[a,b]$,且对任意的$x,y\in[a,b]$有$|f(x)-f(y)|\leqslant 2|x-y|$,证明:$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(a)(b-a)\right|\leqslant(b-a)^2$.

【证明】 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(a)(b-a)\right|=\left|\int_a^b[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)-f(a)|\mathrm{d}x$

$\leqslant\int_a^b 2(x-a)\mathrm{d}x=(x-a)^2\big|_a^b=(b-a)^2$.

【例 2】 设$f(x)\in C[a,b]$,证明:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

【证明】 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x+t=a+b}\int_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t)=\int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

【例 3】 设$f(x)$连续,证明:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x$.

【证明】 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=a+(b-a)t}\int_0^1 f[a+(b-a)t]\cdot(b-a)\mathrm{d}t$

$=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]\mathrm{d}t=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x$.

【例 4】 证明:$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}(a>0)$.

【证明】 $\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{2}\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2}$

$=\frac{1}{2}\int_1^{a^2} f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}\left[\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_a^{a^2} f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}\right]$,

而$\int_a^{a^2} f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}\xlongequal{\frac{a^2}{x}=t}\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)=\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$,

故$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}\left[\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_a^{a^2} f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}\right]=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

【例 5】 设$f(x)\in C[a,b]$,证明:$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

【证明】 由柯西不等式得

$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2=\left[\int_a^b 1\times f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b 1^2\mathrm{d}x\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

【例 6】 设$f(x)\in C[a,b]$且$f(x)>0$,证明:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$.

微信公众号【顾柒考研】(ID: gqky66)

【证明】　**方法一**　由柯西不等式得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b(\sqrt{f(x)})^2\mathrm{d}x\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=(b-a)^2.$$

方法二　令 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$，则

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}\sigma,$$

因为区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，所以 $I=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}\sigma$，

于是 $2I=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}\sigma+\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}\sigma\geqslant 2\iint_D\mathrm{d}\sigma=2(b-a)^2$，

故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$.

【例 7】　设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$.

(1) 计算 I_n+I_{n+2}；

(2) 证明：当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$；

(3) 证明：$I_n\leqslant\frac{1}{n}$.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【解】　(1) $I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{n+1}$.

(2) 因为当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$\tan^n x$ 及 $\tan^{n+2}x$ 都连续，$\tan^n x\geqslant\tan^{n+2}x$ 且 $\tan^n x$ 及 $\tan^{n+2}x$ 不恒等，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,\mathrm{d}x$，或 $I_n>I_{n+2}$，

于是 $\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+2}<2I_n$，故 $\frac{1}{2(n+1)}<I_n$.

同理 $I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$ 且 $I_n<\frac{1}{2(n-1)}$，于是 $\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$.

(3) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x\overset{\tan x=t}{=\!=\!=}\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{n}$.

【例 8】　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$，证明：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

【证明】　由 $\frac{[f(x)-m][M-f(x)]}{f(x)}\geqslant 0$ 得 $f(x)+\frac{mM}{f(x)}\leqslant m+M$，积分得

$$m+M\geqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+mM\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 2\sqrt{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot mM\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x},$$

两边平方得$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}$.

情形二:被积函数具有连续性及单调性

【思路分析】

若被积函数具有连续性和单调性,则常用的证明方法有:

(1) 变换法,即通过变换使两个积分限相同,从而转化为比较两个被积函数大小.

(2) 辅助函数法,往往应用于两个常数的积分不等式.

(3) 利用积分中值定理.

(4) 利用放缩法.

【例 9】 设 $f(x)\in C[0,1]$,且 $f(x)$ 单调减少,证明:对任意的 $0<a<1$,有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

【证明】 方法一 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=at} \int_0^1 f(at)a\,\mathrm{d}t = a\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}x$,

因为 $ax \leqslant x$ 且 $f(x)$ 单调减少,所以 $f(ax)\geqslant f(x)$,

于是$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = a\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

方法二 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^1 f(x)\mathrm{d}x\right]$

$=(1-a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x = (1-a)af(\xi_1) - (1-a)af(\xi_2)$

$=(1-a)a[f(\xi_1)-f(\xi_2)]$,其中 $0\leqslant\xi_1\leqslant a, a\leqslant\xi_2\leqslant 1$.

因为 $f(x)$ 单调减少,所以$(1-a)a[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\geqslant 0$,故$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

微信公众号【贝壳考研】(ID: djky66)

【例 10】 设 $f(x)\in C[0,1]$,又 $f(x)$ 单调减少且非负,证明:对任意的 $0<a<b<1$,有

$$\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

【证明】 $\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 等价于 $a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$,

令 $\varphi(x) = x\int_0^a f(t)\mathrm{d}t - a\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $\varphi(a) = a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$,

$\varphi'(x) = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t - af(x)$,

因为 $f(x)$ 单调减少,所以当 $x\geqslant a$ 时,$\int_0^a f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}t = af(x)$,

即当 $x\geqslant a$ 时,$\varphi'(x)\geqslant 0$. 由 $\begin{cases}\varphi(a)\geqslant 0,\\ \varphi'(x)\geqslant 0 (x\geqslant a)\end{cases}$ 得 $\varphi(x)\geqslant 0 (x\geqslant a)$,

因为 $b>a$,所以 $\varphi(b)\geqslant 0$,于是$\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

【例 11】 设 $f(x)\in C[a,b]$ 且单调增加,证明:$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【证明】　**方法一**　令 $\varphi(x)=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f(\frac{a+b}{2})\right]$，

因为 $f(x)$ 单调增加，所以 $\varphi(x)\geqslant 0$，即

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

$$\text{而}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

故 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

方法二　$\varphi(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$\varphi(a)=0$.

$$\varphi'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{x-a}{2}f(\xi)=\frac{x-a}{2}[f(x)-f(\xi)]\text{（其中 }a\leqslant\xi\leqslant x\text{）},$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，所以 $\varphi'(x)\geqslant 0$.

由 $\begin{cases}\varphi(a)=0,\\ \varphi'(x)\geqslant 0\end{cases}$ 得 $\varphi(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$，于是 $\varphi(b)\geqslant 0$，即 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

微信公众号【顾先考研】
(ID：djky66)

【例 12】　设 $f(x)\in C[1,+\infty)$ 且单调减少，证明：

$$\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqslant f(1)+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

【证明】　因为 $f(x)$ 单调减少，

所以 $\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$

$$\leqslant\int_1^2 f(1)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(2)\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}f(n)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}f(k);$$

$$\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\int_1^2 f(2)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(3)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n f(n)\mathrm{d}x=f(2)+f(3)+\cdots+f(n),$$

则 $\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqslant f(1)+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$，因此 $\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqslant f(1)+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$.

情形三：被积分函数连续且具有周期性

【例 13】　设 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t$，

(1) 证明：当 n 为正整数，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，有 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$；

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

【解】　(1) 因为 $|\cos t|\geqslant 0$，所以当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，

$$\int_0^{n\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{x}|\cos t|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t,$$

因为$\int_0^{n\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t=n\int_0^{\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t=n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t=2n$,

$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2(n+1)$,

所以$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$.

(2) 因为$n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$,所以$\frac{1}{(n+1)\pi}<\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n\pi}$,

于是$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}\leqslant\frac{2(n+1)}{n\pi}$,

注意到$x\to+\infty$时$n\to\infty$,所以由夹逼定理,$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}$.

【例 14】 设$f(x)$是以T为周期的连续非负函数,求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}$.

【解】 对任意的$x>0$,存在n,使得$nT\leqslant x<(n+1)T$,

因为$f(x)\geqslant 0$,所以$\int_0^{nT}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{(n+1)T}f(t)\,\mathrm{d}t$,即

$$n\int_0^{T}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant(n+1)\int_0^{T}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

于是有$\frac{n\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}{(n+1)T}\leqslant\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}\leqslant\frac{(n+1)\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}{nT}$,

由夹逼定理得$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}=\frac{\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}{T}$.

微信公众号【贝壳考研】(ID: djky66)

题型四 被积函数连续可导的定积分证明

【例 1】 设$f(x)$在$[0,a]$上连续可导,且$f(0)=0$,令$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$,证明:

$$\left|\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{2}a^2.$$

【分析】 本题是函数与导数相关的积分不等式,因为积分中不含导数,故使用拉格朗日中值定理及积分的绝对值性质.

【证明】 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$(其中ξ介于0与x之间),

因为$f(0)=0$,所以$f(x)=f'(\xi)x$,取绝对值得$|f(x)|\leqslant Mx$,

于是$\left|\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^a|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^a Mx\,\mathrm{d}x=\frac{M}{2}a^2$.

【例 2】 设$f(x)$在$[a,b]$上连续可导,且$f(a)=f(b)=0$,证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|.$$

【分析】　本题是函数与导数关系的积分不等式，因为积分中不含导数，故使用微分中值定理及积分的绝对值性质.

【证明】　令 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|=M$，由微分中值定理得

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)(\text{其中 } a<\xi<x),$$
$$f(x)-f(b)=f'(\eta)(x-b)(\text{其中 } x<\eta<b),$$

因为 $f(a)=f(b)=0$，所以有 $\begin{cases}|f(x)|\leqslant M(x-a),\\ |f(x)|\leqslant M(b-x).\end{cases}$

于是 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$

$$\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}M(x-a)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{4}M=\frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|.$$

【例 3】　设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导，且 $f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\leqslant 1$，证明：

$$1\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 3.$$

【分析】　本题积分中不含导数，使用微分中值定理.

【证明】　由微分中值定理得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)x(\text{其中 } 0<\xi<x),$$
$$f(x)-f(2)=f'(\eta)(x-2)(\text{其中 } x<\eta<2),$$

因为 $|f'(x)|\leqslant 1$，所以 $\begin{cases}-x\leqslant f(x)-1\leqslant x,\\ x-2\leqslant f(x)-1\leqslant 2-x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-x\leqslant f(x)\leqslant 1+x,\\ x-1\leqslant f(x)\leqslant 3-x.\end{cases}$

于是 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x+\int_1^2(3-x)\mathrm{d}x=3,$

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=1,$$

故 $$1\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 3.$$

【例 4】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：对任意的 $c\in(a,b)$，有

$$|f(c)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

【分析】　本题积分中含导数，使用牛顿－莱布尼茨公式及积分绝对值性质.

【证明】　由积分基本公式得 $f(c)-f(a)=\int_a^c f'(x)\mathrm{d}x$，$f(b)-f(c)=\int_c^b f'(x)\mathrm{d}x$.

因为 $f(a)=f(b)=0$，所以有 $\begin{cases}|f(c)|\leqslant\int_a^c|f'(x)|\mathrm{d}x,\\ |f(c)|\leqslant\int_c^b|f'(x)|\mathrm{d}x.\end{cases}$

两式相加得 $$|f(c)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

【例 5】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

【证明】　令 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=|f(c)|$，由积分中值定理得 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(x_0)$.

微信公众号（研途考研）
（ID：diky66）

由积分基本公式得 $f(c)=f(x_0)+\int_{x_0}^{c}f'(x)\mathrm{d}x$，于是

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=|f(c)|\leqslant|f(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{c}f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $|f'(x)|\leqslant M$，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}.$$

【证明】
$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\\&=\left|\left[\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right]+\cdots+\left[\int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\right|\\&\leqslant\left|\int_0^{\frac{1}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\right|+\cdots+\left|\int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\mathrm{d}x+\cdots+\int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{n}{n}\right)\right|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{1}{n}}\left|f'(\xi_1)\left(x-\frac{1}{n}\right)\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant M\int_0^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{M}{2n^2}\left(\xi_1\in\left(0,\frac{1}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

同理 $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2n^2},\cdots,\int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{n}{n}\right)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2n^2}$，

故 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}$.

微信公众号（质学考研）(ID：zhy66)

【例 7】 证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

【证明】 设 $\varphi(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$，由 $\varphi'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x=0$ 得 $x=0,1,x=k\pi(k=1,2,\cdots)$. $x=0$ 时显然成立.

因为当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)\leqslant 0$，

所以 $x=1$ 为函数 $\varphi(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值点，

最大值 $M=\varphi(1)=\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}&\leqslant\int_0^1(t-t^2)t^{2n}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1(t^{2n+1}-t^{2n+2})\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)},\end{aligned}$$

故 $\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

题型五　被积函数具有高阶可导性

【思路分析】

涉及高阶导数定积分问题，一般采用泰勒公式.

注意：若 $f''(x)>0(<0)$，则一般使用 $f(x)\geqslant(\leqslant)f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，证明：$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【证明】 取 $x_0=\frac{a+b}{2}$，因为 $f''(x)>0$，所以有

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

即 $f(x)\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$，两边积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

【例 2】 设 $f(x)\in C[0,1]$ 且 $f''(x)>0$，证明：$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$.

【证明】 因为 $f''(x)>0$，所以 $f(t)\geqslant f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)$，

于是 $f(x^2)\geqslant f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$，两边积分得

$$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{1}{3}\right).$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 3】 设 $f(x)\in C[0,1]$ 且 $f(x)>0$，证明：$\ln\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\geqslant\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$.

【证明】 取 $x_0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，令 $\varphi(t)=\ln t(t>0)$，

因为 $\varphi''(t)=-\frac{1}{t^2}<0$，所以 $\varphi(t)\leqslant\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(t-x_0)$，

故　$\varphi[f(x)]\leqslant\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)[f(x)-x_0]$，

两边在 $[0,1]$ 上积分得

$\int_0^1\varphi[f(x)]\mathrm{d}x\leqslant\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-x_0\right]$ 或 $\int_0^1\varphi[f(x)]\mathrm{d}x\leqslant\varphi(x_0)$，

于是有 $\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x\leqslant\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 或 $\ln\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\geqslant\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$.

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

【证明】 由泰勒公式得 $f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$，

其中 η 介于 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间. 上述等式两边积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x.$$

因为 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，

显然 $m\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant M\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$，积分得

$m\frac{(b-a)^3}{12}\leqslant\int_a^b f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant M\frac{(b-a)^3}{12}$，或

$m\leqslant\frac{12}{(b-a)^3}\int_a^b f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant M$，由介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$\frac{12}{(b-a)^3}\int_a^b f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x=f''(\xi)$，或 $\int_a^b f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$，

故
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

【例 5】 设 $f''(x)\in C[2,4]$，且 $f(3)=0$，证明：存在 $\xi\in(2,4)$，使得 $f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

【证明】 令 $F(x)=\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$，显然 $F(x)$ 三阶连续可导，由泰勒公式得

$F(2)=F(3)+F'(3)(2-3)+\frac{F''(3)}{2!}(2-3)^2+\frac{F'''(\xi_1)}{3!}(2-3)^3$，其中 $\xi_1\in(2,3)$，

$F(4)=F(3)+F'(3)(4-3)+\frac{F''(3)}{2!}(4-3)^2+\frac{F'''(\xi_2)}{3!}(4-3)^3$，其中 $\xi_2\in(3,4)$，

即 $F(2)=F(3)+\frac{f'(3)}{2}-\frac{f''(\xi_1)}{6}$，$F(4)=F(3)+\frac{f'(3)}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{6}$，

两式相减得 $F(4)-F(2)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{6}$，即 $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{6}$.

因为 $f''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]\subset(2,4)$ 上连续，所以 $f''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，因为 $m\leqslant\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\leqslant M$，所以由介值定理，存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(2,4)$，使得 $f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，于是有 $3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=f''(\xi)$.

【例 6】 设 $f''(x)\in C[-a,a](a>0)$，$f(0)=0$，

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(2) 证明：存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$.

【证明】 (1) $f(x)$ 的带拉格朗日型余项的一阶麦克劳林公式为

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$，其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

(2) $f(x)=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$ 两边在 $[-a,a]$ 上积分得 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^a f''(\xi)x^2\mathrm{d}x$.

因为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，所以 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，

由 $m\leqslant f''(\xi)\leqslant M$ 得 $\frac{1}{2}mx^2\leqslant\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\leqslant\frac{1}{2}Mx^2$，积分得

微信公众号【顶尖考研】(ID: dkky66)

$\frac{1}{3}ma^3 \leqslant \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f''(\xi)x^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3}Ma^3$，或者 $m \leqslant \frac{3}{a^3}\cdot\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f''(\xi)x^2\mathrm{d}x \leqslant M$，

由介值定理，存在 $\eta \in [-a,a]$，使得 $f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\cdot\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f''(\xi)x^2\mathrm{d}x$，

于是 $\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f''(\xi)x^2\mathrm{d}x=\frac{a^3}{3}\cdot f''(\eta)$，故 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

题型六　含定积分的零点问题

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续、非负，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $[0,\xi]$ 上以 $f(\xi)$ 为高的矩形面积等于 $[\xi,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积的二倍.

【证明】 $S_1(\xi)=\xi f(\xi)$，　$S_2(\xi)=\int_{\xi}^{1} f(t)\mathrm{d}t$，

令 $\varphi(x)=2\int_{x}^{1} f(t)\mathrm{d}t - xf(x)$，即证明 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

令 $h(x)=x^2\int_{x}^{1} f(t)\mathrm{d}t$，则 $h'(x)=2x\int_{x}^{1} f(t)\mathrm{d}t - x^2 f(x)=x\varphi(x)$.

因为 $h(0)=h(1)=0$，所以由罗尔定理，存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $h'(\xi)=0$，

即 $\xi\varphi(\xi)=0$，注意到 $\xi \neq 0$，故 $\varphi(\xi)=0$，即 $S_1(\xi)=2S_2(\xi)$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b} xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个零点.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【证明】 令 $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，$F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理，存在 $x_0 \in (a,b)$，使得 $F'(x_0)=0$，即 $f(x_0)=0$.

（反证法）设 $f(x)$ 在 (a,b) 内除 x_0 外无其他零点，则 $f(x)$ 在 (a,x_0) 与 (x_0,b) 内异号，不妨设当 $x \in (a,x_0)$ 时，$f(x)<0$；当 $x \in (x_0,b)$ 时，$f(x)>0$，则

$$\int_{a}^{b}(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{x_0}(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{b}(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x,$$

因为当 $x \in [a,x_0]$ 时，$(x-x_0)f(x)$ 连续，$(x-x_0)f(x)\geqslant 0$ 且 $(x-x_0)f(x)$ 不恒为零，所以 $\int_{a}^{x_0}(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x>0$；同理可证 $\int_{x_0}^{b}(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x>0$，于是 $\int_{a}^{b}(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x>0$，

事实上 $\int_{a}^{b}(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}xf(x)\mathrm{d}x-x_0\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=0$，矛盾，故 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个零点.

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_{0}^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=0$，证明：$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点.

【证明】 令 $F(x)=\int_{0}^{x} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$，$F(0)=F(\pi)=0$，由罗尔定理，存在 $\theta_0 \in (0,\pi)$，使得 $F'(\theta_0)=0$，而 $F'(x)=f(x)\sin x$ 且 $\sin\theta_0 \neq 0$，所以 $f(\theta_0)=0$.

（反证法）设 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内除 θ_0 外没有零点，则 $f(x)$ 在 $(0,\theta_0)$ 与 (θ_0,π) 内异号，不妨设当 $x \in (0,\theta_0)$ 时，$f(x)<0$；当 $x \in (\theta_0,\pi)$ 时，$f(x)>0$，则

$$\int_0^{\pi}\sin(x-\theta_0)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta_0}\sin(x-\theta_0)f(x)\mathrm{d}x+\int_{\theta_0}^{\pi}\sin(x-\theta_0)f(x)\mathrm{d}x,$$

因为当 $x\in[0,\theta_0]$ 时，$\sin(x-\theta_0)f(x)$ 连续，$\sin(x-\theta_0)f(x)\geqslant 0$ 且 $\sin(x-\theta_0)f(x)$ 不恒等于零，所以 $\int_0^{\theta_0}\sin(x-\theta_0)f(x)\mathrm{d}x>0$；同理 $\int_{\theta_0}^{\pi}\sin(x-\theta_0)f(x)\mathrm{d}x>0$，

所以 $\int_0^{\pi}\sin(x-\theta_0)f(x)\mathrm{d}x>0$.

而 $\int_0^{\pi}\sin(x-\theta_0)f(x)\mathrm{d}x=\cos\theta_0\int_0^{\pi}\sin x f(x)\mathrm{d}x-\sin\theta_0\int_0^{\pi}\cos x f(x)\mathrm{d}x=0$，矛盾，故 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点.

题型七　广义定积分

【思路分析】

广义积分一般先判断其敛散性，若收敛，则广义积分和普通积分计算相同.

【例 1】 下列广义积分发散的是(　　).

(A) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$　(B) $\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$　(C) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x}}$　(D) $\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=1$ 且 $\frac{1}{2}<1$，所以 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$ 收敛，不选(A)；

$\int_{\varepsilon}^1 x\ln x\,\mathrm{d}x=\int_{\varepsilon}^1\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon-\frac{1-\varepsilon^2}{4}$，因为 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^1 x\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$，所以 $\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$ 收敛，不选(B)；

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}=1$ 且 $1\leqslant 1$，所以 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x}}$ 发散，应选(C).

$\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 显然收敛. 事实上 $\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\Gamma(2)=\frac{1}{2}$.

【例 2】 计算 $\int_1^3\frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\mathrm{d}x$.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\frac{1}{2}<1$，

又因为 $\lim\limits_{x\to 3^-}(3-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\frac{1}{2}<1$，所以广义积分收敛.

$$\int_1^3\frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\mathrm{d}(x-2)\xlongequal{x-2=t}\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=2\arcsin t\Big|_0^1=\pi.$$

【例 3】　计算$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

【解】　$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}$,

因为$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=1$且$\frac{1}{2}<1$,所以$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$收敛;

又因为$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}=1$且$\frac{1}{2}<1$,所以$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}$收敛,故$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$收敛.

而$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{\pi}{2}$,

$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}=2\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}}=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}=2\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}=\ln(2+\sqrt{3})$,

故$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$.

【例 4】　计算$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}$.

【解】　$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-(x-1)}}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x-1})}{1+(\mathrm{e}^{x-1})^2}$

$=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\arctan\mathrm{e}^{x-1}\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4\mathrm{e}^2}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 5】　计算$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

【解】　因为$\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$且$\frac{1}{2}<1$,

又因为$\lim\limits_{x\to+\infty}x^5\cdot\frac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=1$且$5>1$,所以$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$收敛.

$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}}=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

$\overset{x=\sec t}{=\!=\!=}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{\sec^4 t\tan t}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}$.

题型八　定积分的几何应用

【例 1】　求抛物线$y=\frac{x^2}{4}$与过其上的点$M_0(2,1)$处的法线所围成的图形的面积.

【解】　$y'|_{x=2}=\frac{x}{2}|_{x=2}=1$,则曲线在点$M_0(2,1)$的法线方程为

$$L:y-1=-(x-2),\text{即 }L:y=-x+3,$$

由$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{4}, \\ y=-x+3 \end{cases}$ 得 $x_1=-6, x_2=2$，于是曲线与法线围成的面积为

$$A=\int_{-6}^{2}\left[(-x+3)-\frac{x^2}{4}\right]\mathrm{d}x=\frac{64}{3}.$$

【例 2】 求双纽线 $L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$ 所围成的面积.

【解】 双纽线 $L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的极坐标方程为 $L:r^2=a^2\cos 2\theta$，因为双纽线关于 x 轴和 y 轴对称，所求面积为第一象限面积的 4 倍，第一象限面积为

$$A_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{4},$$

所以 $A=4A_1=a^2$.

【例 3】 求摆线 $L:\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一拱绕 x 轴旋转所得旋转体的表面积.

【解】 $A=\int_0^{2\pi a}2\pi\,|\,y\,|\,\mathrm{d}s=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t=2\pi a^2\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos t)\cdot\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t$$

$$=8\pi a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)\cdot\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,\mathrm{d}t=8\pi a^2\int_0^{\pi}4\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)=32\pi a^2\cdot I_3=\frac{64\pi a^2}{3}.$$

【例 4】 过点 $M_0(1,0)$ 作曲线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该曲线与切线及 x 轴围成平面区域 D.

(1) 求 D 绕 x 轴旋转一周的几何体的表面积；

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周的几何体的体积.

微信公众号【数学考研】(ID: djky66)

【解】 (1) 设切点为 $P(x_0,\sqrt{x_0-2})$，$y'|_{x=x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$，

切线方程为 $y-\sqrt{x_0-2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0)$.

因为 $M_0(1,0)$ 为切线上一点，所以 $0-\sqrt{x_0-2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(1-x_0)$，解得 $x_0=3$，切点为 $P(3,1)$，切线方程为 $y=\dfrac{x-1}{2}$.

外表面的面积为 $A_1=2\pi\int_1^3\frac{x-1}{2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_1^3\frac{x-1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{5}\pi$，

内表面的面积为 $A_2=2\pi\int_2^3\sqrt{x-2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_2^3\sqrt{x-2}\sqrt{1+\frac{1}{4(x-2)}}\,\mathrm{d}x$

$$=\pi\int_2^3\sqrt{4x-7}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1),$$

故表面积为 $A=A_1+A_2=\dfrac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$.

(2) 旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^3\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_2^3(\sqrt{x-2})^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}.$$

【例 5】 设 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $y\geqslant 0$，又曲线 $y=ax^2+bx+c$ 与

x 轴及 $x=1$ 所围成的面积为 $\frac{1}{3}$，确定 a,b,c，使此图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小.

【解】　因为曲线 $y=ax^2+bx+c$ 经过原点，所以 $c=0$.

由 $\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$ 得 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$，即 $2a+3b=2$.

又 $V(a)=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}\right)=\pi\left(\frac{2a^2}{135}+\frac{a}{27}+\frac{4}{27}\right)$，

由 $V'(a)=\pi\left(\frac{4a}{135}+\frac{1}{27}\right)=0$ 得 $a=-\frac{5}{4}$，因为 $V''(a)=\frac{4\pi}{135}>0$，所以当 $a=-\frac{5}{4}$ 时，旋转体体积最小，此时 $a=-\frac{5}{4},b=\frac{3}{2},c=0$.

【例 6】　过曲线 $y=x^2(x>0)$ 上一点 $P(a,a^2)$ 作切线，该曲线、切线与 x 轴围成图形 D 的面积为 $\frac{1}{12}$，求切点坐标和切线方程，并求图形 D 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

【解】　切线为 $L:y-a^2=2a(x-a)$，即 $L:y=2ax-a^2$，令 $2ax-a^2=0$ 得 $x=\frac{a}{2}$.

由 $\int_0^a x^2\mathrm{d}x-\int_{\frac{a}{2}}^a(2ax-a^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$ 得 $a=1$，

于是切点为 $P(1,1)$，切线方程为 $L:y=2x-1$，

$$V=\pi\int_0^1 x^4\mathrm{d}x-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 7】　设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 满足：(1) $a<0$ 且过点 $(0,0)$ 及 $(1,2)$；(2) 与抛物线 $y=2x-x^2$ 围成的图形面积最小，求常数 a,b,c.

【解】　因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $(0,0)$ 及 $(1,2)$，所以 $c=0,a+b=2$.

因为抛物线 $y=2x-x^2$ 开口向下且顶点坐标为 $(1,1)$，所以抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向下且位于 $y=2x-x^2$ 上方.

由 $\begin{cases}y=ax^2+(2-a)x\\y=2x-x^2\end{cases}$，得两抛物线交点为 $(0,0)$ 及 $\left(\frac{a}{1+a},\frac{2a+a^2}{(1+a)^2}\right)$，

两抛物线围成的面积为 $S(a)=\int_0^{\frac{a}{1+a}}[ax^2+(2-a)x-2x+x^2]\mathrm{d}x=-\frac{a^3}{6(1+a)^2}$，

令 $S'(a)=-\frac{a^2(a+3)}{6(1+a)^3}=0$ 得 $a=-3$.

当 $a<-3$ 时，$S'(a)<0$；当 $-3<a<-1$ 时，$S'(a)>0$，于是 $a=-3$ 时面积最小，故 $a=-3,b=5,c=0$.

【例 8】　求摆线 $\begin{cases}x=a(1-\cos t)\\y=a(t-\sin t)\end{cases}(a>0,0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的弧长.

【解】　任取 $[t,t+\mathrm{d}t]\subset[0,2\pi]$，对应的弧元素为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2(1-\cos t)^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t,$$

$$s=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t=4a\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)=8a.$$

【例 9】 设 $\rho=\rho(x)$ 为曲线 $y=\sqrt{x}$ 上任意一点 $M(x,y)(x\geqslant 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 为该曲线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，求 $3\rho\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$.

【解】 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$y''=-\dfrac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$，则 $\rho(x)=\dfrac{1}{K}=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\dfrac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}$，

$$S(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x.$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{3}{4}\sqrt{4x+1}\cdot 4}{\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}}=6\sqrt{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}x}=\frac{6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}},$$

故 $3\rho\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2=3\cdot\dfrac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{4x+1}}-(6\sqrt{x})^2=9.$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

题型九 定积分的物理应用

【例 1】 有一椭圆形水闸，其边界曲线为 $L:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，如图 1-5-11，设水深为 3 米，求水对闸门的压力.

【解】 取 $[y,y+\mathrm{d}y]\subset[-2,1]$，

$$\mathrm{d}A=2\times\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y=3\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y,$$

从而 $\mathrm{d}F=3\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y\times\rho\times g\times(1-y)$

$$=3\rho g(1-y)\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y,$$

于是 $F=3\rho g\int_{-2}^{1}(1-y)\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{y=2\sin t}3\rho g\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin t)\times 4\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

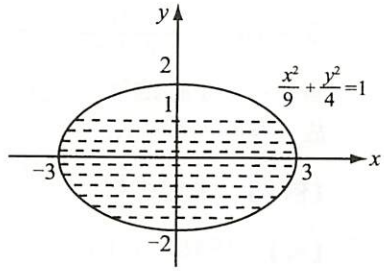


图 1-5-11

$$=12\rho g\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,dt-24\rho g\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\sin t\cos^2 t\,dt$$

$$=\rho g\left(4\pi+\frac{9}{2}\sqrt{3}\right).$$

【例 2】　一水闸闸门上方是高为 3，宽为 2 的矩形，下方由半径为 1 的半圆构成，已知水面与闸门上方一致，求水对闸门的压力.

【解】　取闸门底端沿中轴向上为 x 轴，圆心为坐标原点，

取$[x,x+dx]\subset[-1,0]$，　$dF_{下}=\rho g(3-x)\cdot 2\sqrt{1-x^2}\,dx$，

则 $F_{下}=2\rho g\int_{-1}^{0}(3-x)\sqrt{1-x^2}\,dx=6\rho g\int_{-1}^{0}\sqrt{1-x^2}\,dx-2\rho g\int_{-1}^{0}x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$=6\rho g\times\frac{\pi}{4}+\rho g\int_{-1}^{0}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1-x^2)$$

$$=\frac{3\pi}{2}\rho g+\frac{2}{3}\rho g(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0}=\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2}{3}\right)\rho g;$$

取$[x,x+dx]\subset[0,3]$，　$dF_{上}=\rho g(3-x)\cdot 2dx$

则 $F_{上}=2\rho g\int_{0}^{3}(3-x)\,dx=9\rho g$，

故水对闸门的压力为 $F=\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2}{3}\right)\rho g+9\rho g=\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{29}{3}\right)\rho g$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 3】　如图 1-5-12，铁斗放入井底装满泥，由钢丝绳拉至井口，已知井深 30 米，空斗重 200 牛，泥重 2000 牛，钢丝绳 50 牛 / 米，拉升速度为 3 米 / 秒，拉升过程中泥以 20 牛 / 秒的速度从斗中漏掉，问从井底将斗拉至井口，拉力做功多少？

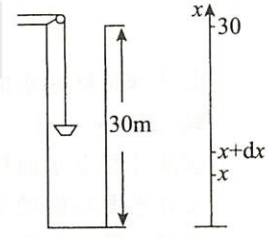


图 1-5-12

【解】　设拉力对空斗做功为 W_1，则 $W_1=200\times 30=6\,000$(焦耳).

设拉力对钢丝绳做功为 W_2，以井底为原点，垂直向上为 x 轴建立坐标系，对任取$[x,x+dx]\subset[0,30]$，有

$dW_2=50\times(30-x)dx$，

$W_2=50\int_{0}^{30}(30-x)dx=22\,500$(焦耳).

设拉力对泥做功为 W_3，从井底到井口一共需要 10 秒钟，对任意的$[t,t+dt]\subset[0,10]$有

$dW_3=(2\,000-20t)\times 3dt$，

$W_3=3\int_{0}^{10}(2\,000-20t)dt=57\,000$(焦耳)，

故拉力所做的功为 $W=W_1+W_2+W_3=85\,500$(焦耳).

【例 4】　用铁锤将钉子钉入木块中，木块对钉子的阻力与钉子进入木块深度成正比，已知第一次击打钉子进入木块 1 厘米，如铁锤每次击打做功相等，求第二次击打钉子进入木块的距离.

【解】　取$[x,x+dx]\subset[0,1]$，第一次击打功元素为 $dW_1=kx\cdot dx$，第一次击打所做的功为 $W_1=\int_{0}^{1}kx\,dx=\frac{k}{2}$.

设第二次击打钉子深度为 h，取$[x,x+dx]\subset[1,h]$，

第二次击打功元素为 $dW_2=kx\cdot dx$，第二次击打所做的功为 $W_2=\int_{1}^{h}kx\,dx=\frac{k}{2}(h^2-1)$.

因为第一次击打与第二次击打所做的功相等，所以$\frac{k}{2}=\frac{k}{2}(h^2-1)$，解得$h=\sqrt{2}$，即第二次击打钉子进入木块的距离为$\sqrt{2}-1$厘米.

【例 5】 有一半径为 R 的球体(其密度 $\rho>1$)，沉入深度为 $H(>2R)$ 的水中，现将该球从水中提到刚好离开水面，求拉力做多少功?

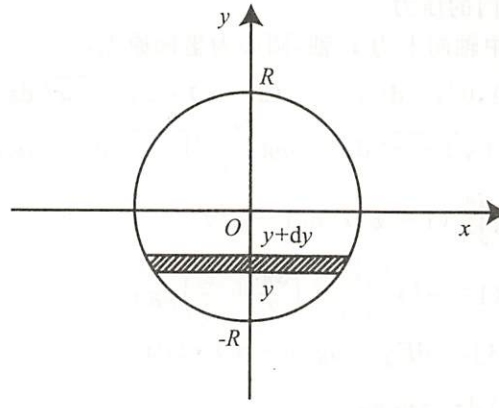


图 1-5-13

微信公众号:顶尖考研
(ID:dijkyb6)

【解】 建立如图(1-5-13)所示的坐标系，设拉力拉球到球顶刚好接触水面时做功为 W_1，则

$$W_1=(\rho-1)g\cdot\frac{4\pi R^3}{3}\cdot(H-2R).$$

设从球顶接触水面到球离开水面拉力做功为 W_2，

取$[y,y+\mathrm{d}y]\subset[-R,R]$，对应的薄片体积为 $\pi(R^2-y^2)\mathrm{d}y$，

该薄片移至水面拉力做功为$(\rho-1)g\cdot\pi(R^2-y^2)(R-y)\mathrm{d}y$，

离开水面后做的功为 $\rho g\cdot\pi(R^2-y^2)(R+y)\mathrm{d}y$，

即将此薄片上提 $2R$ 所做的功为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W_2&=(\rho-1)g\cdot\pi(R^2-y^2)(R-y)\mathrm{d}y+\rho g\cdot\pi(R^2-y^2)(R+y)\mathrm{d}y\\&=(\rho-1)g\cdot\pi(R^2-y^2)(R-y)\mathrm{d}y+\rho g\cdot\pi(R^2-y^2)(R+y)\mathrm{d}y\\&=\pi g[(2\rho-1)R+y](R^2-y^2)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_2&=\int_{-R}^{R}\pi g[(2\rho-1)R+y](R^2-y^2)\mathrm{d}y\\&=2\pi(2\rho-1)gR\int_0^R(R^2-y^2)\mathrm{d}y=\frac{4\pi}{3}(2\rho-1)gR^4,\end{aligned}$$

故总做功为 $W=(\rho-1)g\cdot\frac{4\pi R^3}{3}\cdot(H-2R)+\frac{4\pi}{3}(2\rho-1)gR^4$.

测试题

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 连续，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x\,(t>0,s>0)$，则 I(　　).

(A) 为常数　　(B) 为与 s 与 t 都有关的量

(C) 为与 s 有关而与 t 无关的量　　(D) 为与 s 无关而与 t 有关的量

2. 设 $\alpha=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\beta=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，α 是 β 的(　　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小　　(C) 同阶非等价无穷小　　(D) 等价无穷小

3. 设 $f(0)=1,f(2)=3,f'(2)=5$，则 $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x$ 等于(　　).

(A)0　　(B)2　　(C) -2　　(D)1

4. 设在 $[a,b]$ 上 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$，则有(　　).

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_1<S_3$　　(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_3<S_1$

5. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$，则 $F(x)$(　　).

(A) 为正常数　　(B) 为负常数　　(C) 恒为零　　(D) 不为常数

6. 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$ 等于(　　).

(A) $xf(x^2)$　　(B) $-xf(x^2)$　　(C) $2xf(x^2)$　　(D) $-2xf(x^2)$

7. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x,I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，则(　　).

(A) $I_1<I_2<1$　　(B) $I_2<I_1<1$　　(C) $1<I_1<I_2$　　(D) $1<I_2<I_1$

8. 下列广义积分发散的是(　　).

(A) $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x}$　　(B) $\int_{-1}^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

二、填空题

1. 设 $f(x)$ 连续，且 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$，则 $\varphi'(x)=$ _____.

2. 设 $f(u)$ 是 u 的连续函数，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x=$ _____.

3. 设 $f(x)$ 一阶连续可导，则 $\lim\limits_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^a[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t=$ _____.

4. 设曲线 $L:y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的法线为 $y=-\frac{1}{2}(x-1)$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^t f(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{x^2}+1)\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\ln\cos x}=\text{_____}.$$

5. 设 n 为正整数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=$ _____.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{2+\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{(n-1)+\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)=$ _____.

7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x=$ _____.

8. $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$ _____.

9. 设 $f(x)=\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$，则 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=$ _____.

10. $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx=$ _____.

11. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)dx$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$ _____.

12. 曲线 $y=\ln x$，$y=(e+1)-x$ 及 x 轴所围成的面积为_____.

13. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点(0,0)及(1,2)且与抛物线 $y=2x-x^2$ 围成的面积最小，则 $a=$ _____，$b=$ _____，$c=$ _____.

14. $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+4x+8}dx=$ _____.

15. $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx=$ _____.

16. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}xe^{-2x}dx$，则 $a=$ _____.

17. 曲线 $y=x^3e^{-2x}(x\geqslant 0)$ 与 x 轴围成的无限区域的面积为 $A=$ _____.

三、解答题

1. 设 $x\geqslant -1$，求 $F(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$.

2. 计算 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$.

3. 计算 $\int_0^{4\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$.

4. 计算 $\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^4+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$.

5. 计算下列定积分：

(1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)dx$；　(2) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\dfrac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$.

6. 计算 $\int_0^{\pi^2}\sin^2\sqrt{x}\,dx$.

7. 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^3dx$.

8. 计算 $\int_0^1\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$.

9. 计算 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx$.

10. 计算 $\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\sin^3 x+\dfrac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\right)dx$.

11. 计算 $\int_0^1 x^2\arcsin x\,dx$.

12. 计算 $\int_0^1\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}dx$.

13. 设 $\int_0^{\pi}\dfrac{\cos x}{(x+2)^2}dx=A$，计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{x+1}dx$.

14. 计算 $\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

15. 计算 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}(a>0)$.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x), & x>0,\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

微信公众号【顶尖考研】 (dp: djky66)

17. 设 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续.

(1) 证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$；

(2) 计算$\int_0^{\pi} x\,\frac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

18. 设 $f(x)$ 连续可导，$g(x)$ 连续，又 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$ 且 $f(0)=0$，$g(0)=2$，计算 $I=\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$.

19. 设 $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$ 且 $f(1)=1$，求$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

20. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，且 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，证明：

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 是非增函数，则 $F(x)$ 是非减函数.

21. 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数，证明 $F(x)$ 为偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，举例说明 $F(x)$ 不一定为奇函数；

(3) 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，举例说明 $F(x)$ 不一定为周期函数，证明 $F(x)$ 可以表示为一个周期函数与一个线性函数之和.

22. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导且 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\,(k>1)$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=\left(1-\frac{1}{\xi}\right)f(\xi)$.

23. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，$f(x)>0$ 且单调减少，对 $0<a<b<1$，证明：

$$b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x > a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

24. 设 $f(x)$ 连续可导且 $f(a)=0$，令 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$，证明：

$$M^2\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

25. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续可导，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x$.

26. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导，$f(0)=0$，$0\leqslant f'(x)\leqslant 1$，证明：$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$.

27. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导且 $f''(x)\geqslant 0$，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

28. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导且 $f''(x)>0$，证明：$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$.

29. 求 $L_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与 $L_2:\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b)$ 所围成的公共区域的面积.

30. 求曲线 $y=1-x^2$ 在第一象限上的一点，使过该点的切线与曲线及两坐标轴所围成图形面积最小，并求最小面积.

31. 求曲线 $L:\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0,0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的长度.

32. 求由$(x-2)^2+y^2=1$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

33. 过原点作曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 的切线，求由 x 轴、曲线及曲线的切线所围成的区域绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的表面积.

34. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

35. 原点处有一质量为 m 的质点，距离原点 $a(a>0)$ 往右有长是 L 质量为 M 的均匀细棒，求质点与细棒之间引力的大小.

36. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f'(x)>0$，证明：存在唯一的 $\xi\in(a,b)$，使得曲线 $y=f(x)$ 与 $y=f(\xi)$，$x=a$ 围成的面积 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与 $y=f(\xi)$，$x=b$ 围成面积 S_2 的两倍.

37. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上二阶连续可导 $(a>0)$，$f(0)=0$，

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(2) 证明：存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

38. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|.$$

39. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

40. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加且 $f''(x)>0$，证明：

$$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{2}(b-a)[f(b)+f(a)].$$

41. 计算下列广义积分：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$；　(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

42. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

测试题参考答案

一、选择题

1. 因为 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}(tx)=\int_0^{s}f(u)\mathrm{d}u$，所以 I 只与 s 有关，应选(C).

2. 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\frac{\sin 5x}{5x}}{mx^{m-1}}=\dfrac{5}{m}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^{m-1}}$ 得 $\alpha\sim5x$，由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}{nx^{n-1}}=\dfrac{\mathrm{e}}{n}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^{n-1}}$ 得 $\beta\sim\mathrm{e}x$，所以 α 是 β 的同阶但非等价无穷小，选(C).

3. $\int_0^1xf''(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^1 2xf''(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{4}\int_0^2xf''(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^2x\mathrm{d}f'(x)=\frac{1}{4}xf'(x)\Big|_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2f'(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}[f(2)-f(0)]=2$，选(B).

4. 因为 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 为单调减函数，于是 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>S_2=f(b)(b-a)$，(A)，(C) 不对；又因为 $f''(x)>0$，所以 $f(x)$ 为凹函数，于是 $S_3=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]>S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，故选(B).

5. $F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin t}\sin t-\mathrm{e}^{-\sin t}\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\sin t\,\mathrm{d}t>0$，选(A).

6. $\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u$，

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u=xf(x^2)$，选(A).

7. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x<x<\tan x$（见高等数学教材极限存在准则部分的单位圆），于是 $I_1>I_2$. 令 $\varphi(x)=\frac{\tan x}{x}-\frac{4}{\pi}$，$\varphi'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}=\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2 x}>0\left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)$，又 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，所以 $\frac{\tan x}{x}<\frac{4}{\pi}$，从而 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x<1$，于是 $1>I_1>I_2$，应选(B).

8. $\int_3^b\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x}=-\frac{1}{2\ln^2 x}\Big|_3^b=-\frac{1}{2\ln^2 b}+\frac{1}{2\ln^2 3}$，因为 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_3^b\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x}=\frac{1}{2\ln^2 3}$，所以 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x}$ 收敛；因为 $\frac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}\sim\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}(x\to+\infty)$ 且 $\frac{3}{2}>1$，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$ 收敛；因为 $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\frac{1}{2}<1$，所以 $\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 收敛；因为 $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\frac{1}{\sin x}=1$ 且 $1\geqslant1$，所以 $\int_{-1}^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$ 发散，故选(B).

二、填空题

1. $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t=\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t-\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$，则 $\varphi'(x)=\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t+f(x)\sin x\cos x+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t-f(x)\sin x\cos x=\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$.

2. $\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x=\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}(x-y)=\int_{-y}^0 f(u)\mathrm{d}u=-\int_0^{-y}f(u)\mathrm{d}u$，于是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x=f(-y)$.

3. $\int_{-a}^a[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t=\int_{-a}^a f(t+a)\mathrm{d}(t+a)-\int_{-a}^a f(t-a)\mathrm{d}(t-a)=\int_0^{2a}f(u)\mathrm{d}u-\int_{-2a}^0 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{2a}f(u)\mathrm{d}u+\int_0^{-2a}f(u)\mathrm{d}u$，则 $\lim\limits_{a\to0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^a[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t=\lim\limits_{a\to0^+}\frac{\int_0^{2a}f(u)\mathrm{d}u+\int_0^{-2a}f(u)\mathrm{d}u}{4a^2}=\lim\limits_{a\to0^+}\frac{f(2a)-f(-2a)}{4a}=\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to0^+}\left[\frac{f(2a)-f(0)}{2a}+\frac{f(-2a)-f(0)}{-2a}\right]=f'(0)$.

4. 因为 $L:y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的法线为 $y=-\frac{1}{2}(x-1)$，所以 $f(1)=0$，$f'(1)=2$. $\int_0^{x^2}\mathrm{e}^t f(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{x^2}+1)\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}f(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{x^2}+1)\mathrm{d}(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{x^2}+1)=\int_{2-\mathrm{e}^{x^2}}^1 f(u)\mathrm{d}u=-\int_1^{2-\mathrm{e}^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^t f(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{x^2}+1)\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\ln\cos x}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_1^{2-\mathrm{e}^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u}{x^2\ln[1+(\cos x-1)]}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_1^{2-\mathrm{e}^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u}{x^2(1-\cos x)}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_1^{2-\mathrm{e}^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u}{x^4}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}f(2-\mathrm{e}^{x^2})}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2-\mathrm{e}^{x^2})}{x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2-\mathrm{e}^{x^2})-f(1)}{x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2-\mathrm{e}^{x^2})-f(1)}{2-\mathrm{e}^{x^2}-1}\cdot\frac{2-\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}=f'(1)=2$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\ln\left[1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right]}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}x}$，而 $\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$，故原式 $=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-2}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{2+\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{(n-1)+\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=2}^n\frac{1}{\frac{i-1}{n}+\sqrt{1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djkyes)

$\xrightarrow{x+t=\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$,

于是原式 $=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}x\,\mathrm{d}(\cos x)=\frac{4}{3}$.

8. $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)=\int_{-1}^0\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

$\xrightarrow{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$.

9. $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x^3)=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}(1+x^4)=-\frac{1}{6}\sqrt{1+x^4}\Big|_0^1=\frac{1-\sqrt{2}}{6}$.

10. $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x=50\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x=50\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x=100\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$

$=100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,\mathrm{d}x=100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=200\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=200\sqrt{2}$.

11. 令$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$,则 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+Ax^3$,两边对 x 从 0 到 1 积分得$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{A}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{A}{4}$,即 $A=\frac{\pi}{4}+\frac{A}{4}$,解得$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

12. 填$\frac{3}{2}$.

13. 由已知条件得 $c=0,a+b=2$. 由$\begin{cases}y=ax^2+(2-a)x,\\ y=2x-x^2\end{cases}$得 $x_1=0,x_2=\frac{a}{a+1}$,两曲线围成的面积为 $S(a)=\int_0^{\frac{a}{a+1}}[ax^2+(2-a)x-(2x-x^2)]\mathrm{d}x=-\frac{a^3}{6(a+1)^2}$,令 $S'(a)=0$,解得 $a=-3,b=5$.

14. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+8}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2^2+(x+2)^2}\mathrm{d}(x+2)=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}$.

15. $\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\xrightarrow{x^2=t}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

16. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-2a}{x+a}\right)^{-\frac{x+a}{2a}}\right]^{-\frac{2ax}{x+a}}=\mathrm{e}^{-2a}$,$\int_a^{+\infty}x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{2a+1}{4}\mathrm{e}^{-2a}$,

由 $\mathrm{e}^{-2a}=\frac{2a+1}{4}\mathrm{e}^{-2a}$ 得 $a=\frac{3}{2}$.

17. $A=\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\int_0^{+\infty}(2x)^3\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{16}\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\Gamma(4)=\frac{3}{8}$.

三、解答题

1. 当 $-1\leqslant x<0$ 时,$F(x)=\int_{-1}^x(1+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x+1)^2$;当 $x\geqslant 0$ 时,$F(x)=\int_{-1}^0(1+t)\mathrm{d}t+\int_0^x(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}$,于是 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+1)^2, & -1\leqslant x<0,\\ \frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

2. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx=\int_{1}^{e}\ln x\,dx-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,dx=x\ln x\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}1dx-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}1dx=2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

3. $\int_{0}^{4\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx=4\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx=4\int_{0}^{\pi}|\sin x-\cos x|\,dx=4\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|d\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin x|\,dx=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,dx=8\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=8\sqrt{2}$.

4. $\int_{-1}^{1}\frac{2x^4+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x^4}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_{0}^{1}\frac{x^4}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_{0}^{1}x^2(1-\sqrt{1-x^2})dx=\frac{4}{3}-$

$4\int_{0}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\frac{4}{3}-4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\,dt=\frac{4}{3}-4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t(1-\sin^2t)\,dt=\frac{4}{3}-4(I_2-I_4)=\frac{4}{3}-\frac{\pi}{4}$.

5. (1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2x)\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2x)\,dx$

$=\pi+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx=\pi+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(2) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,d\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$

$=\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}\Big|_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}dx\overset{x=\tan t}{=\!=\!=}\frac{3}{8}\ln 3-\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sec^2t\,dt}{(1-\tan^2t)\sec t}$

$=\frac{3}{8}\ln 3+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{d(\sqrt{2}\sin t)}{(\sqrt{2}\sin t)^2-1}=\frac{3}{8}\ln 3+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin t-1}{\sqrt{2}\sin t+1}\right|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{8}\ln 3+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1)$.

6. $\int_{0}^{\pi^2}\sin^2\sqrt{x}\,dx\overset{x=t^2}{=\!=\!=}2\int_{0}^{\pi}t\sin^2t\,dt=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\sin^2t\,dt=\pi\int_{0}^{\pi}\sin^2t\,dt=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\,dt=2\pi I_2=\frac{\pi^2}{2}$.

7. $\int_{0}^{1}x(1-x^4)^3dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-x^4)^3d(x^2)=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^3dx\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^7t\,dt$

$=\frac{1}{2}I_7=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{35}$.

8. $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx\overset{x=\tan t}{=\!=\!=}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2t}{\sec^4t}\cdot\sec^2t\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2t\,dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)\,dt=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\,d(2t)$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.

9. $\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx\overset{e^x=t}{=\!=\!=}\int_{1}^{2}\sqrt{1-t^{-2}}\cdot\frac{dt}{t}=\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2}dt=\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx\overset{x=\sec t}{=\!=\!=}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan t}{\sec^2t}\cdot\sec t\tan t\,dt$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2t}{\cos t}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sec t\,dt-\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos t\,dt=\ln|\sec t+\tan t|\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}-\sin t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. $\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\sin^3x+\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3x\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}dx$，而$\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3x\,dx=2\int_{0}^{\pi}x\sin^3x\,dx=$

$2\cdot\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\sin^3x\,dx=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\,dx=\frac{4}{3}\pi$；$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}+\frac{\cos^2x}{1+e^{x}}\right)dx=\int_{0}^{\pi}\cos^2x\,dx=$

$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=2I_2=\frac{\pi}{2}$，于是$\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\sin^3x+\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}\right)dx=\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{11\pi}{6}$.

11. $\int_{0}^{1}x^2\arcsin x\,dx=\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\arcsin x\,d(x^3)=\frac{x^3}{3}\arcsin x\Big|_{0}^{1}-\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3t}{\cos t}\cdot\cos t\,dt=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\,dt=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 1=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}$.

12. $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 \frac{(x+1)e^x - e^x}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx + \int_0^1 e^x d\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$= \frac{e^x}{1+x}\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1.$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{x+1}dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{x+1}d(2x) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\frac{x}{2}+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+2}dx$

$= -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{x+2}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{A}{2}.$

14. 方法一：令 $x = \frac{1-t}{1+t}$，$dx = -\frac{2}{(1+t)^2}dt$，则 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx \xrightarrow{x=\frac{1-t}{1+t}} \int_1^0 \frac{\ln\frac{2}{1+t}}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(1+t)^2}dt$

$= \int_0^1 \frac{\ln 2 - \ln(1+t)}{1+t^2}dt = \ln 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$，于是 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

方法二：$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx \xrightarrow{x=\tan t} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan t)}{\sec^2 t} \cdot \sec^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}-t}$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\tan t}dt = \ln 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$，于是 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

15. $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} \xrightarrow{x=\frac{1}{t}} \int_{+\infty}^0 \frac{-t^{-2}dt}{(1+t^{-2})(1+t^{-a})} = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)}dx$，于是 $2I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} + \int_0^{+\infty} \frac{x^a dx}{(1+x^2)(1+x^a)} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} = \frac{\pi}{4}.$

16. $\int_0^2 f(x-1)dx = \int_0^2 f(x-1)d(x-1) = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^1 \ln(1+2x)dx = \arctan x\Big|_{-1}^0$

$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+2x)d(1+2x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_1^3 \ln x\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x\ln x\Big|_1^3 - \frac{1}{2}\int_1^3 dx = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\ln 3 - 1.$

17. (1) 令 $I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$，则 $I \xrightarrow{x+t=\pi} \int_{\pi}^0 (\pi-t)f(\sin t)(-dt) = \int_0^{\pi} (\pi-t)f(\sin t)dt = \int_0^{\pi} (\pi-x)f(\sin x)dx$

$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - I$，于是 $I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$. 又 $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$，而 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx \xrightarrow{x-\frac{\pi}{2}=t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$，于是 $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$，故 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx.$

(2) $\int_0^{\pi} x\frac{1}{1+\sin^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + \tan^2 x}dx$

$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sqrt{2}\tan x)}{1+(\sqrt{2}\tan x)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}.$

18. $I = \int_0^{\pi} \frac{g(x)}{1+x}dx + \int_0^{\pi} f(x)d\left(\frac{1}{1+x}\right) = \int_0^{\pi} \frac{g(x)}{1+x}dx + \frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{g(x)}{1+x} = \frac{f(\pi)}{1+\pi}$. 由 $f'(x) = g(x)$，$g'(x) = 2e^x - f(x)$ 得 $f''(x) + f(x) = 2e^x$，其通解为 $f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + e^x$. 由 $f(0) = 0, f'(0) = g(0) = 2$ 得 $C_1 = -1, C_2 = 1$，于是 $f(x) = \sin x - \cos x + e^x$，故 $I = \int_0^{\pi} \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx = \frac{f(\pi)}{1+\pi}$

$=\dfrac{e^{\pi}+1}{1+\pi}$.

19. $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{2x-t=u} \int_{2x}^{x}(2x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u$，则 $2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$，两边对 x 求导数得 $2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u+2x[2f(2x)-f(x)]-[4xf(2x)-xf(x)]=\dfrac{x}{1+x^4}$，整理得 $2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-xf(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$，取 $x=1$ 得 $2\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x-f(1)=\dfrac{1}{2}$，解得 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}$.

20. (1) 设 $f(-x)=f(x)$，则 $F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_0^x(-x+2u)f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x(x-2u)f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t=F(x)$，于是 $F(x)$ 为偶函数.

(2) $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，$F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=xf(\xi)-xf(x)=x[f(\xi)-f(x)]$（$\xi$ 介于 0 与 x 之间）. 当 $x\geqslant 0$ 时，因为 $0\leqslant\xi\leqslant x$ 且 $f(x)$ 是非增函数，所以 $F'(x)\geqslant 0$；当 $x<0$ 时，因为 $x\leqslant\xi\leqslant 0$ 且 $f(x)$ 是非增函数，所以 $F'(x)\geqslant 0$，于是 $F(x)$ 是非减函数.

21. (1) 设 $f(-x)=-f(x)$，则

$F(-x)=\int_a^{-x}f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_{-a}^{x}f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_{-a}^{x}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-a}^{a}f(u)\mathrm{d}u+\int_a^x f(u)\mathrm{d}u$，

因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $\int_{-a}^{a}f(u)\mathrm{d}u=0$，于是 $F(-x)=\int_a^x f(u)\mathrm{d}u=F(x)$.

(2) 设 $f(x)=3x^2$ 为偶函数，显然 $F(x)=x^3+1$ 不是奇函数.

(3) 设 $f(x)=\cos x-1$ 为周期函数，但 $F(x)=\sin x-x+C$ 不是周期函数.

$F(x)=\int_a^x[f(t)-b]\mathrm{d}t+b(x-a)$，令 $G(x)=\int_a^x[f(t)-b]\mathrm{d}t$，

$G(x+T)=\int_a^{x+T}[f(t)-b]\mathrm{d}t=G(x)+\int_x^{x+T}[f(t)-b]\mathrm{d}t=G(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-bT$，取 $b=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，则 $G(x)$ 是以 T 为周期的函数，故 $F(x)$ 可表示为周期函数与线性函数之和.

22. 令 $\varphi(x)=xe^{-x}f(x)$，由积分中值定理 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x=ce^{1-c}f(c)$，其中 $c\in\left[0,\dfrac{1}{k}\right]$，于是 $e^{-1}f(1)=ce^{-c}f(c)$，即 $\varphi(c)=\varphi(1)$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，而 $\varphi'(x)=e^{-x}[f(x)-xf(x)+xf'(x)]$ 且 $e^{-x}\neq 0$，故 $f'(\xi)=\left(1-\dfrac{1}{\xi}\right)f(\xi)$.

23. 令 $\varphi(x)=x\int_0^a f(t)\mathrm{d}t-a\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(x\in[a,1])$，$\varphi(a)=a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t>0$，$\varphi'(x)=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t-af(x)=\int_0^a[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t\geqslant 0(x\in[a,1])$. 由 $\begin{cases}\varphi(a)>0,\\ \varphi'(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$ 得 $\varphi(x)>0(a\leqslant x\leqslant 1)$，因为 $a<b<1$，所以 $\varphi(b)>0$，于是 $b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x>a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

24. 令 $M=|f(c)|$，由 $f(a)=0$ 得 $f(c)=\int_a^c f'(x)\mathrm{d}x$，于是 $M^2=f^2(c)=\left(\int_a^c f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^c 1^2\mathrm{d}x\int_a^c f'^2(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x$.

25. 由 $f(0)=f(1)=0$ 得 $f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$ 及 $f(x)=\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t$. 由 $f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$ 得 $f^2(x)=\left(\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_0^x 1^2\mathrm{d}t\cdot\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t\leqslant x\int_0^1 f'^2(t)\mathrm{d}t$；再由 $f(x)=\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t$ 得 $f^2(x)=\left(\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_x^1 1^2\mathrm{d}t\int_x^1 f'^2(t)\mathrm{d}t=(1-x)\int_x^1 f'^2(t)\mathrm{d}t\leqslant(1-x)\int_0^1 f'^2(t)\mathrm{d}t$，于是

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\mathrm{d}x\right)\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x$.

26. 令 $\varphi(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t,\varphi(0)=0.\varphi'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^3(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$,因为 $f'(x)\geqslant 0$ 且 $f(0)=0$,所以当 $x\in[0,1]$ 时,$f(x)\geqslant 0$. 令 $h(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x),h(0)=0.h'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)]\geqslant 0(x\in[0,1])$. 由 $\begin{cases}h(0)=0,\\ h'(x)\geqslant 0(0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$ 得 $h(x)\geqslant 0$,于是 $\varphi'(x)\geqslant 0$. 由 $\begin{cases}\varphi(0)=0,\\ \varphi'(x)\geqslant 0(0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$ 得 $\varphi(x)\geqslant 0$,于是 $\varphi(1)\geqslant 0$,故 $\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$.

27. 由泰勒公式得 $f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$,其中 ξ 介于 $\frac{a+b}{2}$ 与 x 之间. 因为 $f''(x)\geqslant 0$,所以 $f(x)\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$,两边积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

28. 因为 $f''(x)>0$,所以 $f(t)\geqslant f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)$,于是有 $f(x^2)\geqslant f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$,两边积分得 $\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$.

微信公众号【质尖考研】 ID: dky66

29. 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则 $L_1:r^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta},L_2:r^2=\frac{a^2b^2}{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}$,令 $\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}=\frac{a^2b^2}{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}$,则 $|\tan\theta|=1$,由对称性得 $A=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2b^2}{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=4a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{a^2+(b\tan\theta)^2}\mathrm{d}\theta$

$=4a^2b\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(b\tan\theta)}{a^2+(b\tan\theta)^2}=4ab\arctan\frac{b\tan\theta}{a}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4ab\arctan\frac{b}{a}$.

30. 设所求点为 $(a,1-a^2)$,切线方程为 $y-(1-a^2)=-2a(x-a)$,即 $y=-2ax+a^2+1$,令 $x=0$ 得 $y=a^2+1$,令 $y=0$ 得 $x=\frac{a^2+1}{2a}$,所求面积为 $S(a)=\frac{(a^2+1)^2}{4a}-\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{(a^2+1)^2}{4a}-\frac{2}{3}$,由 $S'(a)=\frac{(a^2+1)(3a^2-1)}{4a^2}=0$ 得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$,因为只有唯一一个驻点,故当 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,所围成的面积最小,最小面积为 $S\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2(2\sqrt{3}-3)}{9}$.

31. $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$

$=2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t=4a\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,\mathrm{d}t=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\,\mathrm{d}u=8a$.

32. 取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[1,3]$,

$\mathrm{d}V=2\pi x[\sqrt{1-(x-2)^2}-(-\sqrt{1-(x-2)^2})]\mathrm{d}x=4\pi x\sqrt{1-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$,

$V=4\pi\int_1^3 x\sqrt{1-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x-2=t}4\pi\int_{-1}^1(t+2)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=8\pi\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

$=16\pi\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=16\pi\cdot\frac{\pi}{4}=4\pi^2$.

33. 如图 1-5-14,设切点为 $(a,\sqrt{a-1})$,由 $\frac{1}{2\sqrt{a-1}}=\frac{\sqrt{a-1}}{a}$ 得 $a=2$,则切点为 $(2,1)$,切线为 $y-1=$

$\frac{1}{2}(x-2)$，即 $y=\frac{1}{2}x$. 切线 $y=\frac{1}{2}x(0\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体表面积为 $A_1=2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi\int_0^2 x\,dx=\sqrt{5}\pi$；曲线 $y=\sqrt{x-1}(1\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体表面积为 $A_2=2\pi\int_1^2 y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\,dx=\frac{\pi}{4}\int_1^2\sqrt{4x-3}\,d(4x-3)=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$，故旋转体的表面积为 $A=\frac{(11\sqrt{5}-1)\pi}{6}$.

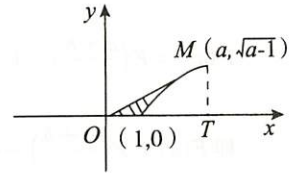


图 1-5-14

34. 如图 1-5-15，令 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则 $V=2\cdot\pi\int_0^a f^2(x)dx=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2\sin^6 t\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)dt=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 t\,dt=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t(1-\sin^2 t)dt=6\pi a^3(I_7-I_9)=\frac{32}{105}\pi a^3$.

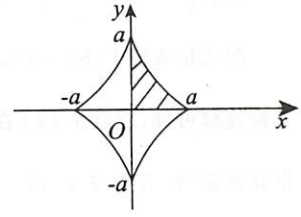


图 1-5-15

35. 取 $[x,x+dx]\subset[a,a+L]$，$|dF|=k\cdot\frac{m\cdot\frac{M}{L}dx}{x^2}$，其中 k 为引力常数，于是 $|F|=\frac{kmM}{L}\int_a^{a+L}\frac{dx}{x^2}=\frac{kmM}{L}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+L}\right)=\frac{kmM}{a(a+L)}$.

36. 令 $S_1(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]dx$，$S_2(t)=\int_t^b[f(x)-f(t)]dx$，再令 $\varphi(t)=S_1(t)-2S_2(t)$，$\varphi(a)=-2\int_a^b[f(x)-f(a)]dx<0$，$\varphi(b)=\int_a^b[f(b)-f(x)]dx>0$，因为 $\varphi(a)\varphi(b)<0$，所以存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi(\xi)=0$，即 $S_1(\xi)=2S_2(\xi)$. $\varphi(t)=(t-a)f(t)-\int_a^t f(x)dx-2\int_t^b f(x)dx+2(b-t)f(t)$，因为 $\varphi'(t)=(t-a)f'(t)+2(b-t)f'(t)=[(t-a)+2(b-t)]f'(t)>0(a<t<b)$，所以 ξ 是唯一的.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

37. (1) $f(x)$ 的带拉格朗日型余项的一阶麦克劳林公式为 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$，其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

(2) $f(x)=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$ 两边在 $[-a,a]$ 上积分得 $\int_{-a}^a f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^a f''(\xi)x^2dx$. 因为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，所以 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，由 $m\leqslant f''(\xi)\leqslant M$ 得 $\frac{1}{2}mx^2\leqslant\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\leqslant\frac{1}{2}Mx^2$，积分得 $\frac{1}{3}ma^3\leqslant\frac{1}{2}\int_{-a}^a f''(\xi)x^2dx\leqslant\frac{1}{3}Ma^3$，或者 $m\leqslant\frac{3}{a^3}\cdot\frac{1}{2}\int_{-a}^a f''(\xi)x^2dx\leqslant M$，由介值定理，存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\cdot\frac{1}{2}\int_{-a}^a f''(\xi)x^2dx$，于是 $\frac{1}{2}\int_{-a}^a f''(\xi)x^2dx=\frac{a^3}{3}\cdot f''(\eta)$，故 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^a f(x)dx$.

38. 令 $M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$，由微分中值定理得 $f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a)$，其中 $\xi_1\in(a,x)$，$f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b)$，其中 $\xi_2\in(x,b)$，于是有 $|f(x)|\leqslant M(x-a)$ 且 $|f(x)|\leqslant M(b-x)$，故 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}M(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)dx=\frac{(b-a)^2}{4}M=\frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$.

39. 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则 $F'(x)=f(x)$，由泰勒公式得

$$F(a)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{F''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2!}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{F'''(\xi_1)}{3!}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3,$$

即 $F(a)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{a-b}{2}+\frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2!}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}-\frac{f''(\xi_1)}{3!}\cdot\frac{(b-a)^3}{8}$，其中 $\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$；

$$F(b)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{F''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2!}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{F'''(\xi_2)}{3!}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3,$$

即 $F(b)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}+\frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2!}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{f''(\xi_2)}{3!}\cdot\frac{(b-a)^3}{8}$ 其中 $\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$，

两式相减得 $F(b)-F(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{48}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$. 因为 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上二阶连续可导，所以 $f''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上有最小值 m 和最大值 M，又因为 $m\leqslant\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\leqslant M$，所以根据介值定理，存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$，使得 $f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，于是有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$.

40. 因为 $f(x)$ 单调增加，所以 $f(a)\leqslant f(x)$，等号成立当且仅当 $x=a$，于是 $(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 由泰勒公式得 $f(x_0)=f(x)+f'(x)(x_0-x)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x_0-x)^2$，其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间. 因为 $f''(x)>0$，所以 $f(x_0)\geqslant f(x)+f'(x)(x_0-x)$，“=”当且仅当 $x_0=x$. 分别取 $x_0=a,x_0=b$ 得 $\begin{cases}f(a)\geqslant f(x)+f'(x)(a-x),\\ f(b)\geqslant f(x)+f'(x)(b-x),\end{cases}$ 两式相加得 $f(a)+f(b)>2f(x)+f'(x)(a+b-2x)$，两边积分得 $(b-a)[f(a)+f(b)]>2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f'(x)(a+b-2x)\mathrm{d}x$，

而 $\int_a^b f'(x)(a+b-2x)\mathrm{d}x=(a+b-2x)f(x)\Big|_a^b+2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)[f(a)+f(b)]$，

所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{2}(b-a)[f(b)+f(a)]$.

41. (1) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=1.$

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2.$

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}\overset{x=\sec t}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{\sec^4 t\tan t}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}.$$

42. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$，$2I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$，

于是 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}\ln 2.$

微信公号【顶尖考研】(ID: djky66)

第六章　空间解析几何

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

大纲点击

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积)，了解两个向量垂直、平行的条件.

3. 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

4. 掌握平面方程和直线方程及其求法.

5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.

6. 会求点到直线以及点到平面的距离.

7. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念.

8. 了解常用二次曲面的方程及其图形，会求简单的柱面和旋转曲面的方程.

9. 了解空间曲线的参数方程和一般方程. 了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求该投影曲线的方程.

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

第一节　向量的概念与向量的运算

一、向量的基本概念

1. 向量 —— 有大小和方向的量称为向量；长度为零的向量称为零向量，零向量是唯一不确定方向的向量；长度为 1 的向量称为单位向量. 起点为原点 O，终点为点 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的向径.

2. 向量的模 —— 向量 $\vec{a}$ 的大小又称为向量的模或长度，表示为 $|\vec{a}|$.

方向与 $\vec{a}$ 相同而模为 1 的向量称为 $\vec{a}$ 对应的单位向量，记为 $\vec{a}^0$，$\vec{a}^0=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

3. 向量的坐标 —— 设 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 为 x,y,z 轴正方向上的单位向量，若 $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$，称 $\{a_1,b_1,c_1\}$ 为向量 $\vec{a}$ 的坐标，记为 $\vec{a}=\{a_1,b_1,c_1\}$，若点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

4. 方向角与方向余弦 —— 设 $\vec{a}$ 为向量，向量 $\vec{a}$ 与 x 轴、y 轴及 z 轴正方向的夹角称为向量 $\vec{a}$ 的方向角，记为 α,β,γ，而 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

设 $\vec{a}=\{a_1,b_1,c_1\}$，则

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$.

(2) $\vec{a}^0=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\left\{\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},\dfrac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},\dfrac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\right\}$.

(3) $\cos\alpha=\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$.

(4) $\vec{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

二、向量的运算

(一) 向量运算的几何刻画

1. 加法 如图 1-6-1，1-6-2 所示

2. 减法 如图 1-6-3 所示

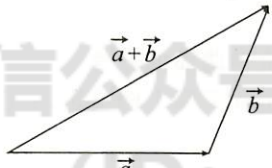


图 1-6-1

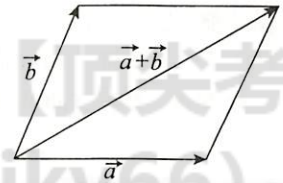


图 1-6-2

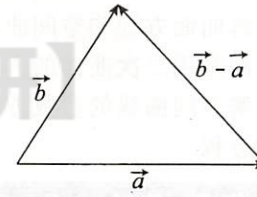


图 1-6-3

3. 向量的乘法

乘法种类	定义	本质
数与向量之积	(1) $k>0$ 时，$k\vec{a}$ 方向与 $\vec{a}$ 相同，长度为 $\vec{a}$ 的 k 倍. (2) $k=0$ 时，$k\vec{a}$ 为零向量. (3) $k<0$ 时，$k\vec{a}$ 方向与 $\vec{a}$ 相反，长度为 $\vec{a}$ 的 $\lvert k\rvert$ 倍.	向量
向量的数量积	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.	标量
向量的向量积	$\vec{a}\times\vec{b}$ 称为向量积，确定方法： (1) 方向：按右手准则确定. (2) 大小或模：$\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.	向量
混合积	$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$	标量

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【注解】

1. 加法运算性质：

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.　　(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

(3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.　　(4) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$.

2. 向量的数量积运算性质：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.　　(2) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

3. 向量积运算性质：

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.　　(2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

4. 向量的混合积运算性质：

(1) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$.

(2) $(k\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},k\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{b},k\vec{c})=k(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

(3) $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$.

(二) 向量运算的代数刻画

设 $\vec{\alpha}=\{a_1,b_1,c_1\}$，$\vec{\beta}=\{a_2,b_2,c_2\}$，$\vec{\gamma}=\{a_3,b_3,c_3\}$，则

1. 向量的加法　$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\{a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2\}$.

2. 向量的减法　$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\{a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2\}$.

3. 向量的乘法

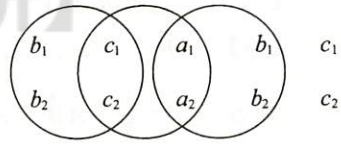


图 1-6-4

(1) 数与向量之积：$k\vec{\alpha}=\{ka_1,kb_1,kc_1\}$.

(2) 向量与向量的数量积：$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$.

(3) 向量积：$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_1&a_1\\c_2&a_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\right\}$，(见图 1-6-4).

(4) 向量的混合积：$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$.

【注解】

设 $\vec{\alpha}=\{a_1,b_1,c_1\}$，$\vec{\beta}=\{a_2,b_2,c_2\}$，则

(1) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|^2$，且 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=0$ 充要条件是 $\vec{\alpha}=\vec{0}$.

(2) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

(3) $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$.

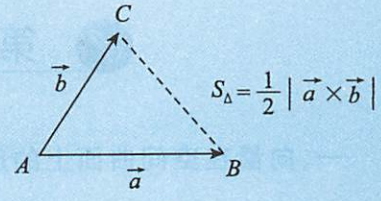


图 1-6-5

微信公众号【启华考研】(ID: djky66)

(4) $|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sin\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle=2S_{\triangle ABC}$，其中三角形如图 1-6-5.

(5) 向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 共面的充要条件是 $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=0$.

(三) 向量的投影

1. 向量投影的定义 如图 1-6-6，设 u 为数轴，$\overrightarrow{AB}$ 为向量，过起点 A 和终点 B 分别作垂直于 u 轴的平面，交点分别为 A_1 及 B_1，称 A_1B_1 为 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影，记为 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A_1B_1$.

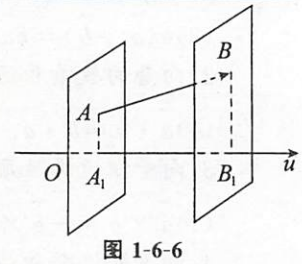


图 1-6-6

2. 投影的计算与性质

(1) $\mathrm{Prj}_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\langle u,\vec{a}\rangle$.

(2) $\mathrm{Prj}_u k\vec{a}=k\,\mathrm{Prj}_u\vec{a}$.

(3) $\mathrm{Prj}_u(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{Prj}_u\vec{a}+\mathrm{Prj}_u\vec{b}$.

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$.

【例 1】 设 $\vec{\alpha}=\{1,-1,2\},\vec{\beta}=\{3,1,4\}$，则 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=$ _____.

【解】 利用公式 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\left\{\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_1&a_1\\c_2&a_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\right\}$ 得 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\{-6,2,4\}$.

【例 2】 已知平面上三点 $A(0,-1,1),B(1,0,2),C(1,1,1)$，求三点构成的三角形面积.

【解】 $\overrightarrow{AB}=\{1,1,1\}$，$\overrightarrow{AC}=\{1,2,0\}$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{-2,1,1\}$，

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

【例 3】 设 $\vec{\alpha}=\{2,1,0\},\vec{\beta}=\{-1,1,2\}$，求与 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 都垂直的单位向量.

【解】 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\{2,-4,3\}$，则与 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 都垂直的单位向量为 $\pm\left\{\dfrac{2}{\sqrt{29}},-\dfrac{4}{\sqrt{29}},\dfrac{3}{\sqrt{29}}\right\}$.

【例 4】 设 $\vec{\alpha}=\{1,2,1\},\vec{\beta}=\{-1,0,2\},\vec{\gamma}=\{0,a,-3\}$ 共面，求 a.

【解】 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 共面的充分必要条件是 $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=0$，即

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&0&2\\0&a&-3\end{vmatrix}=0$$，解得 $a=-2$.

第二节 向量的应用

一、向量在空间曲面上的应用

Σ 为空间曲面，若曲面 Σ 上任一点的坐标都是方程 $F(x,y,z)=0$ 的解，反之，若方程 $F(x,y,z)=0$ 的任一解对应的点位于曲面 Σ 上，称 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 Σ 的方程.

微信公众号[极光考研](ID:jiky66)

（一）特殊的空间曲面

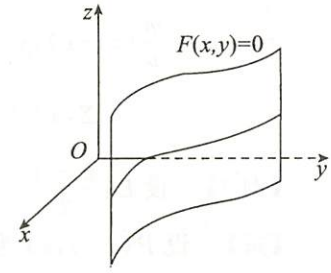


图 1-6-7

1. 柱面（如图 1-6-7）

（1）曲面 $\Sigma: F(x,y)=0$ 为母线平行于 z 轴的空间曲面.

（2）曲面 $\Sigma: F(x,z)=0$ 为母线平行于 y 轴的空间曲面.

（3）曲面 $\Sigma: F(y,z)=0$ 为母线平行于 x 轴的空间曲面.

2. 旋转曲面

（1）二维空间曲线的旋转曲面

设 $L:\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$ 为 xOy 平面上的曲线，则 L 绕 x 轴旋转所得的旋转曲面为 $\Sigma_x: F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

L 绕 y 轴旋转所得的旋转曲面为 $\Sigma_y: F(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.

【例 1】　求椭圆 $L:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$ 分别绕 x 轴，y 轴旋转而成的曲面.

【解】　L 绕 x 轴旋转所得的曲面为 $\Sigma_x: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$，如图 1-6-8；

L 绕 y 轴旋转所得的曲面为 $\Sigma_y: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$，如图 1-6-9.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

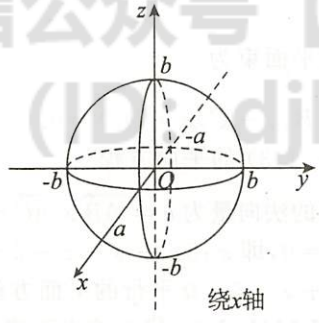


图 1-6-8

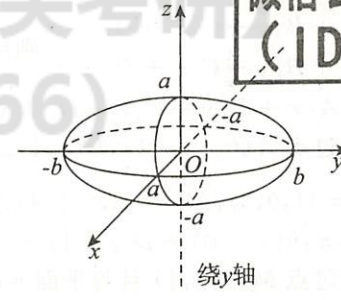


图 1-6-9

【例 2】　求曲线 $L:\begin{cases}z=x^2,\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面.

【解】　L 绕 z 轴旋转所得的曲面为 $\Sigma: z=x^2+y^2$，为旋转抛物面，如图 1-6-10.

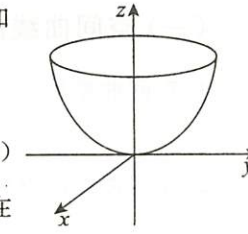


图 1-6-10

（2）三维空间直线的旋转曲面

设 $L:\dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}=\dfrac{z-c}{p}$，$L$ 绕 z 轴旋转所得曲面为 Σ，设 $P(x,y,z)$ 为曲面 Σ 上任意一点，该点所在的圆对应的直线上的点为 $P_0(x_0,y_0,z)$，所在圆的圆心为 $T(0,0,z)$，由 $|PT|=|P_0T|$ 得 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$，再由 $\dfrac{x_0-a}{m}=\dfrac{y_0-b}{n}=\dfrac{z-c}{p}$ 得

$x_0=a+\frac{m}{p}(z-c)$，$y_0=b+\frac{n}{p}(z-c)$，则所求曲面方程为

$$\Sigma:x^2+y^2=\left[a+\frac{m}{p}(z-c)\right]^2+\left[b+\frac{n}{p}(z-c)\right]^2.$$

【例 3】 设 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$，求 L 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面.

【解】 设 $P(x,y,z)$ 为曲面上任意一点，该点所在的圆对应的 L 上的点为 $P_0(x_0,y_0,z)$，则 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$，

由 $\frac{x_0-1}{2}=\frac{y_0+1}{-1}=\frac{z}{1}$ 得 $x_0=1+2z$，$y_0=-1-z$，故所求的曲面为

$\Sigma:x^2+y^2=(1+2z)^2+(-1-z)^2$，即 $\Sigma:x^2+y^2=5z^2+6z+2$.

（二）空间曲面的退化 —— 平面

1. 平面方程的点法式方程

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\pi$，$\vec{n}=\{A,B,C\}\perp\pi$，则平面方程为

$$\pi:A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

2. 平面方程的截距式

$$\pi:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

3. 平面方程的一般式

$$\pi:Ax+By+Cz+D=0.$$

4. 平面束

设 $L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 则经过 L 的平面束为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

【例 1】 求过点 $A(0,1,-1)$，$B(1,1,2)$，$C(2,-1,3)$ 的平面方程.

【解】 $\overrightarrow{AB}=\{1,0,3\}$，$\overrightarrow{AC}=\{2,-2,4\}$，所求平面的法向量为 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{6,2,-2\}$，所求平面为 $\pi:6(x-0)+2(y-1)-2(z+1)=0$，即 $\pi:3x+y-z-2=0$.

【例 2】 求过点 $M(1,2,1)$ 且与平面 $\pi:x-2y+z-5=0$ 平行的平面方程.

【解】 设所求平面为 $\pi_1:x-2y+z+D=0$，将 $M(1,2,1)$ 代入该平面得 $D=2$，故所求平面为 $\pi_1:x-2y+z+2=0$.

二、空间曲线

（一）空间曲线的表示形式

1. 空间曲线的一般形式

$$L:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

2. 空间曲线的参数形式

$$L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\\z=\omega(t).\end{cases}$$

（二）空间曲线的退化 —— 直线

1. 直线方程的一般形式

$$L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】 (ID: djky66)

2. 直线方程的点向式(对称式)

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$，$\vec{s}=\{m,n,p\}\ /\!/\ L$，则 $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

3. 直线方程的参数式　$L:\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt.\end{cases}$

知识延拓模块

一、距离

(一) 两点之间的距离

设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$ 为三维空间的两个点，则点 A 与点 B 之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

(二) 点到平面之间的距离

设平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$，且 $M_0(x_0,y_0,z_0)\notin\pi$，如图 1-6-11，则 M_0 到平面 π 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

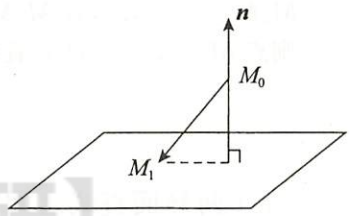


图 1-6-11

微信公众号【顶尖考研】(ID：dijkf6)

【例 1】　求点 $P(1,-1,2)$ 到平面 $\pi:x-y+2z=0$ 之间的距离.

【解】　根据点到平面的距离公式，所求距离为

$$d=\frac{|1-(-1)+2\times2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\sqrt{6}.$$

(三) 两平行平面之间的距离

设 $\pi_1:Ax+By+Cz+D_1=0$，$\pi_2:Ax+By+Cz+D_2=0$ 为两个平行平面，则两平面之间的距离为 $d=\dfrac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

【例 2】　求平面 $\pi_1:x-y+z-1=0$ 与 $\pi_2:x-y+z+2=0$ 之间的距离.

【解】　所求距离为 $d=\dfrac{|2-(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\sqrt{3}$.

(四) 点到直线的距离

设直线 $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，点 $M(x_1,y_1,z_1)\notin L$，如图 1-6-12；其中 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$，$\vec{s}=\{m,n,p\}\ /\!/\ L$，设点 $M(x_1,y_1,z_1)$ 到直线 L 的距离为 d，

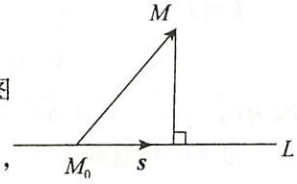


图 1-6-12

$$\overrightarrow{M_0M}=\{x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\},$$

因为 $|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}|=2S_{\triangle}$，$|\vec{s}|\cdot d=2S_{\triangle}$，所以 $|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}|=|\vec{s}|\cdot d$，

则 $$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

【例 3】 求点 $M(1,1,1)$ 到直线 $L:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{3}$ 之间的距离.

【解】 $M_0(1,0,2)\in L$，$\vec{s}=\{-2,1,3\}$，$\overrightarrow{M_0M}=\{0,1,-1\}$，

$\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}=\{4,2,2\}$，则所求的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

【例 4】 求点 $M_0(1,-1,0)$ 到直线 $L:\begin{cases}x-y+z-2=0,\\x+2y-3=0\end{cases}$ 之间的距离.

【解】 显然 $M(1,1,2)$ 为直线 L 上的一点，直线 L 的方向向量为

$$\vec{s}=\{1,-1,1\}\times\{1,2,0\}=\{-2,1,3\},$$

$\overrightarrow{M_0M}=\{0,2,2\}$，且 $\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}=\{0,2,2\}\times\{-2,1,3\}=\{4,-4,4\}$，

则点 $M_0(1,-1,0)$ 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{14}}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

（五）两异面直线之间的距离

设直线 $L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，$L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，

L_1 与 L_2 异面的充分必要条件是 $(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\neq 0$.

设 L_1 与 L_2 异面，$M_1(x_1,y_1,z_1)\in L_1$，求两异面直线之间的距离步骤如下：

(1) 过 M_1 作直线 $L'_2\ /\!/\ L_2$，求出 L_1 与 L'_2 所形成的平面 π.

(2) 两异面直线的距离即为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 到平面 π 之间的距离，如图 1-6-13.

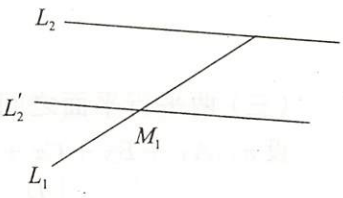


图 1-6-13

【例 5】 判断直线 $L_1:\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ 与 $L_2:\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$ 之间的位置关系，若两直线异面，求它们之间的距离.

【解】 $\vec{s_1}=\{4,-3,1\}$，$\vec{s_2}=\{-2,9,2\}$，$M_1(9,-2,0)$，$M_2(0,-7,2)$，

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-9,-5,2\}$，$\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\{-15,-10,30\}$，

因为 $(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=245\neq 0$，所以两直线异面.

过 M_2 作直线 $L_3\ /\!/\ L_1$，由 L_2,L_3 确定的平面为

$$\pi:-15x-10(y+7)+30(z-2)=0,\text{即 }\pi:3x+2y-6z+26=0,$$

$$d=\frac{|3\times 9+2\times(-2)-6\times 0+26|}{\sqrt{9+4+36}}=7.$$

二、夹角问题

（一）两向量的夹角

设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为两个非零向量，设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$ 得

$$\theta=\arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

【例 1】　设 $\vec{a},\vec{b}$ 都是单位向量且 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{3}{2}$，求 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角.

【解】　由 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{3}{2}$ 得 $|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}$，从而 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，

于是 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{1}{2}$，故 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

（二）两个平面之间的夹角

设 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 为两个平面，其法向量分别为 $\vec{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$，$\vec{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$，设两个平面之间的夹角为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，由 $\cos\theta=|\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle|=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$ 得 $\theta=\arccos\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: dijy66)

（三）两直线之间的夹角

设 $L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，$L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，

其中 $\vec{s_1}=\{m_1,n_1,p_1\}$，$\vec{s_2}=\{m_2,n_2,p_2\}$，设 L_1,L_2 的夹角为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\theta=\arccos\frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}|\cdot|\vec{s_2}|}.$$

【例 2】　直线 $L_1:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}$ 与直线 $L_2:\begin{cases}x-y+1=0,\\2y+z-5=0\end{cases}$ 的夹角为 _____.

【解】　直线 L_1 的方向向量为 $\vec{s_1}=\{1,-2,1\}$，

直线 L_2 的方向向量为 $\vec{s_2}=\{1,-1,0\}\times\{0,2,1\}=\{-1,-1,2\}$，

设两直线的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}|\cdot|\vec{s_2}|}=\frac{1}{2}$，故两直线的夹角为 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

（四）直线与平面的夹角

设直线 $L:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$，

其中 $\vec{s}=\{m,n,p\}$，$\vec{n}=\{A,B,C\}$，设 L 与 π 的夹角为 θ，则

$$\theta=\arcsin\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}.$$

【例 3】 求直线 $L:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ 与平面 $\pi:x+y-4=0$ 的夹角.

【解】 直线的方向向量为 $\vec{s}=\{1,2,-1\}$，平面的法向量为 $\vec{n}=\{1,1,0\}$，

由 $\cos\langle\vec{s},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得 $\vec{s}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，故直线 L 与 π 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

三、平面束

设 $L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 为一条直线，则过直线 L 的所有平面称为过直线 L 的平面束，平面束方程为

$$\pi':A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

【例】 设直线 $L:\begin{cases}x-2y+2z-2=0,\\2x+y-2z-1=0,\end{cases}$ 求直线 L 在平面 $\pi:x+y+z+1=0$ 上的投影直线.

【解】 过直线 L 的平面束为

$$\pi':x-2y+2z-2+\lambda(2x+y-2z-1)=0,$$

即 $\pi':(2\lambda+1)x+(\lambda-2)y+(2-2\lambda)z-2-\lambda=0$，

由 $\{2\lambda+1,\lambda-2,2-2\lambda\}\cdot\{1,1,1\}=0$ 得 $\lambda=-1$，即平面 π' 的方程为

$$\pi':x+3y-4z+1=0,$$

故直线 L 在平面 π 上的投影直线为

$$L_0:\begin{cases}x+y+z+1=0,\\x+3y-4z+1=0.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

重点题型分析

题型一 向量的运算

【例 1】 (1) 设 $\vec{\alpha}_1=\{1,3,a\}$，$\vec{\alpha}_2=\{1,-2,1\}$，且 $\vec{\alpha}_1\perp\vec{\alpha}_2$，则 $a=$_____.

(2) 设 $\vec{\alpha}_1=\{1,-1,a\}$，$\vec{\alpha}_2=\{2,-3,1\}$，$\vec{\alpha}_3=\{-1,1,2\}$，且 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 共面，则 $a=$_____.

(3) 设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，则 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{a}+\vec{c})=$_____.

【解】 (1) 因为 $\vec{\alpha}_1\perp\vec{\alpha}_2$，所以 $\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_2=1-6+a=0$，于是 $a=5$.

(2) 因为 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 共面，所以 $\vec{\alpha}_1\times\vec{\alpha}_2\perp\vec{\alpha}_3$，从而 $(\vec{\alpha}_1\times\vec{\alpha}_2)\cdot\vec{\alpha}_3=0$.

又 $\vec{\alpha}_1\times\vec{\alpha}_2=\{3a-1,2a-1,-1\}$，于是 $-3a+1+2a-1-2=0$，故 $a=-2$.

(3) $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{a}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{c})$

$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}$

$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=4.$

【例 2】　设 $\vec{a},\vec{b}$ 皆为非零向量，且 $|\vec{b}|=2,(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}=$ _____.

【解】　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{x(|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|)}$

$=\dfrac{1}{2|\vec{a}|}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{x}$

$=\dfrac{1}{2|\vec{a}|}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\vec{a}\cdot\vec{b}+x^2|\vec{b}|^2}{x}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=1.$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 3】　设平面 π 过原点且与 $\vec{a}=\{1,-1,1\},\vec{b}=\{2,0,-1\}$ 平行，则平面 π 内与 $\vec{a}$ 垂直的单位向量为 _____.

【解】　平面 π 的法向量为 $\vec{n}=\{1,-1,1\}\times\{2,0,-1\}=\{1,3,2\}$，

平面 $\pi:x+3y+2z=0.$

设 π 内与 $\vec{a}$ 垂直的向量为 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{n}=\{-5,-1,4\}$，所求得单位向量为 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{42}}\{5,1,-4\}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 4】　设 $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=1$，则 $(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\gamma}+\vec{\alpha})=$ _____.

【解】　$(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\gamma}+\vec{\alpha})=(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\gamma})+(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\alpha})$，

而 $(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\gamma})=(\vec{\alpha},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\gamma})+(\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\gamma})$

$=(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})+(\vec{\alpha},\vec{\gamma},\vec{\gamma})+(\vec{\beta},\vec{\beta},\vec{\gamma})+(\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\gamma})=(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=1,$

$(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\alpha})=(\vec{\alpha},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\alpha})+(\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\alpha})$

$=(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\alpha})+(\vec{\alpha},\vec{\gamma},\vec{\alpha})+(\vec{\beta},\vec{\beta},\vec{\alpha})+(\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\alpha})$

$=(\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\alpha})=(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=1,$

故 $(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\gamma}+\vec{\alpha})=2.$

【例 5】　设 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 为非零向量，且 $\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\perp7\vec{\alpha}-5\vec{\beta},\vec{\alpha}-4\vec{\beta}\perp7\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$，求 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 的夹角.

【解】　由 $\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\perp7\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$，$\vec{\alpha}-4\vec{\beta}\perp7\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ 得

$$\begin{cases}(\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\cdot(7\vec{\alpha}-5\vec{\beta})=0,\\(\vec{\alpha}-4\vec{\beta})\cdot(7\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}7|\vec{\alpha}|^2+16\vec{\alpha}\vec{\beta}-15|\vec{\beta}|^2=0,\\7|\vec{\alpha}|^2-30\vec{\alpha}\vec{\beta}+8|\vec{\beta}|^2=0,\end{cases}\text{解得 }2\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\beta}|^2,$$

再代入上式得 $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|.$

由 $2\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\beta}|^2$ 得 $2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cos\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle=|\vec{\beta}|^2$，于是 $\cos\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle=\frac{1}{2}$，故 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

题型二　求平面方程

【思路分析】

求平面方程通常有如下思路：

(1) 找出平面上一点及与该平面垂直的向量，利用点法式求出平面方程.

(2) 找出平面上一点及与该平面平行的两个不共线的向量，两向量的向量积即为该平面的法向量，利用点法式求出平面方程.

(3) 已知平面上不共线的三点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，$P_3(x_3,y_3,z_3)$，法向量为 $\vec{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}$，由点法式求出平面.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 1】 求过点 $M(1,-2,3)$ 且与直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-5=0,\\x+y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面.

【解】 直线 L 的方向向量为

$$\vec{s}=\{2,-1,1\}\times\{1,1,-2\}=\{1,5,3\},$$

于是所求的平面方程为

$$\pi:(x-1)+5(y+2)+3(z-3)=0,\text{即}\ \pi:x+5y+3z=0.$$

【例 2】 求过点 $M(2,1,-1)$ 且与直线 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-1}$ 及 $L_2:\begin{cases}x-y-z=0,\\y+2z-2=0\end{cases}$ 平行的平面方程.

【解】 直线 L_1 的方向向量为 $\vec{s_1}=\{2,3,-1\}$，直线 L_2 的方向向量为

$$\vec{s_2}=\{1,-1,-1\}\times\{0,1,2\}=\{-1,-2,1\},$$

从而所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\{1,-1,-1\},$$

所求平面方程为

$$\pi:x-2-(y-1)-(z+1)=0,\text{即}\ \pi:x-y-z-2=0.$$

【例 3】 设直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$，$L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$，求经过直线 L_1 且平行于直线 L_2 的平面方程.

【解】 **方法一：点法式方法**

$\vec{s_1}=\{1,0,-1\}$，$\vec{s_2}=\{2,1,1\}$，则所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\{1,0,-1\}\times\{2,1,1\}=\{1,-3,1\},$$

又所求平面过点 $M_0(1,2,3)$，则所求平面方程为

$$\pi:(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0,\text{即}\ \pi:x-3y+z+2=0.$$

方法二：平面束方法

L_1 可改写成 $L_1:\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0},\\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-3}{-1},\end{cases}$ 即 $L_1:\begin{cases}y-2=0,\\ x+z-4=0,\end{cases}$ 过 L_1 的平面束为

$$\pi:(y-2)+\lambda(x+z-4)=0,\text{即 }\pi:\lambda x+y+\lambda z-2-4\lambda=0,$$

其法向量为 $\vec{n}=\{\lambda,1,\lambda\}$，因为 $L_2\ /\!/\ \pi$，所以 $\vec{n}\cdot\vec{s_2}=0$，解得 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$，所求的平面为

$$\pi:x-3y+z+2=0.$$

【例 4】 求过原点及点 $M(1,1,1)$ 且平行于 $L:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+3}{5}$ 的平面方程.

【解】 **方法一** 因为平面过原点，所以设所求的平面为 $\pi:Ax+By+Cz=0$.

因为平面 π 过点 $M(1,1,1)$，所以 $A+B+C=0$.

又因为 $\pi\ /\!/\ L$，所以 $\vec{n}\perp\vec{s}$，于是 $3A-2B+5C=0$，解得 $A=-\dfrac{7}{5}C,B=\dfrac{2}{5}C$.

故所求的平面方程为 $\pi:7x-2y-5z=0$.

方法二 $\overrightarrow{OM}=\{1,1,1\}$，又直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\{3,-2,5\}$，所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{OM}\times\vec{s}=\{7,-2,-5\},$$

所求的平面方程为 $\pi:7x-2y-5z=0$.

微信公众号【研未考研】(ID: diky66)

【例 5】 求过直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ 且与平面 $\pi:x-2y+3z-2=0$ 垂直的平面方程.

【解】 **方法一** 直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\{2,-1,1\}$，平面 π 的法向量为 $\vec{n_0}=\{1,-2,3\}$，所求平面的法向量为 $\vec{n}=\vec{s}\times\vec{n_0}=\{2,-1,1\}\times\{1,-2,3\}=\{-1,-5,-3\}$，又平面过点 $(1,0,-2)$，所求平面为 $\pi':x-1+5y+3(z+2)=0$，即 $\pi':x+5y+3z+5=0$.

方法二 直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ 的一般形式为

$$L:\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1},\\ \dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1},\end{cases}\text{即 }L:\begin{cases}x+2y-1=0,\\ y+z+2=0.\end{cases}$$

过 L 的平面束为

$$\pi':(x+2y-1)+\lambda(y+z+2)=0,\text{即 }\pi':x+(2+\lambda)y+\lambda z+2\lambda-1=0.$$

由两个平面垂直得 $\{1,2+\lambda,\lambda\}\cdot\{1,-2,3\}=0$，即 $\lambda=3$，故所求平面方程为

$$\pi':x+5y+3z+5=0.$$

【例 6】 求过点 $P(1,0,-1)$ 且与直线 $L_1:\begin{cases}x-y+2z-3=0\\ x-z+2=0\end{cases}$ 及 $L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ 平行的平面.

【解】 直线 L_1 的方向向量为 $\vec{s_1}=\{1,-1,2\}\times\{1,0,-1\}=\{1,3,1\}$，

平面的法向量为 $\vec{n}=\{1,3,1\}\times\{2,-1,1\}=\{4,1,-7\}$，

所求的平面方程为 $\pi:4(x-1)+(y-0)-7(z+1)=0$，即 $\pi:4x+y-7z-11=0$.

【例 7】 求经过直线 $L:\begin{cases}x+y+z-1=0,\\2x-y-z+1=0\end{cases}$ 且垂直于平面 $x-y+2z-4=0$ 的平面.

【解】 **方法一**

显然 $P(0,0,1)\in L$，且直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\{1,1,1\}\times\{2,-1,-1\}=\{0,3,-3\}$，

所求平面的法向量为 $\vec{n}=\{0,3,-3\}\times\{1,-1,2\}=\{3,-3,-3\}$，

所求平面为 $\pi:3(x-0)-3(y-0)-3(z-1)=0$，即 $\pi:x-y-z+1=0$.

方法二

过直线 $L:\begin{cases}x+y+z-1=0,\\2x-y-z+1=0\end{cases}$ 的平面束为 $\pi:(x+y+z-1)+\lambda(2x-y-z+1)=0$，

即 $\pi:(1+2\lambda)x+(1-\lambda)y+(1-\lambda)z-1+\lambda=0$，

由 $\{1+2\lambda,1-\lambda,1-\lambda\}\cdot\{1,-1,2\}=0$ 得 $\lambda=-2$，

故所求平面为 $\pi:-3x+3y+3z-3=0$，或 $\pi:x-y-z+1=0$.

题型三 求直线方程

【思路分析】

求直线方程通常有如下方法：

(1) 找出直线上一点及平行于该直线的非零向量，由点向式求出直线方程的对称式.

(2) 由两个不平行的平面确定直线.

【例 1】 求一直线 L，使其过点 $M_0(2,-1,3)$ 且与直线 $L_1:\begin{cases}x-4y+2z-1=0,\\2x-y-z-2=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}y+2z-4=0,\\2x+y+z+1=0\end{cases}$ 都垂直.

【解】 直线 L_1 的方向向量为 $\vec{s_1}=\{1,-4,2\}\times\{2,-1,-1\}=\{6,5,7\}$，

直线 L_2 的方向向量为 $\vec{s_2}=\{0,1,2\}\times\{2,1,1\}=\{-1,4,-2\}$，

则直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\{6,5,7\}\times\{-1,4,-2\}=\{-38,5,29\}$，

于是直线 L 的方程为 $L:\dfrac{x-2}{-38}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-3}{29}$.

【例 2】 设直线 $L:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$，平面 $\pi:2x+y+z-6=0$，求过直线 L 与平面 π 的交点且垂直于 π 的直线方程.

【解】 直线 L 的参数方程为 $L:\begin{cases}x=2+t,\\y=3+t,\\z=4+2t,\end{cases}$ 代入平面 π 中得 $t=-1$，于是直线 L 与平面 π 的交点坐标为 $M_0(1,2,2)$. 因为所求直线与平面 π 垂直，所以 π 的法向量即为所求直线的方向向量，故所求的直线方程为

$$L':\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}.$$

【例 3】 求直线 L，使其过点 $M(-1,2,-3)$，平行于平面 $\pi:6x-2y-3z+10=0$ 且与直线 $L':\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$ 相交.

【解】 设过点 $M(-1,2,-3)$ 且与平面 $\pi:6x-2y-3z+10=0$ 平行的平面方程为

$$\pi':6x-2y-3z+D=0,$$

将 $M(-1,2,-3)$ 代入得 $D=1$，即 $\pi':6x-2y-3z+1=0$.

直线 L' 的参数方程为

$$L':\begin{cases}x=1+3t,\\ y=-1+2t,\\ z=3-5t,\end{cases}$$

代入 π' 得 $t=0$，直线 L' 与平面 π' 的交点为 $P(1,-1,3)$，直线 L 的方向向量为 $\overrightarrow{MP}=\{2,-3,6\}$，于是直线 L 的方程为

$$L:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}.$$

【例 4】 求一直线 L，使其过点 $M(1,1,1)$ 且与直线 $L_1:x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 及 $L_2:\frac{x-1}{2}=y-2=z-2$ 都相交.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【解】 设直线 L 的参数方程为

$$L:\begin{cases}x=1+mt,\\ y=1+nt,\\ z=1+pt.\end{cases}$$

因为直线 L 与直线 L_1 相交，所以 $1+mt_1=\frac{1+nt_1}{2}=\frac{1+pt_1}{3}$，于是有 $m-2n+p=0$；

因为直线 L 与直线 L_2 相交，所以 $\frac{mt_2}{2}=nt_2-1=pt_2-1$，于是有 $n-p=0$，

由 $\begin{cases}m-2n+p=0,\\ n-p=0\end{cases}$ 得 $m=n=p$，故直线 L 的方程为

$$L:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

【例 5】 求直线 $L:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ 在平面 $\pi:2x-3y+z-3=0$ 的投影直线.

【解】 直线 $L:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ 可以转化为 $L:\begin{cases}x-3y-7=0,\\ 2x-3z-2=0,\end{cases}$ 过 L 的平面束为 $\pi':(x-3y-7)+\lambda(2x-3z-2)=0$ 或 $\pi':(1+2\lambda)x-3y-3\lambda z-7-2\lambda=0$，由 $\{2,-3,1\}\cdot\{1+2\lambda,-3,-3\lambda\}=0$ 得 $\lambda=-11$，故与 π 垂直的平面为

$$\pi':7x+y-11z-5=0,$$

故 L 在 π 上的投影直线为

$$L_0:\begin{cases}2x-3y+z-3=0,\\ 7x+y-11z-5=0.\end{cases}$$

【例 6】 设 $L:\begin{cases}x-y+z+1=0,\\ x+2y-z-2=0,\end{cases}$ 求直线 L 在平面 $\pi:2x-y-3z-1=0$ 上的投影直线.

【解】 过 L 的平面束为 $\pi':x-y+z+1+\lambda(x+2y-z-2)=0$,即

$\pi':(1+\lambda)x+(2\lambda-1)y+(1-\lambda)z+1-2\lambda=0$,

由 $\{2,-1,-3\}\cdot\{1+\lambda,2\lambda-1,1-\lambda\}=0$ 得 $\lambda=0$,则 $\pi':x-y+z+1=0$,

故投影直线方程为 $L_0:\begin{cases}2x-y-3z-1=0\\ x-y+z+1=0\end{cases}$.

【例 7】 求过 $P(1,-1,0)$ 且与 $L_1:\begin{cases}x-y+z-2=0,\\ x-z=0\end{cases}$ 及直线 $L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 相交的直线.

【分析】 点 P 与直线 L_1 形成平面 π_1,点 P 与直线 L_2 形成平面 π_2,所求的直线即为两平面的交线.

【解】 显然 $M_1(1,0,1)\in L_1$,且 L_1 的方向向量为 $\vec{s_1}=\{1,-1,1\}\times\{1,0,-1\}=\{1,2,1\}$,

平面 π_1 的法向量为 $\vec{n_1}=\overrightarrow{PM_1}\times\vec{s_1}=\{0,1,1\}\times\{1,2,1\}=\{-1,1,-1\}$,

则 $\pi_1:-(x-1)+(y+1)-(z-0)=0$,即 $\pi_1:x-y+z-2=0$.

显然 $M_2(0,1,0)\in L_2$,且 L_2 的方向向量为 $\vec{s_2}=\{1,-2,1\}$,

平面 π_2 的法向量为 $\vec{n_2}=\overrightarrow{PM_2}\times\vec{s_2}=\{-1,2,0\}\times\{1,-2,1\}=\{2,1,0\}$,

则 $\pi_2:2(x-1)+(y+1)+0(z-0)=0$,即 $\pi_2:2x+y-1=0$,

所求的直线为 $L:\begin{cases}x-y+z-2=0,\\ 2x+y-1=0.\end{cases}$

微信公众号【贝贝考研】(ID: djky66)

题型四 求距离

【例 1】 点 $M(1,-2,3)$ 到平面 $\pi:x-y+2z-5=0$ 的距离.

【解】 由点到平面的距离公式得

$$d=\frac{|1+2+6-5|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

【例 2】 求点 $M(1,1,-2)$ 到直线 $L:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ 的距离.

【解】 显然 $M_0(0,-1,-1)\in L$, $\overrightarrow{M_0M}=\{1,2,-1\}$,

$$\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}=\{1,2,-1\}\times\{-1,2,3\}=\{8,-2,4\},$$

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}=\sqrt{6}.$$

【例 3】 设直线 L_1 过点 $A(3,0,0)$ 且与向量 $\vec{a}=\{2,4,3\}$ 平行,直线 L_2 过点 $B(-1,3,2)$ 且与向量 $\vec{b}=\{2,0,1\}$ 平行,求直线 L_1 与 L_2 之间的距离.

【解】 $L_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{3}$, $L_2:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-2}{1}$,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\{4,4,-8\},\quad \overrightarrow{AB}=\{-4,3,2\},$$

因为$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\overrightarrow{AB}=-20\neq 0$,所以直线 L_1 与 L_2 异面.

过点 $B(-1,3,2)$ 作 $L'_1\ /\!/\ L_1$,L'_1 与 L_2 所成的平面为 π,则

$\pi:4(x+1)+4(y-3)-8(z-2)=0$,即 $\pi:x+y-2z+2=0$,

于是直线 L_1 与 L_2 之间的距离为

$$d=\frac{|3+2|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}.$$

【例 4】　求点 $M(1,-1,0)$ 到直线 $L:\begin{cases}x+y-z-2=0,\\2x-y+z-1=0\end{cases}$ 的距离.

【解】　显然 $M_0(1,1,0)\in L$,直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\{1,1,-1\}\times\{2,-1,1\}=\{0,-3,-3\}$,则点 M 到直线 L 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}=\sqrt{2}$.

【例 5】　已知点 $M(1,1,1)$ 及平面 $\pi_1:x-y+2z-4=0$.

(1) 求点 M 关于 π_1 的对称点 M'.

(2) 设 $P(0,1,-1)$,在平面 $\pi_2:x-y+2z-3=0$ 上求一点 Q,使得 $|PQ|+|MQ|$ 最小.

【解】　(1) 设 $M'(a,b,c)$,$\overrightarrow{MM'}=\{a-1,b-1,c-1\}$,显然 $\overrightarrow{MM'}\ /\!/\ \vec{n}_1$,

线段 MM' 的中点为 $M_0\left(\dfrac{a+1}{2},\dfrac{b+1}{2},\dfrac{c+1}{2}\right)$,

由$\begin{cases}\dfrac{a-1}{1}=\dfrac{b-1}{-1}=\dfrac{c-1}{2},\\[2ex]\dfrac{a+1}{2}-\dfrac{b+1}{2}+2\cdot\dfrac{c+1}{2}-4=0,\end{cases}$ 得 $a=\dfrac{5}{3},b=\dfrac{1}{3},c=\dfrac{7}{3}$,

故对称点为 $M'\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{3}\right)$.

(2) 因为 M,P 坐标代入 $x-y+2z-3$ 中皆小于零,所以 M,P 位于 π_2 的同侧.

令 P 关于 π_2 的对称点为 $P'(a,b,c)$,

线段 PP' 的中点为 $P_0\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b+1}{2},\dfrac{c-1}{2}\right)$,　$\overrightarrow{PP'}=\{a,b-1,c+1\}\ /\!/\ \vec{n}_2$,

由$\begin{cases}\dfrac{a}{1}=\dfrac{b-1}{-1}=\dfrac{c+1}{2},\\[2ex]\dfrac{a}{2}-\dfrac{b+1}{2}+2\cdot\dfrac{c-1}{2}-3=0\end{cases}$ 得 $a=2,b=-1,c=3$,对称点为 $P'(2,-1,3)$.

$\overrightarrow{MP'}=\{1,-2,2\}$,过 M,P' 的直线为 $L:\begin{cases}x=1+t,\\y=1-2t,\\z=1+2t,\end{cases}$ 代入 $\pi_2:x-y+2z-3=0$ 中得

$t=\dfrac{1}{7}$,故所求点 $Q\left(\dfrac{8}{7},\dfrac{5}{7},\dfrac{9}{7}\right)$.

微信公众号【拔尖考研】(ID: djky66)

题型五　涉及曲线及曲面的问题

【例 1】　求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面，使其过直线 $L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$.

【解】　设点 M 的坐标为 $M(x_0,y_0,z_0)$，则有 $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21$. 切平面的法向量 $\vec{n}=\{x_0,2y_0,3z_0\}$.

直线 L 过点 $M_1\left(6,3,\dfrac{1}{2}\right)$，方向向量为 $\vec{s}=\{2,1,-1\}$，由 $\vec{n}\cdot\vec{s}=0$ 得 $2x_0+2y_0-3z_0=0$.

$$\overrightarrow{M_1M}=\left\{x_0-6,y_0-3,z_0-\frac{1}{2}\right\},$$

由 $\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}=0$ 得

$$x_0(x_0-6)+2y_0(y_0-3)+3z_0\left(z_0-\frac{1}{2}\right)=0,$$

即　$x_0^2+2y_0^2+3z_0^2-6x_0-6y_0-\dfrac{3}{2}z_0=0$ 或 $6x_0+6y_0+\dfrac{3}{2}z_0=21$,

由 $\begin{cases}x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21,\\2x_0+2y_0-3z_0=0,\\6x_0+6y_0+\dfrac{3}{2}z_0=21,\end{cases}$ 得 $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,2)$ 或 $(x_0,y_0,z_0)=(3,0,2)$，于是切平面为

$\pi_1:1\cdot(x-1)+4\cdot(y-2)+6\cdot(z-2)=0$，即 $\pi_1:x+4y+6z-21=0$,

$\pi_2:3\cdot(x-3)+0\cdot(y-0)+6\cdot(z-2)=0$，即 $\pi_2:x+2z-7=0$.

【例 2】　设直线 $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$,

(1) 求直线 L 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面的方程.

(2) 求该曲面位于 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的体积.

【解】　(1) 设旋转所得的曲面为 Σ，任取 $M(x,y,z)\in\Sigma$，M 所在的圆与直线 L 的交点为 $M_0(x_0,y_0,z)\in L$，该圆的圆心为 $T(0,0,z)$，由 $|MT|=|M_0T|$ 得 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$.

因为 $M_0(x_0,y_0,z)\in L$，所以 $\dfrac{x_0-1}{0}=\dfrac{y_0}{1}=\dfrac{z}{1}$，解得 $x_0=1,y_0=z$，于是所求的曲面方程为 $\Sigma:x^2+y^2=1+z^2$.

$$(2)V=\int_0^2 dz\iint_{D_z}dx\,dy=\int_0^2 dz\iint_{x^2+y^2\leqslant 1+z^2}dx\,dy=\pi\int_0^2(1+z^2)dz=\frac{14\pi}{3}.$$

测试题

一、选择题

1. 设向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{6}$ 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\sqrt{3}$，则 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为(　　).

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(A) $\frac{\pi}{6}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{4}$　　(D) $\frac{3\pi}{4}$

2. 与平面 xOz 平行且与向量$\{3,-5,4\}$垂直的单位向量为(　　).

(A) $\left\{\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right\}$　　(B) $\left\{\frac{3}{5},0,-\frac{4}{5}\right\}$　　(C) $\left\{\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}\right\}$　　(D) $\left\{\frac{4}{5},0,-\frac{3}{5}\right\}$

3. $L_1:\frac{2x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y-1=0,\\2y+z-2=0\end{cases}$ 的夹角为(　　).

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{4}$　　(D) $\frac{\pi}{6}$

4. 设 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0,\end{cases}$ $\pi:4x-2y+z-2=0$,则 L 与 π 的关系为(　　).

(A)$L\ /\!/\ \pi$　　(B)$L\subset\pi$　　(C)$L\perp\pi$　　(D)L 与 π 相交但不垂直

5. 在曲线 $L:\begin{cases}x=t,\\y=-t^2,\\z=t^3\end{cases}$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z-4=0$ 平行的切线有(　　).

(A) 一条　　(B) 二条　　(C) 三条以上　　(D) 不存在

二、填空题

1. 过点 $M(1,-1,2)$ 及直线 $L:\begin{cases}x-2y-z+2=0,\\y-z=0\end{cases}$ 的平面方程为_____.

2. 与直线 $L_1:\begin{cases}x=1,\\y=t-1,\\z=t+2\end{cases}$ 及直线 $L_2:\begin{cases}2x-y-4=0,\\x-z+3=0\end{cases}$ 都平行且过点$(1,1,-2)$的平面方程为_____.

3. 经过原点及 $M(1,-3,2)$ 且与平面 $4x-y+2z-5=0$ 垂直的平面方程为_____.

4. 设直线 L 过点$(1,0,-1)$且与直线 $L_0:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-1}$ 相交,同时 L 平行于平面 $x-3y+z-4=0$,则 L 的对称式方程为_____.

5. 曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2=2(z-x),\\x+y=z\end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线为_____.

三、解答题

1. 求过直线 $L_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$ 且与直线 $L_2:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{1}$ 平行的平面方程.

2. 判断直线 $L_1:\begin{cases}x+2y-3=0,\\y+z-2=0\end{cases}$ 与直线 $L_2:\begin{cases}x+2y+2=0,\\x-2z=0\end{cases}$ 的位置关系,若共面求两直线所在的平面.

3. 设直线 L 过点 $M_0(2,-1,3)$ 且与直线 $L_0:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$ 相交,又直线 L 与平面 $\pi:3x-2y+z+5=0$ 平行,求直线 L.

4. 设 $L:\begin{cases}x-y+z+1=0,\\x+2y-z-2=0,\end{cases}$ 求直线 L 在平面 $\pi:2x-y-3z-1=0$ 上的投影直线.

5. 求直线 $L_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$ 与直线 $L_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$ 的公垂线.

6. 求点 $M(2,2,2)$ 关于直线 $L:\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{1}$ 对称点的坐标.

7. 求直线 $L:\begin{cases}x+y+z-2=0,\\x-y+z+2=0\end{cases}$ 在平面 $\pi:x-y-z=0$ 上的投影直线,并求其与 L 的夹角.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

8. 设直线 $L:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

(1) 求直线 L 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面 Σ 的方程;

(2) 求 Σ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间立体的体积.

9. 设曲面 $\Sigma:\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$,平面 $\pi:2x+2y+z+5=0$.

(1) 求曲面 Σ 上与平面 π 平行的切平面;

(2) 求曲面 Σ 与平面 π 之间的最短及最长距离.

测试题参考答案

一、选择题

1. 设 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,于是 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$,选(D).

2. 设所求向量为 $\{a,0,c\}$,则 $a^2+c^2=1$ 且 $3a+4c=0$,显然 $\left\{\dfrac{4}{5},0,-\dfrac{3}{5}\right\}$ 适合,选(D).

3. 直线 L_1 的方向向量为 $\vec{s}_1=\{1,-2,1\}$(注意:分子 x 的系数为 2),L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=\{1,-1,0\}\times\{0,2,1\}=\{-1,-1,2\}$,设两直线的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\dfrac{1}{2}$,$\theta=\dfrac{\pi}{3}$,应选(B).

4. 直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\{1,3,2\}\times\{2,-1,-10\}=\{-28,14,-7\}=-7\{4,-2,1\}$,则直线 L 与平面 π 垂直,选(C).

5. 曲线 L 上一点的方向向量为 $\vec{s}=\{1,-2t,3t^2\}$,因为切线与平面 $x+2y+z-4=0$ 平行,所以 $\vec{s}\cdot\vec{n}=\{1,-2t,3t^2\}\cdot\{1,2,1\}=0$,即 $3t^2-4t+1=0$,解得 $t=\dfrac{1}{3}$ 及 $t=1$,应选(B).

二、填空题

1. 直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\{1,-2,-1\}\times\{0,1,-1\}=\{3,1,1\}$,且直线过点 $M_0(1,1,1)$,

$\overrightarrow{M_0M}=\{0,-2,1\}$,平面的法向量为 $\vec{n}=\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}=\{-3,3,6\}$,

所求的平面方程为 $\pi:-3(x-1)+3(y+1)+6(z-2)=0$,即 $\pi:x-y-2z+2=0$.

2. L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=\{2,-1,0\}\times\{1,0,-1\}=\{1,2,1\}$,所求平面的法向量为 $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\{0,1,1\}\times\{1,2,1\}=\{-1,1,-1\}$,所求平面方程为 $\pi:-(x-1)+(y-1)-(z+2)=0$,即 $\pi:x-y+z+2=0$.

3. 方法一:设所求的平面为 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$,因为平面 π 经过原点和 $M(1,-3,2)$,所以 $D=0$,$A-3B+2C=0$. 因为 π 与平面 $4x-y+2z-5=0$ 垂直,所以 $\{A,B,C\}\cdot\{4,-1,2\}=0$,即 $4A-B+2C=0$,解得 $B=-\dfrac{3}{2}A$,$C=-\dfrac{11}{4}A$,所求平面为 $\pi:4x-6y-11z=0$.

方法二:$\overrightarrow{OM}=\{1,-3,2\}\ /\!/\ \pi$,因为 π 与 $4x-y+2z-5=0$ 垂直,所以 $\{4,-1,2\}\ /\!/\ \pi$,于是平面 π 的法向量为 $\vec{n}=\{1,-3,2\}\times\{4,-1,2\}=\{-4,6,11\}$,所求平面为 $\pi:-4(x-0)+6(y-0)+11(z-0)=0$,即 $\pi:4x-6y-11z=0$.

4. 设过点 $M_0(1,0,-1)$ 且与 $x-3y+z-4=0$ 平行的平面为 $x-3y+z+D=0$,代入得 $D=0$,即 $x-3y+z=0$. 令 $L_0:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{-1}=t$ 得 $L_0:\begin{cases}x=t,\\y=3+t,\\z=-t,\end{cases}$ 将 $\begin{cases}x=t,\\y=3+t,\\z=-t\end{cases}$ 代入 $x-3y+z=0$ 中得

$t=-3$，直线 L_0 与平面 $x-3y+z=0$ 的交点为 $M_1(-3,0,3)$，$\overrightarrow{M_0M_1}=\{-4,0,4\}$，直线 L 的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+1}{1}$.

5. 由 $\begin{cases}x^2+y^2=2(z-x),\\ x+y=z\end{cases}$ 消去 z 得 $x^2+y^2=2y$，故 L 在 xOy 平面上的投影曲线为 $L_0:\begin{cases}x^2+y^2=2y,\\ z=0.\end{cases}$

三、解答题

1. 所求的平面经过点 $M_0(2,0,-1)$，所求平面的法向量为 $\vec{n}=\{1,2,-1\}\times\{2,0,1\}=\{2,-3,-4\}$，所求的平面方程为 $\pi:2(x-2)-3(y-0)-4(z+1)=0$，即 $\pi:2x-3y-4z-8=0$.

2. $\vec{s}_1=\{1,2,0\}\times\{0,1,1\}=\{2,-1,1\}$，$\vec{s}_2=\{1,2,0\}\times\{1,0,-2\}=\{-4,2,-2\}$，因为两直线平行，所以两直线共面. 显然 $M_1(1,1,1)\in L_1$，$M_2(0,-1,0)\in L_2$，$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1,-2,-1\}$，所求平面的法向量为 $\vec{n}=\{2,-1,1\}\times\{-1,-2,-1\}=\{3,1,-5\}$，所求平面为 $\pi:3(x-1)+(y-1)-5(z-1)=0$，即 $\pi:3x+y-5z+1=0$.

3. 设过点 $M_0(2,-1,3)$ 且与平面 π 平行的平面为 $\pi':3x-2y+z+D=0$，将点 $M_0(2,-1,3)$ 代入 $\pi':3x-2y+z+D=0$ 中得 $D=-11$，于是 $\pi':3x-2y+z-11=0$. 令 $L_0:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}=t$，得 L_0 的参数方程为 $L_0:\begin{cases}x=1+2t,\\ y=-t,\\ z=t-2,\end{cases}$ 代入 π' 得 $t=\dfrac{10}{9}$，

于是直线 L 与直线 L_0 的交点坐标为 $M_1\left(\dfrac{29}{9},-\dfrac{10}{9},-\dfrac{8}{9}\right)$，$\overrightarrow{M_0M_1}=\left\{\dfrac{11}{9},-\dfrac{1}{9},-\dfrac{35}{9}\right\}$，

故所求直线为 $L:\dfrac{x-2}{\frac{11}{9}}=\dfrac{y+1}{-\frac{1}{9}}=\dfrac{z-3}{-\frac{35}{9}}$ 或 $L:\dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-35}$.

微信公众号【倾续考研】(ID：dky66)

4. 过 L 的平面束为 $\pi':x-y+z+1+\lambda(x+2y-z-2)=0$，即 $\pi':(1+\lambda)x+(2\lambda-1)y+(1-\lambda)z+1-2\lambda=0$，由 $\{2,-1,-3\}\cdot\{1+\lambda,2\lambda-1,1-\lambda\}=0$ 得 $\lambda=0$，则 $\pi':x-y+z+1=0$，故投影直线方程为 $L_0:\begin{cases}2x-y-3z-1=0,\\ x-y+z+1=0.\end{cases}$

5. 公垂线的方向向量为 $\vec{s}=\{2,1,0\}\times\{1,0,1\}=\{1,-2,-1\}$. 设过 L_1 且与 $\vec{s}$ 平行的平面为 π_1，设过 L_2 且与 $\vec{s}$ 平行的平面为 π_2，平面 π_1 的法向量为 $\vec{n}_1=\{2,1,0\}\times\{1,-2,-1\}=\{-1,2,-5\}$，则 $\pi_1:-(x-3)+2y-5(z-1)=0$，即 $\pi_1:x-2y+5z-8=0$；平面 π_2 的法向量为 $\vec{n}_2=\{1,0,1\}\times\{1,-2,-1\}=\{2,2,-2\}$，则 $\pi_2:2(x+1)+2(y-2)-2(z-0)=0$，即 $\pi_1:x+y-z-1=0$，故公垂线为 $L:\begin{cases}x-2y+5z-8=0,\\ x+y-z-1=0.\end{cases}$

6. 过点 $M(2,2,2)$ 且与直线 L 垂直的平面方程为 $\pi:3(x-2)+2(y-2)+z-2=0$，即 $\pi:3x+2y+z-12=0$. 令 $L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-3}{1}=t$ 得 $L:\begin{cases}x=1+3t,\\ y=-4+2t,\\ z=3+t,\end{cases}$ 代入平面 π 得 $t=1$，L 与 π 的交点坐标为 $M_0(4,-2,4)$. 令对称点坐标为 $M_1(a,b,c)$，由 $\dfrac{2+a}{2}=4$，$\dfrac{2+b}{2}=-2$，$\dfrac{2+c}{2}=4$，解得 $a=6,b=-6,c=6$，对称点的坐标为 $M_1(6,-6,6)$.

7. 过 L 的平面束为 $(x+y+z-2)+\lambda(x-y+z+2)=0$，即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(1+\lambda)z+2\lambda-2=0$，由 $\{1,-1,-1\}\cdot\{1+\lambda,1-\lambda,1+\lambda\}=0$ 得 $\lambda=1$，故投影直线方程为 $L_0:\begin{cases}x-y-z=0,\\ x+z=0.\end{cases}$ 直线 L

的方向向量为 $\vec{s_1}=\{1,1,1\}\times\{1,-1,1\}=\{2,0,-2\}$，直线 L_0 的方向向量为 $\vec{s_2}=\{1,-1,-1\}\times\{1,0,1\}=\{-1,-2,1\}$，设两直线夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}|\cdot|\vec{s_2}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，故夹角为 $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

8.(1) 设 $M(x,y,z)\in\Sigma$，M 绕 z 轴旋转一周所得的圆与直线 L 的交点为 $M_0(x_0,y_0,z)\in L$，(如图 1-6-14) 圆心坐标为 $T(0,0,z)$，由 $|MT|=|M_0T|$ 得 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$，因为 $M_0(x_0,y_0,z)\in L$，所以 $\dfrac{x_0-2}{-1}=\dfrac{y_0+1}{2}=\dfrac{z}{1}$，解得 $\begin{cases}x_0=2-z,\\ y_0=-1+2z,\end{cases}$ 所以 $\Sigma:x^2+y^2=(2-z)^2+(-1+2z)^2$，即 $\Sigma:x^2+y^2=5z^2-8z+5$.

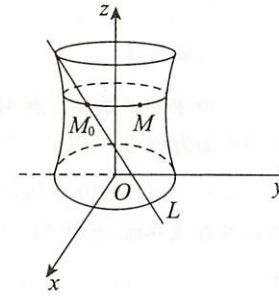


图 1-6-14

(2) 方法一：$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(5z^2-8z+5)\mathrm{d}z=\dfrac{8\pi}{3}$.

方法二：对任意的 $z\in[0,1]$，$A(z)=\pi(5z^2-8z+5)$，则

$$V=\int_0^1A(z)\mathrm{d}z=\frac{8\pi}{3}.$$

9.(1) 设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，点 M_0 处切平面的法向量为 $\vec{n}=\left\{x_0,2y_0,\dfrac{z_0}{2}\right\}$，因为切平面与 π 平行，所以 $\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{2y_0}{2}=\dfrac{z_0}{2}=t$，于是 $x_0=2t$，$y_0=t$，$z_0=2t$，代入曲面方程得 $t=\pm\dfrac{1}{2}$，故切点为 $\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$，$\left(-1,-\dfrac{1}{2},-1\right)$. 过 $\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$ 的切平面方程为 $\pi_1:2(x-1)+2\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+(z-1)=0$，即 $\pi_1:2x+2y+z-4=0$；过 $\left(-1,-\dfrac{1}{2},-1\right)$ 的切平面方程为 $\pi_2:2(x+1)+2\left(y+\dfrac{1}{2}\right)+(z+1)=0$，即 $\pi_2:2x+2y+z+4=0$.

(2) $\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$ 与 $\left(-1,-\dfrac{1}{2},-1\right)$ 到平面 π 的距离分别为 $d_1=\dfrac{|2+1+1+5|}{3}=3$，$d_2=\dfrac{|-2-1-1+5|}{3}=\dfrac{1}{3}$，故 Σ 与 π 的最长和最短距离分别为 3 和 $\dfrac{1}{3}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：diky66)

第七章　多元函数微分学

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

大纲点击

1. 理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义.

2. 了解二元函数的极限与连续的概念以及有界闭区域上二元连续函数的性质.

3. 理解多元函数偏导数与全微分的概念，会求全微分，了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性.

4. 理解方向导数与梯度的概念，并掌握其计算方法.

5. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.

6. 了解隐函数存在定理，会求多元隐函数的偏导数.

7. 了解空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程.

8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.

9. 理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决简单的应用问题.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

基础复习模块——基本概念、原理、考点

第一节　多元函数的基本概念与性质

1. 二元函数的极限——设 $z=f(x,y)((x,y)\in D)$，若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$.

【注解】

(1) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的极限与函数在该点的定义无关.

(2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $f(a-0)$ 与 $f(a+0)$ 存在且相等，由于趋向于平面上一点的方向的多样性，故多元函数在一点处的极限无类似结论.

2. 二元函数的连续 —— 设 $z=f(x,y)((x,y)\in D)$，且 $(x_0,y_0)\in D$，若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，称函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内点点连续，称 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续. 注意：多元初等函数在其定义域内连续.



3. 偏导数 —— 设 $z=f(x,y)((x,y)\in D)$，$(x_0,y_0)\in D$，称

$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏增量，

$\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏增量，

$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的全增量.

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 可偏导，极限记为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $f'_x(x_0,y_0)$；若 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 存在，称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 可偏导，极限记为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $f'_y(x_0,y_0)$.

【注解】

偏导数的等价形式为

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0},$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

4. 高阶偏导数 —— 设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内可偏导，若其偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 内分别对 x,y 可偏导，称它们为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，二阶偏导数有：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y),$$

其中 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 称为二阶混合偏导数. 类似可以定义三阶及以上的偏导数.

【注解】

(1) 二元分段函数在分界点处的偏导数一般按偏导数的定义计算.

(2) 对二元显函数 $z=f(x,y)$，其偏导数的求法与一元函数求导相同，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 时，将 $z=f(x,y)$ 中的 y 看成常数即可.

(3) 设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上可偏导，

若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}\equiv 0$，则 $z=f(x,y)$ 为常数；

若$\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$，则 $z=f(x,y)$ 中不含 x，即 $z=\varphi(y)$；

若$\frac{\partial z}{\partial y}\equiv 0$，则 $z=f(x,y)$ 中不含 y，即 $z=\varphi(x)$.

第二节　多元函数微分学基本理论

定理 1　若 $f(x,y)$ 二阶连续可偏导，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 相等.

定理 2　（如图 1-7-1）

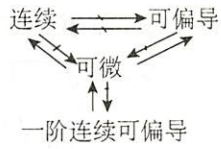


图 1-7-1

(1) 若 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处连续，反之不对.

(2) 若 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可偏导，反之不对.

(3) 若 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处一阶连续可偏导，则 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，反之不对.



【反例 1】　设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，显然 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可偏导性.

【解】　因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处对 x 不可偏导，由对称性，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处对 y 也不可偏导，此反例说明二元函数连续不一定可偏导.

【反例 2】　设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续，研究函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可偏导性.

【解】　因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，所以 $f'_x(0,0)=0$，由对称性得 $f'_y(0,0)=0$，此反例说明函数可偏导不一定连续.

【反例 3】　设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 研究函数的连续性、可偏导性及可微性.

【解】　因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续；

因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，所以 $f'_x(0,0)=0$，由对称性得 $f'_y(0,0)=0$，即函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，因为 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-Ax-By}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x,y)}{\rho}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

【反例 4】 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 研究函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性及一阶偏导的连续性.

【解】 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$，$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}y\sin\dfrac{1}{y^2}=0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处对 x,y 都可偏导且 $f'_x(0,0)=0$，$f'_y(0,0)=0$；

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，因为

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微；

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f'_x(x,y)=2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$，

则 $f'_x(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0),\\ 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\end{cases}$

同理 $f'_y(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0),\\ 2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0\\y=x}}f'_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{2x^2}\right)$ 不存在，所以 $f'_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续，同理 $f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处也不连续.

【例 5】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处(　　).

(A) 不连续　(B) 连续但不可偏导　(C) 可偏导、连续但不可微　(D) 可微

【解】 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$0\leqslant|f(x,y)|=|x|\cdot\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\leqslant|x|$，

由夹逼定理得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 得 $f'_x(0,0)=0$，同理 $f'_y(0,0)=0$.

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0$，所以$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$不存在，故$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微，应选(C).

第三节　偏导数计算法则

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

一、复合函数偏导数计算法则

定理 1　设$z=f(x,y)$可微，且$x=u(t)$，$y=v(t)$可导，则$z=f[u(t),v(t)]$可导，且$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$(如图 1-7-2).

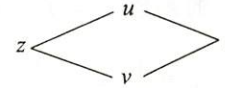


图 1-7-2

定理 2　设$z=f(u,v)$可微，且$\begin{cases}u=u(x,y),\\ v=v(x,y)\end{cases}$可偏导，则$z=f[u(x,y),v(x,y)]$对$x,y$可偏导，且

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$(如图 1-7-3).

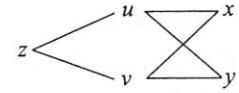


图 1-7-3



【例 1】　设$z=f(x^2+y^2)+g(xy,x+y)$，其中f二阶可导，g二阶连续可偏导，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【解】　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf'+yg'_1+g'_2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xyf''+g'_1+y(xg''_{11}+g''_{12})+xg''_{21}+g''_{22}$$
$$=4xyf''+g'_1+xyg''_{11}+(x+y)g''_{12}+g''_{22}.$$

【例 2】　设$u(x,y)=f(x+y)+f(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}g(t)\mathrm{d}t$，其中$f,g$二阶连续可导，则(　　).

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

【解】　由$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(x+y)+f'(x-y)+g(x+y)-g(x-y)$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(x+y)+f''(x-y)+g'(x+y)-g'(x-y)$；

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(x+y)-f'(x-y)+g(x+y)+g(x-y)$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(x+y)+f''(x-y)+g'(x+y)-g'(x-y)$，

得$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，应选(A).

【例 3】　设$f(x,y)$一阶连续可微，且$f(1,1)=1$，$f'_x(1,1)=a$，$f'_y(1,1)=b$，令$u=f[x,f(x,x)]$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

【解】 由$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'_x[x,f(x,x)]+f'_y[x,f(x,x)]\cdot[f'_x(x,x)+f'_y(x,x)]$得

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=f'_x(1,1)+f'_y(1,1)\cdot[f'_x(1,1)+f'_y(1,1)]=a+b(a+b).$$

二、隐函数的偏导数计算法则

(一) 由一个方程确定的隐函数偏导数计算法则

1. 设$F(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$的某邻域内连续可偏导,且$F(x_0,y_0)=0$,$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$,则由方程$F(x,y)=0$在点$M_0(x_0,y_0)$的邻域内唯一确定一个连续可导的函数$y=f(x)$,满足$y_0=f(x_0)$,方程$F(x,y)=0$两边对x求导得$F'_x+F'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$,于是$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

2. 设$F(x,y,z)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的某邻域内连续可偏导,且$F(x_0,y_0,z_0)=0$,$F'_z(x_0,y_0)\neq 0$,则由方程$F(x,y,z)=0$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的邻域内唯一确定一个连续可偏导的函数$z=f(x,y)$,满足$z_0=f(x_0,y_0)$,方程$F(x,y,z)=0$两边分别对x、y求偏导得$F'_x+F'_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$,$F'_y+F'_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,于是有$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

(二) 由多个方程确定的隐函数偏导数计算法则

1. 设$F(x,y,z)=0$,$G(x,y,z)=0$,其中F,G连续可偏导,则$F(x,y,z)=0$,$G(x,y,z)=0$确定两个一元函数,设y,z都是x的函数,$F(x,y,z)=0$,$G(x,y,z)=0$两边分别对x求导得

$$\begin{cases}F'_x+F'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ G'_x+G'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+G'_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}$$

令$J=\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\ G'_y & G'_z\end{vmatrix}=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$,

则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\begin{vmatrix}F'_x & F'_z\\ G'_x & G'_z\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}$,$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\begin{vmatrix}F'_y & F'_x\\ G'_y & G'_x\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}$.

2. 设$F(x,y,u,v)=0$,$G(x,y,u,v)=0$,其中F,G连续可偏导,则

$F(x,y,u,v)=0$,$G(x,y,u,v)=0$确定两个二元函数,设u,v都是x,y的二元函数,$F(x,y,u,v)=0$,$G(x,y,u,v)=0$两边对x求偏导得

$$\begin{cases}F'_x+F'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F'_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ G'_x+G'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G'_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$$

令$J=\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$,

则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\begin{vmatrix}F'_x & F'_v\\ G'_x & G'_v\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\begin{vmatrix}F'_u & F'_x\\ G'_u & G'_x\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$；

$F(x,y,u,v)=0,G(x,y,u,v)=0$ 两边对 y 求偏导得

$$\begin{cases}F'_y+F'_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+F'_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ G'_y+G'_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+G'_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\end{cases}$$

则 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\cdot\begin{vmatrix}F'_y & F'_v\\ G'_y & G'_v\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\cdot\begin{vmatrix}F'_u & F'_y\\ G'_u & G'_y\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$.

第四节　多元函数微分学在极值中的应用

一、无条件极值

（一）极值点与极值定义

设 $z=f(x,y)((x,y)\in D)$，对 $M_0(x_0,y_0)\in D$，若存在 $\delta>0$，当 $(x,y)\in U(M_0,\delta)$ 时，有 $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$，称 $M_0(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极大值点，$f(x_0,y_0)$ 称为极大值；若存在 $\delta>0$，当 $(x,y)\in U(M_0,\delta)$ 时，有 $f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$，称 $M_0(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极小值点，$f(x_0,y_0)$ 称为极小值.

微信公众号【顾尖考研】(ID：dikv66)

【注解】

(1) 设 $z=f(x,y)$ 可偏导，称 $\begin{cases}f'_x(x,y)=0,\\ f'_y(x,y)=0\end{cases}$ 的解为 $z=f(x,y)$ 的驻点.

(2) 设 $z=f(x,y)$ 可偏导，若 $M_0(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极值点，则 (x_0,y_0) 为驻点，反之驻点不一定为极值点.

（二）无条件极值步骤

设 $z=f(x,y)$（或 $F(x,y,z)=0$）$((x,y)\in D$，其中 D 为开区域），求函数极值点步骤如下：

1. 由 $\begin{cases}f'_x(x,y)=0,\\ f'_y(x,y)=0\end{cases}$ 求出驻点.

2. 设 (x_0,y_0) 为一个驻点，令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，

(1) 当 $AC-B^2>0$，则 (x_0,y_0) 一定是极值点，其中当 $A>0$ 时，(x_0,y_0) 为极小值点；当 $A<0$ 时，(x_0,y_0) 为极大值点.

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时，则 (x_0,y_0) 一定不是极值点.

(3) 当 $AC-B^2=0$ 时，则无法确定 (x_0,y_0) 是否为极值点.

【例 1】　设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-1}{\ln(1+x^2+y^2)}=2$，则（　　）.

(A)$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处取极小值

(B)$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处取极大值

(C)$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可偏导但不取极值

(D)$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 不可偏导也不取极值

【解】 显然 $f(0,0)=1$,因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-1}{\ln(1+x^2+y^2)}=2>0$,由极限的保号性,存在$\delta>0$,当$0<x^2+y^2<\delta^2$ 时有$\dfrac{f(x,y)-1}{\ln(1+x^2+y^2)}>0$,又因为 $\ln(1+x^2+y^2)>0$,所以有 $f(x,y)>f(0,0)$,故 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处取极小值,应选(A).

【例 2】 求函数 $z=x^3+y^2-6x^2-4y+2$ 的极值.

【解】 由$\begin{cases}z'_x=3x^2-12x=0,\\ z'_y=2y-4=0\end{cases}$ 得驻点为$(0,2),(4,2)$. 又

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-12,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,$$

当 $x=0,y=2$ 时,$A=-12,B=0,C=2$,因为 $AC-B^2<0$,所以$(0,2)$ 不是极值点;

当 $x=4,y=2$ 时,$A=12,B=0,C=2$,因为 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$,所以$(4,2)$ 为极小值点. 极小值为 $z(4,2)=-34$.

二、条件极值

1. 求函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值时,通常采用拉格朗日乘数法:

令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$,

由$\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0,\\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0,\\ F'_\lambda=\varphi(x,y)=0\end{cases}$解出所有的$(x,y)$,这些点是在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下 $z=f(x,y)$ 所有可能的极值点,将这些点代入目标函数即可求出最小值或最大值.

2. 求函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 及 $\psi(x,y,z)=0$ 下的极值时,通常采用拉格朗日乘数法:

令 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$,

由$\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x+\mu\psi'_x=0,\\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y+\mu\psi'_y=0,\\ F'_z=f'_z+\lambda\varphi'_z+\mu\psi'_z=0,\\ F'_\lambda=\varphi(x,y,z)=0,\\ F'_\mu=\psi(x,y,z)=0,\end{cases}$解得函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件下的所有可能的极值点,将点代入目标函数即可求出函数的最小值或最大值.

【例】 求椭球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的内接长方体的最大体积.

【解】 设椭球内接长方体位于第一卦限的顶点坐标为 $M(x,y,z)$,则 $V=8xyz$,

设 $F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$,

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

令 $\begin{cases} F'_x = yz + \dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ F'_y = xz + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ F'_z = xy + \dfrac{2\lambda z}{c^2} = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \end{cases}$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

由 $yz = -\dfrac{2\lambda x}{a^2}, xz = -\dfrac{2\lambda y}{b^2}$，两式相除得 $y = \dfrac{b}{a}x$；

由 $yz = -\dfrac{2\lambda x}{a^2}, xy = -\dfrac{2\lambda z}{c^2}$，两式相除得 $z = \dfrac{c}{a}x$，

再将 $y = \dfrac{b}{a}x, z = \dfrac{c}{a}x$ 代入 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ 得 $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, y = \dfrac{b}{\sqrt{3}}, z = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$，

于是最大体积为 $V = \dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

第五节　多元函数微分学在物理及几何上的应用

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

一、方向导数与梯度

1. 方向导数的概念

(1) 二维空间的方向导数 —— 设 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上有定义，$M_0(x_0,y_0) \in D$，在 xOy 平面内过 M_0 作射线 l，任取一点 $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in l$，令 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，若极限 $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\rho}$ 存在，称此极限为函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿射线 l 的方向导数，记为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0}$.

若射线 l 与 x 轴及 y 轴正向的夹角分别为 α, β，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta.$$

(2) 三维空间的方向导数 —— 设 $f(x,y,z)$ 在空间区域 Ω 上有定义，$M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Omega$，过 M_0 作射线 l，任取一点 $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) \in l$，令 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$，若极限 $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$ 存在，称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿射线 l 的方向导数，记为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0}$.

若射线 l 与 x 轴、y 轴及 z 轴正向的夹角分别为 α, β, γ，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma.$$

2. 梯度

(1) 二维空间的梯度——设 $u=f(x,y)$ 连续可偏导，称 $\{f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)\}$ 为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的梯度，记为 $\mathbf{grad}u\big|_{(x_0,y_0)}$.

(2) 三维空间的梯度——设 $u=f(x,y,z)$ 为可偏导的函数，称 $\mathbf{grad}u=\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}$ 为函数 $u=f(x,y,z)$ 的梯度.

3. 方向导数与梯度的关系

设 $u=f(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域内连续可偏导，过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的射线为 l，其对应的单位向量为 $\vec{e}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$($\alpha,\beta,\gamma$ 为 l 的方向角)，则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\mathbf{grad}u\big|_{M_0}\cdot\vec{e}=\left.\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\right|_{M_0}\cdot\cos\theta,$$

其中 θ 为射线 l 与梯度 $\mathbf{grad}u\big|_{M_0}$ 的夹角.

当 $\theta=0$，即射线 l 与梯度方向一致时，方向导数取最大值 $\left.\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\right|_{M_0}$，即梯度的方向为函数增长速度最快的方向.

二、多元函数微分学的几何应用

(一) 空间曲面的切平面与法线

设 $\Sigma:F(x,y,z)=0$，$M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，则曲面 Σ 上点 M_0 处的法向量为

$$\vec{n}=\{F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)\},$$

曲面 Σ 上过点 M_0 的切平面方程为

$$\pi:F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

法线方程为

$$L:\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

(二) 空间曲线的切线与法平面

(1) 设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\\ z=\omega(t),\end{cases}$ $t=t_0$ 对应的点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，切线的方向向量为 $\vec{T}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$.

切线为 $L:\dfrac{x-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-\omega(t_0)}{\omega'(t_0)}$，

法平面为 $\pi:\varphi'(t_0)[x-\varphi(t_0)]+\psi'(t_0)[y-\psi(t_0)]+\omega'(t_0)[z-\omega(t_0)]=0$.

(2) 设 $L:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$，则切线的方向向量为

$$\vec{T}=\left.\left\{\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\ G'_y & G'_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_z & F'_x\\ G'_z & G'_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\ G'_x & G'_y\end{vmatrix}\right\}\right|_{M_0}.$$

切线为 $L:\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\ G'_y & G'_z\end{vmatrix}_{M_0}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F'_z & F'_x\\ G'_z & G'_x\end{vmatrix}_{M_0}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\ G'_x & G'_y\end{vmatrix}_{M_0}}$，

法平面为

$$\pi:\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\ G'_y & G'_z\end{vmatrix}_{M_0}\cdot(x-x_0)+\begin{vmatrix}F'_z & F'_x\\ G'_z & G'_x\end{vmatrix}_{M_0}\cdot(y-y_0)+\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\ G'_x & G'_y\end{vmatrix}_{M_0}\cdot(z-z_0)=0.$$

知识延拓模块 —— 推广、专题讲解

函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值通常采用拉格朗日乘数法，但由偏导数构成的方程组求解不容易，条件极值的求解通常有如下方法：

方法一：转化为一元函数的最值

由 $\varphi(x,y)=0$ 得 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}(a\leqslant t\leqslant b)$，代入目标函数得 $z=f[x(t),y(t)]$．条件极值转化为一元函数 $z=f[x(t),y(t)]$ 在 $[a,b]$ 上的最值．

【例】　求函数 $z=x^2-2y^2+1$ 在 $D:x^2+4y^2\leqslant 4$ 上的最小值和最大值．

【解】　当 $x^2+4y^2<4$ 时，由 $\begin{cases}z'_x=2x=0,\\ z'_y=-4y=0\end{cases}$ 得 $z(0,0)=1$；

当 $x^2+4y^2=4$ 时，令 $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，代入目标函数得

$z=4\cos^2 t-2\sin^2 t+1=6\cos^2 t-1$，

当 $\cos t=0$ 时，$z_{\min}=-1$；当 $\cos t=\pm 1$ 时，$z_{\max}=5$，故函数 $z=x^2-2y^2+1$ 在区域 D 上的最小值为 -1，最大值为 5．

方法二：拉格朗日乘数法

令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，

由 $\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0,\\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0,\\ F'_\lambda=\varphi(x,y)=0\end{cases}$ 解出所有的 (x,y)，这些点是在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下 $z=f(x,y)$ 所有可能的极值点，将这些点代入目标函数即可求出最小值或最大值．

方程组 $\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0,(1)\\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0,(2)\\ F'_\lambda=\varphi(x,y)=0,\quad(3)\end{cases}$ 的求解通常有如下思路：

思路一：将 $\begin{cases}f'_x=-\lambda\varphi'_x\\ f'_y=-\lambda\varphi'_y\end{cases}$ 两式相除消去 λ，得到 $y=y(x)$，再代入方程(3)即可解出．

思路二：$\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0,\\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0\end{cases}$ 整理成 $\begin{cases}a_1(\lambda)x+b_1(\lambda)y=0,\\ a_2(\lambda)x+b_2(\lambda)y=0\end{cases}$ 若该方程组有非零解．则由 $\begin{vmatrix}a_1(\lambda) & b_1(\lambda)\\ a_2(\lambda) & b_2(\lambda)\end{vmatrix}=0$ 求出 λ，再代入(1)求出 $y=y(x)$，再代入方程(3)，即可解出．

思路三：先解出(1)或(2)，根据所得情形代入(3)即可解出．

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

方法三：由 $\varphi(x,y)=0$ 解出 $y=y(x)$，代入 $z=f(x,y)$ 中得 $z=f[x,y(x)]$，二元函数的条件极值问题转化为一元函数极值问题.

重点题型分析

题型一　多元函数的极限

【例 1】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+x^2y^2)^{\frac{y}{1-\cos x}}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sqrt{1+xy}+\sqrt{1-xy}-2}{x^2}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+x^2y^2)^{\frac{y}{1-\cos x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left[(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}\right]^{\frac{x^2y^3}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}y^3\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}}=e^{16}$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sqrt{1+xy}+\sqrt{1-xy}-2}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}y^2\cdot\dfrac{\sqrt{1+xy}+\sqrt{1-xy}-2}{(xy)^2}$

$\overset{xy=t}{=\!=}4\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2}{t^2}$,

由 $(1+t)^\alpha=1+\alpha t+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+o(t^2)$ 得

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2),\sqrt{1-t}=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2),$$

于是　　$\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2\sim-\dfrac{1}{4}t^2$,

故　　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sqrt{1+xy}+\sqrt{1-xy}-2}{x^2}=-1$.

【例 2】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{|x|+|y|},&(x,y)\neq(0,0),\\ 0,&(x,y)=(0,0),\end{cases}$ 研究 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 是否存在.

【解】 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f(x,y)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 不存在，

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

【例 3】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}},&(x,y)\neq(0,0),\\ 0,&(x,y)=(0,0),\end{cases}$ 研究 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 是否存在.

【解】 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$0\leqslant|f(x,y)|=x^2\cdot\dfrac{|y|}{\sqrt{x^4+y^2}}$,

因为 $\dfrac{|y|}{\sqrt{x^4+y^2}}=\dfrac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^4+y^2}}\leqslant\dfrac{\sqrt{x^4+y^2}}{\sqrt{x^4+y^2}}=1$,

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

所以 $0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant x^2$，

由夹逼定理得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

题型二　多元函数微分学的概念

【例 1】　设 $f(x,y)$ 二阶连续可偏导，$f(x,y)=3-2x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$，求 $f'_x(1,0)$ 及 $f'_y(1,0)$.

【解】　显然 $f(1,0)=1$，在 $(1,0)$ 的邻域内，

$$\Delta z=f(x,y)-f(1,0)=-2(x-1)-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2}),$$

根据可微的定义，$f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 处可微，且 $f'_x(1,0)=-2$，$f'_y(1,0)=-1$.

【例 2】　已知 $(3xy^3+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(4+ax^2y^2-by\sin x)\mathrm{d}y$ 为某函数的全微分，则 $a=$_____，$b=$_____.

【解】　设 $\mathrm{d}u(x,y)=(3xy^3+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(4+ax^2y^2-by\sin x)\mathrm{d}y$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3xy^3+y^2\cos x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=4+ax^2y^2-by\sin x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=9xy^2+2y\cos x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=2axy^2-by\cos x,$$

因为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 都连续，所以 $9xy^2+2y\cos x=2axy^2-by\cos x$，于是 $\begin{cases}2a=9,\\ -b=2,\end{cases}$ 故 $a=\dfrac{9}{2}$，$b=-2$.

【例 3】　设 $f''_{xy}(x,y)=4x$，$f(x,x)=2x^3+x+3$，$f'_x(x,0)=3$，求 $f(x,y)$.

【解】　由 $f''_{xy}(x,y)=4x$ 得 $f'_x(x,y)=4xy+\varphi(x)$，

由 $f'_x(x,0)=3$ 得 $\varphi(x)=3$，即 $f'_x(x,y)=4xy+3$，

再由 $f'_x(x,y)=4xy+3$ 得 $f(x,y)=2x^2y+3x+\psi(y)$，

再由 $f(x,x)=2x^3+x+3$ 得 $\psi(x)=3-2x$，

故 $f(x,y)=2x^2y+3x-2y+3$.

【例 4】　设 $z=f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，且 $f(x,0)=x$，$f(0,y)=y^2$，则 $f(x,y)=$_____.

【解】　由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy+\dfrac{y^2}{2}+\varphi(x)$，$z=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t+\psi(y)$.

因为 $f(x,0)=x$，$f(0,y)=y^2$，所以 $\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t+\psi(0)=x$，$\psi(y)=y^2$，于是 $\varphi(x)=1$，

故 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2y+xy^2)+x+y^2$.

【例 5】　设在平面上有 $f'_x(x,y)>0$，$f'_y(x,y)<0$，则下列条件中为使 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的充分条件的是(　　).

(A) $x_1<x_2$，$y_1<y_2$　　(B) $x_1<x_2$，$y_1>y_2$

(C) $x_1>x_2$，$y_1<y_2$　　(D) $x_1>x_2$，$y_1>y_2$

【解】　因为 $f'_x(x,y)>0$，所以 $f(x,y)$ 关于 x 为增函数，若 $x_1<x_2$，则 $f(x_1,y)<f(x_2,y)$；

又因为 $f'_y(x,y)<0$，所以 $f(x,y)$ 关于 y 为减函数，若 $y_1>y_2$，则 $f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$.

在 $f(x_1,y)<f(x_2,y)$ 中取 $y=y_1$，则有 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)$，于是 $f(x_1,y_1)<$

$f(x_2,y_2)$，应选(B).

题型三 连续、可偏导、可微与一阶连续可偏导的关系

【例 1】 研究函数 $z=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在点(0,0)处的连续性与可偏导性.

【解】 $z=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在(0,0)处连续，

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，所以 $z=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在(0,0)处对 x 不可偏导；

由 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{e^{y^2}-1}{y}=0$ 得 $z=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在(0,0)处对 y 可偏导.

【例 2】 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在(0,0)处的连续性、可偏导性及可微性.

【解】 因为 $0\leqslant|xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}|\leqslant|xy|$，所以由夹逼定理得 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，于是 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=f(0,0)$，即 $f(x,y)$ 在(0,0)处连续.

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 得 $f'_x(0,0)=0$，由对称性得 $f'_y(0,0)=0$，即 $f(x,y)$ 在(0,0)处可偏导.

令 $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$，因为

$$|\Delta f-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y|=|f(x,y)-f(0,0)|$$

$$=|xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}|\leqslant|xy|\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\rho^2,$$

所以 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{|f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y|}{\rho}=0$，

故 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微.

【例 3】 函数 $f(x,y)$ 在(x_0,y_0)处可偏导是 $f(x,y)$ 在(x_0,y_0)连续的(　　).

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

【解】 应选(D).

函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在(0,0)处可偏导，但不连续；

函数 $f(x,y)=|x|+|y|$ 在(0,0)处显然连续，

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在(0,0)处对 x 不可偏导，同

理 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处对 y 也不可偏导，故 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可偏导是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处既非连续的充分条件，又非连续的必要条件.

【例 4】　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 研究 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性.

【解】　因为 $0\leqslant|f(x,y)|=|x|\cdot\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant|x|$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|x|=0$，

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=f(0,0)=0$，即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 得 $f'_x(0,0)=0$，由对称性得 $f'_y(0,0)=0$.

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，

因为 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

【例 5】　设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 研究 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性与可微性.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】　显然 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{|x|}=0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处对 x 可偏导，且 $f'_x(0,0)=0$，同理 $f'_y(0,0)=0$，即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，

因为 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\rho\sin\dfrac{1}{\rho}=0$，

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

【例 6】　设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=3x-2y+4+o(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2})$，判断 $f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处是否可微，若可微求出 $f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处的微分.

【解】　令 $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$，

由 $f(x,y)=3x-2y+4+o(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2})$ 得

$f(x,y)-3=3(x-1)-2(y-2)+o(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2})$，

显然 $f(1,2)=3$，故由可微的定义，$f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处可微，且

$$\mathrm{d}f(x,y)\big|_{(1,2)}=3\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y.$$

题型四　求各类型(二元或多元)函数的偏导数

【思路分析】

求偏导数分为:显函数求偏导、复合函数求偏导、隐函数(组)求偏导等.

1. 显函数求偏导时,只需要将其余变量视为常数用求导的方法即可.

2. 复合函数求偏导时,可以根据函数的复合关系及求偏导法则求偏导.

3. 隐函数或隐函数组求偏导是非常简单的题型,主要做如下几个工作:

(1) 找出题中给出的约束条件的个数(即方程的个数或函数的个数).

(2) 找出题中未知数的个数,变量总数与约束条件个数之差即为自变量的个数.

(3) 从已知条件或结论确定变量的属性(即哪个变量为函数,哪个变量为自变量),从而确定变量之间基本的函数关系.

(4) 等式组两边对自变量求偏导数.

【例 1】 设 $z=(x^2+y^2)^{\tan(xy)}$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 本题为显函数求偏导. $z=e^{\tan(xy)\ln(x^2+y^2)}$,由求导法则与对称性得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\tan(xy)\ln(x^2+y^2)}\left[y\sec^2(xy)\ln(x^2+y^2)+\tan(xy)\frac{2x}{x^2+y^2}\right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\tan(xy)\ln(x^2+y^2)}\left[x\sec^2(xy)\ln(x^2+y^2)+\tan(xy)\frac{2y}{x^2+y^2}\right].$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 2】 设 $f(x,y)$ 一阶连续可偏导且满足 $f(tx,ty)=t^3f(x,y)$,且 $f'_1(1,2)=1$, $f'_2(1,2)=4$,求 $f(1,2)$.

【解】 $f(tx,ty)=t^3f(x,y)$ 两边对 t 求导数得

$$xf'_1(tx,ty)+yf'_2(tx,ty)=3t^2f(x,y),$$

取 $t=1,x=1,y=2$ 得 $3f(1,2)=f'_1(1,2)+2f'_2(1,2)$,于是 $f(1,2)=3$.

【例 3】 设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$,且 f 二阶连续可微,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 本题为复合函数求偏导. $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$ 两边对 x 求偏导得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin y\cdot f'_1+2xf'_2,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y\cdot f'_1)+\frac{\partial}{\partial y}(2xf'_2)\\&=e^x\cos y\cdot f'_1+e^x\sin y\cdot(e^x\cos yf''_{11}+2yf''_{12})+2x(e^x\cos y\cdot f''_{21}+2yf''_{22})\\&=e^x\cos y\cdot f'_1+e^{2x}\sin y\cos y\cdot f''_{11}+2e^x(x\cos y+y\sin y)f''_{12}+4xyf''_{22}.\end{aligned}$$

【例 4】 设 f 二阶可导,g 二阶连续可偏导,且 $z=xf(x^2-y^2)+g(x^2+y,xy,x^3)$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f+2x^2f'+2xg'_1+yg'_2+3x^2g'_3$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2yf'-4x^2yf''+2x(g''_{11}+xg''_{12})+g'_2+y(g''_{21}+xg''_{22})+3x^2(g''_{31}+xg''_{32})$$
$$=-2yf'-4x^2yf''+2xg''_{11}+(2x^2+y)g''_{12}+g'_2+xyg''_{22}+3x^2g''_{31}+3x^3g''_{32}.$$

【例 5】 设 $xyz=xe^z+ye^z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 **方法一** 令 $F(x,y,z)=xyz-xe^z-ye^z$，

由 $F'_x=yz-e^z$，$F'_y=xz-e^z$，$F'_z=xy-(x+y)e^z$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{yz-e^z}{(x+y)e^z-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{xz-e^z}{(x+y)e^z-xy}((x+y)e^z-xy\neq 0).$$

方法二 $xyz=xe^z+ye^z$ 两边分别对 x，y 求偏导得

$$\begin{cases}yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^z+xe^z\dfrac{\partial z}{\partial x}+ye^z\dfrac{\partial z}{\partial x},\\ xz+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^z\dfrac{\partial z}{\partial y}+e^z+ye^z\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$$ 解得

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-e^z}{(x+y)e^z-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-e^z}{(x+y)e^z-xy}((x+y)e^z-xy\neq 0).$$

方法三 $xyz=xe^z+ye^z$ 两边求微分得 $d(xyz)=d(xe^z)+d(ye^z)$，即

$yzdx+xzdy+xydz=e^zdx+xe^zdz+e^zdy+ye^zdz$，整理得

$$dz=\frac{yz-e^z}{(x+y)e^z-xy}dx+\frac{xz-e^z}{(x+y)e^z-xy}dy,$$

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-e^z}{(x+y)e^z-xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-e^z}{(x+y)e^z-xy}((x+y)e^z-xy\neq 0)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 6】 由方程组 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x^2+2y^2+3z^2=20\end{cases}$ 确定 y，z 为 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{dz}{dx}$.

【解】 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x^2+2y^2+3z^2=20\end{cases}$ 对 x 求导得 $\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=2x+2y\dfrac{dy}{dx},\\ 2x+4y\dfrac{dy}{dx}+6z\dfrac{dz}{dx}=0,\end{cases}$

解得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+6xz}{2y+6yz}(2y+6yz\neq 0)$，$\frac{dz}{dx}=\frac{x}{1+3z}(1+3z\neq 0)$.

【例 7】 由方程组 $\begin{cases}xu-yv=0,\\ yu+xv=1\end{cases}$ 确定 u，v 为 x，y 的函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$.

【解】 **方法一**

$$\begin{cases}xu-yv=0,\\ yu+xv=1\end{cases}$$ 对 x 求偏导得 $\begin{cases}u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+v+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=-u,\\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=-v,\end{cases}$

令 $D=\begin{vmatrix}x&-y\\ y&x\end{vmatrix}=x^2+y^2$，$D_1=\begin{vmatrix}-u&-y\\ -v&x\end{vmatrix}=-(ux+vy)$，$D_2=\begin{vmatrix}x&-u\\ y&-v\end{vmatrix}=uy-vx$，

由克拉默法则得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{D_1}{D}=-\frac{ux+vy}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{D_2}{D}=\frac{uy-vx}{x^2+y^2}$.

$\begin{cases} xu-yv=0, \\ yu+xv=1 \end{cases}$ 对 y 求偏导得 $\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial v}{\partial y}-v=0, \\ y\dfrac{\partial u}{\partial y}+u+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial v}{\partial y}=v, \\ y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=-u, \end{cases}$

令 $D=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+y^2$，$D_1=\begin{vmatrix} v & -y \\ -u & x \end{vmatrix}=vx-uy$，$D_2=\begin{vmatrix} x & v \\ y & -u \end{vmatrix}=-(ux+vy)$，

由克拉默法则得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{vx-uy}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{D_2}{D}=-\dfrac{ux+vy}{x^2+y^2}$.

方法二：雅可比法

令 $F=xu-yv$，$G=yu+xv-1$，则

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+y^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{x^2+y^2}\begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix}=-\frac{1}{x^2+y^2}\begin{vmatrix} u & -y \\ v & x \end{vmatrix}=-\frac{ux+vy}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{x^2+y^2}\begin{vmatrix} F'_u & F'_x \\ G'_u & G'_x \end{vmatrix}=-\frac{1}{x^2+y^2}\begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix}=\frac{uy-vx}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{x^2+y^2}\begin{vmatrix} F'_y & F'_v \\ G'_y & G'_v \end{vmatrix}=-\frac{1}{x^2+y^2}\begin{vmatrix} -v & -y \\ u & x \end{vmatrix}=\frac{vx-uy}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{x^2+y^2}\begin{vmatrix} F'_u & F'_y \\ G'_u & G'_y \end{vmatrix}=-\frac{1}{x^2+y^2}\begin{vmatrix} x & -v \\ y & u \end{vmatrix}=-\frac{ux+vy}{x^2+y^2}.$$

微信公众号【贝尔考研】(ID: djky66)

【例 8】 设 $z=z(x,y)$ 由 $x+z=ye^z$ 确定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 $x+z=ye^z$ 两边对 x 求偏导得 $1+\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^z\dfrac{\partial z}{\partial x}$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{ye^z-1}$；

$x+z=ye^z$ 两边对 y 求偏导得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^z+ye^z\dfrac{\partial z}{\partial y}$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{e^z}{ye^z-1}$.

于是 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{e^z+ye^z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(ye^z-1)^2}=\dfrac{e^z}{(ye^z-1)^3}(ye^z-1\neq 0)$.

【例 9】 设 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$，其中 F 一阶连续可偏导，证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$.

【分析】 本题三个变量一个约束条件，有一个变量受约束，两个变量自由，确定了一个二元函数，显然 z 为 x，y 的二元函数.

【解】 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 两边对 x 求偏导得

$$-\frac{y}{x^2}F'_1+\frac{x\dfrac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}F'_2=0,\text{解得}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yF'_1+zF'_2}{xF'_2};$$

$F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 两边对 y 求偏导得

$$\frac{1}{x}F'_1+\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{x}F'_2=0,\text{解得}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_1}{F'_2}.$$

于是 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{yF'_1+zF'_2}{xF'_2}-\frac{yF'_1}{F'_2}=z.$

【例 10】 设函数 $F(x,y,z)$ 连续可微，$F(x,y,z)=0$ 确定函数 $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$，且 $F'_1\neq 0$，$F'_2\neq 0$，$F'_3\neq 0$，则 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=$_____.

【分析】 求 $\frac{\partial x}{\partial y}$ 时，将 $F(x,y,z)=0$ 中 x 看成 y,z 的函数，两边对 y 求偏导得 $F'_1\frac{\partial x}{\partial y}+F'_2=0$，解得 $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F'_2}{F'_1}$，其他情况以此类推.

【解】 由 $F(x,y,z)=0$ 两边对 y 求偏导得 $F'_1\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+F'_2=0$，解得 $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F'_2}{F'_1}$；

由 $F(x,y,z)=0$ 两边对 z 求偏导得 $F'_2\cdot\frac{\partial y}{\partial z}+F'_3=0$，解得 $\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F'_3}{F'_2}$；

由 $F(x,y,z)=0$ 两边对 x 求偏导得 $F'_1+F'_3\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1}{F'_3}$.

于是 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 11】 设 $F(x,x+y,x+y+z)=0$，且 F 二阶连续可偏导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解】 $F(x,x+y,x+y+z)=0$ 两边对 x 求偏导得

$$F'_1+F'_2+F'_3\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\text{解得}\frac{\partial z}{\partial x}=-1-\frac{F'_1+F'_2}{F'_3}.$$

$F'_1+F'_2+F'_3\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$ 两边再对 x 求偏导得

$$F''_{11}+F''_{12}+F''_{13}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{21}+F''_{22}+F''_{23}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+$$

$$\left[F''_{31}+F''_{32}+F''_{33}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

解得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{F'^2_3(F''_{11}+2F''_{12}+F''_{22})-2F'_3(F'_1+F'_2)(F''_{13}+F''_{23})+(F'_1+F'_2)^2F''_{33}}{F'^3_3}.$

【例 12】 设 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$，其中 F 连续可偏导，求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 两边对 x 求偏导得

$$F'_1\cdot\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\cdot\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}=0,\text{解得}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zF'_2-x^2F'_1}{xF'_2+\frac{x^2}{y}F'_1};$$

$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 两边对 y 求偏导得

$$F'_1\cdot\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2}+F'_2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,\text{解得}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zF'_1-y^2F'_2}{yF'_1+\frac{y^2}{x}F'_2}.$$

于是 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{zF'_2-x^2F'_1}{xF'_2+\frac{x^2}{y}F'_1}+y\frac{zF'_1-y^2F'_2}{yF'_1+\frac{y^2}{x}F'_2}=z-xy.$

【例 13】 由 $x^x+y^y=z^z$ 确定函数 $z=z(x,y)$，求 $\mathrm{d}z$.

【解】 **方法一** 由 $x^x+y^y=z^z$ 得 $\mathrm{e}^{x\ln x}+\mathrm{e}^{y\ln y}=\mathrm{e}^{z\ln z}$，两边对 x 求偏导得

$$x^x(1+\ln x)=z^z(1+\ln z)\frac{\partial z}{\partial x},\text{解得}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^x(1+\ln x)}{z^z(1+\ln z)};$$

$\mathrm{e}^{x\ln x}+\mathrm{e}^{y\ln y}=\mathrm{e}^{z\ln z}$ 两边对 y 求偏导得

$$y^y(1+\ln y)=z^z(1+\ln z)\frac{\partial z}{\partial y},\text{解得}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^y(1+\ln y)}{z^z(1+\ln z)}.$$

于是 $\mathrm{d}z=\frac{x^x(1+\ln x)}{z^z(1+\ln z)}\mathrm{d}x+\frac{y^y(1+\ln y)}{z^z(1+\ln z)}\mathrm{d}y.$

方法二 $\mathrm{e}^{x\ln x}+\mathrm{e}^{y\ln y}=\mathrm{e}^{z\ln z}$ 两边微分得

$$\mathrm{e}^{x\ln x}(1+\ln x)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{y\ln y}(1+\ln y)\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{z\ln z}(1+\ln z)\mathrm{d}z,$$

于是 $\mathrm{d}z=\frac{x^x(1+\ln x)}{z^z(1+\ln z)}\mathrm{d}x+\frac{y^y(1+\ln y)}{z^z(1+\ln z)}\mathrm{d}y.$

微信公众号【硕尖考研】(ID:sjky66)

【例 14】 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$，$y=\sin x$ 确定 u 为 x 的函数，其中 f,φ 一阶连续可偏导，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

【分析】 本题四个变量三个约束条件，一个自由变量，确定三个一元函数，显然 u,y,z 皆为 x 的一元函数.

【解】 $u=f(x,y,z)$ 两边对 x 求导得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'_1+f'_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f'_3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，

$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$ 两边对 x 求导得 $2x\varphi'_1+\mathrm{e}^y\varphi'_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\varphi'_3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$，又 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$，

所以 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'_1+f'_2\cos x-\frac{(2x\varphi'_1+\mathrm{e}^y\varphi'_2\cos x)f'_3}{\varphi'_3}.$

【例 15】 设 $u=f(x,y,z)$ 一阶连续可偏导，又 $z=z(x,y)$ 由 $x\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$ 确定，求 $\mathrm{d}u$.

【分析】 本题四个变量两个约束条件，两个变量受约束，两个变量自由，确定两个二元函数，显然 z,u 为 x,y 的二元函数.

【解】 **方法一** $x\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$ 两边求微分得

$$\mathrm{d}(x\mathrm{e}^x)+\mathrm{d}(y\mathrm{e}^y)=\mathrm{d}(z\mathrm{e}^z),\text{即}(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+(y+1)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=(z+1)\mathrm{e}^z\mathrm{d}z,$$

于是 $\mathrm{d}z=\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}\mathrm{d}x+\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}\mathrm{d}y,$

$$du=f'_1dx+f'_2dy+f'_3dz=\left(f'_1+\frac{x+1}{z+1}e^{x-z}f'_3\right)dx+\left(f'_2+\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}f'_3\right)dy.$$

方法二　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1+f'_3\dfrac{\partial z}{\partial x}$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'_2+f'_3\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

$xe^x+ye^y=ze^z$ 两边对 x 求偏导得 $(x+1)e^x=e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}+ze^z\dfrac{\partial z}{\partial x}$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x+1}{z+1}e^{x-z}$；

$xe^x+ye^y=ze^z$ 两边对 y 求偏导得 $(y+1)e^y=e^z\dfrac{\partial z}{\partial y}+ze^z\dfrac{\partial z}{\partial y}$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y+1}{z+1}e^{y-z}$.

于是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1+\dfrac{x+1}{z+1}e^{x-z}f'_3$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'_2+\dfrac{y+1}{z+1}e^{y-z}f'_3$，故

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\left(f'_1+\frac{x+1}{z+1}e^{x-z}f'_3\right)dx+\left(f'_2+\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}f'_3\right)dy.$$

【例 16】　设 $u=f(z)$，z 是由 $z=y+x\varphi(z)$ 确定的 x，y 的函数，f，φ 皆可微，证明：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

【分析】　因为本题变量总数为四个，约束条件的个数为两个，所以确定了两个二元函数，从结论看 x，y 为自变量，显然 z，u 为 x，y 的二元函数.

【证明】　将 $u=f(z)$，$z=y+x\varphi(z)$ 对 x 求偏导得 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x},\\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi(z)+x\varphi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x},\end{cases}$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\varphi(z)}{1-x\varphi'(z)}$，于是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\varphi(z)f'(z)}{1-x\varphi'(z)}$；

将 $u=f(z)$，$z=y+x\varphi(z)$ 对 y 求偏导得 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\dfrac{\partial z}{\partial y},\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=1+x\varphi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial y},\end{cases}$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1-x\varphi'(z)}$，于是 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{f'(z)}{1-x\varphi'(z)}$.

显然 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

【例 17】　设 $z=f(u)$，由方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)dt$ 确定 u 为 x，y 的函数，且 f，φ 皆连续可导，$P(t)$ 连续且 $\varphi'(u)\neq 1$，证明：$P(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+P(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

【分析】　该题四个变量两个约束条件，确定两个二元函数，显然 u，z 为 x，y 的函数.

【证明】　$\begin{cases}z=f(u),\\ u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)dt\end{cases}$ 两边对 x 求偏导得 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x},\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+P(x),\end{cases}$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{P(x)}{1-\varphi'(u)}f'(u)$；

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$\begin{cases} z=f(u), \\ u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\mathrm{d}t \end{cases}$ 两边对 y 求偏导得 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}-P(y), \end{cases}$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-P(y)}{1-\varphi'(u)}f'(u)$.

显然 $P(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+P(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

题型五　变换下关于偏导数方程的变形



【例 1】 设 $u=f(x,y)$ 二阶连续可偏导，求在变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 下，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的形式.

【解】 由 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta=\arctan\dfrac{y}{x}, \end{cases}$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=\frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}-\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=\frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta},$$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$，故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为 $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$.

【例 2】 设 $z=f(x,y)$ 满足微分方程 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$，在 $\begin{cases} u=x, \\ v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}, \\ w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x} \end{cases}$ 下确定新函数 $w=w(u,v)$，求变换后的方程的形式.

【解】 $w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$ 两边分别对 x 和 y 求偏导得

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x^2},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y},$$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(-\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-z^2\dfrac{\partial w}{\partial y}$，

微信公众号【顶尖考研】(ID：djkv66)

而 $\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial w}{\partial v}$,

$\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial w}{\partial v}$,

于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(-\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=z^2\left(-\dfrac{\partial w}{\partial u}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial w}{\partial v}+\dfrac{1}{x^2}\right)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-z^2\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{z^2}{y^2}\dfrac{\partial w}{\partial v}$，

代入原方程得 $\dfrac{\partial w}{\partial u}=0$.

【例 3】 已知方程 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$，变换 $\begin{cases}u=x^2+y^2,\\ v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\end{cases}$ 及 $w=\ln z-(x+y)$ 确定函数 $w=w(u,v)$，试将原方程化为关于 w 及 u,v 的方程.

【解】 $w=\ln z-(x+y)$ 两边分别对 x,y 求偏导得

$\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}-1$，$\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}-1$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)$，

又 $\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=2x\dfrac{\partial w}{\partial u}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial w}{\partial v}$,

$\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=2y\dfrac{\partial w}{\partial u}-\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial w}{\partial v}$,

代入原方程得 $\dfrac{\partial w}{\partial v}=0$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【例 4】 设 $z=f(x,y)$ 二阶连续可偏导且满足 $4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. 确定常数 a,b 的值，使上述方程在变换 $\begin{cases}u=x+ay,\\ v=x+by\end{cases}$ 下变为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

【解】 如图 1-7-4 所示：

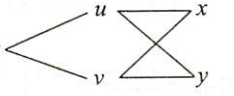


图 1-7-4

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=a\dfrac{\partial z}{\partial u}+b\dfrac{\partial z}{\partial v}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=a\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a+b)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+a\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}+b\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+b\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$

$=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2ab\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$,

代入原方程得

$$(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+[12(a+b)+10ab+8]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

于是有 $\begin{cases}5a^2+12a+4=0,\\5b^2+12b+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=-2,\end{cases}\begin{cases}a=-2,\\b=-\frac{2}{5},\end{cases}\begin{cases}a=-\frac{2}{5},\\b=-2,\end{cases}\begin{cases}a=-\frac{2}{5},\\b=-\frac{2}{5},\end{cases}$

因为 $12(a+b)+10ab+8\neq 0$，所以 $\begin{cases}a=-2,\\b=-\frac{2}{5},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{2}{5},\\b=-2.\end{cases}$

题型六　偏导数与微分方程混合问题

【例 1】 设 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 二阶连续可导，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$，求函数 $f(x)$.

【解】 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r)=\frac{y^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r),$$

由对称性得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2}{r^3}f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f''(r)$，于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r}f'(r)+f''(r)$.

由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$ 得 $f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=r^2$ 或 $rf''(r)+f'(r)=r^3$，解得

$$rf'(r)=\frac{1}{4}r^4+C_1 \text{ 或 } f'(r)=\frac{1}{4}r^3+\frac{C_1}{r},$$

于是 $f(r)=\frac{1}{16}r^4+C_1\ln r+C_2$，故 $f(x)=\frac{1}{16}x^4+C_1\ln x+C_2$.

【例 2】 设 $f(x,y)$ 连续可偏导，$f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$，$f'_x(x,y)=-f(x,y)$ 且满足条件 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(0,y+h)}{f(0,y)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\cot y}$，求 $f(x,y)$.

【解】
$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(0,y+h)}{f(0,y)}\right]^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\left[1+\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{f(0,y)}\right]^{\frac{1}{h}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\left[1+\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{f(0,y)}\right]^{\frac{f(0,y)}{f(0,y+h)-f(0,y)}}\right\}^{\frac{1}{h}\cdot\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{f(0,y)}}$$
$$=e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{f(0,y)}}=e^{\frac{f'_y(0,y)}{f(0,y)}},$$

于是有 $\frac{f'_y(0,y)}{f(0,y)}=\cot y$.

由 $f'_x(x,y)=-f(x,y)$ 得 $f'_x(x,y)+f(x,y)=0$，由一阶齐次线性微分方程通解公式得

$$f(x,y)=C(y)e^{-\int dx}=C(y)e^{-x}(y \text{ 视为常数}),\ f(0,y)=C(y),$$

从而 $f'_y(x,y)=C'(y)e^{-x}$，于是

$$C'(y)=f'_y(0,y)=f(0,y)\cot y=C(y)\cot y \text{ 或 } C'(y)-C(y)\cot y=0,$$

由一阶齐次线性微分方程通解公式得 $C(y)=Ce^{-\int -\cot y dy}=C\sin y$，

于是 $f(x,y)=Ce^{-x}\sin y$. 因为 $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$，所以 $C=1$，故 $f(x,y)=e^{-x}\sin y$.

题型七　二元函数的无条件极值

【例 1】　求函数 $z=f(x,y)=x^2y^2+2x^2-2\ln y+y$ 的极值.

【解】　显然函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$，由 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2+4x=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y-\frac{2}{y}+1=0\end{cases}$ 得

$\begin{cases}x=0,\\ y=2.\end{cases}$　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^2+4$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^2+\frac{2}{y^2}$，

$A=12,B=0,C=\frac{1}{2}$，因为 $AC-B^2=6>0$ 且 $A>0$，所以 $(0,2)$ 为函数的极小值点，且极小值为 $f(0,2)=2-2\ln 2$.

【例 2】　求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的二元隐函数的极值.

【解】　$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 两边分别对 x,y 求偏导得

$$\begin{cases}4x+2z\frac{\partial z}{\partial x}+8\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ 4y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+8x\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}\quad \text{解得}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4x+8z}{1-8x-2z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4y}{1-8x-2z}.$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得 $\begin{cases}x=-2,\\ y=0,\\ z=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{16}{7},\\ y=0,\\ z=-\frac{8}{7}.\end{cases}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{4+112z-896xz-224x^2-112z^2}{(1-8x-2z)^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{32y-224xy}{(1-8x-2z)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4+256x^2+16z^2-64x-16z+128xz+32y^2}{(1-8x-2z)^3}.$$

当 $\begin{cases}x=-2,\\ y=0\end{cases}$ 时，$A=\frac{4}{15},B=0,C=\frac{4}{15}$，因为 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$，所以 $\begin{cases}x=-2,\\ y=0\end{cases}$ 为函数 $z=z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z=1$；

当 $\begin{cases}x=\frac{16}{7},\\ y=0\end{cases}$ 时，$A=-\frac{4}{15},B=0,C=-\frac{4}{15}$，因为 $AC-B^2>0$ 且 $A<0$，所以 $\begin{cases}x=\frac{16}{7},\\ y=0\end{cases}$ 为函数 $z=z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z=-\frac{8}{7}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

题型八　多元函数的条件极值

【思路分析】

情形一：求 $z=f(x,y)$ 在 $\varphi(x,y)=0$ 下的最值时，常有如下方法：

(1) 拉格朗日乘数法

令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，由 $\begin{cases}F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0,\\F'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0,\\F'_\lambda=\varphi(x,y)=0,\end{cases}$ 得最优解.

上述方程组的常见解法有：

方法一：由 $\begin{cases}F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0,\\F'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0,\end{cases}$ 消去 λ 得 $y=y(x)$ 代入 $\varphi(x,y)=0$ 得最优解；

方法二：由 $\begin{cases}F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0,\\F'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0,\end{cases}$ 解出 $x=x(\lambda),y=y(\lambda)$，再代入 $\varphi(x,y)=0$ 得最优解.

方法三：利用线性方程组解的理论求解.

(2) 由 $\varphi(x,y)=0$ 得 $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t)\end{cases}$ 代入 $z=f(x,y)$ 中求 z 关于 t 的一元函数的最值.

情形二：函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 及 $\psi(x,y,z)=0$ 下的条件极值.

令 $F=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$，由 $\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x+\mu\psi'_x=0\\F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y+\mu\psi'_y=0\\F'_z=f'_z+\lambda\varphi'_z+\mu\psi'_z=0\\F'_\lambda=\varphi(x,y,z)=0\\F'_\mu=\psi(x,y,z)=0\end{cases}$ 求出最优解.

情形三：求 $z=f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最小值和最大值.

当 (x,y) 位于 D 内时，用无条件极值法求出可能的最值点；

当 (x,y) 位于 D 的边界时，用条件极值求出可能的最值点，从而求出函数的最小值和最大值.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 1】　求椭圆 $x^2+xy+y^2=1$ 的面积.

【分析】　$x^2+xy+y^2=1$ 是以原点为中心的椭圆，要求椭圆的面积只需要求出椭圆的长、短半轴，而此椭圆的长、短半轴即为曲线 $x^2+xy+y^2=1$ 到原点的最长和最短距离.

【解】　**方法一**　在曲线 $x^2+xy+y^2=1$ 上任取一点 $M(x,y)$，点 $M(x,y)$ 到原点的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2}$.

令 $F=x^2+y^2+\lambda(x^2+xy+y^2-1)$，由

$$\begin{cases} F'_x = 2x + (2x + y)\lambda = 0, \\ F'_y = 2y + (x + 2y)\lambda = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

得 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -\dfrac{2}{3}$.

当 $\lambda = -2$ 时，$y = -x$，解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1, \\ y = 1; \end{cases}$

当 $\lambda = -\dfrac{2}{3}$ 时，$y = x$，解得 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

当 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 1 \end{cases}$ 时，$d = \sqrt{2}$；当 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ 时，$d = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

于是椭圆 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 的面积为 $S = \pi ab = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$.

方法二(线性代数方法)：令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，则 $x^2 + xy + y^2 = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，作正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，其中 $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，则

$x^2 + xy + y^2 = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \xlongequal{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y} = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$，其中 λ_1, λ_2 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，于是 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 经过正交变换化为 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 1$(二维空间的正交变换相当于进行一次旋转变换)，或 $\dfrac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}\right)^2} = 1$，于是椭圆面积为 $S = \pi \cdot \sqrt{\dfrac{1}{\lambda_1}} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{\lambda_2}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}$.

由 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + \dfrac{3}{4} = 0$ 得 $\lambda_1 \lambda_2 = \dfrac{3}{4}$，故 $S = \dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$.

【例 2】　求函数 $z = f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$ 在 $x^2 + y^2 = 4$ 下的最小值和最大值.

【解】　**方法一：拉格朗日乘数法**

令 $F(x, y, \lambda) = x^2 - 2xy - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$，

$$\begin{cases} F'_x = 2x - 2y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = -2x - 2y + 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \text{即} \begin{cases} (\lambda + 1)x - y = 0, \\ x + (1 - \lambda)y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

由齐次线性方程组 $\begin{cases} (\lambda + 1)x - y = 0, \\ x + (1 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ 有非零解得 $\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$，解得 $\lambda = \pm\sqrt{2}$.

当 $\lambda=\sqrt{2}$ 时，$y=(\sqrt{2}+1)x$，代入 $x^2+y^2=4$ 得 $\begin{cases}x=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}},\\ y=\pm(\sqrt{2}+1)\sqrt{2-\sqrt{2}}.\end{cases}$

当 $\lambda=-\sqrt{2}$ 时，$y=(1-\sqrt{2})x$，代入 $x^2+y^2=4$ 得 $\begin{cases}x=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}},\\ y=\pm(1-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}.\end{cases}$

因为 $f(\pm\sqrt{2-\sqrt{2}},\pm(\sqrt{2}+1)\sqrt{2-\sqrt{2}})=-4\sqrt{2}$，

$f(\pm\sqrt{2+\sqrt{2}},\pm(1-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}})=4\sqrt{2}$，

所以所求的最小值为 $m=-4\sqrt{2}$，最大值为 $M=4\sqrt{2}$.

方法二 令 $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，代入 $z=x^2-2xy-y^2$ 中得

$$z=4\cos^2 t-8\sin t\cos t-4\sin^2 t=4\cos 2t-4\sin 2t=4\sqrt{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right),$$

当 $\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ 时，函数取最小值 $m=-4\sqrt{2}$，当 $\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=1$ 时，函数取最大值 $M=4\sqrt{2}$.

【例 3】 设函数 $f(x,y)=(x-6)(y+8)$ 在点 (x,y) 处方向导数的最大值函数为 $g(x,y)$，求 $g(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 25\}$ 上的最值.

【解】 $\mathbf{grad}f=\{y+8,x-6\}$，方向导数取最大的方向即为梯度的方向，最大值即为梯度的模，于是 $g(x,y)=\sqrt{(x-6)^2+(y+8)^2}$.

当 $x^2+y^2<25$ 时，因为方程 $\begin{cases}2(x-6)=0,\\ 2(y+8)=0\end{cases}$ 在 $x^2+y^2<25$ 内无解，所以 $g^2(x,y)$ 的最大值和最小值在 $x^2+y^2=25$ 上取到.

令 $F=(x-6)^2+(y+8)^2+\lambda(x^2+y^2-25)$，由

$$\begin{cases}F'_x=2(x-6)+2\lambda x=0,\\ F'_y=2(y+8)+2\lambda y=0,\\ F'_\lambda=x^2+y^2-25=0,\end{cases}\text{得}\begin{cases}x=3,\\ y=-4,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-3,\\ y=4,\end{cases}$$

又 $g(3,-4)=5$，$g(-3,4)=15$，所以 $g(x,y)$ 在 D 上的最小值为 5，最大值为 15.

【例 4】 设 $D:\frac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1$，求函数 $z=2x^2+y^2-2x^2y^2$ 在 D 上的最小值和最大值.

【解】 当 $\frac{x^2}{4}+y^2<1$ 时，由 $\begin{cases}z'_x=4x-4xy^2=0,\\ z'_y=2y-4x^2y=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$ 对应的函数值为 $z(0,0)=0$；

当 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 时，令 $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，代入得

$$z=1-\cos^2 t+8\cos^4 t=8\left(\cos^2 t-\frac{1}{16}\right)^2+\frac{31}{32},$$

当 $\cos^2 t=\frac{1}{16}$ 时，函数的最小值为 $z=\frac{31}{32}$，当 $\cos^2 t=1$ 时，函数的最大值为 $z=8$.

故 $z=2x^2+y^2-2x^2y^2$ 在 D 上的最小值为 0，最大值为 8.

【例 5】 设 $z=f(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}z=2x\,\mathrm{d}x-4y\,\mathrm{d}y$ 且 $f(0,0)=3$，求：

(1)$z=f(x,y)$；　(2)$z=f(x,y)$ 在 $D:\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1$ 上的最小值与最大值.

【解】 (1) **方法一**　由 $\mathrm{d}z=2x\,\mathrm{d}x-4y\,\mathrm{d}y$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-4y$.

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$ 得 $z=x^2+\varphi(y)$，再由 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(y)=-4y$ 得 $\varphi(y)=-2y^2+C$，则 $z=x^2-2y^2+C$，由 $f(0,0)=3$ 得 $C=3$，故 $z=x^2-2y^2+3$.

方法二　由 $\mathrm{d}z=2x\,\mathrm{d}x-4y\,\mathrm{d}y$ 得 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}(x^2-2y^2)$，于是 $z=x^2-2y^2+C$，再由 $f(0,0)=3$ 得 $C=3$，故 $z=x^2-2y^2+3$.

(2) 当 $\dfrac{x^2}{4}+y^2<1$ 时，由 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-4y=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$ 对应的函数值为 $f(0,0)=3$；

当 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 时，令 $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，代入得 $z=6\cos^2 t+1$.

当 $\cos^2 t=0$ 时，函数的最小值为 $z=1$，当 $\cos^2 t=1$ 时，函数的最大值为 $z=7$，故 $z=x^2-2y^2+3$ 在 $D:\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1$ 上的最小值为 1，最大值为 7.

【例 6】 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在 $z=x^2+y^2$ 及 $x+y+z-12=0$ 下的最值.

【解】 令 $F=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-12)$，由

$$\begin{cases}F'_x=2x+2\lambda x+\mu=0,\\ F'_y=2y+2\lambda y+\mu=0,\\ F'_z=2z-\lambda+\mu=0,\\ F'_\lambda=x^2+y^2-z=0,\\ F'_\mu=x+y+z-12=0,\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}x=-3,\\ y=-3,\\ z=18,\end{cases}\text{及}\begin{cases}x=2,\\ y=2,\\ z=8,\end{cases}$$

当 $x=-3,y=-3,z=18$ 时，$u=342$；当 $x=2,y=2,z=8$ 时，$u=72$.

所以最大值为 $u=342$，最小值为 $u=72$.

题型九　多元函数微分学的物理应用 —— 方向导数与梯度

【例 1】 研究函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点处沿任意方向的方向导数.

【解】 设 l 为过点(0,0)的任一条射线，其方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta$，

则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{z(\rho\cos\alpha,\rho\cos\beta)-z(0,0)}{\rho}=1.$

【注解】

显然 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0,0)处对 x,y 都不可偏导，但 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0,0)处沿任意方向的方向导数存在，即可偏导不是方向导数存在的必要条件.

【例 2】 求 $u=\ln(x^2+y^2+z)$ 在点 $M_0(1,1,1)$ 处从 $M_0(1,1,1)$ 指向 $M_1(2,1,0)$ 的方向导数.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2+z}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2+z}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{x^2+y^2+z}$，

$\mathbf{grad}u\big|_{(1,1,1)}=\left\{\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right\}$，

由 $\overrightarrow{M_0M_1}=\{1,0,-1\}$ 得 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\cos\beta=0,\cos\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{3}\times0+\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.

【例 3】 设 $\vec{n}$ 为曲面 $\Sigma:2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $M_0(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量，求 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 $M_0(1,1,1)$ 处沿 $\vec{n}$ 的方向导数.

【解】 $\vec{n}=\{4x,6y,2z\}_{M_0}=\{4,6,2\}$，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}},\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}},\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$，

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}$，

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\dfrac{6}{\sqrt{14}}$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=\dfrac{8}{\sqrt{14}}$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=-\sqrt{14}$，

则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{M_0}=\dfrac{6}{\sqrt{14}}\times\dfrac{2}{\sqrt{14}}+\dfrac{8}{\sqrt{14}}\times\dfrac{3}{\sqrt{14}}-\sqrt{14}\times\dfrac{1}{\sqrt{14}}=\dfrac{11}{7}$.

微信公众号【顶尖考研】

【例 4】 设函数 $z=x^2+y^2-2x+12$，

(1) 求该函数的方向导数最大值函数 $\varphi(x,y)$.

(2) 在曲线 $L:x^2+y^2=1$ 上找一点，使得 $\varphi(x,y)$ 取最大值，并求最大值.

【解】 (1) $z=x^2+y^2-2x+12$ 的梯度为 $\mathbf{grad}z=\{2x-2,2y\}$，

因为函数沿梯度方向的方向导数最大，方向导数的最大值即梯度的模，故函数 $z=x^2+y^2-2x+12$ 在 $P(x,y)$ 处方向导数的最大值为

$\varphi(x,y)=\sqrt{(2x-2)^2+(2y)^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$.

(2) 令 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，

因为 $(x-1)^2+y^2=x^2+y^2+1-2x=2-2\cos t$，

所以当 $\cos t=-1$，即 L 上点 $(-1,0)$ 处 $z=x^2+y^2-2x+12$ 的方向导数最大值函数 $\varphi(x,y)$ 取最大值，且最大值为 $\varphi(-1,0)=4$.

题型十 多元函数微分的几何应用

【例 1】 求曲线 $L:\begin{cases}2x+y-z=0,\\ x^2+y^2+2z^2=4\end{cases}$ 在点 $M_0(1,-1,1)$ 处的切线与法平面方程.

【解】 $\vec{n_1}=\{2,1,-1\}$，$\vec{n_2}=\{2x,2y,4z\}_{(1,-1,1)}=\{2,-2,4\}$，

则切线的方向向量为 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\{2,-10,-6\}$，

则切线为$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-1}{-3}$，

法平面为$\pi:(x-1)-5(y+1)-3(z-1)=0$，即$\pi:x-5y-3z-3=0$.

【例 2】　求曲面$x^2+y^2-z^2=1$与平面$x+y+z=0$平行的切平面.

【解】　设切点为$M(x_0,y_0,z_0)$，在曲面上点$M(x_0,y_0,z_0)$处的法向量为

$$\vec{n}=\{2x_0,2y_0,-2z_0\},$$

由$\vec{n}\ /\!/\ \{1,1,1\}$得$\frac{x_0}{1}=\frac{y_0}{1}=-\frac{z_0}{1}$，令$\frac{x_0}{1}=\frac{y_0}{1}=-\frac{z_0}{1}=t$，即$x_0=y_0=t,z_0=-t$，代入曲面方程得$t=\pm1$，切点为$M(1,1,-1)$及$M(-1,-1,1)$，切平面方程为

$$\pi_1:x+y+z-1=0,\quad \pi_2:x+y+z+1=0.$$

【例 3】　求圆$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-2y+5z-4=0\end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线与法平面.

【解】　曲面$x^2+y^2+z^2-3x=0$在点$(1,1,1)$处的法向量为$\vec{n_1}=\{2x-3,2y,2z\}_{(1,1,1)}=\{-1,2,2\}$；

曲面$2x-2y+5z-4=0$在点$(1,1,1)$处的法向量为$\vec{n_2}=\{2,-2,5\}$.

圆在点$(1,1,1)$处的切向量为$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\{14,9,-2\}$，于是切线为

$$L:\frac{x-1}{14}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-2},$$

法平面为$\pi:14(x-1)+9(y-1)-2(z-1)=0$，即$\pi:14x+9y-2z-21=0$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【例 4】　设$F(u,v)$一阶连续可微，证明：曲面$F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$上任意一点处的切平面都过一个固定点.

【证明】　设$M(x,y,z)$为曲面上任意一点，曲面在该点处的法向量为

$$\vec{n}=\left\{\frac{F'_1}{z-c},\frac{F'_2}{z-c},-\frac{x-a}{(z-c)^2}F'_1-\frac{y-b}{(z-c)^2}F'_2\right\},$$

过$M(x,y,z)$的切平面为

$$\frac{F'_1}{z-c}(X-x)+\frac{F'_2}{z-c}(Y-y)-\left[\frac{x-a}{(z-c)^2}F'_1+\frac{y-b}{(z-c)^2}F'_2\right](Z-z)=0,$$

显然$X=a,Y=b,Z=c$满足上述方程，故曲面$F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$上任意一点的切平面过固定点$(a,b,c)$.

测试题

一、选择题

1. 设$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，则$f(x,y)$等于(　　).

(A)x^2-y^2　　(B)$\frac{x^2(1-y)}{1+y}$　　(C)$\frac{x(1-y)}{1+y}$　　(D)$(x+y)^2-\left(\frac{y}{x}\right)^2$

2. 设$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可偏导，则(　　).

(A) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在　　(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ 都存在

3. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可偏导是函数在该点可微的(　　).

(A) 充分必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充分但非必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

4. 设函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy$，且 $f'_x(x,y)=2xy^2+3$，$f(0,y)=2y+1$，则 $f(x,y)$ 为(　　).

(A) $f(x,y)=x^2y^2-3x+2y+1$　　(B) $f(x,y)=x^2y^2+3x+2y+1$

(C) $f(x,y)=x^2y^2+3x-2y+1$　　(D) $f(x,y)=x^2y^2-3x-2y+1$

5. 曲线 $L:\begin{cases}y^2=x,\\ x^2=z\end{cases}$ 在点 $(1,-1,1)$ 处的法平面方程为(　　).

(A) $2x-y+4z+7=0$　　(B) $2x-y+4z-7=0$

(C) $2x-y+4z+3=0$　　(D) $2x-y+4z-3=0$

二、填空题

1. 设 $z=e^{\sin xy}$，则 $dz=$ _____.

2. 设 $z=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)}=$ _____.

3. $z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 $f(u)$ 可导，则 $xz'_x+yz'_y=$ _____.

4. 设函数 $u=f(x+y,xy)$ 具有二阶连续的偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$ _____.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

5. 设 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)+y^2g(x+y,xy)$，其中 f,g 二阶连续可导和二阶连续可偏导，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ _____.

6. 设 $f(x,y,z)=e^xyz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则 $f'_x(0,1,-1)=$ _____.

7. 设 $x+z=yf(x^2-z^2)$，其中 f 可导，则 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ _____.

8. 设 $z=f(x,y)$ 二阶连续可偏导且 $f(x,0)=1$，$f'_y(x,0)=x$，$f''_{yy}(x,y)=2$，则 $f(x,y)=$ _____.

9. 方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 的全微分 $dz=$ _____.

10. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x=f(y+z,y+x)$ 所确定，其中 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，则 $dz=$ _____.

11. 设 $f(x,y)$ 连续且有 $f(x,y)=2x-y+6+o(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2})$，则

$f(1,2)=$ _____，$f'_x(1,2)=$ _____，$f'_y(1,2)=$ _____.

12. 函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $M_0(1,1,1)$ 处沿曲面 $x^2+y^2=2z$ 在 M_0 处的外法线方向的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{M_0}=$ _____.

13. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 沿从 A 指向 $B(3,-2,2)$ 的方向导数为_____.

14. 若可微函数 $f(x,y)$ 满足 $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$，设 $M_0(1,-2,2)$ 为曲面 $\Sigma:z=f(x,y)$ 上的一点，且 $f'_x(1,-2)=4$，则曲面 Σ 在点 M_0 处的法线为_____.

三、解答题

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}(1+xy)^{\frac{\sin(xy)}{x^2}}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+4}-2}{x^2y^2}$.

2. 讨论 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点(0,0)处的连续性、可偏导性与可微性.

3. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=(1+xy)^{x^2+y^2}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$；　(2) $z=x^y+y^{\sin x}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 求下列偏导数：

(1) 设 f,g 二阶连续可微，且 $u=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$，求 $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$；

(2) 设 $z=f(xy,x^2+y^2,3x)$，且 f 二阶连续可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 设 $z=f(x-y+g(x-y-z))$，且 f,g 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6. 设 $y=f(x,t)$，t 是由 $G(x,y,t)=0$ 确定的 x,y 的函数，f,G 可微，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

7. 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f,φ 连续可偏导且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

8. 设 $u=f(x,y)$ 且 $\varphi(x,y)=0$ 确定 y 为 x 的函数且 f,φ 二阶连续可偏导，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$.

9. 设 $z=f(u)$ 可微，$u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\mathrm{d}t$ 确定 u 为 x,y 的函数，其中 $P(t)$ 连续，$\varphi(u)$ 连续可导且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $P(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+P(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

10. 设 $u=x^nF\left(\dfrac{z}{x},\dfrac{y}{x}\right)$，其中 F 连续可偏导，证明：$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=nu$.

11. 设 $u=u(x)$ 由 $u=f(x,y),g(x,y,z)=0,h(x,z)=0$ 确定，f,g,h 连续可偏导且 $\dfrac{\partial h}{\partial z}\neq 0,\dfrac{\partial g}{\partial y}\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

12. 设 $z=z(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，$z(x,0)=x^2+2x$，$z(0,y)=y^2$，求 $z(x,y)$.

13. 设变换 $\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+ay \end{cases}$ 可将方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求 a.

14. 设 $z=z(x,y)$ 满足方程 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求方程在变换 $u=xy,v=\dfrac{x}{y}$ 下的形式.

15. 求函数 $z=x^2y(4-x-y)$ 在由 x 轴、y 轴及直线 $x+y=6$ 围成区域上的最大值和最小值.

16. 求椭圆 $x^2-4xy+5y^2=1$ 的面积.

17. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 所截成椭圆，求原点到该椭圆上点的最短和最长的距离.

18. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上二阶连续可导，$f(1)=0,f'(1)=1$ 且 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1) 求 $f(x)$；　(2) 求 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

19. 设 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$，其中 f 二阶连续可导且满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z\mathrm{e}^{2x}$ 且 $f(0)=1,f'(0)=0$，求 $f(x)$.

20. 求曲线 $L:\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=9, \\ 3x^2+y^2=z^2 \end{cases}$ 在点 $M(1,-1,2)$ 处的切线与法平面方程.

21. 设 $\vec{n}$ 为曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的外法向量，求 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿 $\vec{n}$ 的方向导数.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号顶尖考研
(ID:djky66)

测试题参考答案

一、选择题

1. 令 $x+y=u,\dfrac{y}{x}=v$，解得 $x=\dfrac{u}{1+v},y=\dfrac{uv}{1+v}$，于是 $f(u,v)=\left(\dfrac{u}{1+v}\right)^2-\left(\dfrac{uv}{1+v}\right)^2=\dfrac{u^2(1-v)}{1+v}$，故 $f(x,y)=\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$，应选(B).

2. 由 $f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ 存在得 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$，再由 $f'_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$ 存在得 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)$ 都存在，应选(D).

3. 若函数在一点可微，则函数在该点处连续且可偏导，反之不对，例如：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 容易验证 $f(x,y)$ 在(0,0)处既连续又可偏导且 $A=f'_x(0,0)=0,B=f'_y(0,0)=0,\Delta z-Ax-By=f(x,y)-f(0,0)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，因为 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta z-Ax-By}{\rho}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在(0,0)处不可微，应选(B).

4. 由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy^2+\varphi(x)$，因为 $f'_x(x,y)=2xy^2+3$，所以 $\varphi(x)=3$. 又 $z=x^2y^2+3x+\psi(y)$，于是 $f(0,y)=\psi(y)=2y+1$，即 $f(x,y)=x^2y^2+3x+2y+1$，应选(B).

5. 令 $F=x-y^2,G=x^2-z$，则曲线 L 在点(1,-1,1)处的方向向量为 $\vec{T}=\{1,-2y,0\}_{(1,-1,1)}\times\{2x,0,-1\}_{(1,-1,1)}=\{1,2,0\}\times\{2,0,-1\}=\{-2,1,-4\}$，则曲线 L 在点(1,-1,1)处的法平面为 $\pi:-2(x-1)+(y+1)-4(z-1)=0$，即 $\pi:2x-y+4z-7=0$，应选(B).

二、填空题

1. 由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{\sin xy}\cos xy,\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{\sin xy}\cos xy$ 得 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=e^{\sin xy}\cos xy(ydx+xdy)$.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{e^{-x}}{y}\cos\dfrac{x}{y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{xe^{-x}}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}-\dfrac{e^{-x}}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}+\dfrac{xe^{-x}}{y^3}\sin\dfrac{x}{y}$，于是 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)}=\dfrac{2\pi^2}{e^2}-\dfrac{\pi^2}{e^2}=\left(\dfrac{\pi}{e}\right)^2$.

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y^2}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right),\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+yf'\left(\dfrac{y}{x}\right)$，于是 $xz'_x+yz'_y=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)-y^2f'\left(\dfrac{y}{x}\right)+xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)+y^2f'\left(\dfrac{y}{x}\right)=2xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

4. $u=f(x+y,xy)$ 两边对 x 求偏导得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2$，于是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''_{11}+xf''_{12}+f'_2+y(f''_{21}+xf''_{22})=f''_{11}+(x+y)f''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$.

5. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f(xy)+\dfrac{y^2}{x}f'(xy)+y^2(g'_1+yg'_2),\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{x^2}f(xy)-\dfrac{y}{x}f'(xy)+\dfrac{2y}{x}f'(xy)+y^2f''(xy)+2y(g'_1+yg'_2)+y^2[g''_{11}+xg''_{12}+g'_2+y(g''_{21}+xg''_{22})]=-\dfrac{1}{x^2}f(xy)+\dfrac{y}{x}f'(xy)+y^2f''(xy)+2yg'_1+3y^2g'_2+y^2g''_{11}+y^2(x+y)g''_{12}+xy^3g''_{22}$.

6. $f(x,y,z)=e^xyz^2$ 两边对 x 求偏导得 $f'_x(x,y,z)+f'_z(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^xyz^2+2e^xyz\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$x+y+z+xyz=0$ 两边对 x 求偏导得 $1+\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，于是 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1,-1)}=0$，故 $f'_x(0,1,-1)=1$.

7. $x+z=yf(x^2-z^2)$ 两边对 x 求偏导得 $1+\frac{\partial z}{\partial x}=y\left(2x-2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)f'$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xyf'-1}{1+2yzf'}$；$x+z=yf(x^2-z^2)$ 两边对 y 求偏导得 $\frac{\partial z}{\partial y}=f-2yzf'\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$，解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f}{1+2yzf'}$，于是 $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xyzf'-z+yf}{1+2yzf'}=\frac{2xyzf'-z+x+z}{1+2yzf'}=x$.

8. 由 $f''_{yy}(x,y)=2$ 得 $f'_y(x,y)=2y+C(x)$，由 $f'_y(x,0)=x$ 得 $C(x)=x$，即 $f'_y(x,y)=2y+x$，于是 $f(x,y)=y^2+xy+\varphi(x)$，由 $f(x,0)=1$ 得 $\varphi(x)=1$，故 $f(x,y)=y^2+xy+1$.

9. $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 两边求微分得 $yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$，将 $x=1$，$y=0,z=-1$ 代入得 $-\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}z}{\sqrt{2}}=0$，解得 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$.

10. $x=f(y+z,y+x)$ 两边对 x 求偏导得 $1=\frac{\partial z}{\partial x}f'_1+f'_2$，于是 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-f'_2}{f'_1}$. $x=f(y+z,y+x)$ 两边对 y 求偏导得 $0=\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)f'_1+f'_2$，于是 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_2}{f'_1}-1$，故 $\mathrm{d}z=\frac{1-f'_2}{f'_1}\mathrm{d}x-\left(\frac{f'_2}{f'_1}+1\right)\mathrm{d}y$.

11. 由 $f(x,y)=2x-y+6+o(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2})$ 得 $f(x,y)-6=2(x-1)-(y-2)+o(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2})$，由函数可微的定义得 $f(1,2)=6,f'_x(1,2)=2,f'_y(1,2)=-1$.

12. $\frac{\partial u}{\partial x}|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial y}|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial z}|_{M_0}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\vec{n}=\{2x,2y,-2\}_{M_0}=\{2,2,-2\}$，则 $\vec{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，于是 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{M_0}=\frac{1}{3}$.

13. $\overrightarrow{AB}=\{2,-2,1\}$，方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=-\frac{2}{3}$，$\cos\gamma=\frac{1}{3}$，又 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{(1,0,1)}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{1}{2}$，$\frac{\partial u}{\partial y}|_{(1,0,1)}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}=0$，$\frac{\partial u}{\partial z}|_{(1,0,1)}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\partial u}{\partial l}|_{(1,0,1)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

14. $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$ 两边对 t 求导得 $xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)=2tf(x,y)$，取 $t=1,x=1$，$y=-2$ 得 $f'_x(1,-2)-2f'_y(1,-2)=2f(1,-2)$，由 $f(1,-2)=2,f'_x(1,-2)=4$ 得 $f'_y(1,-2)=0$，于是法线的方向向量为 $\vec{s}=\{4,0,-1\}$，法线方程为 $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-2}{-1}$.

三、解答题

1. (1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}(1+xy)^{\frac{\sin(xy)}{x^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}]^{\frac{\sin(xy)}{x^2}\cdot xy}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\frac{\sin(xy)}{x^2}\cdot xy}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y^2}=\mathrm{e}^{a^2}$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+4}-2}{x^2y^2}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sqrt{t+4}-2}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\sqrt{t+4}+2}=\frac{1}{4}$.

2. 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. 又因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，$\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导且 $f'_x(0,0)=0,f'_y(0,0)=0$. 令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，因为 $0\leqslant\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}\right|=\frac{|xy|}{\rho}\sin\frac{1}{\rho}\leqslant\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\rho}\sin\frac{1}{\rho}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$=\frac{\rho}{2}\sin\frac{1}{\rho}$，所以$\lim\limits_{\rho\to0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=0$，即$f(x,y)$在$(0,0)$处可微.

3. (1)$z=e^{(x^2+y^2)\ln(1+xy)}$，$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{(x^2+y^2)\ln(1+xy)}\left[2x\ln(1+xy)+\frac{y(x^2+y^2)}{1+xy}\right]$，

由对称性得$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{(x^2+y^2)\ln(1+xy)}\left[2y\ln(1+xy)+\frac{x(x^2+y^2)}{1+xy}\right]$.

(2)$z=x^y+y^{\sin x}=x^y+e^{\sin x\ln y}$，$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}+y^{\sin x}\cos x\ln y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x+y^{\sin x-1}\sin x$.

4. (1)$\frac{\partial u}{\partial x}=f'\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$，

于是$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)=0$.

(2)$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+2xf'_2+3f'_3$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y(xf''_{11}+2yf''_{12})+2x(xf''_{21}+2yf''_{22})+3(xf''_{31}+2yf''_{32})=f'_1+xyf''_{11}+2(x^2+y^2)f''_{12}+4xyf''_{22}+3xf''_{31}+6yf''_{32}$.

5. $z=f(x-y+g(x-y-z))$两边对x求偏导得$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\left[1+g'\cdot\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]$，解得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f'+f'g'}{1+f'g'}$；$z=f(x-y+g(x-y-z))$两边对$y$求偏导得$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\left[-1+g'\cdot\left(-1-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]$，解得$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'+f'g'}{1+f'g'}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

6. $\begin{cases}y=f(x,t),\\G(x,y,t)=0\end{cases}$对$x$求导数得$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f'_x+f'_t\frac{dt}{dx},\\G'_x+G'_y\frac{dy}{dx}+G'_t\frac{dt}{dx}=0,\end{cases}$解得$\frac{dy}{dx}=\frac{f'_xG'_t-f'_tG'_x}{G'_t+f'_tG'_y}$.

7. $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$分别对x求导得$\begin{cases}\frac{du}{dx}=f'_1+f'_2\frac{dy}{dx}+f'_3\frac{dz}{dx},\\2x\varphi'_1+e^y\varphi'_2\frac{dy}{dx}+\varphi'_3\frac{dz}{dx}=0,\\\frac{dy}{dx}=\cos x,\end{cases}$解得

$\frac{du}{dx}=f'_1+f'_2\cos x-\frac{f'_3(2x\varphi'_1+e^{\sin x}\varphi'_2\cos x)}{\varphi'_3}$.

8. $\begin{cases}u=f(x,y),\\\varphi(x,y)=0\end{cases}$两边对$x$求导得$\begin{cases}\frac{du}{dx}=f'_1+f'_2\frac{dy}{dx},\\\varphi'_1+\varphi'_2\frac{dy}{dx}=0,\end{cases}$解得$\frac{du}{dx}=f'_1-\frac{f'_2\varphi'_1}{\varphi'_2}$.

$\begin{cases}\frac{du}{dx}=f'_1+f'_2\frac{dy}{dx},\\\varphi'_1+\varphi'_2\frac{dy}{dx}=0\end{cases}$两边对$x$求导得$\begin{cases}\frac{d^2u}{dx^2}=f''_{11}+f''_{12}\frac{dy}{dx}+f'_2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(f''_{21}+f''_{22}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx},\\\varphi''_{11}+\varphi''_{12}\frac{dy}{dx}+\varphi'_2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\varphi''_{21}+\varphi''_{22}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}=0,\end{cases}$解得

$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{\varphi'^3_2f''_{11}-2\varphi'_1\varphi'^2_2f''_{12}+\varphi'^2_1\varphi'_2f''_{22}-(\varphi''_{11}\varphi'^2_2-2\varphi'_1\varphi'_2\varphi''_{12}+\varphi'^2_1\varphi''_{22})f'_2}{\varphi'^3_2}$.

9. 将$\begin{cases}z=f(u),\\ u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\mathrm{d}t\end{cases}$两边对$x$求偏导得$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x},\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+P(x),\end{cases}$解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\dfrac{P(x)}{1-\varphi'(u)}$；

$\begin{cases}z=f(u),\\ u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\mathrm{d}t\end{cases}$两边对$y$求偏导得$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}-P(y),\end{cases}$解得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)\cdot\dfrac{P(y)}{1-\varphi'(u)}$，于是

$P(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+P(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

10. $u=x^nF\left(\dfrac{z}{x},\dfrac{y}{x}\right)$两边对$x$求偏导得$\dfrac{\partial u}{\partial x}=nx^{n-1}F-x^{n-2}(zF'_1+yF'_2)$，$u=x^nF\left(\dfrac{z}{x},\dfrac{y}{x}\right)$两边对$y$求偏导得$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{n-1}F'_2$，$u=x^nF\left(\dfrac{z}{x},\dfrac{y}{x}\right)$两边对$z$求偏导得$\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{n-1}F'_1$，于是$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=nx^nF-x^{n-1}(zF'_1+yF'_2)+x^{n-1}yF'_2+x^{n-1}zF'_1=nu$.

11. $u=f(x,y),g(x,y,z)=0,h(x,z)=0$对$x$求导得$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'_1+f'_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\\ g'_1+g'_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+g'_3\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ h'_1+h'_2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}$解得$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=$

$f'_1+f'_2\cdot\dfrac{g'_3h'_1-g'_1h'_2}{g'_2h'_2}$.

12. 由$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy+\dfrac{1}{2}y^2+\varphi(x)$，由$z(x,0)=x^2+2x$得$\varphi(x)=2x+2$，于是$\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy+\dfrac{1}{2}y^2+2x+2$. 由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy+\dfrac{1}{2}y^2+2x+2$得$z(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x^2+2x+\psi(y)$，由$z(0,y)=\psi(y)$，得$\psi(y)=y^2$，于是$z(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x^2+2x+y^2$.

13. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2\dfrac{\partial z}{\partial u}+a\dfrac{\partial z}{\partial v},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}+a\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+a\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=4\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，代入原方程整理得$(5a+10)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$，由$\begin{cases}5a+10\neq 0,\\ 6+a-a^2=0\end{cases}$得$a=3$.

14. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=y\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial v},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)=y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2};\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=x\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{x}{y^2}\dfrac{\partial z}{\partial v},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+\dfrac{2x}{y^3}\dfrac{\partial z}{\partial v}-\dfrac{x}{y^2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\dfrac{2x^2}{y^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{2x}{y^3}\dfrac{\partial z}{\partial v}+\dfrac{x^2}{y^4}\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，代入原方程得$\dfrac{\partial z}{\partial v}=2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$.

15. 在区域D内，由$\begin{cases}z'_x=xy(8-3x-2y)=0,\\ z'_y=x^2(4-x-2y)=0\end{cases}$得驻点$(x,y)=(2,1),z(2,1)=4$；在$L_1:y=0(0\leqslant x\leqslant 6)$上$z=0$，在$L_2:x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$上$z=0$，在$L_3:y=6-x(0\leqslant x\leqslant 6)$上，$z=\varphi(x)=2(x^3-6x^2)$，由$\varphi'(x)=0$得$x=4,\varphi(0)=0,\varphi(4)=-64,\varphi(6)=0$，故函数的最小值为$-64$，最大值为4.

16. 方法一：条件极值法　设$M(x,y)$为椭圆上任意一点，其到原点的距离为$d=\sqrt{x^2+y^2}$，令$F=$

微信公众号【顶尖考研】(ID: dijy66)

$(x^2+y^2)+\lambda(x^2-4xy+5y^2-1)$，由$\begin{cases}F'_x=2x+2\lambda x-4\lambda y=0,\\F'_y=2y-4\lambda x+10\lambda y=0,\\x^2-4xy+5y^2-1=0,\end{cases}$即$\begin{cases}F'_x=(1+\lambda)x-2\lambda y=0,\\F'_y=-2\lambda x+(1+5\lambda)y=0,\\x^2-4xy+5y^2-1=0,\end{cases}$再由$\begin{cases}F'_x=(1+\lambda)x-2\lambda y=0,\\F'_y=-2\lambda x+(1+5\lambda)y=0\end{cases}$有非零解得$\begin{vmatrix}1+\lambda & -2\lambda\\-2\lambda & 1+5\lambda\end{vmatrix}=0$，得$\lambda_{1,2}=-3\pm2\sqrt{2}$，代入原方程求出$x,y$，则椭圆的长短半轴分别为$\sqrt{2}+1$和$\sqrt{2}-1$，故椭圆面积为$A=\pi ab=\pi$.

方法二：线性代数的正交变换法　令$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}$，则椭圆可表示为$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=1$，因为$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，所以存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}$，令$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$，作正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，则椭圆可标准化为$\lambda_1u^2+\lambda_2v^2=1$或$\dfrac{u^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2}+\dfrac{v^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2}=1$，又由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+1=0$，得$\lambda_1\lambda_2=1$，故椭圆面积为$A=\pi\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}=\pi$.

17. 设$M(x,y,z)$为椭圆上任意一点，则$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 令$F=(x^2+y^2+z^2)+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$，由$\begin{cases}F'_x=2x+2\lambda x+\mu=0,\\F'_y=2y+2\lambda y+\mu=0,\\F'_z=2z-\lambda+\mu=0,\\F'_\lambda=x^2+y^2-z=0,\\F'_\mu=x+y+z-1=0,\end{cases}$得$\lambda=-1$或$x=y$. 当$\lambda=-1$时，取$\mu=0$得$z=-\dfrac{1}{2}$，$x^2+y^2-z=0$不成立，舍去$\lambda=-1$，于是$x=y$，代入原方程得$x=y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，$z=2\mp\sqrt{3}$，两点到原点的距离分别为$\sqrt{9-5\sqrt{3}}$及$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，故最短距离为$\sqrt{9-5\sqrt{3}}$，最长距离为$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

18. (1) 令$r=\sqrt{x^2+y^2}$，则$z=r^2f(r^2)$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=[2rf(r^2)+2r^3f'(r^2)]\dfrac{x}{r}=x[2f(r^2)+2r^2f'(r^2)]$，$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}=2f(r^2)+2r^2f'(r^2)+x[8rf'(r^2)+4r^3f''(r^2)]\dfrac{x}{r}=2f(r^2)+2(r^2+4x^2)f'(r^2)+4x^2r^2f''(r^2)$，由对称性得$\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=2f(r^2)+2(r^2+4y^2)f'(r^2)+4y^2r^2f''(r^2)$，代入$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$得$r^4f''(r^2)+3r^2f'(r^2)+f(r^2)=0$，于是$x^2f''(x)+3xf'(x)+f(x)=0$. 令$y=f(x)$，$x=\mathrm{e}^t$，则有$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0$，则$y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-t}$，即$f(x)=\dfrac{C_1+C_2\ln x}{x}$，由$f(1)=0$，$f'(1)=1$得$C_1=0$，$C_2=1$，故$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

(2) 令$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$得$x=\mathrm{e}$，当$0<x<\mathrm{e}$时，$f'(x)>0$；当$x>\mathrm{e}$时，$f'(x)<0$，则$x=\mathrm{e}$为$f(x)$在$[1,+\infty)$上的最大点，最大值为$f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

19. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin yf'$，$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}=\mathrm{e}^x\sin yf'+\mathrm{e}^{2x}\sin^2yf''$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos yf'$，$\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=-\mathrm{e}^x\sin yf'+\mathrm{e}^{2x}\cos^2yf''$，代入$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=z\mathrm{e}^{2x}$中整理得$f''-f=0$，则$f(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x$，由$f(0)=1$，$f'(0)=0$得$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}{2}$.

20. 令$F=2x^2+3y^2+z^2-9$，$G=3x^2+y^2-z^2$，$\vec{n}_1|_M=\{4x,6y,2z\}_M=\{4,-6,4\}$，$\vec{n}_2|_M=\{6x,2y,-2z\}_M=\{6,-2,-4\}$，则切线的方向向量为$\vec{s}=\{4,-6,4\}\times\{6,-2,-4\}=4\{8,10,7\}$，于是切线方程为$L$：

$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$，法平面方程为 $\pi:8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$，即 $\pi:8x+10y+7z-12=0$.

21. 令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$，$\vec{n}=\{4x,6y,2z\}_P=\{4,6,2\}$，方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}}$，$\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}}$，$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}$. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_P=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P\cos\gamma=\frac{11}{7}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)
微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第八章　多元函数积分学

大纲点击

1. 理解二重积分三重积分的概念，了解重积分的性质，了解二重积分的中值定理.

2. 掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标)，会计算三重积分(直角坐标、柱面坐标、球面坐标).

3. 会用重积分求一些几何量与物理量(平面图形的面积、体积、曲面面积、质量、质心、形心、转动惯量、引力等).

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

第一节　二重积分的概念、性质、计算与应用

微信公众号【顶尖考研】
(ID:dingjiankaoyan66)

一、二重积分的概念

设二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有界.

(1) 将区域 D 划分成若干小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个区域的面积.

(2) 任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i(1\leqslant i\leqslant n)$，作 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

(3) 令 λ 表示所有小区域直径最大者，若 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，称 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，极限称为 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的二重积分，记为 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

二、二重积分的性质

1. $\iint\limits_D[f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$;

2. $\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$(其中 k 为常数);

3. $\iint\limits_{D_1+D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$;

4.$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = A$（$A$ 为区域 D 的面积）；

5.（积分中值定理）　设 $f(x,y)$ 在平面有限闭区域 D 上连续，A 是 D 的面积，则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

6.(1) 设区域 D 关于 y 轴对称，右侧区域为 D_1，则

当 $f(-x,y)=f(x,y)$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$；

当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$.

(2) 设区域 D 关于 x 轴对称，上侧区域为 D_1，则

当 $f(x,-y)=f(x,y)$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$；

当 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$.

(3) 设区域 D 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(4) 设区域 D 关于 $y=-x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(-y,-x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三、二重积分的积分法

(一) 直角坐标法

1.设 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$（该种表达形式称为 X 型区域），如图 1-8-1，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2.设 $D=\{(x,y)\mid \varphi_1(y)\leqslant x\leqslant\varphi_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$（该种表示形式称为 Y 型区域），如图 1-8-2，则

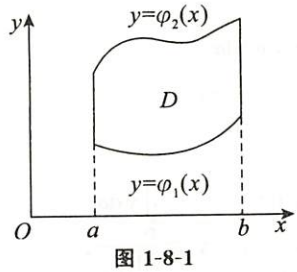


图 1-8-1

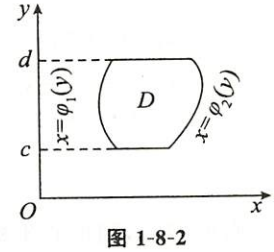


图 1-8-2

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

（二）极坐标变换

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$（或 $\begin{cases} x - x_0 = r\cos\theta \\ y - y_0 = r\sin\theta \end{cases}$），

其中 $D = \{(r,\theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta)\}$，如图 1-8-3，

则 $$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r.$$

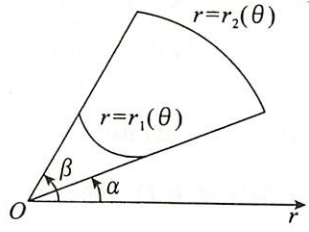


图 1-8-3

【注解】

用极坐标变换计算二重积分一般至少需要满足如下两个特征之一：

(1) 积分区域 D 的边界曲线含 $x^2 + y^2$.

(2) 被积函数 $f(x,y)$ 的表达式中含 $x^2 + y^2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

四、二重积分的应用

（一）几何应用

设 $\Sigma: z = \varphi(x,y)((x,y) \in D)$ 为空间曲面，则该曲面段的面积为

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

（二）物理应用

设平面薄片所在的区域为 D，其面密度为 $\rho(x,y)$，则

1. 质量 $m = \iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

2. 质心坐标 $\bar{x} = \dfrac{\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}$，$\bar{y} = \dfrac{\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}$，

特别地，若薄片密度均匀，则形心坐标 $\bar{x} = \dfrac{\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \mathrm{d}\sigma}$，$\bar{y} = \dfrac{\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \mathrm{d}\sigma}$.

3. 转动惯量

设 l 为平面 xOy 上的直线，区域 D 上任意一点 $P(x,y)$ 到直线 l 的距离为 d，则区域 D 绕

直线 l 的转动惯量为 $I_l=\iint\limits_D d^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$，

特别地，$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$，　$I_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$，　$I_O=\iint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

第二节　三重积分的概念、性质、计算与应用

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

一、三重积分的概念

设三元函数 $f(x,y,z)$ 在空间有限闭区域 Ω 上有界.

(1) 将积分区域 Ω 划分成若干小区域 $\Delta v_1,\Delta v_2,\cdots,\Delta v_n$，其中 Δv_i 表示第 i 个区域的体积.

(2) 任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta v_i(1\leqslant i\leqslant n)$，作 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$.

(3) 设 λ 为所有小区域直径最大者，若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 存在，称函数 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 三重可积分，极限称为 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 上的三重积分，记为 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$，即

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【注解】

(1) 三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 与区域 Ω 的划分与点的取法无关.

(2) 三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 的物理意义为以 $\rho=f(x,y,z)$ 为体密度的区域 Ω 的质量.

二、三重积分的性质

1. 设 $f(x,y,z)$ 在空间有限闭区域 Ω 上连续，则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$，使得

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=f(\xi,\eta,\zeta)V(V\text{ 表示 }\Omega\text{ 的体积}).$$

2. (1) 设 Ω 关于 xOy 平面对称，位于 xOy 平面上方的区域为 Ω_1，则

当 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$ 时，$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=0$；

当 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$ 时，$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

(2) 设 Ω 关于 yOz 平面对称，位于 yOz 一侧的区域为 Ω_1，则

当 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$ 时，$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=0$；

当 $f(-x,y,z)=f(x,y,z)$ 时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

(3) 设 Ω 关于 xOz 平面对称，位于 xOz 平面上方的区域为 Ω_1，则

当 $f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$ 时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=0$；

当 $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$ 时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

三、三重积分的计算方法

(一) 直角坐标法

1. (投影法) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,\varphi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\varphi_2(x,y)\}$，如图 1-8-4，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z;$$

2. (切片法) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z,c\leqslant z\leqslant d\}$，如图 1-8-5，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_c^d \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

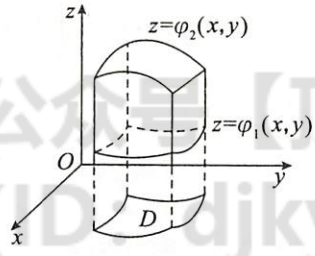


图 1-8-4

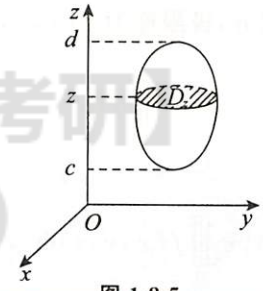


图 1-8-5

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【注解】

(1) 若 Ω 的侧面非按同一曲面形成，一般采用投影法.

(2) 若 Ω 的侧面按同一曲面形成，一般采用切片法.

【例 1】 求 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 及 $x^2+y^2+z^2=2z$ 围成.

【解】 由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x^2+y^2+z^2=2z\end{cases}$ 得 $z=\dfrac{1}{2}$，于是

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4},1-\sqrt{1-x^2-y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}\right\},$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,(2\sqrt{1-x^2-y^2}-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2(2\sqrt{1-r^2}-1)\mathrm{d}r=4\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r-\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$$

$$\xlongequal{r=\sin t} 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t-\frac{\sqrt{3}\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t-\frac{\sqrt{3}\pi}{4}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{3\sqrt{3}\pi}{16}.$$

【例 2】　求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 的体积.

【解】　$\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z,-c\leqslant z\leqslant c\}$，其中 $D_z:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}$，则

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_{-c}^{c}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

因为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$ 的长短半轴分别为 $a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$ 及 $b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$，

所以 $\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$，于是

$$V=\pi ab\int_{-c}^{c}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=2\pi ab\int_0^c\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4\pi abc}{3}.$$

【例 3】　求由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 围成的均匀几何体(如图 1-8-6)的重心坐标.

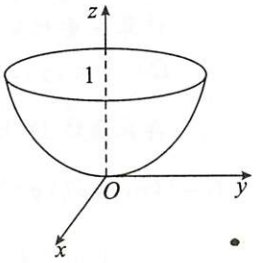


图 1-8-6

【解】　**方法一**　设重心坐标为 $M_0(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性得

$$\bar{x}=0,\ \bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}v}{\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v}.$$

$\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z,0\leqslant z\leqslant 1\}$，其中 $D_z:x^2+y^2\leqslant z$，于是

$$\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\pi z\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2},$$

$$\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\pi z^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

则 $\bar{z}=\frac{2}{3}$，于是重心坐标为 $M_0\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$.

方法二　$\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1$，

$$\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1\mathrm{d}z=\iint_D(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1-r^2)\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2},$$

$$\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1 z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint_D[1-(x^2+y^2)^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1-r^4)\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3},$$

由对称性 $\bar{x}=0,\bar{y}=0,\bar{z}=\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}v\Big/\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\frac{2}{3}$，故重心坐标为 $\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

（二）柱面坐标变换法

令 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z, \end{cases}$ 其中 $\begin{cases} \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \\ r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta), \\ \varphi_1(r,\theta) \leqslant z \leqslant \varphi_2(r,\theta), \end{cases}$ 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\mathrm{d}r\int_{\varphi_1(r,\theta)}^{\varphi_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,\mathrm{d}z,$$

如图 1-8-7.

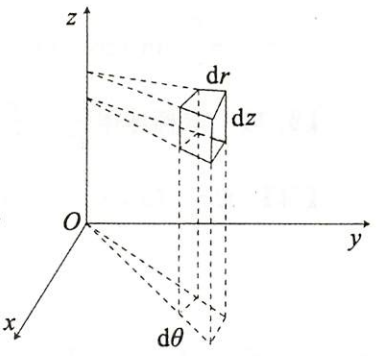


图 1-8-7

【注解】

使用柱面坐标变换计算三重积分一般需具备如下特征之一：

(1)Ω 的边界曲面方程中含 x^2+y^2.

(2) 被积函数 $f(x,y,z)$ 中含 x^2+y^2.

计算三重积分若采用柱面坐标变换法，先将积分区域用投影法表示为

$\Omega=\{(x,y,z) \mid (x,y)\in D, \varphi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x,y)\}$,

再在区域 D 上令 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta))$，则

$\Omega=\{(r,\theta,z) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta), \varphi_1(r\cos\theta, r\sin\theta) \leqslant z \leqslant \varphi_2(r\cos\theta, r\sin\theta)\}$

微信公众号（同学考研） (ID: djky66)

（三）球面坐标变换法

令 $\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\varphi, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\varphi, \end{cases}$

其中 $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \delta_1 \leqslant \varphi \leqslant \delta_2, r_1(\theta,\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\theta,\varphi)$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\delta_1}^{\delta_2}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r.$$

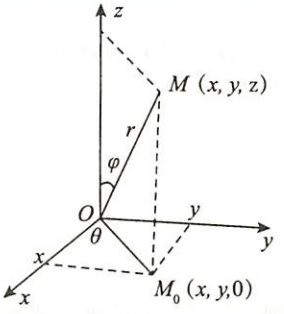


图 1-8-8

【注解】

使用球面坐标变换计算三重积分一般需要具备如下条件之一：

(1)Ω 的边界曲面方程中含 $x^2+y^2+z^2$.

(2) 被积函数 $f(x,y,z)$ 中含 $x^2+y^2+z^2$.

四、三重积分的物理应用

设 Ω 为空间区域，其体密度为 $\rho(x,y,z)$，则

1. 质量 $m=\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$.

2. 质心坐标　$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}$，$\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}$，

特别地，若 Ω 密度均匀，则 $\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}$，$\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}$ 为形心坐标.

3. 转动惯量

设 l 为直线，Ω 上任意一点 $P(x,y,z)$ 到 l 的距离为 d，则 $I_l=\iiint\limits_{\Omega}d^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$，

特别地，$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$，$I_y=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$，

$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$，$I_O=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$.

重点题型分析

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

题型一　二重积分的定义与基本性质

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 1】　设 D 为平面有界闭区域，其面积为 A，又设 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 在 D 上连续且 $g(x,y)\geqslant 0$，证明：存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

【证明】　因为 $f(x,y)$ 在 D 上连续，所以 $f(x,y)$ 在 D 上取到最小值 m 和最大值 M，于是 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$，因为 $g(x,y)\geqslant 0$，所以 $mg(x,y)\leqslant f(x,y)g(x,y)\leqslant Mg(x,y)$，

$$m\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant M\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

当 $\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$，对任意的 $(\xi,\eta)\in D$，有 $\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

当 $\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$ 时，

由 $m\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant M\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 得

$$m\leqslant\frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\leqslant M$$，由介值定理，存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$f(\xi,\eta)=\frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y},$$

即$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

【例 2】 求$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\mathrm{e}^{x+2y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

【解】 由二重积分的积分中值定理,存在$(\xi,\eta)\in D_t$,其中$D_t:x^2+y^2\leqslant t^2$,使得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\mathrm{e}^{x+2y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\xi+2\eta}\cdot\pi t^2,$$

于是$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\mathrm{e}^{x+2y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{\xi+2\eta}\cdot\pi t^2}{t^2}=\pi$.

【例 3】 设$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$,且$f(x,y)$二阶连续可偏导,求$\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

【解】 $\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d\dfrac{\partial}{\partial y}f'_x(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b[f'_x(x,d)-f'_x(x,c)]\mathrm{d}x$

$=\int_a^b f'_x(x,d)\mathrm{d}x-\int_a^b f'_x(x,c)\mathrm{d}x=f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)+f(a,c)$.

【例 4】 计算$\iint\limits_D\dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

其中$f(u)>0,a>0,b>0$且$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,x\geqslant0,y\geqslant0\}$.

【解】 因为积分区域D关于直线$y=x$对称,所以

$$I=\iint\limits_D\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

于是$2I=\iint\limits_D\dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D\dfrac{af(y)+bf(x)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=(a+b)\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{(a+b)}{4}\pi R^2$,

得$I=\dfrac{(a+b)}{8}\pi R^2$.

【例 5】 设$D:x^2+y^2\leqslant4$,则$\iint\limits_D(x-2y)^2\mathrm{d}\sigma=$_____,

【解】 由二重积分奇偶性性质得$\iint\limits_D(x-2y)^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(x^2+4y^2)\mathrm{d}\sigma$,

由对称性得$\iint\limits_D(x^2+4y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(y^2+4x^2)\mathrm{d}\sigma$,

故$\iint\limits_D(x-2y)^2\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{2}\left[\iint\limits_D(x^2+4y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D(y^2+4x^2)\mathrm{d}\sigma\right]$

$=\dfrac{5}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\dfrac{5}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=20\pi$.

【例 6】 设f连续,且积分区域$D=\{(r,\theta)\mid0\leqslant\theta\leqslant u,0\leqslant r\leqslant v\}$,求

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\iint_D f(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

【解】　令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant u,0\leqslant r\leqslant v)$，则

$$\iint_D f(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^u d\theta\int_0^v rf(r^2)\,dr=u\int_0^v rf(r^2)\,dr,$$

故$\dfrac{\partial^2}{\partial u\partial v}\iint_D f(x^2+y^2)\,dx\,dy=vf(v^2)$.

题型二　改变积分次序

【例 1】　改变积分次序$\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)dx$.

【解】　积分区域 D 如图 1-8-9，将积分区域写成 X 型区域为 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\sqrt{x}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{1-x^2}\}$，则

$$\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)dx$$
$$=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$$

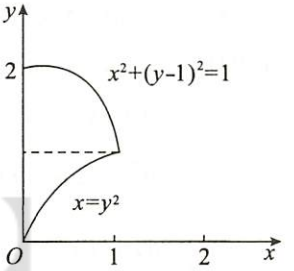


图 1-8-9

【例 2】　改变积分次序并计算$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx$.

【解】　将积分区域改写成 X 型区域为 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant x\}$，则

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\int_{x^2}^x dy=\int_0^1(1-x)\sin x\,dx=1-\sin 1.$$

【例 3】　改变积分次序并计算$\int_0^1 dy\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}dx$.

【解】　将积分区域改写成 X 型区域为 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$，于是

$$\int_0^1 dy\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}dx=\int_0^1 dx\int_0^x e^{\frac{y}{x}}dy=\int_0^1(e-1)x\,dx=\frac{e-1}{2}.$$

【例 4】　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\int_{-\frac{x}{2}}^0 dt\int_{-\frac{x}{2}}^t\frac{e^{-(t-u)^2}du}{1-e^{-\frac{x^2}{4}}}$.

【解】
$$\lim_{x\to 0}\int_{-\frac{x}{2}}^0 dt\int_{-\frac{x}{2}}^t\frac{e^{-(t-u)^2}}{1-e^{-\frac{x^2}{4}}}du=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-\frac{x}{2}}^0 dt\int_{-\frac{x}{2}}^t e^{-(t-u)^2}du}{1-e^{-\frac{x^2}{4}}},$$

因为 $e^x-1\sim x$，所以 $e^{-\frac{x^2}{4}}-1\sim-\frac{x^2}{4}$，于是 $1-e^{-\frac{x^2}{4}}\sim\frac{x^2}{4}$，故

$$\lim_{x\to 0}\int_{-\frac{x}{2}}^0 dt\int_{-\frac{x}{2}}^t\frac{e^{-(t-u)^2}}{1-e^{-\frac{x^2}{4}}}du=4\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-\frac{x}{2}}^0 dt\int_{-\frac{x}{2}}^t e^{-(t-u)^2}du}{x^2},$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

而 $\int_{-\frac{x}{2}}^{0}\mathrm{d}t\int_{-\frac{x}{2}}^{t}\mathrm{e}^{-(t-u)^2}\mathrm{d}u=\int_{-\frac{x}{2}}^{0}\mathrm{d}u\int_{u}^{0}\mathrm{e}^{-(t-u)^2}\mathrm{d}t=\int_{0}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}u\int_{0}^{u}\mathrm{e}^{-(t-u)^2}\mathrm{d}t$,

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{-\frac{x}{2}}^{0}\mathrm{d}t\int_{-\frac{x}{2}}^{t}\mathrm{e}^{-(t-u)^2}\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}}=4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{0}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}u\int_{0}^{u}\mathrm{e}^{-(t-u)^2}\mathrm{d}t}{x^2}$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\int_{0}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-\left(t+\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}t}{x}=-\lim_{x\to0}\frac{\int_{0}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-\left(t+\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(t+\frac{x}{2}\right)}{x}=-\lim_{x\to0}\frac{\int_{\frac{x}{2}}^{0}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_{0}^{\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}.$$

【例 5】 将 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2}r^3\cos2\theta f(r)\mathrm{d}r$ 改为先 y 后 x 的累次积分.

【解】 如图 1-8-10,积分区域为 $D=D_1+D_2$,

其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2},0\leqslant y\leqslant x\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid\sqrt{2}\leqslant x\leqslant2,0\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\}$,

则 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2}r^3\cos2\theta f(r)\mathrm{d}r$

$=\int_{0}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}(x^2-y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y+$

$\int_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2-y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y.$

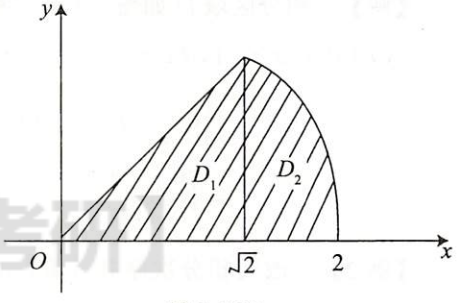


图 1-8-10

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 6】 设 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_{a}^{x}\mathrm{d}u\int_{u}^{x}f(v)\mathrm{d}v$,则 $\varphi'(x)=$_____.

【解】 改变积分次序得 $\varphi(x)=\int_{a}^{x}\mathrm{d}v\int_{a}^{v}f(v)\mathrm{d}u=\int_{a}^{x}(v-a)f(v)\mathrm{d}v$,

则 $\varphi'(x)=(x-a)f(x)$.

【例 7】 计算 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\sec\theta}r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\cos\theta-\sin\theta}\,\mathrm{d}r$.

【解】 将积分化为直角坐标得

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\sec\theta}r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\cos\theta-\sin\theta}\,\mathrm{d}r=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}\sqrt{x-y}\,\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{3}\int_{0}^{1}(x-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_{0}^{1}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{4}{15}.$$

题型三 二重积分的计算

【例 1】 计算 $\iint\limits_{D}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 D 由 $y^2=x$ 及 $y=x-2$ 围成.

【解】 **方法一** 由 $\begin{cases}y^2=x,\\y=x-2\end{cases}$ 得曲线的交点为 $(1,-1)$ 及 $(4,2)$,将 D 表示为 X 型区域

为 $D=D_1+D_2$，

其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,-\sqrt{x}\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\}$，

$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 4,x-2\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\}$，

则 $\iint\limits_D y\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y\,dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} y\,dy=\frac{1}{2}\int_1^4[x-(x-2)^2]dx=\frac{9}{4}$.

方法二　将区域 D 表示成 Y 型区域为

$D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant x\leqslant y+2,-1\leqslant y\leqslant 2\}$，

于是 $\iint\limits_D y\,dx\,dy=\int_{-1}^2 y\,dy\int_{y^2}^{y+2} dx=\int_{-1}^2 y(y+2-y^2)dy=\frac{9}{4}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 2】　计算 $\iint\limits_D e^{x^2}\,dx\,dy$，其中 D 由 $x=0,x=1,y=0$ 及 $y=x$ 围成.

【解】　$\iint\limits_D e^{x^2}\,dx\,dy=\int_0^1 e^{x^2}dx\int_0^x dy=\int_0^1 x\,e^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{2}$.

【例 3】　计算 $\iint\limits_D x\,dx\,dy$，其中 D 是由 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 围成的区域.

【解】　令 $D_1=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant a(1+\cos\theta)\}$，由对称性得

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy=2\iint\limits_{D_1} x\,dx\,dy=2\int_0^\pi d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta\,dr$$

$$=\frac{2a^3}{3}\int_0^\pi\cos\theta(1+\cos\theta)^3d\theta=\frac{2a^3}{3}\int_0^\pi(\cos\theta+3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)d\theta$$

$$=\frac{2a^3}{3}\int_0^\pi(3\cos^2\theta+\cos^4\theta)d\theta=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta+\cos^4\theta)d\theta$$

$$=4a^3I_2+\frac{4a^3}{3}I_4=\frac{5\pi a^3}{4}.$$

【例 4】　计算 $\iint\limits_D(x+y)\,dx\,dy$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant x+y$.

【解】　**方法一**

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 其中 $D=\{(r,\theta)\mid -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4},0\leqslant r\leqslant\sin\theta+\cos\theta\}$，

于是 $\iint\limits_D(x+y)\,dx\,dy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta}r^2(\sin\theta+\cos\theta)dr$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^4d\theta=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^4\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^\pi\sin^4t\,dt=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\,dt=\frac{8}{3}I_4=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

方法二

因为 $D:x^2+y^2\leqslant x+y$ 可表示为 $D:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$，

令$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+r\cos\theta, \\ y=\dfrac{1}{2}+r\sin\theta \end{cases}$ 其中$D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}\}$,

于是$\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r[1+r(\sin\theta+\cos\theta)]\mathrm{d}r$

$=\int_0^{2\pi}[\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{12}(\sin\theta+\cos\theta)]\mathrm{d}\theta=\dfrac{\pi}{2}.$

【例 5】 求$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 D 是由 $y=-x$、$y=\sqrt{1-x^2}$ 及 $y=\sqrt{x-x^2}$ 围成的区域,如图 1-8-11.

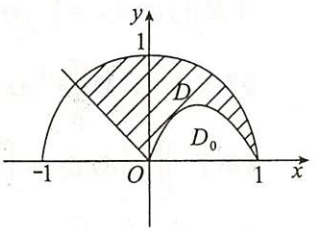


图 1-8-11

【解】 方法一 令$D_0=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{x-x^2}\}$,则

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_0}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_0}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

而 $\iint\limits_{D+D_0}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r=\dfrac{1}{4}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

$=\dfrac{1}{8}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}=\dfrac{1}{16}$,

$\iint\limits_{D_0}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r=\dfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{24}$,

于是$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{48}$.

方法二 令$D_1=\{(x,y)\mid\sqrt{x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},x\geqslant 0\}$,$D_2=\{(x,y)\mid -x\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},x\leqslant 0\}$,则$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,而

$\iint\limits_{D_1}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^1 r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r=\dfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta(1-\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{12}$,

$\iint\limits_{D_2}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r=\dfrac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=-\dfrac{1}{16}$,

于是$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{48}$.

【例 6】 计算$\iint\limits_D\dfrac{x^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$.

【解】 由对称性得 $I=\iint\limits_D\dfrac{x^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\dfrac{y^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

则 $2I=\iint\limits_D\dfrac{x^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D\dfrac{y^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

$$=\iint_D \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sin r^2\,dr$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1 \sin r^2\,d(r^2)=-\frac{\pi}{4}\cos r^2\,\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}(1-\cos 1),$$

故 $\iint_D \frac{x^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dx\,dy=\frac{\pi}{8}(1-\cos 1)$.

【例 7】　设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant 0\}$，且 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，且 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$，求 $f(x,y)$.

【解】　令 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=k$，则 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}k$，两边在 D 上积分得

$$k=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy-\frac{8}{\pi}k\cdot\iint_D dx\,dy,$$

因为 $\iint_D dx\,dy=A=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}$，所以

$$k=\frac{1}{2}\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta} r\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right),$$

于是 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 8】　设 $f(x)=\begin{cases}2,0\leqslant x\leqslant 1\\0,\text{其他}\end{cases}$，$D$ 表示整个平面，计算 $\iint_D f(y)f(x-y)\,dx\,dy$.

【解】　因为 $f(y)=\begin{cases}2,0\leqslant y\leqslant 1\\0,\text{其他}\end{cases}$，$f(x-y)=\begin{cases}2,0\leqslant x-y\leqslant 1\\0,\text{其他}\end{cases}$，

令 $D_0=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x-y\leqslant 1\}$，则

$$\iint_D f(y)f(x-y)\,dx\,dy=4\iint_{D_0} dx\,dy=4.$$

【例 9】　设 $f(u)$ 为连续函数，平面区域 D 由 $y=x^3,x=-1$ 及 $y=1$ 围成，计算

$$\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]\,d\sigma.$$

【解】　令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，则 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.

$$\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]\,d\sigma=\int_{-1}^1 x\,dx\int_{x^3}^1[1+yf(x^2+y^2)]\,dy$$

$$=\int_{-1}^1 x\,dx\int_{x^3}^1 dy+\int_{-1}^1 x\,dx\int_{x^3}^1 yf(x^2+y^2)\,dy$$

$$=\int_{-1}^1 x(1-x^3)\,dx+\int_{-1}^1 x\,dx\int_{x^3}^1 yf(x^2+y^2)\,dy$$

$$=-\frac{2}{5}+\int_{-1}^1 x\,dx\int_{x^3}^1 yf(x^2+y^2)\,dy,$$

而$\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}yf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x^2+y^2)$

$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]\,\mathrm{d}x=0$,

所以 $\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}\sigma=-\frac{2}{5}$.

【例 10】 计算$\iint_D\max\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 D 为整个平面.

【解】 令 $D_1:y\leqslant x$,$D_2:y>x$,则

$$\iint_D\max\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1}x\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}y\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\cos\theta\cdot\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\sin\theta\cdot\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r=2\sqrt{2}\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{r^2=t}2\sqrt{2}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\pi}.$$

题型四 二重积分的证明

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 1】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,证明:$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$.

【证明】 **方法一** 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)[F(b)-F(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$=F(b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)F(x)\,\mathrm{d}x=F^2(b)-\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}F(x)$$

$$=F^2(b)-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_a^b=\frac{1}{2}F^2(b)=\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

方法二 $I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y=\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$,

则 $2I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$

$=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y=\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$,

所以$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$.

【例 2】 设 $f(x)$,$g(x)$ 在$[a,b]$上连续且单调不减,证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

【证明】 令 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$,

因为 $f(x),g(x)$ 单调不减，所以 $\varphi(x,y)=[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geqslant 0$，

于是 $\iint\limits_D \varphi(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geqslant 0$，即

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)g(x)-f(x)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(y)]\mathrm{d}y\geqslant 0,$$

而 $\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)g(x)-f(x)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(y)]\mathrm{d}y$

$$=(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(y)\mathrm{d}y-\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b g(x)\mathrm{d}x+(b-a)\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y$$

$$=2(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

题型五　二重积分的应用与综合问题

【例 1】 设 $f(x)$ 连续且 $f(0)=1$，又 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(t>0)$，求 $F''(0)$.

【解】 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r$，

$F'(t)=2\pi tf(t^2)$，则 $F'(0)=0$.

$$F''(0)=\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)-F'(0)}{t}=2\pi\lim_{t\to 0}f(t^2)=2\pi.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 2】 设有一高为 $h(t)$（t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$（设长度单位为厘米，时间单位为小时），已知雪堆体积减少的速度与侧面积成正比（比例系数为 0.9），问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需要多长时间？

【解】 令 $z=0$ 得侧面在 xOy 平面上的投影区域为 $D_t:x^2+y^2\leqslant\dfrac{h^2(t)}{2}$.

$z_x'=-\dfrac{4x}{h(t)}$，$z_y'=-\dfrac{4y}{h(t)}$，侧面面积元素为

$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{16(x^2+y^2)+h^2(t)}}{h(t)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，侧面积为

$$S(t)=\iint_{D_t}\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\frac{\sqrt{16r^2+h^2(t)}}{h(t)}r\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{16r^2+h^2(t)}\,r\mathrm{d}r=\frac{13\pi h^2(t)}{12}.$$

体积 $V(t)=\iint\limits_{D_t}\left[h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left[h(t)-\dfrac{2r^2}{h(t)}\right]r\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{4}h^3(t)$，

根据题意得 $\dfrac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=-0.9s(t)$，即 $h'(t)=-1.3$，于是 $h(t)=-1.3t+C$，

因为 $h(0)=130$，所以 $C=130$，故 $h(t)=-1.3t+130$，

令 $h(t)=0$ 得 $t=100$，即雪堆全部融化需要 100 小时.

【例 3】 在半径为 a 的球的表面取一点，以该点为球心作半径为 R 的球，问 R 取何值时，动球位于定球内的表面积最大？

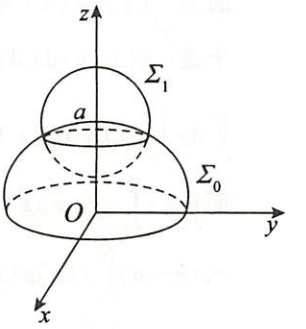


图 1-8-12

【解】 设固定球面方程为 $\Sigma_0: x^2+y^2+z^2=a^2$，在 Σ_0 上取点 $M_0(0,0,a)$，则动球方程为 $\Sigma_1: x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$，如图 1-8-12.

由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2+(z-a)^2=R^2 \end{cases}$ 得 $z=a-\dfrac{R^2}{2a}$，于是内部曲面在 xOy 平面上的投影区域为 $D: x^2+y^2 \leqslant R^2-\dfrac{R^4}{4a^2}$，令 $R^2-\dfrac{R^4}{4a^2}=r^2$，则 $D: x^2+y^2 \leqslant r^2$，内部曲面方程为 $\Sigma: z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,d\sigma=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}d\sigma,$$

于是 $S(R)=\iint\limits_D \dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}d\sigma=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r \dfrac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}dr$

$$=2\pi\left(R^2-\frac{R^3}{2a}\right).$$

令 $S'(R)=2\pi\left(2R-\dfrac{3R^2}{2a}\right)=0$ 得 $R=\dfrac{4a}{3}$，故当 $R=\dfrac{4a}{3}$ 时，位于定球内的表面积最大.

题型六 三重积分的计算

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 1】 计算 $I=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dv$，其中 Ω 为 $z=x^2+y^2$ 与 $z=2$ 围成的几何体.

【解】 **方法一**

$\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z, 0\leqslant z\leqslant 2\}$，其中 $D_z: x^2+y^2\leqslant z$，则

$$I=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dv=\int_0^2 dz\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)dx\,dy=\int_0^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}} r^3\,dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^2 z^2\,dz=\frac{4\pi}{3}.$$

方法二

$\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D, x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2\}$，其中 $D: x^2+y^2\leqslant 2$，则

$$I=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dv=\iint\limits_D (x^2+y^2)dx\,dy\int_{x^2+y^2}^2 dz=\iint\limits_D (x^2+y^2)(2-x^2-y^2)dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^3(2-r^2)dr=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2r^3-r^5)dr=2\pi\left(2-\frac{4}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}.$$

【例 2】 计算 $\iiint\limits_\Omega z^2dv$，其中 $\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

【解】 $\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z, -c\leqslant z\leqslant c\}$，其中 $D_z: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\dfrac{z^2}{c^2}$，则

$$\iiint\limits_\Omega z^2dv=\int_{-c}^c z^2dz\iint\limits_{D_z}dx\,dy=\pi ab\int_{-c}^c z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\int_0^c z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4\pi abc^3}{15}.$$

【例 3】　求 $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转体介于 $z=2$ 与 $z=8$ 之间的几何体.

【解】　曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面为 $\Sigma:2z=x^2+y^2$，于是

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z,2\leqslant z\leqslant 8\}，\text{其中 } D_z:x^2+y^2\leqslant 2z，$$

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_2^8\mathrm{d}z\iint_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_2^8\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_2^8 z^2\mathrm{d}z=336\pi.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

题型七　三重积分的综合问题

【例 1】　设 $f(u)$ 为连续函数，$F(t)=\iiint_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}v$，

其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant h,x^2+y^2\leqslant t^2\}$，求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

【解】　$F(t)=\iiint_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}v=\int_0^h\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t[z^2+f(r^2)]r\mathrm{d}r$

$$=\frac{\pi h^3}{3}t^2+2\pi h\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r，$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{\pi h^3}{3}t^2+2\pi h\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r}{t^2}=\frac{\pi h^3}{3}+2\pi h\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r}{t^2}$$

$$=\frac{\pi h^3}{3}+2\pi h\lim_{t\to 0^+}\frac{tf(t^2)}{2t}=\frac{\pi h^3}{3}+\pi hf(0).$$

【例 2】　设 $f(t)$ 连续，且 $f(t)=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v+t^3$，求 $f(t)$.

【解】　作球面坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi,\\y=r\sin\theta\sin\varphi,\\z=r\cos\varphi,\end{cases}$ 则

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2f(r)\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t r^2f(r)\mathrm{d}r，$$

于是有 $f(t)=12\pi\int_0^t r^2f(r)\mathrm{d}r+t^3$，两边对 t 求导数得

$$f'(t)=12\pi t^2f(t)+3t^2，\text{或 } f'(t)-12\pi t^2f(t)=3t^2，$$

解得 $f(t)=\left[\int 3t^2\mathrm{e}^{\int-12\pi t^2\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]\mathrm{e}^{-\int-12\pi t^2\mathrm{d}t}=C\mathrm{e}^{4\pi t^3}-\dfrac{1}{4\pi}$.

因为 $t=0$ 时，$f(0)=0$，所以 $C=\dfrac{1}{4\pi}$，故 $f(t)=\dfrac{1}{4\pi}(\mathrm{e}^{4\pi t^3}-1)$.

测试题

一、选择题

1. 设 $D:\frac{x^2}{4}+y^2\leqslant t^2(t>0)$，则 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{e^t-t-\cos t}\iint\limits_D e^{x^2+2y}\,dx\,dy$ 为(　　).

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) 2π　　(D) 4π

2. 设 $f(x,y)$ 连续且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\,du\,dv$，其中 D 由 $x=1,y=0,y=x^2$ 围成，则 $f(x,y)$ 为(　　).

(A) xy　　(B) $xy+1$　　(C) $xy+\frac{1}{4}$　　(D) $xy+\frac{1}{8}$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_2^{2\sec\theta}r^2\cos\theta f(r^2)\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_2^{2\csc\theta}r^2\cos\theta f(r^2)\,dr$ 改写成直角坐标形式为(　　).

(A) $\int_0^2 dx\int_0^2 xf(x^2+y^2)\,dy$　　(B) $\int_0^2 dx\int_0^2 f(x^2+y^2)\,dy$

(C) $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{4-x^2}}^2 xf(x^2+y^2)\,dy$　　(D) $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{4-x^2}}^2 f(x^2+y^2)\,dy$

4. 设 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 r^2\cos\theta f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr$ 等于(　　).

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}xf(x,y)\,dy$　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}yf(x,y)\,dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}xf(x,y)\,dx$　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}xf(x,y)\,dx$

5. 设 $I_1=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，$I_2=2\iint\limits_D\sin x^2\cos y^2\,d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)^2\,d\sigma$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1$，则(　　).

(A) $I_1>I_2>I_3$　　(B) $I_1<I_2<I_3$　　(C) $I_1<I_3<I_2$　　(D) $I_3<I_1<I_2$

二、填空题

1. 设 $D:x^2+y^2\leqslant 1$，则 $\iint\limits_D\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2dx\,dy=$ _____.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ D 为全平面，则 $\iint\limits_D f(x)f(y-x)\,d\sigma=$ _____.

3. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1),(-1,1)$ 及 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 为 D 位于第一象限的部分，则 $\iint\limits_D(xy+y\cos x)\,dx\,dy=$ _____.

4. $\int_0^1 y\,dy\int_y^1 e^{\frac{y^2}{x^2}}dx=$ _____.

5. 设 $f(x)$ 连续且 $f(0)=0,f'(0)=1$，令 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2)\,dx\,dy(t>0)$，则 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t(\tan t-\sin t)}=$ _____.

6. 设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $\int_0^1 f(x)\,dx=A$，则 $\int_0^1 f(x)\,dx\int_x^1 f(y)\,dy=$ _____.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、解答题

1. 交换积分次序：$\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

2. 计算$\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x,x=1$ 及 x 轴围成的区域.

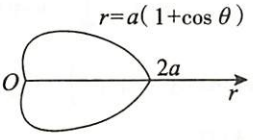


图 1-8-13

3. 计算$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,\ \sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\}$.

4. 计算$\iint\limits_D(x^2+y^2+2xy)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为由曲线 $r=a(1+\cos\theta)$ 围成的区域，如图 1-8-13.

5. 计算 $I=\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D:-2x\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

6. 计算$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=0,x=1$ 及 $y=\sqrt{4-x^2}$ 围成，如图 1-8-14.

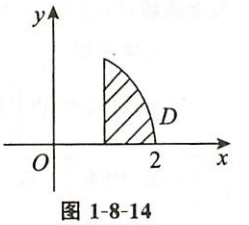


图 1-8-14

7. 设$\iint\limits_D\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2+y^2=2y$ 围成的区域，如图 1-8-15.

8. 计算$\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

9. 计算$\iint\limits_D|x^2+y^2-2y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant 4$.

10. 设 D 为全平面，$f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 计算$\iint\limits_D f(x)f(y-x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

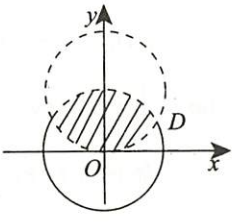


图 1-8-15

11. 计算 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$.

12. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲线 $L:\begin{cases}y^2=2z\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面与 $z=2$ 围成的几何体.

13. 设 $f(x)$ 连续且 $f(0)=\dfrac{2}{3}$，令 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[f(x^2+y^2)+z^2]\mathrm{d}v$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant t^2,0\leqslant z\leqslant 1\}$，求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

14. 半径为 R 的球体的体密度为 $\rho=\dfrac{1}{r}$，其中 r 为球外一固定点到球内点 $M(x,y,z)$ 的距离，求该球的质量.

测试题参考答案

一、选择题

1. $\mathrm{e}^t-t-\cos t=1+t+\dfrac{t^2}{2!}+o(t^2)-t-\left[1-\dfrac{t^2}{2!}+o(t^2)\right]\sim t^2$，$\iint\limits_D\mathrm{e}^{x^2+2y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\xi^2+2\eta}A=2\pi t^2\mathrm{e}^{\xi^2+2\eta}$，

其中$(\xi,\eta)\in D$，于是$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{e^t-t-\cos t}\iint\limits_D e^{x^2+2y}\,dx\,dy=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2\pi t^2 e^{\xi^2+2\eta}}{t^2}=2\pi$，选(C).

2. 令$A=\iint\limits_D f(u,v)\,du\,dv$，则$f(x,y)=xy+A$，两边积分得$A=\iint\limits_D(xy+A)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(xy+A)\,dy=\dfrac{1}{12}+\dfrac{A}{3}$，解得$A=\dfrac{1}{8}$，即$f(x,y)=xy+\dfrac{1}{8}$，选(D).

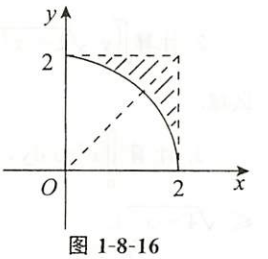


图 1-8-16

3. 如图 1-8-16，选(C).

4. 选(C).

5. 由对称性得$\iint\limits_D\sin x^2\cos y^2\,d\sigma=\iint\limits_D\cos x^2\sin y^2\,d\sigma$，于是$2\iint\limits_D\sin x^2\cos y^2\,d\sigma=\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)\,d\sigma$，因为当$(x,y)\in D$时，$0\leqslant(x^2+y^2)^2\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$且$\sin u$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上为增函数，所以$I_1>I_2>I_3$，应选(A).

二、填空题

1. 由对称性得$\iint\limits_D\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2 dx\,dy=\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy=\dfrac{1}{a^2}\iint\limits_D x^2\,d\sigma+\dfrac{1}{b^2}\iint\limits_D y^2\,d\sigma$，因为$\iint\limits_D x^2\,d\sigma=\iint\limits_D y^2\,d\sigma=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\,d\sigma$，所以$\iint\limits_D\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2 dx\,dy=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D(x^2+y^2)\,d\sigma=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\,dr=\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$.

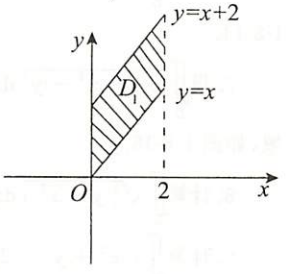


图 1-8-17

2. 令$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y-x\leqslant 2\}$，如图 1-8-17，则$\iint\limits_D f(x)f(y-x)\,d\sigma=\iint\limits_{D_1}f(x)f(y-x)\,d\sigma=\int_0^2 dx\int_x^{x+2}\sin x\sin(y-x)\,dy=(1-\cos 2)^2$.

3. 如图 1-8-18，$\iint\limits_D(xy+y\cos x)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1+D_2}(xy+y\cos x)\,dx\,dy+\iint\limits_{D_3+D_4}(xy+y\cos x)\,dx\,dy$，$\iint\limits_{D_1+D_2}(xy+y\cos x)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1+D_2}y\cos x\,dx\,dy=2\iint\limits_{D_1}y\cos x\,dx\,dy$，$\iint\limits_{D_3+D_4}(xy+y\cos x)\,dx\,dy=0$，于是$\iint\limits_D(xy+y\cos x)\,dx\,dy=2\iint\limits_{D_1}y\cos x\,dx\,dy=2\int_0^1\cos x\,dx\int_x^1 y\,dy=\int_0^1(1-x^2)\cos x\,dx=2(\sin 1-\cos 1)$.

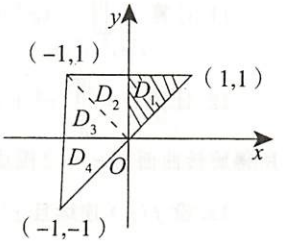


图 1-8-18

4. $\int_0^1 y\,dy\int_y^1 e^{\frac{y^2}{x^2}}dx=\int_0^1 dx\int_0^x y e^{\frac{y^2}{x^2}}dy=(e-1)\int_0^1\dfrac{x^2}{2}dx=\dfrac{e-1}{6}$.

5. $F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t rf(r^2)\,dr=2\pi\int_0^t rf(r^2)\,dr$；因为$t(\tan t-\sin t)=t\tan t(1-\cos t)\sim\dfrac{t^4}{2}$，所以$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t(\tan t-\sin t)}=4\pi\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t rf(r^2)\,dr}{t^4}=\pi\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t^2)}{t^2}=\pi\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t^2)-f(0)}{t^2}=\pi f'(0)=\pi$.

6. 令$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，则$F(x)$为$f(x)$的原函数且$F(1)=A$，于是$\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy=\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]dx=A\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f(x)F(x)dx=A^2-\int_0^1 F(x)dF(x)=A^2-\dfrac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}A^2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

三、解答题

1. 如图 1-8-19，$\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

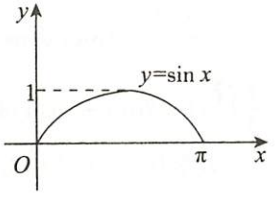


图 1-8-19

2. $\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}(1-x^2+y^2)=\frac{1}{3}\int_0^1[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]\mathrm{d}x$

$\xlongequal{x=\sin t}\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3 t)\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}I_4=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$.

3. 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则 $D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},2\cos\theta\leqslant r\leqslant 2\}$，于是 $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^2 r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r=$

$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\cos^6\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{8}$.

4. 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 由对称性得 $\iint\limits_D(x^2+y^2+2xy)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^3\mathrm{d}r=$

$\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\mathrm{d}\theta=16a^4\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^4\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{2}\right)=16a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 t\,\mathrm{d}t=\frac{35\pi a^4}{16}$.

5. 由对称性得 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，令 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，$D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant -2x\}$，

则 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，而 $\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r=$

$\frac{16\pi}{3}$，$\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r=-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{32}{9}$，故 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{16}{9}(3\pi-2)$.

微信公众号【西尖考研】(ID: djky66)

6. 令 $D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\sec\theta\leqslant r\leqslant 2\}$，则 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\sec\theta}^2 r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(8-$

$\sec^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{8\pi}{9}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta$，令 $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta$，从而 $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec\theta\,\mathrm{d}(\tan\theta)=\sec\theta\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2\theta\sec\theta\,\mathrm{d}\theta$

$=2\sqrt{3}-I+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec\theta\,\mathrm{d}\theta=2\sqrt{3}-I+\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}-I+\ln(2+\sqrt{3})$，于是 $I=\frac{1}{2}[2\sqrt{3}+\ln(2+$

$\sqrt{3})]$，故原式 $=\frac{8\pi}{9}-\frac{1}{6}[2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})]$.

7. 令 $D_1=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6},0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta\right\}$，$D_2=\left\{(r,\theta)\mid\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1\right\}$，由对称性

得 $\iint\limits_D\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\left(\iint\limits_{D_1}\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)$，而 $\iint\limits_{D_1}\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{4\pi-11}{9}$，$\iint\limits_{D_2}\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r=$

$\frac{(8-3\sqrt{3})\pi}{9}$，于是 $\iint\limits_D\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{(24-6\sqrt{3})\pi-22}{9}$.

8. 令 $D_1=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2\}$，$D_2=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 2\}$，则

$\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，而 $\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y$

$=\frac{4}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$，$\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$

$\xrightarrow{x=\sqrt{2}\sin t}\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sqrt{2}\cos^3 t\sqrt{2}\cos t\,dt=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t\,dt=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)^2\,dt=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)\,d(2t)=$

$\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos t+\cos^2 t)\,dt=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}$，故$\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$.

9. 令 $D_1:x^2+y^2\leqslant 2y$，$D_2:2y\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，如图 1-8-20，

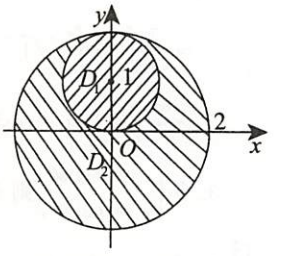


图 1-8-20

于是$\iint\limits_D|x^2+y^2-2y|\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1}(2y-x^2-y^2)\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-2y)\,dx\,dy$

$=\iint\limits_{D_1}(2y-x^2-y^2)\,dx\,dy+\left[\iint\limits_D(x^2+y^2-2y)\,dx\,dy-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-2y)\,dx\,dy\right]$

$=\iint\limits_D(x^2+y^2-2y)\,dx\,dy-2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-2y)\,dx\,dy$，

$\iint\limits_D(x^2+y^2-2y)\,dx\,dy=\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3\,dr=8\pi$，令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$则

$D_1=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta\}$，则

$\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-2y)\,dx\,dy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(r^2-2r\sin\theta)r\,dr=-\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,d\theta=-\frac{\pi}{2}$，

故$\iint\limits_D|x^2+y^2-2y|\,dx\,dy=9\pi$.

10. 因为 $f(y-x)=\begin{cases}y-x, & -1\leqslant y-x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 如图 1-8-21，于是

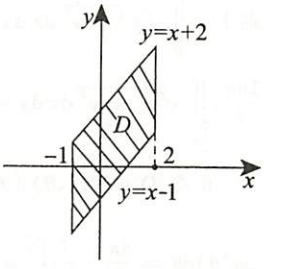


图 1-8-21

$\iint\limits_D f(x)f(y-x)\,dx\,dy=\int_{-1}^2 dx\int_{x-1}^{x+2}x(y-x)\,dy=\frac{3}{2}\int_{-1}^2 x\,dx=\frac{9}{4}$.

11. 方法一：$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dv=\int_{-1}^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2}(x^2+y^2)\,dx\,dy=$

$\int_{-1}^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{1-z^2}}r^3\,dr=\pi\int_0^1(1-z^2)^2\,dz=\pi\int_0^1(1-2z^2+z^4)\,dz=\frac{8\pi}{15}$.

方法二：$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi\cdot r^2\sin^2\varphi\,dr$

$=\frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi=\frac{4\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi=\frac{4\pi}{5}I_3=\frac{8\pi}{15}$.

12. 如图 1-8-22 所示，$L:\begin{cases}y^2=2z,\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面为

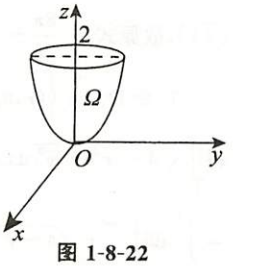


图 1-8-22

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

方法一：$I=\int_0^2 dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z}(x^2+y^2+z)\,dx\,dy=\int_0^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r(r^2+z)\,dr$

$=2\pi\int_0^2(z^2+z^2)\,dz=4\pi\int_0^2 z^2\,dz=\frac{32}{3}\pi$.

方法二：令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 2,\frac{r^2}{2}\leqslant z\leqslant 2\right)$，于是

$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\,dr\int_{\frac{r^2}{2}}^2(r^2+z)\,dz=2\pi\int_0^2\left(2r+2r^3-\frac{5}{8}r^5\right)dr=\frac{32\pi}{3}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

13. $F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r\mathrm{d}r\int_0^1[f(r^2)+z^2]\mathrm{d}z=2\pi\int_0^t r\left[f(r^2)+\frac{1}{3}\right]\mathrm{d}r$,

则 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}=2\pi\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t\left[f(t^2)+\frac{1}{3}\right]}{2t}=\pi\lim\limits_{t\to0^+}\left[f(t^2)+\frac{1}{3}\right]=\pi$.

14. 设固定点为 $M_0(0,0,a)(a>R)$，设球体为 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，则 $r=\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}$，于是

$$m=\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\mathrm{d}r\int_0^\pi\frac{r^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{r^2-2ar\cos\varphi+a^2}}$$

$$=\frac{2\pi}{a}\int_0^R r\mathrm{d}r\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}(r^2-2ar\cos\varphi+a^2)}{2\sqrt{r^2-2ar\cos\varphi+a^2}}=\frac{4\pi}{a}\int_0^R r^2\mathrm{d}r=\frac{4\pi R^3}{3a}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)
微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第九章　级　数

大纲点击

1. 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.

2. 掌握几何级数与 p 级数的收敛与发散的条件.

3. 掌握正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根值判别法，会用积分判别法.

4. 掌握交错级数的莱布尼茨判别法.

5. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系.

6. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念.

7. 理解幂级数收敛半径的概念，并掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.

8. 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)，会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和.

9. 了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件.

10. 掌握 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$ 与 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林(Maclaurin)展开式，会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数.

11. 了解傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理，会将定义在 $[-l,l]$ 上的函数展开为傅里叶级数，会将定义在 $[0,l]$ 上的函数展开为正弦级数与余弦级数，会写出傅里叶级数的和函数的表达式.

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

第一节　常数项级数的概念与理论

一、常数项级数的概念与性质

(一) 常数项级数的基本概念

1. 常数项级数的定义　设 $\{a_n\}$ 为常数列，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为常数项级数.

2. 常数项级数收敛的定义　称 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和，若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，称 S 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和，记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$；若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

【例 1】　判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 是否收敛，若收敛求其和.

【解】 $S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

(二) 常数项级数的基本性质



1. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=B$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=A\pm B$.

2. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=kS$(其中$k$为常数).

特别地,若$k\neq0$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$具有相同的敛散性.

3. 级数去掉、添加、改变有限项,不改变级数的敛散性(若级数收敛时,去掉、添加、改变有限项时,虽然不改变敛散性,但可能收敛于不同的和).

4. 若一个级数收敛,则任意添加括号后的级数收敛,且收敛于相同的和,反之不对.

5. (级数收敛的必要条件) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,反之不对.

【例 2】 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$的敛散性.

【解】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots$,

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,且级数添加括号不降低收敛性,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

(三) 两个重要的常数项级数



1. p 级数

(1) 定义 —— 形如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$称为$p$级数,其中$p$为常数.

(2) 敛散性判断

当$p>1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛;当$p\leqslant1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散.

2. 几何级数

(1) 定义 —— 形如$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n(a\neq0)$为几何级数. 等比数列求和即为几何级数.

(2) 敛散性判断

当$|q|\geqslant1$时,级数发散;当$|q|<1$时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=\frac{a}{1-q}$.

二、正项级数的概念与判别法

(一) 正项级数的概念

对常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,若对一切的$n$有$a_n\geqslant0$,称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数.

【注解】

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和，显然 $\{S_n\}$ 单调递增.

若 $\{S_n\}$ 无上界时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

若存在 $M>0$，使得 $S_n\leqslant M$，即 $\{S_n\}$ 有上界时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

（二）正项级数审敛法

种类		定理内容
比较审敛法	基本形式	定理 1.1 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为两正项级数， (1) 若 $a_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 一定收敛. (2) 若 $a_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 一定发散.
	极限形式	定理 1.2 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为两正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=l(0<l<+\infty)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 敛散性相同.
比较审敛法	补充形式	定理 1.3 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为两正项级数， (1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛； (2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=+\infty$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.
比值审敛法		定理 2 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$，则 (1) 当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛； (2) 当 $\rho>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散； (3) $\rho=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 敛散性不定.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

续表

种类	定理内容
根值审敛法	定理 3 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$，则 (1) 当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛； (2) 当 $\rho>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散； (3) $\rho=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 敛散性不定.
积分审敛法	定理 4 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，$\{a_n\}$ 单调递减，令 $a_n=f(n)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

【例 3】 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x}$. (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$.

【解】 (1) 因为 $0\leqslant\sin\dfrac{\pi}{2^n}\leqslant\dfrac{\pi}{2^n}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2^n}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ 收敛.

(2) 因为 $\int_0^n\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^n x\,\mathrm{d}x=\dfrac{n^2}{2}$，所以 $0\leqslant\dfrac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x}\leqslant\dfrac{2}{n^2}$，

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2}$ 收敛，所以由比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x}$ 收敛.

(3) 显然该级数为正项级数，由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ 得 $\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{2n^2}$，

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛.

【例 4】 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ 的敛散性.

【解】 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n n!}{n^n}}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.

【例 5】 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

【解】 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{2}{2n+1}\right)^{-\frac{2n+1}{2}}\right]^{-\frac{2n}{2n+1}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$，

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n^2}$ 收敛.

微信公众号：慎学考研 (ID：diky66)

【例 6】 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 的敛散性.

【解】 显然 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 为正项级数且 $\left\{\dfrac{1}{n\ln n}\right\}$ 单调递减,

因为 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln\ln x\mid_2^{+\infty}=+\infty$,所以级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散.

【例 7】 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ 的敛散性.

【解】 显然 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ 为正项级数且 $\left\{\dfrac{1}{n\ln^2 n}\right\}$ 单调递减,

因为 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=-\dfrac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\dfrac{1}{\ln 2}$,所以级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛.

三、交错级数及其审敛法

(一) 交错级数的概念

称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$ 为交错级数,其中 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$.

(二) 交错级数收敛判别定理

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

定理(莱布尼茨判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 为交错级数($a_n>0,n=1,2,\cdots$),若 $\{a_n\}$ 单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 一定收敛.

四、一般级数的绝对收敛与条件收敛

(一) 绝对收敛与条件收敛的概念

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛;

2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

(二) 绝对收敛与条件收敛的关系定理

定理 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定收敛;反之,若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 不一定绝对收敛.

【注解】

级数一般项取绝对值不会提高级数的收敛性,若级数发散,则一般项取绝对值后的级数发散.

【例 1】 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)(a\neq 0)$ 的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

【解】 因为 $\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)\right|=2\sin^2\frac{a}{2n}\sim\frac{a^2}{2n^2}$，

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{2n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$ 绝对收敛.

【例 2】 设常数 $k>0$，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_n}}{n+k}$（　　）.

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛　　(C) 发散　　(D) 敛散性与 k 有关

【解】 因为 $\left|(-1)^n\frac{\sqrt{a_n}}{n+k}\right|=\frac{\sqrt{a_n}}{n+k}\leqslant\frac{1}{2}\left[a_n+\frac{1}{(n+k)^2}\right]$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left[a_n+\frac{1}{(n+k)^2}\right]$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n+k}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_n}}{n+k}$ 绝对收敛，选(A).

【例 3】 设 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{k+n}{n^2}$（　　）.

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛　　(C) 敛散性与 k 有关　　(D) 发散

【解】 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{k}{n^2}$ 绝对收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 条件收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{k+n}{n^2}$ 条件收敛，选(B).

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 4】 下列选项正确的是（　　）.

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $a_n\geqslant b_n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

(C) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $a_n=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛

【解】 **方法一**　因为 $(a_n+b_n)^2=a_n^2+b_n^2+2a_nb_n\leqslant 2(a_n^2+b_n^2)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2(a_n^2+b_n^2)$ 收敛，所以由比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛，选(A).

方法二　取 $a_n=\frac{1}{n^2}$，$b_n=-1$，显然 $a_n\geqslant b_n$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，不选(B)；

取级数 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8}+\cdots$，因为 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$ 与 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ 皆收敛，所以 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8}+\cdots$ 收敛，但 $a_n\neq o\left(\frac{1}{n^2}\right)$，不选(C)；

取 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，$b_n=\frac{(-1)^n}{n}$，显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散，不选(D).

【注解】

(1) 记住:级数添加括号提高收敛性、级数添加绝对值提高发散性、级数有限项的改变不改变敛散性.

(2) 级数一般项若为某数列相邻两项之差,一般使用定义判断级数敛散性.

(3) 不确定常数项级数的具体类型时,首先看是否满足级数收敛的必要条件,其次判断级数是绝对收敛还是条件收敛.

(4) 正项级数一般项中含阶乘时,使用比值审敛法;正项级数一般项中含n次幂时,使用根值审敛法,若一般项中既含幂又含阶乘时,使用比值审敛法.

第二节 幂级数

一、幂级数的基本概念

1. 函数项级数的定义

设$\{u_n(x)\}$为函数列,称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$为函数项级数,若当$x=x_0$时,常数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x_0)$收敛,则称$x=x_0$为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点,若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x_0)$发散,称$x=x_0$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的发散点.所有的收敛点构成的集合称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域,所有发散点构成的集合称为发散域.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在其收敛域内每个点处都有定义,设其和为$S(x)$,称$S(x)$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和函数.

微信公众号【顶尖考研】(QQ:dikv66)

2. 幂级数 —— 形如$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$或$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$称为幂级数.

二、幂级数的理论

(一) 幂级数基本定理



定理 1(Abel 定理) 对幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,若存在$x_0\neq0$,使得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$收敛,则当$|x|<|x_0|$时,幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛;若存在$x_1$,使得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_1^n$发散,则当$|x|>|x_1|$时,幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散.

(二) 幂级数收敛半径与收敛域



定理 2 对幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$,则

(1) 若$\rho=0$,则$R=+\infty$;

(2) 若 $\rho=+\infty$,则 $R=0$;

(3) 若 $0<\rho<+\infty$,则 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

定理 3 对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$,则

(1) 若 $\rho=0$,则 $R=+\infty$;

(2) 若 $\rho=+\infty$,则 $R=0$;

(3) 若 $0<\rho<+\infty$,则 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

三、幂级数的分析性质

定理 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,其收敛半径为 R,和函数为 $S(x)$,则

(1) $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续.

(2)(逐项可导性) 当 $x\in(-R,R)$ 时,$S'(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径也是 R.

(3)(逐项可积性) 当 $x\in(-R,R)$ 时,

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径为 R.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

四、函数的幂级数展开

(一) 直接法



定理 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内任意阶可导,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可以展开成幂级数为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为函数 $f(x)$ 的泰勒级数.

特别地,若 $x_0=0$,称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

(二) 间接法

直接法又称为公式法,间接法就是直接法之外的方法,间接法主要有两个工具,工具一是常见的几个函数的麦克劳林公式,工具二是利用幂级数的逐项可导和逐项可积性辅之以拆解等方法.

【例 1】 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ 展开成 x 的幂级数.

【解】 $f(x)=\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^{n+1}}x^n\quad(-3<x<3)$.

【例 2】 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ 展开成 x 的幂级数.

【解】 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}=\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3-x}+\frac{1}{1+x}\right),$$

而 $\dfrac{1}{3-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^{n+1}}x^n(-3<x<3)$，$\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\quad(-1<x<1)$，

于是 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left[\dfrac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\right]x^n\quad(-1<x<1)$.

【例 3】 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

【解】 因为 $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<x<1)$，所以

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}(-1<x<1)$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djkyc6)

【例 4】 将 $f(x)=\dfrac{5x-12}{x^2+5x-6}$ 展开成 x 的幂级数.

【解】 $f(x)=\dfrac{5x-12}{(x+6)(x-1)}=\dfrac{A}{x+6}+\dfrac{B}{x-1}$，解得 $A=6,B=-1$，

于是 $f(x)=\dfrac{6}{6+x}+\dfrac{1}{1-x}$.

因为 $\dfrac{6}{6+x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{6}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{6^n}x^n(-6<x<6)$，$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n(-1<x<1)$，

所以 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{6^n}\right]x^n(-1<x<1)$.

【例 5】 将 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数.

【解】 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<x<1)$，

逐项积分得 $f(x)-f(0)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，

因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

【例 6】 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成关于 $x-2$ 的幂级数.

【解】 $f(x)=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2+(x-2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-2}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\ (0<x<4).$$

【例 7】 设 $f(x)=x\ln(1+x^2)$，求 $f^{(49)}(0)$.

【解】 $f(x)$ 的麦克劳林公式为 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(49)}(0)}{49!}x^{49}+\cdots$；

因为 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots-\frac{x^{24}}{24}+\cdots$，所以 $\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\cdots-\frac{x^{48}}{24}+\cdots$，

于是 $f(x)=x^3-\frac{x^5}{2}+\cdots-\frac{x^{49}}{24}+\cdots$.

由函数麦克劳林系数的唯一性得 $\frac{f^{(49)}(0)}{49!}=-\frac{1}{24}$，于是 $f^{(49)}(0)=-\frac{49!}{24}$.

【例 8】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$ 求 $f^{(2n)}(0)$.

【解】 因为 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，所以 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$，

又 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，于是 $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ 得 $f^{(2n)}(0)=\frac{(-1)^n}{2n+1}(n=0,1,2,\cdots)$.

微信公众号【顶尖考研】
(Dingjiky66)

五、求幂级数的和函数

求幂级数的和函数其实为函数展开成幂级数的反运算，常用方法有：

(1) 常见函数的麦克劳林级数.

(2) 幂级数的逐项可导性与逐项可积性.

(3) 求幂级数的和函数满足的微分方程，再求解微分方程.

【例 1】 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{n}x^{2n}$.

【解】 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得级数的收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm 1$ 时，由级数收敛的必要条件得级数发散，故级数的收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})''$$

$$=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''=x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2x}{(1-x)^3}.$$

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 得级数的收敛半径为 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}$$

$$=2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{2(n-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}-1$$

$$=2x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}-1=(2x^2+1)e^{x^2}-1.$$

(3) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{1}{2}$ 得收敛半径为 $R=2$，当 $x=-2$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$ 收敛；当 $x=2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散，故收敛域为 $[-2,2)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}$，当 $x=0$ 时，$S(x)=\dfrac{1}{2}$；

当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}=-\dfrac{1}{x}\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$，所以有

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x=0,\\ -\dfrac{1}{x}\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right), & -2\leqslant x<2\text{ 且 }x\neq 0.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】 ID: djky66)

(4) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm 1$ 时，由级数收敛的必要条件得级数发散，故收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{n}x^{2n}$，则

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{2n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n}=-x\ln(1+x^2),$$

于是 $S(x)=-\ln(1+x^2)-\dfrac{2x^2}{1+x^2}$.

【例 2】 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域与和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得 $R=1$，当 $x=\pm 1$ 时，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|(\pm 1)^n|}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$，所以幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1},$$

当 $x=0$ 时，$S(0)=0$；

当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-\dfrac{1}{x}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-x\right)$

$$=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)(-1\leqslant x<1);$$

当 $x=1$ 时，$S(1)=1$，

故 $S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(1-x), & -1\leqslant x<1 \text{ 且 } x\neq 0,\\ 1, & x=1.\end{cases}$

【例 3】 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛域与和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 得 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots,$$

$$S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,\quad S''(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots,$$

显然 $S''(x)-S(x)=0$，该微分方程通解为 $S(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$.

由 $S(0)=1,S'(0)=0$ 得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$，故 $S(x)=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第三节 函数的傅里叶级数

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

一、周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

(一) 三角函数系及正交性

1. 称 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$ 为三角函数系.

2. 正交性

在 $[-\pi,\pi]$ 上，三角函数系 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$ 有如下性质：

$$(1)\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}2\pi, & m=n=0,\\ \pi, & m=n\geqslant 1,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

$$(2)\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}\pi, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

(二) 周期为 2π 的函数的傅里叶级数的理论

定理(狄利克雷充分条件)

设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点；

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个极值点，

则函数 $f(x)$ 可展开成三角级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中系数计算公式为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,2,\cdots),$$

级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$的收敛域为$(-\infty,+\infty)$，

且级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$与函数$f(x)$的关系是：

(1) 当x为$f(x)$的连续点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$；

(2) 当x为$f(x)$的间断点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

【例 1】 设$f(x)$是以2π为周期的函数(如图 1-9-1)，当$x\in[-\pi,\pi)$时，$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0<x<\pi,\end{cases}$求$f(x)$的傅里叶级数.

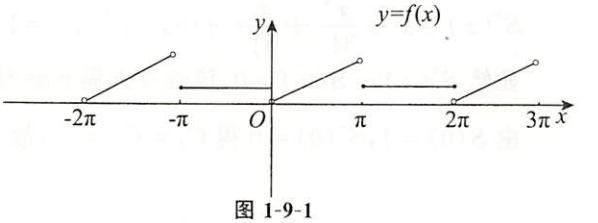


图 1-9-1

【解】 显然$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上满足狄利克雷充分条件，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}dx+\int_{0}^{\pi}x\,dx\right)=1+\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\frac{2}{n^2\pi}, & n=1,3,\cdots,\\ 0, & n=2,4,\cdots,\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{n\pi}[(-1)^n-1]-\frac{1}{n}(-1)^n=\begin{cases}\frac{\pi-2}{n\pi}, & n=1,3,\cdots,\\ -\frac{1}{n}, & n=2,4,\cdots,\end{cases}$$

则$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\cos x+\frac{\pi-2}{\pi}\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{\pi-2}{3\pi}\sin 3x+\cdots$,

$-\infty<x<+\infty$且$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

【注解】

周期为2π的函数展开成傅里叶级数步骤如下：

(1) 作$y=f(x)$的图像，找出$f(x)$的间断点.

(2) 利用公式$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,2,\cdots),$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

求出傅里叶级数的系数.

(3) 当 x 为 $f(x)$ 的连续点时，$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$；

当 x 为 $f(x)$ 的间断点时，$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

二、定义于$[-\pi,\pi]$上函数$f(x)$的傅里叶级数

设 $f(x)$ 为定义于$[-\pi,\pi]$上的函数，将其展开成傅里叶级数的步骤为：

第一步，将 $f(x)$ 进行周期延拓得周期为 2π 的周期函数 $F(x)$.

第二步，将 $F(x)$ 展开成傅里叶级数$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，

其中 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,3,\cdots)$，

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,3,\cdots)$，

第三步，注意到在$[-\pi,\pi]$上 $f(x)=F(x)$，取 $x\in[-\pi,\pi]$ 即可得 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶级数为$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 2】 设 $f(x)=x(-\pi\leqslant x<\pi)$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

【解】 将 $f(x)$ 进行周期延拓，

$a_0=0$，$a_n=0(n=1,2,\cdots)$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}=\begin{cases}\frac{2}{n}, & n=1,3,\cdots,\\ -\frac{2}{n}, & n=2,4,\cdots,\end{cases}$$

则 $x=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{2}{4}\sin 4x+\cdots(-\pi<x<\pi)$.

三、定义于$[0,\pi]$上函数$f(x)$的正弦级数与余弦级数

设函数 $f(x)$ 定义于$[0,\pi]$上，将函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上展开成傅里叶级数的步骤为：

第一步，将 $f(x)$ 在$[-\pi,0]$上进行区间延拓，得到一个定义于$[-\pi,\pi]$上的函数 $F(x)$，一般进行奇延拓和偶延拓. 所谓奇延拓即延拓后的函数为奇函数，所谓偶延拓是延拓后的函数为偶函数，然后再进行周期延拓.

第二步，将 $F(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上展开成傅里叶级数.

情形一：将 $f(x)$ 进行奇延拓展成正弦级数

$a_0=0$，$a_n=0(n=1,2,3,\cdots)$，$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,3,\cdots)$，

$f(x)$ 展开成的正弦级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$；

情形二：将 $f(x)$ 进行偶延拓展成余弦级数

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x,a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots),b_n=0(n=1,2,3,\cdots),$$

$f(x)$ 展开成的余弦级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$.

【例 3】 设 $f(x)=1-x(0\leqslant x\leqslant\pi)$，将 $f(x)$ 展开成正弦级数及余弦级数.

【解】 (1) 将 $f(x)$ 进行奇延拓，则

$a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]+\frac{2}{n}(-1)^n=\begin{cases}\dfrac{4-2\pi}{n\pi}, & n=1,3,\cdots,\\ \dfrac{2}{n}, & n=2,4,\cdots,\end{cases}$$

于是 $f(x)$ 的正弦级数为

$$1-x=\frac{4-2\pi}{\pi}\sin x+\frac{2}{2}\sin 2x+\frac{4-2\pi}{3\pi}\sin 3x+\frac{2}{4}\sin 4x+\cdots(0<x<\pi).$$

(2) 将 $f(x)$ 进行偶延拓，则

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\mathrm{d}x=2\left(1-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,\cdots,\\ 0, & n=2,4,\cdots,\end{cases}$$

$b_n=0(n=1,2,\cdots)$,

于是 $f(x)$ 的余弦级数为 $1-x=1-\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\cdots\right)(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

四、周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数

设函数 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数，若 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上满足收敛定理的条件，则函数 $f(x)$ 可展开成三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$，其中

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots).$$

(1) 当 x 为 $f(x)$ 的连续点时，$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=f(x)$；

(2) 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时，$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

五、定义于$[-l,l]$上的函数$f(x)$的傅里叶级数

设$f(x)$为定义于$[-l,l]$上的函数，将其展开成傅里叶级数的步骤为：

第一步，将$f(x)$进行周期延拓得周期为$2l$的周期函数$F(x)$.

第二步，将$F(x)$展开成傅里叶级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$，

其中$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x$，

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots),$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第三步，注意到在$[-l,l]$上$f(x)=F(x)$，从而可将$f(x)$在$[-l,l]$上展开成傅里叶级数.

六、定义于$[0,l]$上的函数$f(x)$的正弦级数与余弦级数

情形一：将$f(x)$进行奇延拓展成正弦级数

$$a_0=0,\quad a_n=0(n=1,2,3,\cdots),\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,(n=1,2,3,\cdots),$$

$f(x)$展开成的正弦级数为$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$.

情形二：将$f(x)$进行偶延拓展成余弦级数

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x,a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,(n=1,2,3,\cdots),b_n=0(n=1,2,3,\cdots),$$

$f(x)$展开成的余弦级数为$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

知识延拓模块 —— 幂级数的和函数及函数展成幂级数的技巧



情形一：求$\sum_{n=0}^{\infty}P(n)x^n$的和函数，其中$P(n)$为$n$的多项式

对形如$\sum_{n=0}^{\infty}P(n)x^n$的幂级数，求和函数时一般使用的工具：

(1) 级数的逐项可积性；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}(-1<x<1)$；$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}(-1<x<1)$.

【例 1】 求$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$的收敛区域与和函数.

【解】 由$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$得幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$的收敛半径为$R=1$，

因为当$x=\pm1$时，$\lim_{n\to\infty}n^2(\pm1)^n\neq0$，所以当$x=\pm1$时，级数发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$的收敛域为$(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n+x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$=x^2\sum_{n=2}^{\infty}(x^n)''+x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

【例 2】 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^{2n+1}$ 的收敛域与和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}\Big/\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$ 得幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^{2n+1}$ 的收敛半径为 $R=\sqrt{2}$，

当 $x-1=\pm\sqrt{2}$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(\pm\sqrt{2})^{2n+1}}{2^{n+1}}=\infty$，所以级数的收敛域为 $x-1\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，即 $x\in(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$.

令 $\frac{(x-1)^2}{2}=t$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^{2n+1}=\frac{(x-1)^3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]^{n-1}=\frac{(x-1)^3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(t^n)'=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n\right)'=\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{1}{(1-t)^2}$，

故 $S(x)=\frac{(x-1)^3}{4}\cdot\frac{1}{\left[1-\frac{(x-1)^2}{2}\right]^2}$.

情形二：求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{P(n)}$ 的和函数，其中 $P(n)$ 为 n 的多项式

求形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{P(n)}$ 的和函数时，一般使用的工具：

(1) 级数的逐项可导性.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\ln(1+x)(-1<x\leqslant 1)$；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)(-1\leqslant x<1)$.

【例 3】 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}$ 的收敛域与和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$ 得幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}$ 的收敛半径为 $R=2$，

当 $x=\pm 2$ 时，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\pm 2)^{n+1}}{n(n+1)2^n}\right|=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，所以 $x=\pm 2$ 时，幂级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}$ 绝对收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}$ 的收敛域为$[-2,2]$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}$，则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n2^n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)2^n}$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n2^n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}=-x\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)(-2\leqslant x<2)$，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)2^n}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{n+1}=2\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}-\dfrac{x}{2}\right]=-2\left[\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{x}{2}\right](-2\leqslant x<2)$，

所以 $S(x)=x+(2-x)\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)(-2\leqslant x<2)$.

当 $x=2$ 时，$S(2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}}{n(n+1)2^n}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=2$，

故 $S(x)=\begin{cases}(2-x)\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x, & -2\leqslant x<2,\\ 2, & x=2.\end{cases}$

【例 4】 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}(-1<x<1)$ 的和函数.

【解】 当 $x=0$ 时，$S(0)=0$；

当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{x}\int_0^x\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right]\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}\int_0^x\dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=-\dfrac{1}{x}(x-\arctan x)=-1+\dfrac{\arctan x}{x}$，

故 $S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ -1+\dfrac{\arctan x}{x}, & 0<|x|<1.\end{cases}$

情形三：幂级数系数的分母中含 $n!$，求和函数时一般使用的工具：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x(-\infty<x<+\infty)$，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=\cos x(-\infty<x<+\infty)$，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x(-\infty<x<+\infty)$.

(2) 求和函数满足的微分方程.

【例 5】 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!\,2^n}$ 的收敛域与和函数

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!\,2^n}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，故收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

微信公众号【预尖考研】(ID：ljky66)

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!\ 2^n}$，则

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}=x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}-1\right]=x(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1).$$

【例 6】 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+1)}{n!}x^n$ 的收敛域与和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+1)}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，故收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+1)}{n!}x^n$，则

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+1)}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)+1}{(n-1)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)}{(n-1)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\&=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right)=x^2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-1.\end{aligned}$$

重点题型分析

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第一部分 常数项级数

题型一 常数项级数收敛的判别

【思路分析】

判断常数项级数的敛散性通常从如下角度思考：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项的极限，若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定发散.

(2) 用级数收敛的定义，若部分和极限存在，则级数收敛；若部分和极限不存在，则级数发散(尤其级数一般项可拆解或一般项为数列相邻两项之差).

(3) 常数项级数的基本性质，如：添加括号提高级数的收敛性、添加绝对值提高级数的发散性等.

(4) 若级数为正项级数，可以考虑根据一般项的特点使用正项级数的比较审敛法、比值审敛法、根值审敛法等；若级数为交错级数，可以考虑使用莱布尼茨审敛法；若级数为任意级数，可以考虑绝对收敛性与条件收敛性.

【例 1】 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 (1) **方法一**

$$S_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1,$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$发散.

方法二 因为$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\dfrac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}$发散,

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$发散.

(2)$S_n=\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$收敛.

【例 2】 判断下列级数的敛散性:

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. (2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$. (3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 因为$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)>0$且$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{n}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,所以由比较审敛法,

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$发散.

(2) 显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$为正项级数,因为$\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1\sim\dfrac{1}{n^2}$,所以$\sqrt{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1\right)\sim\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$,

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,由比较审敛法,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$收敛.

(3) 令$a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^4}\mathrm{d}x$,显然$a_n\geqslant0$,因为$0\leqslant a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^4}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$,

注意到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,所以由比较审敛法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^4}\mathrm{d}x$收敛.

【例 3】 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$的敛散性.

【解】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}=4>1$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$发散.

【例 4】 判断下列级数的敛散性:

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$. (2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-(-1)^n}}$. (3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

【解】 (1) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$,所以根据根值审敛法得

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n}$ 收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^{n-(-1)^n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{\frac{n-(-1)^n}{n}}}=\dfrac{1}{2}<1$,所以根据根值审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-(-1)^n}}$ 收敛.

(3) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}>1$,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散.

【例 5】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 是否是 p 级数? 判断其收敛性.

【解】 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 不是 p 级数.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 敛散性相同,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 发散.

【例 6】 设正数列 $\{a_n\}$ 单调增加且有界,判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 的敛散性.

【解】 因为正数列 $\{a_n\}$ 单调增加且有界,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

令 $b_n=1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$,因为 $\{a_n\}$ 单调增加,所以 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1$,于是 $b_n\geqslant 0$,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 是正项级数且 $0\leqslant b_n=1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\leqslant\dfrac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)$.

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)$,

$S_n=\dfrac{1}{a_1}(a_2-a_1)+\dfrac{1}{a_1}(a_3-a_2)+\cdots+\dfrac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)=\dfrac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_1)$,

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{a_1}(A-a_1)$ 存在,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛,根据正项级数的比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

【例 7】 设 $0\leqslant a_n<\dfrac{1}{n}$,判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$ 中哪些级数一定收敛?

【解】 令 $a_n=\dfrac{1}{n+1}$,显然 $0\leqslant\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 不一定收敛.

令 $a_n=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n}+(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}\right]$,因为 $\sin\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{n}$,所以 $0\leqslant a_n<\dfrac{1}{n}$,

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$，因为 $\sin\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 不一定收敛.

取 $a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$，显然 $0\leqslant\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ 不一定收敛.

因为 $0\leqslant a_n<\dfrac{1}{n}$，所以 $0\leqslant a_n^2<\dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由正项级数比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$ 绝对收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$ 一定收敛.

【例 8】 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

【解】 令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}(x\geqslant 1)$，

$f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$，当 $x>\mathrm{e}^2$ 时 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调减少，所以 $\left\{\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right\}$ 除前面有限项外单调减少，又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$，由莱布尼茨审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 收敛.

因为 $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\geqslant\dfrac{\ln 2}{\sqrt{n}}(n\geqslant 2)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln 2}{\sqrt{n}}$ 发散，所以由比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 发散，

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 条件收敛.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 9】 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$ 的敛散性，当级数收敛时，判断是绝对收敛还是条件收敛.

【解】 $\sin\sqrt{n^2+1}\pi=\sin[n\pi+(\sqrt{n^2+1}-n)\pi]=(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi$

$$=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

因为 $\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}>0$，所以原级数为交错级数.

因为 $\left\{\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}$ 单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$ 收敛.

又因为 $\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\dfrac{\pi}{2n}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 发散，

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$ 条件收敛.

【例 10】 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否一定收敛？

【解】 不一定. 例如：$a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$，$b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$ 发散.

【例 11】 设常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，问：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 是否收敛？若收敛给予证明；若发散请举反例.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，结果如何？

【解】 (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 不一定收敛，例如：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 为交错级数，由莱布尼茨审敛法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 一定收敛，证明如下：

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，由极限定义，对 $\varepsilon_0=1$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-0|<1,\text{从而 } 0\leqslant a_n<1,$$

于是当 $n>N$ 时，$0\leqslant a_n^2<a_n<1$.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n$ 收敛，由正项级数的比较审敛法得 $\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 一定收敛.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 12】 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，问 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 是否一定收敛？

【解】 不一定，例如：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

【例 13】 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 条件收敛，则 p 的范围是 _____.

【解】 $a_n=\frac{1}{n^p(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\sim\frac{1}{2n^{p+\frac{1}{2}}}$

当 $p\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$，所以级数发散；

当 $p>-\frac{1}{2}$ 时，$\left\{\frac{1}{n^p(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right\}$ 单调递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0$，

所以交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 收敛.

但当 $p+\frac{1}{2}>1$，即 $p>\frac{1}{2}$ 时，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}\right|$ 收敛，所以 $p>\frac{1}{2}$ 时，级数绝对收敛.

故 $-\frac{1}{2}<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，级数条件收敛.

题型二　证明常数项级数收敛的命题

【例 1】 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项收敛级数，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

【证明】 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

由数列极限的定义，对 $\varepsilon=1$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-0|<1$，

从而当 $n>N$ 时，$0\leqslant a_n^2\leqslant a_n<1$，

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛及正项级数比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

【例 2】 设 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

【证明】 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 收敛，

又因为 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，所以 $0\leqslant b_n-a_n\leqslant c_n-a_n$，

根据比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛，而 $b_n=a_n+(b_n-a_n)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 3】 设数列 $\{na_n\}$ 有界，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

【证明】 因为数列 $\{na_n\}$ 有界，所以存在 $M_0>0$，对一切的 n 有 $|na_n|\leqslant M_0$，

于是 $0\leqslant a_n^2\leqslant\frac{M_0^2}{n^2}$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{M_0^2}{n^2}$ 收敛，由比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内二阶连续可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x^2}=2$，

证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

【证明】 因为 $f(x)$ 二阶连续可导，所以在 $x=0$ 的邻域内有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2).$$

由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x^2}=2$ 得 $f(0)=1$，

由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=2$，于是 $f'(0)=0$，

根据导数定义，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{f''(0)}{2}=2$，于是 $f''(0)=4$，

故 $f(x)=1+2x^2+o(x^2)$，当 n 充分大时，$f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

因为 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\left|\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|\sim\frac{2}{n^2}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

【例 5】 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0$ 且单调递减，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 的敛散性.

【解】 因为 $a_n>0$ 且单调递减，所以根据极限存在准则，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，显然 $A\geqslant 0$.

因为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，所以 $A>0$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 为正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{1+A}<1$，根据根值审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

【例 6】 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots)$，

(1) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的和.

(2) 证明：对任意的 $k>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^k}$ 收敛.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 (1) 因为 $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{n+1}$，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$，

$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=1$.

(2) 由 $0\leqslant a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x\overset{\tan x=t}{=\!=\!=}\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{n}$ 得 $0\leqslant\frac{a_n}{n^k}\leqslant\frac{1}{n^{k+1}}$，

因为 $k>0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}}$ 收敛，由比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^k}$ 收敛.

【例 7】 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\,(u_n>0)$ 发散，$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^2}$ 收敛.

【证明】 显然 $\{S_n\}$ 单调增加，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$.

$$0\leqslant\frac{u_n}{S_n^2}\leqslant\frac{u_n}{S_{n-1}S_n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n},$$

对级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$，$S'_n=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S'_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)=\frac{1}{S_1}$，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^2}$ 收敛.

【例 8】 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是正项级数，

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=+\infty$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【证明】 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$，所以根据极限的定义，对 $\varepsilon_0=1$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时有 $\left|\frac{b_n}{a_n}-0\right|<1$，即 $0\leqslant b_n<a_n$.

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n$ 收敛，由比较审敛法得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}b_n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=+\infty$，则对 $\varepsilon_0=1$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时有 $\frac{b_n}{a_n}>1$，即 $b_n>a_n$.

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n$ 发散，由正项级数比较审敛法，$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}b_n$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

【例 9】 设 $a_n>0,b_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$，证明：

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；　(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

【证明】 (1) 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$ 得 $0\leqslant\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$，即 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 单调减少且有下界，由极限存在定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$，由极限保号性得 $A\geqslant 0$.

若 $A>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 敛散性相同，故若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

若 $A=0$，即 a_n 趋于零的速度较快，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 一定收敛.

(2) 若 $A>0$，由正项级数的比较审敛法，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 一定发散；

若 $A=0$，因为 a_n 趋于零的速度快，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 一定发散.

【例 10】 设 $u_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=q$ 存在，证明：当 $q>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $q<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

【证明】 当$q>1$时，取$\varepsilon_0=\dfrac{q-1}{2}>0$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=q$，所以由极限定义，存在$N>0$，

当$n>N$时，$\left|\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}-q\right|<\dfrac{q-1}{2}$，从而有$\ln\dfrac{1}{u_n}>\dfrac{q+1}{2}\ln n$或$0\leqslant u_n<\dfrac{1}{n^{\frac{q+1}{2}}}$，

因为$\dfrac{q+1}{2}>1$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{q+1}{2}}}$收敛，根据比较审敛法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

当$q<1$时，取$\varepsilon_0=\dfrac{1-q}{2}>0$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=q$，所以由极限定义，存在$N>0$，

当$n>N$时，$\left|\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}-q\right|<\dfrac{1-q}{2}$，从而有$\ln\dfrac{1}{u_n}<\dfrac{q+1}{2}\ln n$或$u_n>\dfrac{1}{n^{\frac{q+1}{2}}}$，

因为$\dfrac{q+1}{2}<1$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{q+1}{2}}}$发散，根据比较审敛法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

【例 11】 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}$收敛.

【证明】 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$收敛.

又因为$0\leqslant\sqrt{a_nb_n}\leqslant\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$收敛，所以由正项级数比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}$一定收敛.

【例 12】 设$f_0(x)$在$[0,a]$上连续，又$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$，证明：级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$在$[0,a]$上绝对收敛.

【证明】 因为$f_0(x)$在$[0,a]$上连续，所以$|f_0(x)|$在$[0,a]$上连续，于是$|f_0(x)|$在$[0,a]$上取到最大值，令$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f_0(x)|$，

$$|f_1(x)|=\left|\int_0^x f_0(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x|f_0(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant Mx,$$

$$|f_2(x)|=\left|\int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x|f_1(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x Mt\,\mathrm{d}t=\frac{M}{2}x^2,$$

由归纳法得$|f_n(x)|\leqslant\dfrac{M}{n!}x^n\leqslant\dfrac{Ma^n}{n!}$.

对$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{Ma^n}{n!}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{Ma^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{Ma^n}{n!}}=0<1$，所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{Ma^n}{n!}$收敛，根据比较审敛法得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|f_n(x)|$收敛，即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$在$[0,a]$上绝对收敛.

微信公众号【预见考研】(ID: djky66)

【例 13】 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

【证明】 令 $S_n=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$，

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}-b_1$ 存在，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在，于是数列 $\{b_n\}$ 有界，即存在 $M>0$，对一切的 n，有 $|b_n|\leqslant M$.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Ma_n$ 收敛，又因为 $0\leqslant|a_nb_n|\leqslant Ma_n$，由比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

第二部分 函数项级数

题型一 幂级数的收敛半径与收敛域

【例 1】 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x-1)^n}{n^2}$ 的收敛半径与收敛域.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=1$ 得 $R=1$.

当 $2x-1=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\pm1)^n}{n^2}$ 收敛，由 $-1\leqslant2x-1\leqslant1$ 得级数的收敛域为 $[0,1]$.

【例 2】 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域.

【解】 令 $\dfrac{1-x}{1+x}=t$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ 变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{2n+1}$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2n+1}}=1$ 得级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{2n+1}$ 的收敛半径为 $R=1$，

当 $t=-1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛；当 $t=1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$ 发散，于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{2n+1}$ 的收敛域为 $[-1,1)$，由 $-1\leqslant\dfrac{1-x}{1+x}<1$ 得 $x>0$，故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域为 $(0,+\infty)$.

题型二 函数展开成幂级数

【例 1】 设 $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+x-2}$.

(1) 将函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数；(2) 将 $f(x)$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

【解】 (1) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+x-2}=\dfrac{3x}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{x-1}$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

$$=\frac{1}{1+\frac{x}{2}}-\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^n}-1\right]x^n(-1<x<1).$$

$$(2)f(x)=\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{4+(x-2)}+\frac{1}{1+(x-2)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-2}{4}}+\frac{1}{1+(x-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{2n+1}}\right)(x-2)^n(1<x<3).$$

【例 2】 将 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

【解】 $f(0)=\frac{\pi}{4}$，$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<x<1)$，

由逐项可积性得

$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x$，于是 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1\leqslant x<1)$.

【例 3】 将函数 $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ 展开成关于 $x-1$ 的幂级数.

【解】 $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n(-1<x<3),$$

两边求导得 $-\frac{1}{(x+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^{n+1}}(x-1)^{n-1}$，于是有

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(x-1)^n(-1<x<3).$$

【例 4】 求函数 $f(x)=\ln(3+2x-x^2)$ 的幂级数.

【解】 $f(x)=\ln(3+2x-x^2)=\ln(1+x)(3-x)=\ln(1+x)+\ln(3-x)$，

而 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n(-1<x\leqslant 1)$，

$$\ln(3-x)=\ln 3+\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)=\ln 3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{n}=\ln 3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}x^n(-3\leqslant x<3),$$

于是 $f(x)=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\frac{1}{n3^n}\right]x^n(-1<x\leqslant 1)$.

题型三 幂级数的和函数

【例 1】 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$ 的收敛域及和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得 $R=1$，

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

当 $x=\pm1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\pm1)^n\neq0$，则当 $x=\pm1$ 时，幂级数发散，故收敛域为 $(-1,1)$.

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\\&=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x^2\Big(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\Big)''+x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big)'\\&=x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

【例 2】　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$ 的收敛域与和函数.

【解】　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2}{(n+1)^2}=1$ 得幂级数的收敛半径为 $R=1$；当 $x=\pm1$ 时，幂级数发散，故幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$，

则
$$\begin{aligned}\int_0^xS(x)\mathrm{d}x&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\\&=x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\Big)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},\end{aligned}$$

所以 $S(x)=\left[\dfrac{x}{(1-x)^2}\right]'=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}(-1<x<1)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 3】　求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n-1)^2}{n+1}x^n$ 的收敛域与和函数.

【解】　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，$\dfrac{(n-1)^2}{n+1}(\pm1)^n\to\infty(n\to\infty)$，则当 $x=\pm1$ 时，级数发散，故收敛域为 $(-1,1)$.

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2-4(n+1)+4}{n+1}x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}x^n+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1},\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，$S(0)=1$；

当 $x\neq0$ 时，
$$\begin{aligned}S(x)&=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\Big)'-4\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{4}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\&=\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{4}{1-x}+\frac{4}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^xx^n\mathrm{d}x=\frac{4x-3}{(1-x)^2}+\frac{4}{x}\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)\mathrm{d}x\\&=\frac{4x-3}{(1-x)^2}+\frac{4}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{4x-3}{(1-x)^2}-\frac{4}{x}\ln(1-x),\end{aligned}$$

故 $S(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{4x-3}{(1-x)^2}-\dfrac{4}{x}\ln(1-x), & 0<|x|<1.\end{cases}$

【例 4】　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n-1}}{n(2n-1)}$ 的和函数 $S(x)$.

【解】 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$得$R=1$,

当$x=\pm1$时,$\left|\dfrac{(-1)^n(\pm1)^{2n-1}}{n(2n-1)}\right|\sim\dfrac{1}{2n^2}$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$收敛,则当$x=\pm1$时,幂级数绝对收敛,故收敛域为$[-1,1]$.

令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n-1}}{n(2n-1)}=2\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n-1}}{2n-1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n-1}}{2n}\right]$,

当$x=0$时,$S(0)=0$;

当$x\neq0$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^{2n-2}\right]\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\arctan x;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n-1}}{2n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2n}=\frac{1}{x}\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^{2n-1}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{-x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x}\ln(1+x^2),$$

故$S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}-2\arctan x, & -1\leqslant x\leqslant1\text{且}x\neq0.\end{cases}$

【例5】 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^nn!}x^n$的和函数.

【解】 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$得收敛半径为$R=+\infty$,收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

令$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^nn!}x^n$,则$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^nn!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$,令$\dfrac{x}{2}=t$,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}t^n+\mathrm{e}^t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n}{n!}t^n+\mathrm{e}^t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}t^n+\mathrm{e}^t$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^n+\mathrm{e}^t$$

$$=t^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}+t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}+\mathrm{e}^t=(t^2+t+1)\mathrm{e}^t,$$

于是$S(x)=\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}+1\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

【例6】 求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}(-1<x<1)$的和函数.

【解】 令$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=x+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2\cdot4}{3\cdot5}x^5+\cdots$,

$$S'(x)=1+2x^2+\frac{2\cdot4}{3}x^4+\cdots=1+x\left(2x+\frac{2}{3}\cdot4x^3+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}6x^5+\cdots\right)$$

$$=1+x[xS(x)]'=1+xS(x)+x^2S'(x),$$

微信公众号【顶尖考研】 Q: djky66

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

于是得和函数满足的微分方程为

$$S'(x)+\frac{x}{x^2-1}S(x)=\frac{1}{1-x^2},$$

解得 $S(x)=\left[\int\frac{1}{1-x^2}e^{\int\frac{x}{x^2-1}dx}dx+C\right]e^{-\int\frac{x}{x^2-1}dx}=\left(\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+C\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

因为 $S(0)=0$,所以 $C=0$,于是幂级数的和函数为 $S(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

【例 7】 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛域与和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$,收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$, $S''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$,

$S'''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=S(x)$,即 $S'''(x)-S(x)=0$,

特征方程为 $\lambda^3-1=0$,解得特征值为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\lambda_3=1$,

方程 $S'''(x)-S(x)=0$ 的通解为

$$S(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_3e^x,$$

因为 $S(0)=1,S'(0)=0,S''(0)=0$,所以 $C_1=\frac{2}{3},C_2=0,C_3=\frac{1}{3}$,故幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数 $S(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x$.

【例 8】 设 $a_0=1,a_1=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 2)$,求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 的和函数 $S(x)$.

【解】 令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则

$$S(x)=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n-2})x^n$$

$$=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=1+x+x\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+x^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}$$

$$=1+x+x\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1+x+x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-1\right)+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$=1+x+x[S(x)-1]+x^2S(x),$$

解得 $S(x)=\frac{1}{1-x-x^2}\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

题型四　特殊的常数项级数的求和

【例 1】　求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)2^n}$ 的和.

【解】　令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$，显然幂级数的收敛域为 $[-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x=-\ln(1-x)-x,$$

取 $x=\dfrac{1}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2-\dfrac{1}{2}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)2^n}=2\ln 2-1$.

【例 2】　求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!\,(n+2)}$ 的和.

【解】　令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n!\,(n+2)}$，根据幂级数收敛半径的计算得 $R=+\infty$，故收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

$$S(0)=0,S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right)=x(\mathrm{e}^x-1),$$

$$\text{则 } S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x x(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{d}x$$

$$=\left[(x-1)\mathrm{e}^x-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^x=(x-1)\mathrm{e}^x+1-\frac{x^2}{2}.$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!\,(n+2)}=S(1)=\dfrac{1}{2}$.

【例 3】　求 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^n(n^2-1)}$ 的和.

【解】　令 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n^2-1)}$，收敛区间为 $(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n^2-1)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right),$$

$$\text{令 } S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n-1}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-x^2\ln(1-x),$$

$$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x-\frac{x^2}{2}=-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2},$$

$$\text{则 } S(x)=\frac{1}{2}\left[(1-x^2)\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}\right],$$

$$\text{于是 } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n^2-1)}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2\right),$$

$$\text{故 } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 4】 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和.

【解】 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$，显然该幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'-\sum_{n=1}^{\infty}x^n=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{x}{1-x}=\frac{x+x^2}{(1-x)^2},$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=3.$

题型五 傅里叶级数问题

【例 1】 设 $f(x)=x^2(0\leqslant x<1)$，且 $f(x)$ 的正弦级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots)$，其和函数为 $S(x)$，则 $S\left(-\dfrac{15}{2}\right)=$_____.

【解】 显然 $S(x)$ 是周期为 2 的奇函数，故

$$S\left(-\frac{15}{2}\right)=-S\left(8-\frac{1}{2}\right)=-S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right),$$

因为 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处连续，所以 $S\left(-\dfrac{15}{2}\right)=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

微信公众号【预采考研】(ID:djky66)

【例 2】 将函数 $f(x)=x^2(-\pi<x<\pi)$ 展开成傅里叶级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 的和.

【解】 将 $f(x)$ 进行周期延拓，显然 $f(x)$ 满足狄利克雷充分条件，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n4}{n^2}(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=0(n=1,2,\cdots),$$

所以 $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\,(-\pi<x<\pi)$，

取 $x=0$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=-\dfrac{\pi^2}{12}$.

【例 3】 设 $f(x)=|x|\,(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

【解】 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,\cdots,\\ 0, & n=2,4,\cdots,\end{cases}$$

$b_n=0(n=1,2,\cdots)$,

于是 $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

取 $x=0$ 有

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right),$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=S$,

即 $\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S=S$,解得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S=\frac{\pi^2}{6}$.

测试题

一、选择题

1. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{n}$(　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不确定

2. 设 $a>0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+a}{n^2}$(　　).

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛　　(C) 发散　　(D) 敛散性与 a 有关

3. 下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 一定发散

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 一定发散

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 一定发散

4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{n}$ 收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(e^{\frac{1}{n^2}}-1)$ 收敛

5. 若 $0\leqslant a_n<\frac{1}{n}$,则下列级数一定收敛的是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

6. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 a_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$(　　).

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不确定

7. 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n$ 在 $x=1$ 处收敛，则该级数在 $x=-2$ 处(　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不确定

8. 设 $f(x)=x^2(0\leqslant x<1)$，函数 $f(x)$ 的正弦级数为 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $S(-3)$ 为(　　).

(A)1　　(B) -1　　(C)0　　(D) $\frac{1}{4}$

二、填空题

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 条件收敛，则 p 的取值范围是_____.

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=-4$ 处收敛，在 $x=0$ 处发散，则该级数的收敛域为_____.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=$_____.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1,\end{cases}$ $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)=$_____.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

三、解答题

1. 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)a_n=1(p>1)$，证明：$p>2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $p\leqslant 2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

3. 设 $a_1=1,a_2=2$ 且 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$，判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 的敛散性.

4. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]$ 的敛散性.

5. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，又级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

6. 设 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 绝对收敛.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，再令 $a_n=\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n}$ 收敛.

8. 求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n(a>0,b>0)$.

9. 将下列函数展开成幂级数：

(1) $f(x)=\frac{4x^2-2x+3}{(x-2)(x^2+1)}$；　(2) $f(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$；

(3) $f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$；　(4) $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x$.

10. 求下列幂级数的收敛域与和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}(x+1)^{2n}$；　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n$；　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)^2}{n+1}x^n$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$.

11. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 收敛域与和函数.

12. 设函数列 $\varphi_n(x)$ 满足方程 $\varphi'_n(x)=\varphi_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$ 且 $\varphi_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 的和函数.

13. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$ 的收敛域与和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)2^n}$.

测试题参考答案

一、选择题

1. 因为 $\left|\dfrac{(-1)^n a_n}{n}\right|=\dfrac{1}{n}\cdot|a_n|\leqslant\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2}+a_n^2\right)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2}+a_n^2\right)$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n a_n}{n}\right|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n a_n}{n}$ 绝对收敛，应选(C).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+a}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a}{n^2}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a}{n^2}$ 绝对收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+a}{n^2}$ 条件收敛，应选(B).

3. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散，因为 $|a_n|+|b_n|\geqslant|a_n|$，所以由正项级数的比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 发散，应选(D).

4. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，于是存在 $M>0$，使得 $|a_n|\leqslant M$，而 $|a_n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1)|\leqslant M(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1)\sim\dfrac{M}{n^2}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1)$ 绝对收敛，选(D).

5. 取 $a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ 发散；取 $a_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{2n}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散；取 $a_n=\dfrac{1}{n+1}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；因为 $0\leqslant a_n<\dfrac{1}{n}$，所以 $0\leqslant a_n^2<\dfrac{1}{n^2}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，应选(A).

6. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 a_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n^2 a_n=0$，从而数列 $\{(-1)^n n^2 a_n\}$ 有界，即存在 $M>0$，对一切的 n 有 $|(-1)^n n^2 a_n|\leqslant M$ 或 $|a_n|\leqslant\dfrac{M}{n^2}$. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，应选(C).

7. 由阿贝尔定理，级数在 $|x+1|<2$ 内绝对收敛，因为 $|-2+1|=1<2$，所以当 $x=-2$ 时，级数绝对收敛，应选(C).

8. 函数进行奇延拓再进行周期为 2 的周期延拓，$S(-3)=S(-1)=\dfrac{1+(-1)}{2}=0$，应选(C).

二、填空题

1. $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}=\dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n^p}\sim\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$. 当 $p\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n a_n\neq0$，所以

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 发散;当 $p>-\dfrac{1}{2}$ 时,因为 $\left\{\dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n^p}\right\}$ 单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n^p}=0$,所以由莱布尼茨审敛法,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 收敛. 而当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时,因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$ 收敛,由比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 收敛,即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 绝对收敛,所以当 $-\dfrac{1}{2}<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 条件收敛.

2. 由阿贝尔定理,当 $|x+2|<|-4+2|=2$ 时级数绝对收敛,当 $|x+2|>|0+2|=2$ 时级数发散,则级数的收敛半径为 $R=2$,当 $|x+2|<2$ 及 $x=-4$ 时收敛,故收敛域为 $[-4,0)$.

3. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n(-1<x<1)$,则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{x}{(1-x)^2}$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}=S\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3}{4}$.

4. 函数先进行偶延拓,再进行周期为 2 的周期延拓,则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)=S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{f\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{1}{2}+0\right)}{2}=\dfrac{3}{4}$.

三、解答题

1. (1) 因为 $0\leqslant a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$ 得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛.

(3) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 收敛.

2. 因为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{1}{n}$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^p(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^{p-1}}}=1$,于是 $a_n\sim\dfrac{1}{n^{p-1}}$. 因为当 $p>2$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p-1}}$ 收敛;当 $p\leqslant2$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p-1}}$ 发散,所以当 $p>2$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;当 $p\leqslant2$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

3. 显然数列 $\{a_n\}$ 单调增加,当 $n\geqslant3$ 时,由 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\leqslant2a_{n-1}$ 得 $a_{n-1}\geqslant\dfrac{1}{2}a_n$,从而 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\geqslant a_{n-1}+\dfrac{1}{2}a_{n-1}=\dfrac{3}{2}a_{n-1}\geqslant\left(\dfrac{3}{2}\right)^2a_{n-2}\geqslant\cdots\geqslant\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}a_1=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$,于是 $0<\dfrac{1}{a_n}\leqslant\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$,由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ 收敛得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 收敛.

4. 因为 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$,所以 $\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\right]$ 为正项级数. 又 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}-$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

$\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$，而$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{2n^2}$，$\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\sim\frac{2}{\sqrt{n}}$，所以$\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\sim\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}$，注意到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}$收敛，由比较审敛法得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]$收敛.

5. 令$S_n=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$，因为$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$收敛，所以$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}-b_1$存在，从而$\lim_{n\to\infty}b_n$存在，于是数列$\{b_n\}$有界，即存在$M>0$，对一切的$n$，有$|b_n|\leqslant M$. 因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}Ma_n$收敛，又因为$0\leqslant|a_nb_n|\leqslant Ma_n$，由比较审敛法，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛.

6. 因为$f_0(x)$在$[0,a]$上连续，所以$|f_0(x)|$在$[0,a]$上连续，令$M=\max_{0\leqslant x\leqslant a}|f_0(x)|$，则$|f_1(x)|=\left|\int_0^x f_0(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x|f_0(t)|\mathrm{d}t\leqslant Mx$，$|f_2(x)|=\left|\int_0^x f_2(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x Mt\mathrm{d}t\leqslant\frac{M}{2!}x^2$，按照递推关系得$|f_n(x)|\leqslant\int_0^x|f_{n-1}(t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{M}{n!}x^n\leqslant\frac{M}{n!}a^n$，对级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n!}a^n$，令$u_n=\frac{M}{n!}a^n$，因为$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n!}a^n$收敛，于是$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$绝对收敛.

7. $a_n=\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}(nx)=\frac{1}{n}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x$. $a_n^2=\frac{1}{n^2}\left(\int_0^n f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{n^2}\int_0^n 1^2\mathrm{d}x\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x$. 令$\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x=A$即$\lim_{n\to\infty}\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x=A$，取$\varepsilon_0=\frac{A}{2}$，则存在$N>0$，当$n>N$时有$\left|\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x-A\right|<\frac{A}{2}$，即$\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{3A}{2}$，于是当$n>N$时，$0\leqslant\frac{a_n^2}{n}\leqslant\frac{1}{n^2}\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{3A}{2}\frac{1}{n^2}$且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3A}{2}\frac{1}{n^2}$收敛，于是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n}$收敛.

8. (1) 由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$得$R=1$，当$x=-1$时，对$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$，令$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，因为$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0(x>\mathrm{e})$，所以$\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}_{n=3}^{+\infty}$单调减少，从而$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$收敛，于是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$收敛；当$x=1$时，因为$\frac{\ln n}{n}\geqslant\frac{\ln 2}{n}(n\geqslant 2)$且$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln 2}{n}$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$发散，故原级数的收敛域为$[-1,1)$.

(2) 令$\frac{1-x}{1+x}=t$，对$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}t^n$，由$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=1$得$R=1$. 当$t=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$收敛；显然$t\neq-1$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}t^n$的收敛域为$-1<t\leqslant 1$，由$-1<\frac{1-x}{1+x}\leqslant 1$得原级数的收敛域为$[0,+\infty)$.

(3) 当$a<b$时，由$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}}=b$得收敛半径为$R=\frac{1}{b}$，当$x=\pm\frac{1}{b}$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\pm\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$，因为$\left|\frac{1}{n}\left(\pm\frac{a}{b}\right)^n\right|\leqslant\left(\frac{a}{b}\right)^n$，$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$且$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$都收敛得$x=\pm\frac{1}{b}$时级数收敛，故级数的收敛域为$\left[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}\right]$；当$a\geqslant b$时，由$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}}=a$得级数的收敛

半径为 $R=\frac{1}{a}$，当 $x=-\frac{1}{a}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(-\frac{b}{a}\right)^n$，因为 $\left|\frac{1}{n^2}\left(-\frac{b}{a}\right)^n\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(-\frac{b}{a}\right)^n$ 绝对收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，所以当 $x=-\frac{1}{a}$ 时级数收敛.

当 $x=\frac{1}{a}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n$ 发散，故级数收敛域为 $\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$.

9.(1) 令 $f(x)=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$，解得 $A=3,B=1,C=0$，即 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{2-x}\cdot\frac{x}{1+x^2}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n+1}(-1<x<1)$；$\frac{3}{2-x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^{n+1}}x^n(-2<x<2)$，于是 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^{n+1}}x^n(-1<x<1)$.

(2) $f(0)=0,f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\arctan x,f'(0)=0,f''(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$，于是 $f'(x)=f'(x)-f'(0)=\int_0^x f''(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，故 $f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

(3) $f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}=\frac{-1+x+2}{(1-x)^3}=-\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3},\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n(-1<x<1),\frac{2}{(1-x)^3}=\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]'=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n(-1<x<1)$，于是 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n(-1<x<1)$.

(4) $f(0)=0$，由 $f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'+\frac{1}{2(1+x^2)}=\frac{1}{1-x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}$，得 $f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}(-1<x<1)$.

10.(1) 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=(x+1)^2$，所以当 $|x+1|<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}(x+1)^{2n}$ 绝对收敛；当 $|x+1|>1$ 时，因为 $\frac{(-1)^n}{2n-1}(x+1)^{2n}\to\infty(n\to\infty)$，由级数收敛的必要条件得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}(x+1)^{2n}$ 发散；当 $x+1=\pm1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ 收敛，故级数的收敛域为 $-1\leqslant x+1\leqslant 1$，即 $-2\leqslant x\leqslant 0$. 令 $x+1=t,S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}t^{2n}$，则 $S(x)=t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}t^{2n-1}$，令 $S_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}t^{2n-1},S_1(0)=0$，因为 $S'_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nt^{2n-2}=\frac{-1}{1+t^2}$，所以 $S_1(t)=S_1(t)-S_1(0)=\int_0^t S'_1(t)\mathrm{d}t=-\arctan t$，于是 $S(x)=-(x+1)\arctan(x+1)(-2\leqslant x\leqslant 0)$.

(2) 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 得 $R=+\infty$，级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. 令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$，则 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$，令 $\frac{x}{2}=t$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n}{n!}t^n$

微信公众号 | 学考研 (ID: djky66)

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}t^n=t^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}+t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}=(t^2+t)e^t=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}},$$

于是 $S(x)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}}$.

(3) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，由级数收敛的必要条件得级数发散，故级数的收敛域为 $(-1,1)$. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$，则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2-4(n+1)+4}{n+1}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-4\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$.

当 $x=0$ 时，$S(0)=0$；当 $x\neq0$ 时，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})'-4\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n+4\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'-\frac{4x}{1-x}+\frac{4}{x}[-\ln(1-x)-x]=\frac{3x^2-2x}{(1-x)^2}-\frac{4}{x}[\ln(1-x)+x]$，于是

$$S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{3x^2-2x}{(1-x)^2}-\dfrac{4}{x}[\ln(1-x)+x], & -1<x<1\text{ 且 }x\neq0.\end{cases}$$

(4) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时级数绝对收敛，故收敛域为 $[-1,1]$. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$，则 $S(x)=\frac{1}{2}\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n+1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}\right)dx-\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}\right)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^x\frac{x^2}{1+x^2}dx\right]=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x.$$

11. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$，$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$，$S''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$，$S'''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=S(x)$，即 $S'''(x)-S(x)=0$，特征方程为 $\lambda^3-1=0$，解得特征值为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\lambda_3=1$，方程 $S'''(x)-S(x)=0$ 的通解为 $S(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_3e^x$，因为 $S(0)=1$，$S'(0)=0$，$S''(0)=0$，所以 $C_1=\frac{2}{3}$，$C_2=0$，$C_3=\frac{1}{3}$，故幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数 $S(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x$.

12. 由 $\varphi'_n(x)-\varphi_n(x)=x^{n-1}e^x$ 得 $\varphi_n(x)=\left[\int x^{n-1}e^xe^{\int-1dx}dx+C\right]e^{-\int-1dx}=Ce^x+\frac{x^n}{n}e^x$，由 $\varphi_n(1)=\frac{e}{n}$ 得 $C=0$，于是 $\varphi_n(x)=\frac{x^n}{n}e^x$. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)=e^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-e^x\ln(1-x)(-1\leqslant x<1)$.

13. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时级数发散，故收敛域为 $(-1,1)$. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$，显然 $S(0)$

微信公众号【顶尖考研】(ID：dkky66)

$=1$. 当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{x}S_1(x)$，其中 $S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. 由 $S_1'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$ 得 $S_1(x)=S_1(x)-S_1(0)=\int_0^x S_1'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，于是 $S(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & -1<x<1\text{ 且 }x\neq 0,\end{cases}$

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^n}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第十章　微分方程

大纲点击

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.

2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法.

3. 会解齐次微分方程、伯努利方程和全微分方程，会用简单的变量代换解某些微分方程.

4. 会用降阶法解下列形式的微分方程：

$$y^{(n)}=f(x),y''=f(x,y')\text{ 和 }y''=f(y,y').$$

5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构.

6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.

7. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.

8. 会解欧拉方程.

9. 会用微分方程解决一些简单的应用问题.

微信公众号【顶尖考研】

基础复习模块——基本概念、原理、考点

第一节　微分方程的基本概念

1. 微分方程 —— 含有导数或微分的方程称为微分方程. 未知函数为一元函数的微分方程称为常微分方程.

2. 微分方程的阶数 —— 微分方程中导数或微分的最高阶数称为微分方程的阶数.

3. 微分方程的解 —— 使得微分方程成立的函数称为微分方程的解.

4. 微分方程的特解 —— 微分方程的不含任意常数的解称为微分方程的特解.

5. 微分方程的通解 —— 所含相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相等的微分方程的解称为微分方程的通解.

例如：微分方程 $y'+2y=0$，显然 $y=\mathrm{e}^{-2x}$ 为该方程的一个特解，$y=C\mathrm{e}^{-2x}$ 为该方程的通解.

又例如：方程 $y''-3y'+2y=0$，$y_1=\mathrm{e}^{x}$ 及 $y_2=\mathrm{e}^{2x}$ 都是该方程的两个特解，因为 $y_1=\mathrm{e}^{x}$ 及 $y_2=\mathrm{e}^{2x}$ 不成比例，所以 e^{x} 与 e^{2x} 线性无关，$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$ 显然是该方程的解，且其中所含的任意常数为两个，故 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$ 是该方程的通解.

第二节　一阶微分方程的种类与解法

种类	通解公式或解法
1. 可分离变量的微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，其中 $f(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$	解法： $\frac{dy}{dx}=f(x,y)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ $\Rightarrow\frac{dy}{\varphi_2(y)}=\varphi_1(x)dx$ $\Rightarrow\int\frac{dy}{\varphi_2(y)}=\int\varphi_1(x)dx+C$
2. 齐次微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，其中 $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$	解法： $\frac{dy}{dx}=f(x,y)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ $\xrightarrow{\frac{y}{x}=u}u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$ $\Rightarrow\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C$
3. 一阶齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$	通解公式： $y=Ce^{-\int P(x)dx}$（其中 C 为任意常数）
4. 一阶非齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$	通解公式： $y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)dx}$ （其中 C 为任意常数）
5. 伯努利方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq0,1)$	解法： $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$ $\xrightarrow{y^{1-n}=z}\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$
6. 全微分方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 其中 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$	解法： 令 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$， 则 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du$， 原方程的通解为 $u(x,y)=C$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky06)

【注解】

(1) 对形如$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$的方程,可以通过适当变换化成可求解的微分方程.

情形一:$c_1=c_2$,则$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)$化为齐次微分方程$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)$.

情形二:$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$,此时$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$,则$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$化为$\frac{dy}{dx}=f\left[\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}\right]$,再令$a_2x+b_2y=u$,则原方程化为可分离变量的方程$\frac{du}{dx}=a_2+b_2f\left(\frac{ku+c_1}{u+c_2}\right)$.

情形三:$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$,由$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=a,\\ y=b,\end{cases}$令$\begin{cases}x=u+a,\\ y=v+b,\end{cases}$则原方程化为齐次微分方程$\frac{du}{dv}=\varphi\left(\frac{v}{u}\right)$.

(2) 所谓全微分方程就是形如$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$满足条件$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$的微分方程.

因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,所以存在$u(x,y)$,使得$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$,则原方程化为$du=0$,故通解为$u(x,y)=C$,其中

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:dijy66)

第三节 可降阶的高阶微分方程及解法

种类	解法
1. $y^{(n)}=f(x)$	$y^{(n)}=f(x)$进行n次不定积分
2. $f(x,y',y'')=0$	令$y'=p,y''=\frac{dp}{dx}$, $f(x,y',y'')=0$化为$f\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0$.
3. $f(y,y',y'')=0$	令$y'=p,y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dp}{dy}=p\frac{dp}{dy}$, $f(y,y',y'')=0$化为$f\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0$.

【注解】

可降阶的微分方程除规范解法外，有时还可以使用一些比较有技巧的解法.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 1】　求 $xy''+3y'=0$ 的通解.

【解】　由 $xy''+3y'=0$ 得 $x^3y''+3x^2y'=0$，即 $(x^3y')'=0$，

从而 $x^3y'=C_1$，或 $y'=\dfrac{C_1}{x^3}$，故原方程通解为

$$y=-\frac{C_1}{2x^2}+C_2(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

【例 2】　求 $yy''=y'^2$ 满足 $y(0)=y'(0)=1$ 的特解.

【解】　由 $yy''=y'^2$ 得 $\dfrac{yy''-y'^2}{y^2}=0$，即 $\left(\dfrac{y'}{y}\right)'=0$，则 $\dfrac{y'}{y}=C_1$.

由 $y(0)=y'(0)=1$ 得 $C_1=1$，即 $y'-y=0$.

$y'-y=0$ 的特征方程为 $\lambda-1=0$，即 $\lambda=1$，通解为 $y=C_2e^x$，

再由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$，故满足初始条件的特解为 $y=e^x$.

【例 3】　求 $y''=xe^x$ 的通解.

【解】　由 $y''=xe^x$ 得 $y'=(x-1)e^x+C_1$，再积分得通解为

$$y=(x-2)e^x+C_1x+C_2.$$

【例 4】　求微分方程 $xy''+2y'=3x$ 的通解.

【解】　**方法一**　令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$，原方程化为 $\dfrac{dp}{dx}+\dfrac{2}{x}p=3$，

解得 $p=\left(\int 3e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C_1\right)e^{-\int\frac{2}{x}dx}=x+\dfrac{C_1}{x^2}$，

积分得原方程通解为 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{C_1}{x}+C_2$.

方法二　$xy''+2y'=3x$ 化为 $x^2y''+2xy'=3x^2$，即 $(x^2y')'=3x^2$，

积分得 $x^2y'=x^3+C_1$，或 $y'=x+\dfrac{C_1}{x^2}$，再积分得通解为 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{C_1}{x}+C_2$.

第四节　高阶线性微分方程理论

一、高阶线性微分方程的概念与性质

(一) 高阶线性微分方程的概念

称　$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \tag{1}$$

为 n 阶齐次线性微分方程.

称　$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \tag{2}$$

为 n 阶非齐次线性微分方程.

若 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，则计算(2) 的特解时(2) 分解成如下两个方程分别求特解，求

出的两个特解之和即为(2)的特解：

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_1(x), \tag{2.1}$$

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_2(x). \tag{2.2}$$

(二)高阶线性微分方程的解的结构

1. 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_s(x)$ 为齐次线性微分方程(1)的一组解，则 $k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)$ 也为齐次线性微分方程(1)的解.

2. 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_s(x)$ 为非齐次线性微分方程(2)的一组解，则

(1) $k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)$ 为齐次线性微分方程(1)的解的充分必要条件是

$$k_1+k_2+\cdots+k_s=0.$$

(2) $k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)$ 为非齐次线性微分方程(2)的解的充分必要条件是

$$k_1+k_2+\cdots+k_s=1.$$

3. 设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 分别为(1)和(2)的解，则 $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ 为(2)的解.

4. 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 为(2)的两个解，则 $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ 为(1)的解.

5. 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 分别为(2.1)及(2.2)的解，则 $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ 为(2)的解.

6. 设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 为 n 阶齐次线性微分方程(1)的 n 个线性无关解，则(1)的通解为 $k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_n\varphi_n(x)$(其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为任意常数).

7. 设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 为 n 阶齐次线性微分方程(1)的 n 个线性无关解，$\varphi_0(x)$ 为(2)的一个特解，则(2)的通解为

$k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_n\varphi_n(x)+\varphi_0(x)$(其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为任意常数).

(三)高阶常系数线性微分方程的解法

1. 二阶常系数齐次线性微分方程及解法

方程形式	$y''+py'+qy=0$(其中 p,q 为常数)
特征方程	$\lambda^2+p\lambda+q=0$
$\Delta=p^2-4q$ 的情况	$y''+py'+qy=0$ 的通解
$\Delta>0$	$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$($C_1,C_2$ 为任意常数)
$\Delta=0$	$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}$($C_1,C_2$ 为任意常数)
$\Delta<0$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

2. 三阶常系数齐次线性微分方程及解法

对 $y'''+py''+qy'+ry=0$(其中 p,q,r 为常数)，特征方程为

$$\lambda^3+p\lambda^2+q\lambda+r=0,$$

根据特征值的不同，其通解分为如下情形：

(1) 若特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为实单根，则通解为 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+C_3e^{\lambda_3x}$.

(2) 若特征值 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$ 为实根，则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}+C_3e^{\lambda_3x}$.

(3) 若特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 为实根，则通解为 $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{\lambda_1x}$.

(4) 若 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta,\lambda_3\in\mathbf{R}$，则通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)+C_3e^{\lambda_3x}$.

【例】 设三阶常系数微分方程 $y'''+py''+qy'+ry=0$ 的一个特解为 $y=2e^x\sin x-e^{2x}$，求该微分方程.

【解】　因为该方程一个解为 $y=2e^{x}\sin x-e^{2x}$，

所以三个特征值为 $\lambda_{1,2}=1\pm i,\lambda_{3}=2$，

特征方程为 $(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)(\lambda-2)=0$，即 $\lambda^{3}-4\lambda^{2}+6\lambda-4=0$，

故所求的微分方程为 $y'''-4y''+6y'-4y=0$.

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解求法

二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的特解求法分两类.

类型一：$f(x)=e^{kx}P_{n}(x)$，其中 $P_{n}(x)$ 为 n 次多项式

(1) 当 $k\neq\lambda_{1}$ 且 $k\neq\lambda_{2}$ 时，令特解 $y_{0}(x)=(a_{0}+a_{1}x+\cdots+a_{n}x^{n})e^{kx}=Q(x)e^{kx}$.

(2) 当 $k=\lambda_{1}$ 但 $k\neq\lambda_{2}$ 时，令特解 $y_{0}(x)=x(a_{0}+a_{1}x+\cdots+a_{n}x^{n})e^{kx}=xQ(x)e^{kx}$.

(3) 当 $k=\lambda_{1}=\lambda_{2}$ 时，令特解 $y_{0}(x)=x^{2}(a_{0}+a_{1}x+\cdots+a_{n}x^{n})e^{kx}=x^{2}Q(x)e^{kx}$.

类型二：$f(x)=e^{\alpha x}[P_{m}(x)\cos\beta x+P_{s}(x)\sin\beta x]$，其中 $P_{m}(x),P_{s}(x)$ 分别为 m 及 s 次多项式

(1) 当 $\alpha+i\beta$ 不是特征值时，令 $y_{0}=e^{\alpha x}[Q_{n}^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_{n}^{(2)}(x)\sin\beta x]$，

其中 $n=\max\{m,s\}$，且 $Q_{n}^{(1)}(x),Q_{n}^{(2)}(x)$ 为两个 n 次多项式.

(2) 当 $\alpha+i\beta$ 是特征值时，令 $y_{0}=xe^{\alpha x}[Q_{n}^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_{n}^{(2)}(x)\sin\beta x]$，

其中 $n=\max\{m,s\}$，且 $Q_{n}^{(1)}(x),Q_{n}^{(2)}(x)$ 为两个 n 次多项式.

二、欧拉方程

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(一) 欧拉方程的定义

形如 $x^{n}y^{(n)}+a_{1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_{n}y=f(x)$ 称为欧拉方程.

(二) 欧拉方程的解法

令 $x=e^{t}$，记 $\frac{d}{dt}=D,\frac{d^{2}}{dt^{2}}=D^{2},\cdots,\frac{d^{n}}{dt^{n}}=D^{n}$，则

$$xy'=Dy=\frac{dy}{dt},\quad x^{2}y''=D(D-1)y=\frac{d^{2}y}{dt^{2}}-\frac{dy}{dt},\cdots,$$

$x^{n}y^{(n)}=D(D-1)\cdots(D-n+1)y$，代入原方程可化为高阶常系数线性微分方程.

知识延拓模块——高阶常系数非齐次线性微分方程特解求法

二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=P_{n}(x)e^{kx}$ 通解为其对应的齐次线性微分方程的通解与该方程一个特解之和. 按照常数 k 与特征值的关系，可以假设出其特解形式 $y_{0}=Q(x)e^{kx}$，其中 $Q(x)$ 为参数待定的多项式，若将该特解代入原方程将非常复杂，以下总结出特解代入原方程后的式子，对减少运算量、提高准确率有帮助.

特征值情况	特解形式	确定待定常数的等式
k 与 λ_{1},λ_{2} 都不同	$y_{0}=(a_{0}x^{n}+\cdots+a_{n-1}x+a_{n})e^{kx}$ $=Q(x)e^{kx}$	$Q''+(2k+p)Q'$ $+(k^{2}+pk+q)Q=P_{n}(x)$

续表

特征值情况	特解形式	确定待定常数的等式
$k=\lambda_1\neq\lambda_2$	$y_0=x(a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n)e^{kx}$ $=Q(x)e^{kx}$	$Q''+(2k+p)Q'=P_n(x)$
$k=\lambda_1=\lambda_2$	$y_0=x^2(a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n)e^{kx}$ $=Q(x)e^{kx}$	$Q''=P_n(x)$

【例 1】 求微分方程 $y''-y'-6y=(2x+1)e^x$ 的通解.

【解】 特征方程为 $\lambda^2-\lambda-6=0$,特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=3$,

$y''-y'-6y=0$ 的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$.

令 $y_0(x)=(ax+b)e^x$,代入 $Q''+(2k+p)Q'+(k^2+pk+q)Q=P_n(x)$ 得

$a=-\frac{1}{3},b=-\frac{2}{9}$,

于是原方程的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}-\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{3}x\right)e^x$.

【例 2】 求微分方程 $y''-3y'+2y=(x^2+1)e^x$ 的通解.

【解】 特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$,

$y''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

令 $y_0(x)=x(ax^2+bx+c)e^x=(ax^3+bx^2+cx)e^x$,

代入 $Q''+(2k+p)Q'=P_n(x)$ 得 $a=-\frac{1}{3},b=-1,c=-3$,

于是原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-\left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)e^x$.

【例 3】 求微分方程 $y''-4y'+4y=(2x-3)e^{2x}$ 的通解.

【解】 特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+4=0$,特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$,

$y''-4y'+4y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$.

令 $y_0(x)=x^2(ax+b)e^{2x}=(ax^3+bx^2)e^{2x}$,

代入 $Q''=P_n(x)$ 得 $a=\frac{1}{3},b=-\frac{3}{2}$,

于是原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right)e^{2x}$.

重点题型分析

题型一 规范的一阶微分方程求解

【思路分析】

所谓规范的一阶微分方程,就是该方程为可分离变量的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程、伯努利方程、全微分方程中的某一类,此时只要用相应的微分方程的解法即可.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 1】 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=1+\sin x+y^2+y^2\sin x$ 的通解.

【解】 将 $\frac{dy}{dx}=1+\sin x+y^2+y^2\sin x$ 化为 $\frac{dy}{dx}=(1+\sin x)(1+y^2)$,

变量分离得 $\frac{dy}{1+y^2}=(1+\sin x)dx$,

两边积分得微分方程的通解为 $\arctan y=x-\cos x+C$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 2】 求微分方程 $y\,dx+\sqrt{1+x^2}\,dy=0$ 的通解.

【解】 $y=0$ 显然是原方程的解.

当 $y\neq 0$ 时,将 $y\,dx+\sqrt{1+x^2}\,dy=0$ 变量分离得 $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$,

两边积分得 $\ln|y|=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C_0$,

即 $y=\pm e^{C_0}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$,令 $\pm e^{C_0}=C$,则 $y=\frac{C}{x+\sqrt{1+x^2}}(C\neq 0)$,

故原方程的通解为 $y=\frac{C}{x+\sqrt{1+x^2}}$(其中 C 为任意常数).

【例 3】 求微分方程 $xy\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 满足初始条件 $y(e)=2e$ 的特解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【解】 由 $xy\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 得 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$,

令 $u=\frac{y}{x}$,则原方程化为 $u+x\frac{du}{dx}=u+\frac{1}{u}$,

即 $u\,du=\frac{dx}{x}$,两边积分得 $\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$,

因为 $y(e)=2e$,所以当 $x=e$ 时 $u=2$,于是 $C=1$,

所求的满足初始条件的特解为 $y^2=2x^2(\ln|x|+1)$.

【例 4】 求微分方程 $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-x\,dy=0$ 满足初始条件 $y(1)=0$ 的特解.

【解】 将 $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-x\,dy=0$ 化为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$,

令 $\frac{y}{x}=u$,则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,代入原方程得

$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1+u^2}$,变量分离得 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}$,

两边积分得 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln|x|+\ln C$,即 $u+\sqrt{1+u^2}=Cx$.

由 $y(1)=0$ 得 $C=1$,于是 $u+\sqrt{1+u^2}=x$.

由 $\begin{cases}u+\sqrt{1+u^2}=x\\ \sqrt{1+u^2}-u=\frac{1}{x}\end{cases}$,两式相减得 $u=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$,故原方程满足初始条件的特解为

$$y=\frac{1}{2}(x^2-1).$$

【例 5】 求下列微分方程的通解：

(1) $y'+y\cos x=(\ln x)\mathrm{e}^{-\sin x}$. (2) $(x+1)y'-ny=(1+x)^{n+1}\mathrm{e}^{x}\sin x$.

【解】 (1) 该方程为一阶非齐次线性微分方程，代入通解公式得通解为

$$y=\left[\int(\ln x)\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{e}^{\int\cos x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int\cos x\,\mathrm{d}x}=\left(\int\ln x\,\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\sin x}$$

$$=(x\ln x-x+C)\mathrm{e}^{-\sin x}.$$

(2) 将方程 $(x+1)y'-ny=(1+x)^{n+1}\mathrm{e}^{x}\sin x$ 化为

$$y'-\frac{n}{x+1}y=(x+1)^{n}\mathrm{e}^{x}\sin x.$$

该方程为一阶非齐次线性微分方程，代入通解公式得通解为

$$y=\left[\int(1+x)^{n}\mathrm{e}^{x}\sin x\cdot\mathrm{e}^{\int-\frac{n}{x+1}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int-\frac{n}{x+1}\mathrm{d}x}=\left(\int\mathrm{e}^{x}\sin x\,\mathrm{d}x+C\right)(x+1)^{n}$$

$$=\left[\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}(\sin x-\cos x)+C\right](x+1)^{n}.$$

【例 6】 求解微分方程 $\cos y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\sin y=\mathrm{e}^{x}$.

【解】 $\cos y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\sin y=\mathrm{e}^{x}$ 可化为 $\dfrac{\mathrm{d}(\sin y)}{\mathrm{d}x}-\sin y=\mathrm{e}^{x}$，

令 $z=\sin y$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z=\mathrm{e}^{x}$，于是 $z=\left(\int\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{\int-\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int-\mathrm{d}x}=(x+C)\mathrm{e}^{x}$，

故原方程的通解为 $\sin y=(x+C)\mathrm{e}^{x}$，(其中 C 为任意常数).

【例 7】 设函数 $y=y(x)$ 的增量为 $\Delta y=\dfrac{xy}{1+x^{2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(0)=1$，求 $y=y(x)$.

【解】 因为 $\Delta y=\dfrac{xy}{1+x^{2}}\Delta x+o(\Delta x)$，所以函数 $y=y(x)$ 可微，且 $y'=\dfrac{xy}{1+x^{2}}$，

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{x}{1+x^{2}}y=0$，解得 $y=C\mathrm{e}^{-\int-\frac{x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x}=C\sqrt{1+x^{2}}$.

因为 $y(0)=1$，所以 $C=1$，故 $y=\sqrt{1+x^{2}}$.

【例 8】 设微分方程 $y'+p(x)y=\mathrm{e}^{x}$ 有特解 $y=(x+1)\mathrm{e}^{x}$，求该微分方程的通解.

【解】 因为 $y=(x+1)\mathrm{e}^{x}$ 是已知方程的解，所以代入微分方程得 $p(x)=-1$，原方程为 $y'-y=\mathrm{e}^{x}$，$y'-y=0$ 得通解为 $y=C\mathrm{e}^{x}$，原方程的通解为 $y=C\mathrm{e}^{x}+(x+1)\mathrm{e}^{x}$.

【例 9】 求解微分方程 $y\mathrm{d}x+(2x^{2}y-x)\mathrm{d}y=0$.

【解】 $y\mathrm{d}x+(2x^{2}y-x)\mathrm{d}y=0$ 化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y}x-2x^{2}\text{ 或 }\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}x=-2x^{2},$$

显然这是伯努利方程，令 $x^{-1}=z$，则有

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\dfrac{1}{y}z=2$，解得 $z=\left(\int2\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}=\dfrac{y^{2}+C}{y}$，

故原方程的通解为 $y=xy^{2}+xC$.

【例 10】 求微分方程 $(x^{2}-2xy+1)\mathrm{d}y+(-y^{2}+2xy-1)\mathrm{d}x=0$ 的通解.

【解】 令 $P(x,y)=-y^{2}+2xy-1$，$Q(x,y)=x^{2}-2xy+1$，

因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y$，所以$(x^2-2xy+1)\mathrm{d}y+(-y^2+2xy-1)\mathrm{d}x=0$为全微分方程，

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(-y^2+2xy-1)\mathrm{d}x+(x^2-2xy+1)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^x(-1)\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2-2xy+1)\mathrm{d}y=x^2y-xy^2+y-x,$$

故原方程的通解为$x^2y-xy^2+y-x=C$.

题型二 无特定类型的一阶微分方程求解

【思路分析】

所谓无特定类型的一阶微分方程，即该微分方程不属于基本的一阶微分方程类型，这类方程一般需要适当处理化为可解的微分方程.

【例 1】 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(x+y)^2}$的通解.

【解】 令$x+y=u$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$，代入原方程得$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u^2}{u^2}$，

分离变量得$\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，积分得$u-\arctan u=x+C$，

故原方程的通解为$y-\arctan(x+y)=C$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 2】 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+2y}$的通解.

【解】 **方法一** 令$x+2y=u$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1\right)$，代入原方程得

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u+2}{u}$，变量分离得$\left(1-\frac{2}{u+2}\right)\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，两边积分得

$$u-\ln(u+2)^2=x+C,$$

故原方程的通解为$2y-\ln(x+2y+2)^2=C$.

方法二 将$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+2y}$化为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=2y$，则$x=\left(\int 2y\mathrm{e}^{\int -\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)\mathrm{e}^{-\int -\mathrm{d}y}$，

故通解为$x=C\mathrm{e}^y-2(y+1)$.

题型三 求解可降阶的高阶微分方程

【例 1】 求$xy''-y'=x^2$的通解.

【解】 **方法一**

由$xy''-y'=x^2$得$\frac{xy''-y'}{x^2}=1$，即$\left(\frac{y'}{x}\right)'=1$，于是$\frac{y'}{x}=x+C_1$，或$y'=x^2+C_1x$，

故通解为$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2$.

方法二

令 $y'=p$，则原方程化为 $\dfrac{dp}{dx}-\dfrac{1}{x}p=x$，于是 $p=\left[\int x e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right]e^{-\int -\frac{1}{x}dx}=x^2+C_1x$，

故通解为 $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{C_1}{2}x^2+C_2$.

方法三 原方程化为 $x^2y''-xy'=x^3$，

令 $x=e^t$，由 $x^2y''=D(D-1)y=\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}$，$xy'=Dy=\dfrac{dy}{dt}$ 得

$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}=e^{3t}$，通解为 $y=C_1e^{2t}+C_2+\dfrac{1}{3}e^{3t}$，

故原方程的通解为 $y=\dfrac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2$.

【例 2】 求 $yy''-y'^2=1$ 满足初始条件 $y(1)=1,y'(1)=0$ 的特解.

【解】 令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，原方程化为 $yp\dfrac{dp}{dy}-p^2=1$，

变量分离得 $\dfrac{pdp}{1+p^2}=\dfrac{1}{y}dy$，积分得 $\ln(1+p^2)=\ln y^2+\ln C$，即 $1+p^2=Cy^2$，

由初始条件得 $C=1$，即 $p=\pm\sqrt{y^2-1}$，变量分离得 $\dfrac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$，积分得

$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm x+C_1$，由初始条件得 $C_1=\mp1$，即 $y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x\mp1}$，

故 $y=\dfrac{e^{x-1}+e^{1-x}}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 3】 求方程 $yy''-2y'^2=0$ 的满足 $y(0)=1,y'(0)=-1$ 的特解.

【解】 令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dp}{dy}=p\dfrac{dp}{dy}$，则方程 $yy''-2y'^2=0$ 化为

$yp\dfrac{dp}{dy}-2p^2=0$，显然 $p\neq0$，于是方程化为 $y\dfrac{dp}{dy}-2p=0$ 或 $\dfrac{dp}{dy}-\dfrac{2}{y}p=0$，

解得 $p=C_1e^{-\int-\frac{2}{y}dy}=C_1y^2$.

因为 $y(0)=1,y'(0)=-1$，所以 $C_1=-1$，于是 $\dfrac{dy}{dx}=-y^2$，分离变量得 $-\dfrac{dy}{y^2}=dx$，

两边积分得 $\dfrac{1}{y}=x+C_2$. 因为 $y(0)=1$，所以 $C_2=1$，

故所求的特解为 $y=\dfrac{1}{x+1}$.

题型四 求解高阶常系数线性微分方程

【例 1】 就 a 的不同取值情况，求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ 的通解.

【解】 特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，

方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

(1) 当 $a \neq -2$ 时，令原方程的特解为 $y_0(x)=Ae^{ax}$，代入原方程得 $A=\dfrac{1}{(a+2)^2}$，

故原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{e^{ax}}{(a+2)^2}$.

(2) 当 $a=-2$ 时，令原方程的特解为 $y_0(x)=Ax^2e^{-2x}$，代入原方程得 $A=\dfrac{1}{2}$，

故原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{x^2}{2}e^{-2x}$.

【例 2】　求微分方程 $y''+y=2\cos x\cos 2x$ 的通解.

【解】　特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征值为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，

$y''+y=0$ 通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

$2\cos x\cos 2x=\cos x+\cos 3x$，

令
$$y''+y=\cos x \tag{1}$$
$$y''+y=\cos 3x \tag{2}$$

对方程组(1)，令其特解为 $y_1=x(a\cos x+b\sin x)$，代入(1) 得 $a=0,b=\dfrac{1}{2}$；

对方程组(2)，令其特解为 $y_2=A\cos 3x+B\sin 3x$，代入(2) 得 $A=-\dfrac{1}{8},B=0$，

原方程特解为 $y_0=y_1+y_2=\dfrac{x}{2}\sin x-\dfrac{1}{8}\cos 3x$，故原方程通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{2}\sin x-\frac{1}{8}\cos 3x.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djkv66)

【例 3】　求微分方程 $y''-4y'+3y=e^x\cos x+xe^{3x}$ 的通解.

【解】　特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+3=0$，特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$，

$y''-4y'+3y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

对方程 $y''-4y'+3y=xe^{3x}$，令其特解为 $y_1(x)=x(ax+b)e^{3x}$，代入得 $a=\dfrac{1}{4},b=-\dfrac{1}{4}$；

对方程 $y''-4y'+3y=e^x\cos x$，令其特解为 $y_2(x)=e^x(A\cos x+B\sin x)$，代入得 $A=-\dfrac{1}{5}$，$B=-\dfrac{2}{5}$，原方程的特解为 $y=\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{4}\right)e^{3x}-e^x\left(\dfrac{1}{5}\cos x+\dfrac{2}{5}\sin x\right)$，

故原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}+\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{4}\right)e^{3x}-e^x\left(\dfrac{1}{5}\cos x+\dfrac{2}{5}\sin x\right)$.

【例 4】　设二阶常系数线性微分方程 $y''+py'+qy=ce^x$ 有一个特解 $y=e^{2x}+(x+1)e^x$，求常数 p,q,c 并求该微分方程的通解.

【解】　由 $y=e^{2x}+e^x+xe^x$ 为原方程的特解，得 $y=e^{2x}$ 及 $y=e^x$ 皆为 $y''+py'+qy=0$ 的特解，从而 $y''+py'+qy=0$ 的两个特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1$，

特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，即 $p=-3,q=2$.

将 $y=xe^x$ 代入 $y''-3y'+2y=ce^x$ 中得 $c=-1$，故原方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^x+xe^x.$$

【例 5】　设四阶常系数齐次线性微分方程有一个解为 $y=3e^x\cos 2x$，另一个特解为 $y=$

$(3+2x)e^x$，求该微分方程及其通解.

【解】 因为四阶常系数齐次线性微分方程有特解 $y=3e^x\cos 2x$ 及 $y=(3+2x)e^x$，

所以其特征值为 $\lambda_{1,2}=1\pm 2i,\lambda_3=\lambda_4=1$，特征方程为

$(\lambda-1-2i)(\lambda-1+2i)(\lambda-1)^2=0$，即 $\lambda^4-4\lambda^3+10\lambda^2-12\lambda+5=0$，

所求的方程为 $y^{(4)}-4y'''+10y''-12y'+5y=0$，

通解为 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+(C_3+C_4x)e^x$.

题型五 变换法求解高阶微分方程

【例 1】 利用变换 $t=e^x$，求微分方程 $y''-(2e^x+1)y'+e^{2x}y=e^{3x}$ 的通解.

【解】 令 $x=\ln t$，$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=t\dfrac{dy}{dt}$，

$$y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=t\left(\frac{dy}{dt}+t\frac{d^2y}{dt^2}\right)=t\frac{dy}{dt}+t^2\frac{d^2y}{dt^2},$$

代入原方程得 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=t$.

特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$，特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，

方程 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2t)e^t$.

显然方程 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=t$ 有特解 $y=t+2$，

所以方程 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=t$ 的通解为 $y=(C_1+C_2t)e^t+t+2$，

原方程的通解为 $y=(C_1+C_2e^x)e^{e^x}+e^x+2$.

【例 2】 设微分方程 $y''+(x+e^y)y'^3=0$，将方程化为以 y 为自变量，x 为函数的微分方程，并求其通解.

【解】 $y'=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{x'(y)}$，$y''=\dfrac{d(y')}{dx}=\dfrac{d\left[\frac{1}{x'(y)}\right]/dy}{dx/dy}=-\dfrac{\frac{x''(y)}{x'^2(y)}}{x'(y)}=-\dfrac{x''(y)}{x'^3(y)}$，代入原方程得 $-\dfrac{x''(y)}{x'^3(y)}+(x+e^y)\dfrac{1}{x'^3(y)}=0$，整理得 $\dfrac{d^2x}{dy^2}-x=e^y$，特征方程为 $\lambda^2-1=0$，特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，

$\dfrac{d^2x}{dy^2}-x=0$ 的通解为 $x=C_1e^{-y}+C_2e^y$.

令 $\dfrac{d^2x}{dy^2}-x=e^y$ 的特解为 $x_0(y)=aye^y$，代入 $\dfrac{d^2x}{dy^2}-x=e^y$ 中得 $a=\dfrac{1}{2}$，

故方程的通解为 $x=C_1e^{-y}+C_2e^y+\dfrac{1}{2}ye^y$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

题型六　欧拉方程求解

【例 1】　求微分方程 $x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=0$ 的通解.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【解】　令 $x=e^t$,或 $t=\ln x$,则

$$x^3y'''=D(D-1)(D-2)y=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt},$$

$$x^2y''=D(D-1)y=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},\quad xy'=\frac{dy}{dt},$$

则原方程化为 $\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+y=0$,特征方程为 $\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$,解得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$,于是 $y=C_1e^{-t}+(C_2+C_3t)e^t$,故原方程的通解为

$$y=\frac{C_1}{x}+(C_2+C_3\ln x)x.$$

【例 2】　求微分方程 $x^2y''+2xy'-2y=2x\ln x+x-2$ 的通解.

【解】　令 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$,则

$$xy'=Dy=\frac{dy}{dt},\quad x^2y''=D(D-1)y=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},$$

代入原方程为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2y=(2t+1)e^t-2.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$,特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1$,$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2y=0$ 的通解为 $y=C_1e^{-2t}+C_2e^t$.

对方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2y=(2t+1)e^t$,令其特解为 $y_1(t)=t(at+b)e^t$,代入得 $a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{9}$,故 $y_1(t)=\left(\frac{t^2}{3}+\frac{t}{9}\right)e^t$.

显然方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2y=-2$ 有特解 $y_2(t)=1$,于是方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2y=(2t+1)e^t-2$ 的一个特解为 $y(t)=\left(\frac{t^2}{3}+\frac{t}{9}\right)e^t+1$,通解为 $y=C_1e^{-2t}+C_2e^t+\left(\frac{t^2}{3}+\frac{t}{9}\right)e^t+1$,故原方程的通解为 $y=\frac{C_1}{x^2}+C_2x+\left(\frac{\ln^2x}{3}+\frac{\ln x}{9}\right)x+1$.

题型七　微分方程综合问题

【思路分析】

所谓微分方程综合问题,即微分方程与极限、积分、多元微分、级数等的混合问题,一般先处理极限、积分、求偏导数,建立关系等式,若等式中含变积分限的函数,一般需要求导数,从而得出微分方程,然后按特定微分方程类型求解.

【例 1】 设 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t+x^2+\sin x$，求 $f(x)$.

【解】 $f(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x^2+\sin x$，

两边求导数得 $f'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+2x+\cos x$，再求导数得 $f''(x)-f(x)=2-\sin x$.

由 $\lambda^2-1=0$ 得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，则 $f''(x)-f(x)=0$ 的通解为

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}.$$

方程 $f''(x)-f(x)=2$ 有特解 $f_1(x)=-2$；

对方程 $f''(x)-f(x)=-\sin x$，令其特解为 $f_2(x)=a\cos x+b\sin x$，代入得 $a=0,b=\frac{1}{2}$，所以 $f_2(x)=\frac{1}{2}\sin x$，于是原方程的特解为

$$f_0(x)=f_1(x)+f_2(x)=-2+\frac{1}{2}\sin x,$$

故原方程的通解为

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}-2+\frac{1}{2}\sin x.$$

由 $f(0)=0,f'(0)=1$ 得 $C_1+C_2=2,-C_1+C_2+\frac{1}{2}=1$，解得 $C_1=\frac{3}{4},C_2=\frac{5}{4}$，故

$$f(x)=\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-x}+\frac{5}{4}\mathrm{e}^{x}-2+\frac{1}{2}\sin x.$$

【例 2】 设 $f(t)$ 连续可导且 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(t-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t$，求 $f(x)$.

【解】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(t-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf(t-r)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t rf(t-r)\mathrm{d}r$，

原方程化为 $f(t)=\int_0^t rf(t-r)\mathrm{d}r+t$，而

$$\int_0^t rf(t-r)\mathrm{d}r\xlongequal{r+u=t}\int_t^0(t-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u-\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u,$$

于是有

$$f(t)=\left[t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u-\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u\right]+t.$$

两边求导数得 $f'(t)=\int_0^t f(u)\mathrm{d}u+1$，再求导得 $f''(t)-f(t)=0$，通解为 $f(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{t}$，因为 $f(0)=0,f'(0)=1$，所以 $\begin{cases}C_1+C_2=0,\\-C_1+C_2=1\end{cases}$ 解得 $C_1=-\frac{1}{2},C_2=\frac{1}{2}$，于是 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\mathrm{sh}x$.

【例 3】 设曲线 $L:y=y(x)$ 经过点 $(0,1)$，且位于 x 轴的上方，L 上位于 $[0,x]$ 之间对应的弧长等于位于 $[0,x]$ 之间的以 L 为曲边的曲边梯形的面积，求曲线 L 的方程.

【解】 设 $L:y=y(x)$，则 $y(0)=1$，由题意得 $\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^x y(x)\mathrm{d}x$，两边求导数得

$\sqrt{1+y'^2}=y$，解得 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$，变量分离得 $\dfrac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$，积分得

$$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm x+C,$$

由 $y(0)=1$ 得 $C=0$，故 $y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x}$，由 $\begin{cases}y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x},\\ y-\sqrt{y^2-1}=e^{\mp x},\end{cases}$ 得 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x$.

【例 4】 设 $y=y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导，且 $y(0)=1$，$y'(x)>1$，过曲线 $L:y=y(x)$ 上一点 $P(x,y)$ 作切线，该切线交 x 轴于 Q，过 P 点作 x 轴的垂线交 x 轴于 T，$S_{\Delta PQT}=S_1$，在 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积为 S_2，已知 $2S_1-S_2=1$，求曲线 $y=y(x)$ 的方程.

【解】 过点 $P(x,y)$ 的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $Y=0$，得 $X=x-\dfrac{y}{y'}$，于是

$$S_1=S_{\Delta PQT}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{y'}\cdot y=\frac{y^2}{2y'},\quad S_2=\int_0^x y(x)dx,$$

由 $2S_1-S_2=1$ 得 $\dfrac{y^2}{y'}-\int_0^x y(x)dx=1$，两边对 x 求导数整理得 $yy''=y'^2$.

令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，代入 $yy''=y'^2$ 得 $\dfrac{dp}{dy}-\dfrac{1}{y}p=0$，解得 $p=C_1e^{-\int-\frac{1}{y}dy}=C_1y$.

在 $\dfrac{y^2}{y'}-\int_0^x y(x)dx=1$ 中令 $x=0$，得 $y'(0)=1$，再由 $y(0)=1$ 得 $C_1=1$，故 $\dfrac{dy}{dx}-y=0$.

解得 $y=C_2e^{-\int-dx}=C_2e^x$，由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$，故所求的曲线为 $y=e^x$.

【例 5】 设曲线 $L:y=y(x)$ 经过点 $M(1,2)$，且从原点到此曲线上任一点的法线的垂直距离等于该点的纵坐标，求此曲线方程.

【解】 设 $P(x,y)$ 为曲线上任意一点，过此点的曲线的法线为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)\text{ 或 }X+y'Y-(x+yy')=0,$$

原点到法线的距离为 $d=\dfrac{|x+yy'|}{\sqrt{1+y'^2}}$.

由题意得 $\dfrac{|x+yy'|}{\sqrt{1+y'^2}}=y$，整理得 $2xyy'=y^2-x^2$.

显然 $y\neq 0$，所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$，或者 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}\right)$.

令 $\dfrac{y}{x}=u$，得 $u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2}\left(u-\dfrac{1}{u}\right)$，整理得 $\dfrac{2udu}{1+u^2}=-\dfrac{dx}{x}$，两边积分得 $\ln(1+u^2)=-\ln|x|+\ln C$，即 $1+u^2=\dfrac{C}{|x|}$，因为曲线过点 $M(1,2)$，所以 $C=5$，故所求的曲线方程为 $L:x^2+y^2=5x$.

【例 6】 设曲线 $L:y=y(x)$ 过原点及 $(2,3)$，又 $f(x)$ 单调且连续可导，在曲线上任取一点作两坐标轴的平行线，其中一条平行线与 x 轴和曲线 $y=y(x)$ 围成的面积是另一条平行线与 y 轴和曲线 $y=y(x)$ 围成的面积的两倍，求曲线 $y=y(x)$.

微信公众号【顶尖考研】
QQ：2***kyss

【解】 $S_1(x)=\int_0^x y(x)\mathrm{d}x$，$S_2(x)=xy-\int_0^x y(x)\mathrm{d}x$，

根据题意得

$$\int_0^x y(x)\mathrm{d}x=2\left(xy-\int_0^x y(x)\mathrm{d}x\right),$$

整理得 $3\int_0^x y(x)\mathrm{d}x=2xy$，两边关于 x 求导数并整理得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2x}y=0$，解得

$$y=C\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}=C\sqrt{x}.$$

因为曲线经过点(2,3)，所以 $C=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所求曲线为 $y=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{x}$.

【例 7】 设 $\varphi(x)$ 二阶连续可导，且曲线积分 $\int_L[3\varphi'(x)-2\varphi(x)+x\mathrm{e}^{2x}]y\mathrm{d}x+\varphi'(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，求 $\varphi(x)$.

【解】 令 $P(x,y)=[3\varphi'(x)-2\varphi(x)+x\mathrm{e}^{2x}]y$，$Q(x,y)=\varphi'(x)$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\varphi''(x),\quad \frac{\partial P}{\partial y}=3\varphi'(x)-2\varphi(x)+x\mathrm{e}^{2x},$$

因为曲线积分 $\int_L[3\varphi'(x)-2\varphi(x)+x\mathrm{e}^{2x}]y\mathrm{d}x+\varphi'(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，所以 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，即 $\varphi''(x)=3\varphi'(x)-2\varphi(x)+x\mathrm{e}^{2x}$，整理得

$$\varphi''(x)-3\varphi'(x)+2\varphi(x)=x\mathrm{e}^{2x}.$$

特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，$\varphi''(x)-3\varphi'(x)+2\varphi(x)=0$ 的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

令 $\varphi''(x)-3\varphi'(x)+2\varphi(x)=x\mathrm{e}^{2x}$ 的特解为 $\varphi_0(x)=x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}$，代入得 $a=\frac{1}{2}$，$b=-1$，故 $\varphi(x)=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\mathrm{e}^{2x}$.

【例 8】 设 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且 $f(0)=1$，$f(x)>0$，

又 $\lim\limits_{h\to0}\left[\frac{f(x+h\cos^2x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{x\cos^2x+\tan x}$，求 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的极值.

【解】 $\lim\limits_{h\to0}\left[\frac{f(x+h\cos^2x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\left[1+\frac{f(x+h\cos^2x)-f(x)}{f(x)}\right]^{\frac{f(x)}{f(x+h\cos^2x)-f(x)}}\right\}^{\frac{1}{h}\cdot\frac{f(x+h\cos^2x)-f(x)}{f(x)}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{f(x+h\cos^2x)-f(x)}{f(x)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h\cos^2x)-f(x)}{h\cos^2x}\cdot\frac{\cos^2x}{f(x)}}=\mathrm{e}^{\frac{f'(x)}{f(x)}\cos^2x}=\mathrm{e}^{x\cos^2x+\tan x},$$

得 $\frac{f'(x)}{f(x)}=x+\frac{\tan x}{\cos^2x}$，解得 $f(x)=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2x}$，

因为 $f(0)=1$，所以 $C=1$，于是 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2x}$.

微信公众号【乐尚考研】(ID: djky66)

令 $f'(x)=e^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}\cdot(x+\tan x\sec^2 x)=0$ 得 $x=0$，

因为当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(0)=1$.

【例 9】　设 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$，其中 $f(t)$ 二阶连续可导，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$，求 $f(x)$.

【解】　令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{du}{dr}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\frac{du}{dr}\right)=\frac{x^2}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{y^2}{r^3}\frac{du}{dr}$，

由对称性得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{x^2}{r^3}\frac{du}{dr}$，代入原方程得 $\frac{d^2u}{dr^2}+u=r^2$，

此方程的通解为 $u=C_1\cos r+C_2\sin r+r^2-2$，

于是 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$.

【例 10】　设 $f(x)$ 二阶连续可导，且函数 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2+y^2$，求函数 $f(x)$.

【解】　令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{df}{dr}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\frac{df}{dr}\right)=\frac{y^2}{r^3}\frac{df}{dr}+\frac{x^2}{r^2}\frac{d^2f}{dr^2}$，

由对称性得 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{r^3}\frac{df}{dr}+\frac{y^2}{r^2}\frac{d^2f}{dr^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\frac{d^2f}{dr^2}$，

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2+y^2$ 化为 $\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\frac{d^2f}{dr^2}=r^2$ 或 $r\frac{df}{dr}+r^2\frac{d^2f}{dr^2}=r^4$，

令 $r=e^t$ 或 $t=\ln r$，

$r\frac{df}{dr}=Df=\frac{df}{dt}$，$r^2\frac{d^2f}{dr^2}=D(D-1)f=\frac{d^2f}{dt^2}-\frac{df}{dt}$，则有 $\frac{d^2f}{dt^2}=e^{4t}$，解得

$f(t)=\frac{1}{16}e^{4t}+C_1t+C_2$，$f(r)=\frac{1}{16}r^4+C_1\ln r+C_2$，

故 $f(x)=\frac{1}{16}x^4+C_1\ln x+C_2$.

【例 11】　设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上二阶连续可导，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

【解】　令 $r=x^2+y^2$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf(r)+2xrf'(r)$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f(r)+4x^2f'(r)+2rf'(r)+4x^2f'(r)+4x^2rf''(r)$，

由对称性得 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f(r)+4y^2f'(r)+2rf'(r)+4y^2f'(r)+4y^2rf''(r)$，

微信公众号【顶尖考研】

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4f(r)+12rf'(r)+4r^2f''(r)$，则方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$化为

$$r^2f''(r)+3rf'(r)+f(r)=0,$$

此方程为欧拉方程，令$r=e^t$，$t=\ln r$，

$rf'(r)=\frac{df}{dt}$，$r^2f''(r)=D(D-1)=\frac{d^2f}{dt^2}-\frac{df}{dt}$，于是有$\frac{d^2f}{dt^2}+2\frac{df}{dt}+f=0$，

特征方程为$\lambda^2+2\lambda+1=0$，特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1$，

方程$\frac{d^2f}{dt^2}+2\frac{df}{dt}+f=0$的通解为$f=(C_1+C_2t)e^{-t}$，

于是原方程的通解为$f(r)=\frac{C_1+C_2\ln r}{r}$.

由$f(1)=0$，$f'(1)=1$得$C_1=0$，$C_2=1$，于是$f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

令$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$得$x=e$，

因为当$x\in(1,e)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(e,+\infty)$时，$f'(x)<0$，所以$x=e$为$f(x)$在$[1,+\infty)$上的最大值点，最大值为$f(e)=\frac{1}{e}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

题型八 微分方程的物理应用

【例 1】 一半球形雪堆在融化过程中始终保持半球状，设半径为r_0的半球融化速度与半球的表面积成正比，比例系数为$k>0$，已知经过3个小时融化了体积的$\frac{7}{8}$，问多长时间可以全部融化？

【解】 设t时刻半球的半径为$r(t)$，

$V(t)=\frac{2}{3}\pi r^3$，$S(t)=2\pi r^2$，$\frac{dV}{dt}=2\pi r^2\frac{dr}{dt}$，

由题意得$\frac{dV}{dt}=-kS$，于是$\frac{dr}{dt}=-k$，解得$r(t)=-kt+C_0$.

由初始条件$r(0)=r_0$，$r(3)=\frac{r_0}{2}$，则$C=r_0$，$k=\frac{r_0}{6}$，从而$r(t)=r_0-\frac{r_0}{6}t$.

令$r(t)=0$得$t=6$，即经过6小时半球形雪堆全部融化.

【例 2】 一质量为3kg的物体以81km/h的速度滑行，现关闭动力系统让其惯性向前，设阻力与滑行速度成正比，比例系数为1，问经过多少时间其速度降为一半？其滑行距离多远？

【解】 设物体运动的速度为$v(t)$km/h，由牛顿第二定律得$F=ma=3\frac{dv}{dt}$，

根据题意得$3\frac{dv}{dt}=-v$，整理得$\frac{dv}{dt}+\frac{1}{3}v=0$，解得$v(t)=Ce^{-\int\frac{1}{3}dt}=Ce^{-\frac{t}{3}}$.

因为$v(0)=81$，所以$C=81$，从而$v(t)=81e^{-\frac{t}{3}}$.

令 $v(t)=81\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}=\frac{81}{2}$，解得 $t=3\ln 2$，故 $S=\int_0^{3\ln 2}v(t)\mathrm{d}t=\frac{243}{2}$.

【例 3】　一容器体积为 15L，溶液浓度为 10g/L，由于实验需要保持体积不变，但浓度需要降低为原来的三分之一，现用管子以 2L/s 的速度注入清水，同时把溶液搅拌均匀后以 2L/s 的速度排出，问经过多长时间可以实现？

【解】　设 t 时刻桶中含溶质为 $m(t)$，

取时间元素 $[t,t+\mathrm{d}t]$，在该时间元素内，没有溶质进入容器，排出容器的溶质为 $\frac{m(t)}{15}\cdot 2\mathrm{d}t$，

于是有 $\mathrm{d}m=0-\frac{2}{15}m\mathrm{d}t$，

即 $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\frac{2}{15}m=0$，解得 $m(t)=C\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{15}\mathrm{d}t}=C\mathrm{e}^{-\frac{2}{15}t}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

因为 $m(0)=150$，所以 $C=150$，于是 $m(t)=150\mathrm{e}^{-\frac{2}{15}t}$.

令 $m(t)=150\mathrm{e}^{-\frac{2}{15}t}=\frac{150}{3}$，解得 $t=\frac{15}{2}\ln 3$，即经过 $\frac{15}{2}\ln 3$ s，桶中浓度为原来的 $\frac{1}{3}$.

【例 4】　湖泊含水量为 V，每年流入湖中的清水体积为 $\frac{V}{6}$，流入湖中含污染物 A 的污水体积为 $\frac{V}{6}$，混合均匀后的湖水以每年 $\frac{V}{3}$ 的速度排出湖，目前湖中污染物 A 的含量为 $5m_0$，为治理湖泊污染，规定从现在开始流入湖中的污水浓度为 $\frac{m_0}{V}$，问经过多少年湖中污染物 A 的含量下降为 m_0？

微信公众号（顶尖考研）
(ID: djky66)

【解】　设从现在开始第 t 年污染物 A 的含量为 $m(t)$，

取时间元素 $[t,t+\mathrm{d}t]$，在该时间元素内流入湖中污染物 A 的量为 $\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}\mathrm{d}t$，排出湖的污染物 A 的量为 $\frac{m(t)}{V}\cdot\frac{V}{3}\mathrm{d}t$，于是 $\mathrm{d}m=\frac{m_0}{6}\mathrm{d}t-\frac{m}{3}\mathrm{d}t$，整理得

$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{3}m=\frac{m_0}{6}$，解得 $m(t)=\left(\int\frac{m_0}{6}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{3}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{3}\mathrm{d}t}=C\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}+\frac{m_0}{2}$，

由 $m(0)=5m_0$ 得 $C=\frac{9}{2}m_0$，所以 $m(t)=\frac{9m_0}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}+\frac{m_0}{2}$.

令 $m(t)=\frac{9m_0}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}+\frac{m_0}{2}=m_0$，解得 $t=6\ln 3$（年）.

测试题

一、选择题

1. 微分方程 $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}+3\cos x$ 的特解形式为（　　）.

(A) $ax\mathrm{e}^{2x}+b\cos x$　　(B) $a\mathrm{e}^{2x}+b\cos x$

(C) $a\mathrm{e}^{2x}+b\cos x+c\sin x$　　(D) $ax\mathrm{e}^{2x}+b\cos x+c\sin x$

2. 设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$ 为二阶线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个线性无关解，其中

$p(x),q(x),f(x)$ 为连续函数，则该方程的通解为(　　).

(A)$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\varphi_3(x)$

(B)$(C_1-C_2)\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\varphi_3(x)$

(C)$C_1\varphi_1(x)+(1-2C_1)\varphi_2(x)+C_1\varphi_3(x)$

(D)$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+C_3\varphi_3(x)(C_1,C_2,C_3$ 为任意常数且 $C_1+C_2+C_3=1)$

二、填空题

1. 设 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}$，则 $f(x)=$ _____.

2. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=f(x)+x\sin x$，$f(0)=0$ 且 $f(x)$ 一阶连续可导，则 $f(x)=$ _____.

3. 设 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+x^2\mathrm{e}^{-x}$ 为某二阶常系数非齐次线性微分方程的通解，则该方程为_____.

4. 设曲线 $y=f(x)$ 满足 $y''-2y'+y=\mathrm{e}^x$，又过曲线 $y=f(x)$ 上点(0,0)的切线方程为 $y=2x$，则曲线方程为_____.

5. 以 $y=\mathrm{e}^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+x^2$ 为通解的二阶常系数非齐次线性微分方程为_____.

三、解答题

1. 求微分方程 $(y+x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$ 的满足初始条件 $y(1)=\frac{6}{5}$ 的特解.

2. 设函数 $y=y(x)$ 的增量为 $\Delta y=\frac{xy}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(0)=1$，求 $y=y(x)$.

3. 设 $y'-2y=\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2, & x<1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$ 求方程的处处连续且满足 $y(0)=0$ 的特解.

4. 设 $f(x)$ 可导且对任意的 x,y 满足 $f(x+y)=\mathrm{e}^xf(y)+\mathrm{e}^yf(x)$，又 $f'(0)=2$，求 $f(x)$.

5. 设 $y=f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，又 $x=1,x=t(t>1)$，$y=f(x)$ 及 $y=0$ 围成的区域绕 x 轴旋转一周所成的体积为 $V(t)=\frac{\pi}{3}[tf^3(t)-f(1)]$，求 $f(x)$.

6. 求方程 $2yy''=1+y'^2$ 的满足初始条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的特解.

7. 设 $y=y(x)$ 是上凸的曲线，其上任一点 (x,y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且曲线在点(0,1)处的切线方程为 $y=x+1$，求函数 $y=y(x)$ 的极值.

8. 求解下列微分方程的通解：

(1)$y''-2y'-3y=(2x+1)\mathrm{e}^x$；　(2)$y''+y'-6y=(x+1)\mathrm{e}^{2x}$；　(3)$y''-4y'+4y=x\mathrm{e}^{ax}$.

9. 设 $f(x)=\cos x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(t)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

10. 用变换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求原方程的满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=2$ 的特解.

11. 令 $t=\mathrm{e}^x$，将方程 $y''-(2\mathrm{e}^x+1)y'+\mathrm{e}^{2x}y=\mathrm{e}^{3x}$ 变换为 y 关于 t 的函数的方程，并求原方程的通解.

12. 利用 $y=\frac{u}{\cos x}$ 化方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=\mathrm{e}^x$ 为 u 关于 x 的方程，并求原方程的通解.

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，$f(1)=2$ 且满足 $x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

14. 一平底容器内侧是由 $x=f(y)(y\geqslant 0)$ 绕 y 轴旋转一周而成的曲面，容器的底面半径为 2 米，当以 3 立方米 / 分的速度向容器内注水时，液面的面积以 π 平方米 / 分的速度增加.

(1) 在 t 时刻写出 t 与 $f(y)$ 之间关系的等式；　(2) 求 $f(y)$.

微信公众号【考研数学】(ID: djky66)

测试题参考答案

一、选择题

1. 方程 $y''-4y=e^{2x}+3\cos x$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=2$，对 $y''-4y=e^{2x}$，其特征形式为 axe^{2x}；对 $y''-4y=3\cos x$ 其特征形式为 $b\cos x+c\sin x$，故 $y''-4y=e^{2x}+3\cos x$ 的特解形式应为选项(D)的形式.

2. $\varphi_1(x)-\varphi_3(x),\varphi_2(x)-\varphi_3(x)$ 为 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个线性无关解，则原方程的通解为 $C_1(\varphi_1(x)-\varphi_3(x))+C_2(\varphi_2(x)-\varphi_3(x))+\varphi_3(x)$，即 $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+(1-C_1-C_2)\varphi_3(x)$，其中 C_1,C_2 为任意常数，令 $1-C_1-C_2=C_3$，则 $C_1+C_2+C_3=1$，通解为(D)选项的形式.

二、填空题

1. 由 $f(x)=\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$ 得 $f(x)=3\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)d\left(\frac{t}{3}\right)+e^{2x}$，于是 $f(x)=3\int_0^x f(t)dt+e^{2x}$，两边对 x 求导得 $f'(x)-3f(x)=2e^{2x}$，解得 $f(x)=Ce^{3x}-2e^{2x}$，令 $x=0$ 得 $f(0)=1$，于是 $C=3$，故 $f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}$.

2. 当 $x\neq0$ 时，$\int_0^1 f(tx)dt=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$，由 $\int_0^1 f(tx)dt=f(x)+x\sin x$ 得 $\int_0^x f(u)du=xf(x)+x^2\sin x$，两边求导得 $f'(x)=-2\sin x-x\cos x$，两边积分得 $f(x)=\cos x-x\sin x+C$，由 $f(0)=0$ 得 $C=-1$，于是 $f(x)=\cos x-x\sin x-1$.

3. 显然 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，令该方程为 $y''+2y'+y=f(x)$，将 $y_0(x)=x^2e^{-x}$ 代入方程得 $f(x)=2e^{-x}$，故所求方程为 $y''+2y'+y=2e^{-x}$.

4. 由 $y''-2y'+y=e^x$ 得 $f(x)=(C_1+C_2x)e^x+\frac{x^2}{2}e^x$. 因为曲线 $y=f(x)$ 过点(0,0)，所以 $C_1=0$，即 $f(x)=C_2xe^x+\frac{x^2}{2}e^x$，又曲线在点(0,0)处的切线方程为 $y=2x$，所以 $f'(0)=2$，于是 $C_2=2$，故 $f(x)=2xe^x+\frac{x^2}{2}e^x$.

微信公众号【侯未考研】(ID: diky66)

5. 原方程的特征值为 $\lambda_{1,2}=2\pm i$，设特征方程为 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，则 $p=-(\lambda_1+\lambda_2)=-4,q=\lambda_1\lambda_2=5$，所求的方程为 $y''-4y'+5y=f(x)$，因为 x^2 为特解，所以 $f(x)=2-8x+5x^2$，故所求方程为 $y''-4y'+5y=5x^2-8x+2$.

三、解答题

1. 由 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 得 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{x^2}{2}$，解得 $y=\left(\int\frac{x^2}{2}e^{\int-\frac{dx}{2x}}dx+C\right)e^{-\int-\frac{dx}{2x}}=C\sqrt{x}+\frac{x^3}{5}$，因为 $y(1)=\frac{6}{5}$，所以 $C=1$，故 $y=\sqrt{x}+\frac{x^3}{5}$.

2. 因为 $\Delta y=\frac{xy}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$，所以函数 $y=y(x)$ 可微，且 $y'=\frac{xy}{1+x^2}$，整理得 $\frac{dy}{dx}-\frac{x}{1+x^2}y=0$，解得 $y=Ce^{-\int-\frac{x}{1+x^2}dx}=C\sqrt{1+x^2}$. 因为 $y(0)=1$，所以 $C=1$，故 $y=\sqrt{1+x^2}$.

3. 当 $x<1$ 时，由 $y'-2y=2$ 得 $y=C_1e^{2x}-1$；当 $x>1$ 时，由 $y'-2y=0$ 得 $y=C_2e^{2x}$. 由 $y(0)=0$ 得 $C_1=1$. 因为 $y=y(x)$ 处处连续，所以 $y(1-0)=y(1+0)$，于是 $e^2-1=C_2e^2$，解得 $C_2=1-e^{-2}$，故特解为 $y=\begin{cases}e^{2x}-1, & x<1,\\(1-e^{-2})e^{2x}, & x\geqslant1.\end{cases}$

4. 取 $x=y=0$，则 $f(0)=0,f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{e^xf(h)+e^hf(x)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\left[e^x\frac{f(h)-f(0)}{h}+f(x)\frac{e^h-1}{h}\right]=2e^x+f(x)$，于是 $f'(x)-f(x)=2e^x$，解得 $f(x)=\left(2\int e^xe^{\int-dx}dx+C\right)e^{-\int-dx}=Ce^x+2xe^x$，因为 $f(0)=0$，所以 $C=0$，故 $f(x)=2xe^x$.

5. $V(t)=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x$，则有$\frac{\pi}{3}[tf^3(t)-f(1)]=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x$，两边对 t 求导数得 $f^3(t)+3tf^2(t)f'(t)=3f^2(t)$，整理得 $f'(t)+\frac{1}{3t}f(t)=\frac{1}{t}$，解得 $f(t)=3+\frac{C}{\sqrt[3]{t}}$. 在$\frac{\pi}{3}[tf^3(t)-f(1)]=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x$ 中取 $t=1$，得 $f(1)=1$，于是 $C=-2$，故 $f(x)=3-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

6. 令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程得 $2yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2$，分离变量得$\frac{2p\mathrm{d}p}{1+p^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$，两边积分得 $\ln(1+p^2)=\ln y+\ln C_1$，即 $1+p^2=C_1y$，由 $y(0)=y'(0)=1$ 得 $C_1=2$，于是$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{2y-1}$ 或$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2y-1}}=\mathrm{d}x$，两边积分得 $\sqrt{2y-1}=x+C_2$，由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$，故 $y=\frac{1}{2}[1+(x+1)^2]$.

7. 因为曲线上凸，所以 $y''\leqslant 0$，由题意得$\frac{-y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，整理得 $y''=-1-y'^2$，又曲线在点$(0,1)$处的切线方程为 $y=x+1$，于是初始条件为 $y(0)=1,y'(0)=1$. 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，代入 $y''=-1-y'^2$ 中得$\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=-\mathrm{d}x$，积分得 $\arctan p=-x+C_1$，由 $y'(0)=1$ 得 $C_1=\frac{\pi}{4}$. 由 $y'=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 得 $y=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+C_2$，由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1+\frac{1}{2}\ln 2$，于是 $y=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+1+\frac{1}{2}\ln 2$. 因为 $\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\leqslant 1$，所以函数的最大值为 $1+\frac{1}{2}\ln 2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

8. (1) 特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0$，特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$，$y''-2y'-3y=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$. 令原方程特解为 $y_0=(ax+b)\mathrm{e}^x$，代入原方程得 $a=-\frac{1}{2},b=-\frac{1}{4}$，于是原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{4}(2x+1)\mathrm{e}^x$.

(2) 特征方程为 $\lambda^2+\lambda-6=0$，特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=2$，$y''+y'-6y=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$. 令原方程的特解为 $y_0=x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}=(ax^2+bx)\mathrm{e}^{2x}$，代入原方程得 $a=\frac{1}{10},b=\frac{4}{25}$，原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+\left(\frac{x^2}{10}+\frac{4x}{25}\right)\mathrm{e}^{2x}$.

(3) 特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+4=0$，特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$y''-4y'+4y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$.

情形一：若 $a=2$，令特解为 $y_0=x^2(ax+b)\mathrm{e}^{2x}=(ax^3+bx^2)\mathrm{e}^{2x}$，代入原方程得 $a=\frac{1}{6},b=0$，原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{2x}$.

情形二：若 $a\neq 2$，令特解为 $y_0=(Ax+B)\mathrm{e}^{ax}$，代入原方程得 $A=\frac{1}{a^2-4a+4},B=\frac{4-2a}{(a^2-4a+4)^2}$，原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}+\left[\frac{x}{a^2-4a+4}+\frac{4-2a}{(a^2-4a+4)^2}\right]\mathrm{e}^{ax}$.

9. 将 $f(x)=\cos x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 化为 $f(x)=\cos x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，两边求导数得 $f'(x)=-\sin x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，再求导数得 $f''(x)=-\cos x-f(x)$，即 $f''(x)+f(x)=-\cos x$. 特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征值为 $\lambda=\pm\mathrm{i}$，于是 $f''(x)+f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$. 令 $f''(x)+f(x)=-\cos x$ 的特解为 $f_0(x)=x(a\cos x+b\sin x)$，代入 $f''(x)+f(x)=-\cos x$ 中得 $a=0,b=-\frac{1}{2}$，故 $f''(x)+$

$f(x)=-\cos x$ 的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{x}{2}\sin x$. 因为 $f(0)=1, f'(0)=0$, 所以 $C_1=1, C_2=0$, 故 $f(x)=\cos x-\frac{x}{2}\sin x$.

10. $y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}$, $y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)'}{-\sin t}=\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}$, 代入原方程得 $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$, 解得 $y=C_1\cos t+C_2\sin t$, 原方程的通解为 $y=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}$, 将初始条件 $y(0)=1, y'(0)=2$ 代入得 $C_1=2, C_2=1$, 故 $y=2x+\sqrt{1-x^2}$.

11. $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=t\frac{dy}{dt}$, $y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=t\left(t\frac{dy}{dt}\right)'=t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}$, 代入原方程得 $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=t$, 解得 $y=(C_1+C_2t)e^t+t+2$, 故原方程的通解为 $y=(C_1+C_2e^x)e^{e^x}+e^x+2$.

12. 由 $y=\frac{u}{\cos x}$ 得 $u=y\cos x$, 两边对 x 求导得 $\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}\cos x-y\sin x$, $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\cos x-2\frac{dy}{dx}\sin x-y\cos x$, 于是原方程化为 $\frac{d^2u}{dx^2}+4u=e^x$, 通解为 $u=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{5}e^x$, 故原方程的通解为 $y=C_1\frac{\cos 2x}{\cos x}+C_2\frac{\sin 2x}{\cos x}+\frac{1}{5\cos x}e^x$.

13. 等式两边对 x 求导得 $xf(x)+\int_0^x f(t)dt=(x+1)xf(x)+\int_0^x tf(t)dt$, 整理得 $\int_0^x f(t)dt=x^2f(x)+\int_0^x tf(t)dt$, 两边再对 x 求导并整理得 $f'(x)+\frac{3x-1}{x^2}f(x)=0$, 解得 $f(x)=Ce^{-\int\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx}=\frac{Ce^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$, 由 $f(1)=2$ 得 $C=2e$, 于是 $f(x)=\frac{2e^{1-\frac{1}{x}}}{x^3}(x\neq 0)$. 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 所以 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2e\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^3}{e^t}=0$, 故 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{2e^{1-\frac{1}{x}}}{x^3}, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$

14. (1) 设 t 时刻液面高度为 y, $S(t)=\pi f^2(y)=4\pi+\pi t$, 解得 $t=f^2(y)-4$.

(2) $V(t)=\pi\int_0^y f^2(y)dy$, 又 $V(t)=3t=3f^2(y)-12$, 则 $\pi\int_0^y f^2(y)dy=3t=3f^2(y)-12$, 两边对 y 求导得 $\pi f^2(y)=6f(y)f'(y)$, 整理得 $f'(y)-\frac{\pi}{6}f(y)=0$, 解得 $f(y)=Ce^{\frac{\pi}{6}y}$, 由 $f(0)=2$ 得 $C=2$, 于是 $f(y)=2e^{\frac{\pi}{6}y}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第十一章　曲线积分与曲面积分

大纲点击

1. 理解两类曲线积分的概念，了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系.

2. 掌握计算两类曲线积分的方法.

3. 掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件，会求二元函数全微分的原函数.

4. 了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系，掌握计算两类曲面积分的方法，掌握用高斯公式计算曲面积分的方法，并会用斯托克斯公式计算曲线积分.

5. 了解散度与旋度的概念，并会计算.

6. 会用曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量(弧长、质量、质心、形心、转动惯量、功及流量等).

微信公众号【顶尖考研】(ID: qjky88)

引　言

积分学理论包括不定积分与定积分、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分. 不定积分其实就是训练找原函数的各种方法，众所周知找原函数的根本原因是因为计算定积分时往往使用积分学基本公式(牛顿 — 莱布尼茨公式)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

各种积分类型的产生都有非常强的实际应用背景，比如定积分的几何意义为曲边梯形的面积，物理意义是速度的定积分即为路程；二重积分的几何意义为曲顶柱体的体积，物理意义是面密度的二重积分即为平面薄板的质量等. 学习积分学要注意以下几点：

(1) 根据积分域不同特征产生不同的积分类型，例如：若积分范围为一个区间，则对应的积分类型为定积分；若积分范围为一条曲线段，则对应的积分为曲线积分；若积分范围为平面区域，则对应的积分为二重积分；若积分范围为几何体，则对应的积分为三重积分；若积分范围为空间曲面，则对应的积分为曲面积分.

(2) 若积分范围为线状的，则积分使用一层积分号，例如：定积分、曲线积分；若积分范围为面状的，则积分使用二层积分号，例如：二重积分及曲面积分；若积分范围为几何体，积分使用三层积分号，例如：三重积分.

(3) 无论是定积分、重积分还是曲线积分与曲面积分，对其定义进行适当了解(几种积分定义思想相同)，要特别重视应用元素法进行研究.

(4) 不定积分与定积分如何计算主要取决于被积函数的特征，但二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分如何计算取决于积分范围和被积函数，主要取决于积分范围的特征.

(5) 学习任何一种积分，基本按照如下次序掌握：

第一步，如何产生这种类型的积分，即其实际使用背景.

第二步，用元素法进行研究，然后抽象成一个数学模型(特定的积分类型).
第三步，研究该种积分类型具有何种性质.
第四步，研究该种积分类型如何计算.
第五步，研究该种积分类型与其他积分类型之间的关系.
第六步，回归实际应用及理论深化(学会各种理论问题的证明).

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

第一节 对弧长的曲线积分

一、对弧长的曲线积分的定义

1. 二维空间对弧长的曲线积分

设 L 是平面 xOy 上的逐片光滑的曲线段，$f(x,y)$ 在 L 上有界，在 L 上取分点 $M_0,M_1,\cdots,M_n$，设 Δs_i 为第 i 个小段的长度，λ 为 n 个小弧段中的最长者，若极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$ 存在，称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线段 L 上对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)，记为 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$，即 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

2. 三维空间对弧长的曲线积分

设 Γ 为空间逐片光滑的曲线段，$f(x,y,z)$ 在 Γ 上有界，在 Γ 上取分点 $M_0,M_1,\cdots,M_n$，设 Δs_i 为第 i 个小段的长度，λ 为 n 个小弧段中的最长者，若极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$ 存在，称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲线段 Γ 上对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)，记为 $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$，即

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

二、对弧长的曲线积分的性质

1. $\int_L[f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}s=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\pm\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$.
2. $\int_L kf(x,y)\mathrm{d}s=k\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$.
3. $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1}f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2}f(x,y)\mathrm{d}s$，其中 L 由 L_1,L_2 组成.
4. $\int_L \mathrm{d}s=l$. 其中 l 为曲线 L 的长度.
5. (1) 设 L 关于 x 轴对称，位于 x 轴上方部分为 L_1，

若 $f(x,-y)=-f(x,y)$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=0$；

若 $f(x,-y)=f(x,y)$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=2\int_{L_1}f(x,y)\mathrm{d}s$.

(2) 设 L 关于 y 轴对称，位于 y 轴右侧的部分为 L_1，

若 $f(-x,y)=-f(x,y)$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=0$；

若 $f(-x,y)=f(x,y)$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$.

(3) 若 L 关于直线 $y=x$ 对称，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_L f(y,x)\mathrm{d}s$.

(4) 若 L 关于直线 $y=-x$ 对称，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_L f(-y,-x)\mathrm{d}s$.

三、对弧长的曲线积分的计算

(一) 替代法

若被积函数中有曲线表达的式子，则可以整体替代.

【例 1】 计算下列曲线积分：

(1) $\int_L (x+y)^2\mathrm{d}s$，其中 $L:x^2+y^2=9(y\geqslant 0)$；

(2) 设曲线 $L:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 的长度为 a，求 $\oint_L (4x^2+12xy+3y^2)\mathrm{d}s$；

(3) $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ 2x+3y-4z=0.\end{cases}$

【解】 (1) 因为 L 关于 y 轴对称，所以根据奇偶性得

$$\int_L (x+y)^2\mathrm{d}s=\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=9\int_L \mathrm{d}s=9\cdot 3\pi=27\pi.$$

(2) 因为曲线 L 关于变量 x 对称，所以

$$\oint_L (4x^2+12xy+3y^2)\mathrm{d}s=\oint_L (4x^2+3y^2)\mathrm{d}s=12\oint_L\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}s=12\oint_L \mathrm{d}s=12a.$$

(3) $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=4\int_\Gamma \mathrm{d}s=4\times 2\times 2\times\pi=16\pi.$

【例 2】 求 $\int_L (x-2y)^2\mathrm{d}s$，其中 $L:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，且 L 的长度为 a.

【解】 $$\int_L (x-2y)^2\mathrm{d}s=\int_L (x^2-4xy+4y^2)\mathrm{d}s=\int_L (x^2+4y^2)\mathrm{d}s$$

$$=4\int_L\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)\mathrm{d}s=4\int_L \mathrm{d}s=4a.$$

(二) 定积分法

1. 设 $L:y=\varphi(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

2. 设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

微信公众号【闫先考研】(ID:djky66)

【例 3】 计算$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 由 $x^2+y^2=R^2$，$y=x$ 与 x 轴围成的位于第一象限的曲线段，如图 1-11-1.

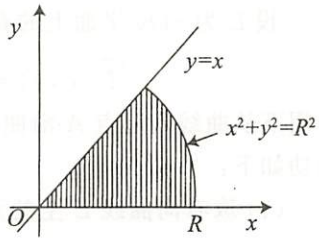


图 1-11-1

【解】 令 $L_1: y=0 (0\leqslant x\leqslant R)$，

则$\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^R e^x dx=e^R-1$；

令 $L_2:\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$，

则$\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^R R\,dt=\frac{\pi R}{4}e^R$；

令 $L_3: y=x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$，则$\int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}\,dx=e^{\sqrt{2}x}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R}=e^R-1$，

于是$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=2(e^R-1)+\frac{\pi R}{4}e^R$.

四、对弧长的曲线积分的应用(以二维为例)

设 L 为 xOy 平面上的曲线段，其线密度为 $\rho(x,y)$，则

1. 曲线段质量 $m=\int_L \rho(x,y)ds$.

2. 重心 $\bar{x}=\dfrac{\int_L x\rho(x,y)ds}{\int_L \rho(x,y)ds}$，$\bar{y}=\dfrac{\int_L y\rho(x,y)ds}{\int_L \rho(x,y)ds}$.

3. 转动惯量

$I_x=\int_L y^2\rho(x,y)ds$，$I_y=\int_L x^2\rho(x,y)ds$，$I_O=\int_L (x^2+y^2)\rho(x,y)ds$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第二节 对坐标的曲线积分

一、实际应用背景 —— 变力沿有向曲线段做功

情形一：恒力(大小方向都不变的力)作用下沿直线做功

设物体在恒力 $\vec{F}$ 作用下将物体从点 A 沿直线移动至点 B，所做的功为

$$W=|\vec{F}|\cdot\cos(\vec{F},\overrightarrow{AB})\cdot|\overrightarrow{AB}|=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

情形二：二维空间变力沿曲线做功(即二维空间中物体所经过的路径是有向曲线，施加于物体的力的大小与方向变化)

设 L 为 xOy 平面上的有向曲线段，如图 1-11-2 所示，质点在变力

$$\vec{F}(x,y)=\{P(x,y),Q(x,y)\}$$

作用下从曲线的起点 A 沿曲线 L 到终点 B，用元素法分析力对物体做的功如下：

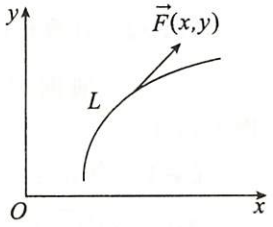


图 1-11-2

(1) 取有向曲线 L 上的元素 $\mathrm{d}\vec{s}\subset L$，其中 $\mathrm{d}\vec{s}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}$.

(2) 力对物体做功的功元素为 $\mathrm{d}W=\vec{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{s}=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$.

(3) 力对物体所做的功为

$$W=\int_L \mathrm{d}W=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

情形三：三维空间变力沿曲线做功（即三维空间中物体所经过的路径是有向曲线，施加于物体的力的大小与方向变化）

设 L 为三维空间的有向曲线段，如图 1-11-3 所示，质点在变力

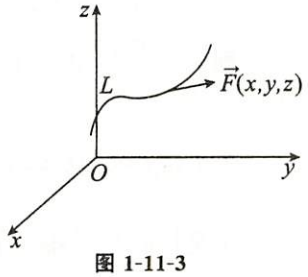


图 1-11-3

$$\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

作用下从曲线的起点 A 沿曲线 L 到终点 B，用元素法分析力对物体做的功如下：

(1) 取有向曲线 L 上的元素 $\mathrm{d}\vec{s}\subset L$，其中 $\mathrm{d}\vec{s}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$.

(2) 力对物体做功的功元素为

$$\mathrm{d}W=\vec{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{s}=P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(3) 力对物体所做的功为

$$W=\int_L \mathrm{d}W=\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

二、对坐标的曲线积分的定义

1. 二维空间对坐标的曲线积分的定义

设 L 为 xOy 平面上的有向曲线段，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有向曲线段 L 上有界，

若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 存在，称此极限为函数 $P(x,y)$ 沿有向曲线段 L 对坐标 x 的曲线积分，记为 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$，即 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$.

若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ 存在，称此极限为函数 $Q(x,y)$ 沿有向曲线段 L 对坐标 y 的曲线积分，记为 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$，即 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i=\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$.

记 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$.

2. 三维空间对坐标的曲线积分的定义

设 L 为空间有向曲线段，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在有向曲线段 L 上有界，

若$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$存在，称此极限为函数$P(x,y,z)$沿有向曲线段$L$对坐标$x$的曲线积分，记为$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x$，即$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i=\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x$.

若$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i$存在，称此极限为函数$Q(x,y,z)$沿有向曲线段$L$对坐标$y$的曲线积分，记为$\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y$，即$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i=\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y$.

若$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i$存在，称此极限为函数$R(x,y,z)$沿有向曲线段$L$对坐标$z$的曲线积分，记为$\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z$，即$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i=\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z$.

记$\int_L P\mathrm{d}x+\int_L Q\mathrm{d}y+\int_L R\mathrm{d}z=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$.

三、对坐标的曲线积分的性质

1. $\int_{L^-}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$.

2. 对坐标的曲线积分对积分范围具有可加性.

3. (1)(二维空间两类曲线积分之间的关系)

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s,$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta$为二维空间有向曲线L上一点处切向量的方向余弦.

(2)(三维空间两类曲线积分之间的关系)

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s,$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为三维空间有向曲线$L$上一点处切向量的方向余弦.

四、二维空间对坐标的曲线积分的计算方法

(一) 定积分法

1. 设$L:y=\varphi(x)$(起点对应的$x=a$，终点对应的$x=b$)，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\{P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}\mathrm{d}x.$$

2. 设$L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$(起点对应的$t=\alpha$，终点对应的$t=\beta$)，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t.$$

【例 1】 计算$\oint_L(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$，其中$L$是$y=x^2,x=y^2$围成曲线的正向.

【解】 令$L_1:y=x^2$(起点$x=0$，终点$x=1$)，$L_2:y=\sqrt{x}$(起点$x=1$，终点$x=0$).

$$\oint_L(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$$

微信公众号【顶尖考研】(Dingjian66)

$$=\int_{L_1}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y+\int_{L_2}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$$

$$\int_{L_1}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y=\int_0^1(2x^3-x^2)\mathrm{d}x+(x+x^4)\cdot 2x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(2x^3+x^2+2x^5)\mathrm{d}x=\frac{7}{6},$$

$$\int_{L_2}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y=\int_1^0(2x\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x+(x+x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1(2x\sqrt{x}-x^2+\sqrt{x})\mathrm{d}x=-\frac{17}{15},$$

故$\oint_L(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y=\frac{7}{6}-\frac{17}{15}=\frac{1}{30}$.

【例 2】 $\int_L y^2\mathrm{d}x+2x\,\mathrm{d}y$，其中 $L:x^2+y^2=2x$，方向取逆时针方向.

【解】 令 $L:\begin{cases}x=1+\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$（起点 $t=0$，终点 $t=2\pi$），则

$$\int_L y^2\mathrm{d}x+2x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}(-\sin^3 t+2\cos t+2\cos^2 t)\mathrm{d}t=2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=2\pi.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

（二）二重积分法——格林公式

定理 设 D 为平面单连通或多连通区域，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，其中 L 为其正向边界，则有

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

【注解】

(1) 单连通区域边界逆时针方向为正方向.

(2) 多连通区域外边界逆时针、内边界顺时针方向为正方向.

【例 3】 设 $L:x=\sqrt{2y-y^2}$ 沿 y 增加的方向，求$\int_L(5xy-\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}y+\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x$.

【解】 取 L_1 为 y 轴上从(0,2)到(0,0)的直线段，

令 $P=\mathrm{e}^x\cos y$，$Q=5xy-\mathrm{e}^x\sin y$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=5y-\mathrm{e}^x\sin y$，$\frac{\partial P}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y$，

由格林公式得$\oint_{L+L_1}(5xy-\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}y+\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$

$$=5\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r=\frac{40}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{40}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{2},$$

又$\int_{L_1}(5xy-\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}y+\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x=-\int_2^0\sin y\,\mathrm{d}y=\int_0^2\sin y\,\mathrm{d}y=1-\cos 2$，

故$\int_L(5xy-\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}y+\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{2}-1+\cos 2$.

（三）曲线积分与路径无关问题

先看两个对坐标的曲线积分的例子，从这两个例子可以看出，有些对坐标的曲线积分路径不同结果不同，有些对坐标的曲线积分路径不同结果相同，这就是曲线积分与路径是否无关的问题.

【例 4】 计算$\int_L (x+2y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$.

(1)L 为从点 $O(0,0)$ 沿 $y=x$ 到点 $A(1,1)$ 的直线段.

(2)L 为从点 $O(0,0)$ 沿 $y=x^2$ 到点 $A(1,1)$ 的曲线段.

【解】 (1)$\int_L (x+2y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1 3x\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$.

(2)$\int_L (x+2y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1 (x+2x^2)\mathrm{d}x+(x-x^2)\cdot 2x\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

【例 5】 计算$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$.

(1)L 为从点 $O(0,0)$ 沿 $y=x$ 到点 $A(1,1)$ 的直线段.

(2)L 为从点 $O(0,0)$ 沿 $y=x^2$ 到点 $A(1,1)$ 的曲线段.

【解】 (1)$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x=1$.

(2)$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1 (x+x^2)\mathrm{d}x+(x-x^2)\cdot 2x\,\mathrm{d}x=1$.

微信公众号【顶尖考研】
QQ：djky861

【注解】

例 4 显示从起点到终点沿不同路径曲线积分结果不同，即曲线积分与路径有关；

例 5 显示从起点到终点沿不同路径曲线积分结果相同，即曲线积分与路径无关.

定理 设 D 为单连通区域，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上连续可偏导，则以下四个命题等价：

(1) 曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关.

(2) 在 D 上恒有$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

(3) 对 D 内任意的逐段光滑的封闭曲线 C，有$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$.

(4) 存在二元函数 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$.

【注解】

(1) 判断曲线积分与路径无关常用判别法为$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

(2) 若$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，且 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$，则

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0),$$

例如：$\int_{(1,2)}^{(2,3)} xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{(1,2)}^{(2,3)}=16$.

(3) 若$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 可写成$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，

且$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)\mathrm{d}y$.

(4) 若$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则称$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$为全微分方程，其通解为$u(x,y)=C$，

其中$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$.

(5) 若$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则二元函数$u(x,y)$为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

【例6】 计算$\int_L (xy^2+2x)\mathrm{d}x+(x^2y+2)\mathrm{d}y$，其中$L:y=2x$从起点$(1,2)$至终点$(2,4)$.

【解】 **方法一**
$$\int_L (xy^2+2x)\mathrm{d}x+(x^2y+2)\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2 (x\cdot 4x^2+2x)\mathrm{d}x+(x^2\cdot 2x+2)\cdot 2\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^2 (8x^3+2x+4)\mathrm{d}x=(2x^4+x^2+4x)\,|_1^2=37.$$

微信公众号【顾朱考研】(ID: djky66)

方法二 令$P(x,y)=xy^2+2x$，$Q(x,y)=x^2y+2$，

因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2xy$，所以曲线积分与路径无关，

故$\int_L (xy^2+2x)\mathrm{d}x+(x^2y+2)\mathrm{d}y$

$$=\int_1^2 (4x+2x)\mathrm{d}x+\int_2^4 (4y+2)\mathrm{d}y=3x^2\,|_1^2+(2y^2+2y)\Big|_2^4=37.$$

方法三 因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2xy$，所以曲线积分与路径无关，

故$\int_L (xy^2+2x)\mathrm{d}x+(x^2y+2)\mathrm{d}y=\int_{(1,2)}^{(2,4)} (xy^2+2x)\mathrm{d}x+(x^2y+2)\mathrm{d}y$

$$=\int_{(1,2)}^{(2,4)} (xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y)+2x\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$$
$$=\int_{(1,2)}^{(2,4)} \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2y^2+x^2+2y\right)=\left(\frac{1}{2}x^2y^2+x^2+2y\right)\Big|_{(1,2)}^{(2,4)}=37.$$

【例7】 验证$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$在右半平面$x>0$内为某二元函数$u(x,y)$的全微分，并求$u(x,y)$.

【解】 令$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$，

因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}((x,y)\neq(0,0))$，

所以$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$在右半平面$x>0$内为某二元函数$u(x,y)$的全微分，

且 $u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\int_1^x 0\,dx+\int_0^y\frac{x\,dy}{x^2+y^2}$

$$=x\cdot\frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\Big|_0^y=\arctan\frac{y}{x}.$$

【例 8】 求微分方程 $(xy^2+y)dx+(x^2y+x-2)dy=0$ 的通解.

【解】 **方法一**

令 $P=xy^2+y$，$Q=x^2y+x-2$，因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以该方程为全微分方程，

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(xy^2+y)dx+(x^2y+x-2)dy=\int_0^x 0\,dx+\int_0^y(x^2y+x-2)dy$$

$$=\frac{1}{2}x^2y^2+xy-2y,$$

故通解为 $\frac{1}{2}x^2y^2+xy-2y=C$.

方法二

由 $(xy^2+y)dx+(x^2y+x-2)dy=0$ 得 $(xy^2dx+x^2ydy)+(x\,dy+y\,dx)-2dy=0$，

即 $d\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)+d(xy)-2dy=0$，或 $d\left(\frac{1}{2}x^2y^2+xy-2y\right)=0$，

故通解为 $\frac{1}{2}x^2y^2+xy-2y=C$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

五、三维空间对坐标的曲线积分的计算方法

(一) 定积分法

设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$（起点 $t=\alpha$，终点 $t=\beta$），则

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$=\int_\alpha^\beta\left\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\right\}dt.$$

【例 1】 计算 $\int_L(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$，

其中 $L:\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\\z=t\end{cases}$（起点 $t=0$，终点 $t=2\pi$）.

【解】 $\int_L(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$

$$=\int_0^{2\pi}[-(\cos^2t-t\sin t)\sin t+(\sin^2t-t\cos t)\cos t+(t^2-\sin t\cos t)]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos t\sin^2t-t\cos 2t+t^2)dt=\frac{8\pi^3}{3}.$$

【例 2】 计算 $\int_L y\,dx+z\,dy+x\,dz$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2=4\\z=1\end{cases}$，从 z 轴正向看 L 为逆时针.

【解】 令 $L:\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\\ z=1\end{cases}$（起点 $t=0$，终点 $t=2\pi$），则

$$\int_L y\,dx+z\,dy+x\,dz=\int_0^{2\pi}2\sin t\cdot(-2\sin t)\,dt+1\cdot 2\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-4\sin^2 t+2\cos t)\,dt=-4\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$$

$$=-8\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=-4\pi.$$

（二）斯托克斯公式法

定理 设 L 为曲面 Σ 的边界，L 的方向与 Σ 的侧按右手准则确定，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 Σ 上一点的法向量的方向余弦，则有

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS.$$

【注解】

利用区域与边界之间的关系计算积分是积分学上重要的研究方法，定积分、二重积分、三重积分、二维空间对坐标的曲线积分、三维空间对坐标的曲线积分都可以建立边界与区域积分之间的关系等式，其关系如下：

（1）一维空间（牛顿—莱布尼茨公式）见图 1-11-4.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$



图 1-11-4

（2）二维空间（格林公式）见图 1-11-5.

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

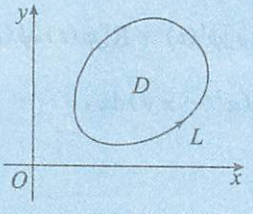


图 1-11-5

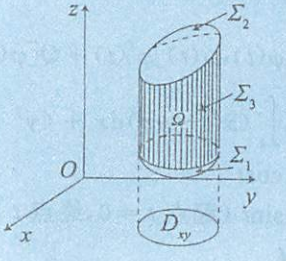


图 1-11-6

（3）三维空间区域与边界曲面之间的关系（高斯公式）见图 1-11-6.

$$\oiint_\Sigma P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv.$$

(4) 三维空间曲面与边界曲线之间的关系(斯托克斯公式)

见图 1-11-7.

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

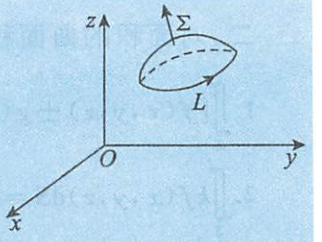


图 1-11-7

(5) 用斯托克斯公式计算三维空间对坐标的曲线积分时,首先选择以 L 为边界的曲面,求出曲面上任一点处的法向量及其方向余弦,然后再使用斯托克斯公式将曲线积分转化为曲面积分.

【例 3】 计算$\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$,其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线,从 x 轴的正向看为顺时针方向.

【解】 设截口圆为 Σ,取下侧,且 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,由斯托克斯公式

$$\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(-3)\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint_\Sigma\mathrm{d}S=\sqrt{3}\pi R^2.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

第三节 对面积的曲面积分

一、对面积的曲面积分(第一类曲面积分)的定义

设 Σ 为空间逐片光滑的有限曲面,$f(x,y,z)$ 在 Σ 上有界,将 Σ 划分成 $\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$,任取$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$,作积分和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

令 λ 为 $\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$ 的直径最长者,若$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ 存在,称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分,记为$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$,即

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

二、对面积的曲面积分的性质

1. $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S\pm\iint\limits_{\Sigma}g(x,y,z)\mathrm{d}S$.

2. $\iint\limits_{\Sigma}kf(x,y,z)\mathrm{d}S=k\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

3. $\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

4. $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=A$. 其中 A 表示 Σ 的面积.

5. (1) 设 Σ 关于 xOy 平面对称,其中 Σ_1 为 Σ 位于 xOy 平面上方的部分,

若 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$,则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$;

若 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$,则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

(2) 设 Σ 关于 xOz 平面对称,其中 Σ_1 为 Σ 位于 xOz 平面的右侧部分,

若 $f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$,则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$;

若 $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$,则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

(3) 设 Σ 关于 yOz 平面对称,其中 Σ_1 为 Σ 位于 yOz 平面的前侧部分,

若 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$,则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$;

若 $f(-x,y,z)=f(x,y,z)$,则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、对面积的曲面积分的计算方法

(一) 替代法

【例 1】 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)^2\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma:z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

【解】 根据对称性有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)^2\mathrm{d}S&=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=32\pi.\end{aligned}$$

【例 2】 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=1$.

【解】 由对称性得 $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S$,

于是$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)\mathrm{d}S=6\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=8\pi$.

（二）二重积分法

第一步，将曲面 Σ 写成 $\Sigma:z=\varphi(x,y)((x,y)\in D_{xy})$（也可以向其他两个坐标面投影）.

第二步，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

第三步，$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}f[x,y,\varphi(x,y)]\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

【例 3】 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2y+z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma:z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

【解】 由对称性得$\iint\limits_{\Sigma}(x^2y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$，

$z'_x=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$，$z'_y=-\dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$，

$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant4}\sqrt{4-x^2-y^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant4}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=8\pi.$$

【例 4】 设曲面 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=4$，求$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$.

【解】 设 Σ 位于 xOy 平面上侧的面为 Σ_1，由奇偶性得

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S.$$

$\Sigma_1:z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，$\Sigma_1$ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant4$，

$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，则

$$I=2\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=4\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{r^3}{\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}r$$

$$=8\pi\int_0^2\frac{r^3}{\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}r\xlongequal{r=2\sin t}8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8\sin^3t}{2\cos t}\cdot2\cos t\,\mathrm{d}t=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\,\mathrm{d}t$$

$$=64\pi I_3=64\pi\cdot\frac{2}{3}=\frac{128\pi}{3}.$$

第四节 对坐标的曲面积分

一、实际应用背景——流体的流量

设 Σ 为空间逐片光滑的有侧曲面，不可压缩的流体流速为

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$v(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\},$$

求单位时间内流入 Σ 的指定侧的流量.

(1) 取 $dS\subset\Sigma$，dS 在 yOz 面、zOx 面、xOy 面上的投影分别为 $dydz$、$dzdx$、$dxdy$，则

$$dS=\{dydz,dzdx,dxdy\},$$

且

$$dydz=\cos\alpha\cdot dS,\quad dzdx=\cos\beta\cdot dS,\quad dxdy=\cos\gamma\cdot dS,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为有侧曲面 Σ 的法向量的方向余弦.

(2) $d\Phi=v(x,y,z)\cdot dS=P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$;

(3) $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}d\Phi=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$.

【注解】

在 $dS=\{dydz,dzdx,dxdy\}$ 中，$dydz$ 表示 dS 在 yOz 平面上的投影，$dzdx$ 表示 dS 在 zOx 平面上的投影，$dxdy$ 表示 dS 在 xOy 平面上的投影，且

$$dydz=\cos\alpha dS,\quad dzdx=\cos\beta dS,\quad dxdy=\cos\gamma dS,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面上点 $P(x,y,z)$ 处法向量的方向余弦.

二、对坐标的曲面积分的定义

设 Σ 是有侧曲面，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Σ 上有界，

若极限 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$ 存在，称此极限为函数 $P(x,y,z)$ 在有侧曲面 Σ 上对坐标 y,z 的积分，记为 $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)dydz$.

若极限 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$ 存在，称此极限为函数 $Q(x,y,z)$ 在有侧曲面 Σ 上对坐标 x,z 的积分，记为 $\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)dxdz$.

若极限 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$ 存在，称此极限为函数 $R(x,y,z)$ 在有侧曲面 Σ 上对坐标 x,y 的积分，记为 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy$.

记 $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)dxdz+\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy$

$=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$.

三、对坐标的曲面积分的性质

1. $\iint\limits_{\Sigma^-}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=-\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$.

2. 对坐标的曲面积分对积分域具有可加性.

3. $\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$,

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为有侧曲面 Σ 上一点处法向量的方向余弦.

4. 设 Σ 关于 xOy 平面对称(Σ 的侧也是对称的),其中 Σ_1 为 Σ 位于 xOy 平面上侧.

(1) 若 $R(x,y,-z)=-R(x,y,z)$,则 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Sigma_1}R(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(2) 若 $R(x,y,-z)=R(x,y,z)$,则 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$.

【注解】

其他两种对坐标的曲面积分有类似的对称性.

四、对坐标的曲面积分的计算方法

(一) 二重积分法

1. $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的计算步骤:

第一步,见图 1-11-8,将 Σ 向 yOz 平面投影,将 Σ 表示为 $\Sigma:x=\varphi(y,z)$,求出投影区域 $(y,z)\in D_{yz}$.

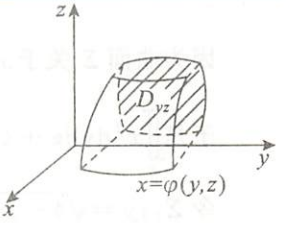


图 1-11-8

第二步,$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P[\varphi(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

其中当 $\cos\alpha\geqslant 0$ 时,二重积分前面取正号,当 $\cos\alpha<0$ 时,二重积分前面取负号.

2. $\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 的计算步骤:

第一步,见图 1-11-9,将 Σ 向 zOx 平面投影,将 Σ 表示为 $\Sigma:y=\varphi(x,z)$,求出投影区域 $(x,z)\in D_{zx}$.

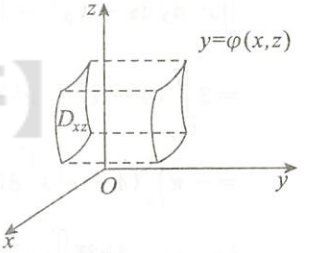


图 1-11-9

第二步,$\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint\limits_{D_{zx}}Q[x,\varphi(x,z),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,

其中当 $\cos\beta\geqslant 0$ 时,二重积分前面取正号,当 $\cos\beta<0$ 时,二重积分前面取负号.

3. $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的计算步骤:

第一步,如图 1-11-10,将 Σ 向 xOy 平面投影,将 Σ 表示为 $\Sigma:z=\varphi(x,y)$,求出投影区域 $(x,y)\in D_{xy}$.

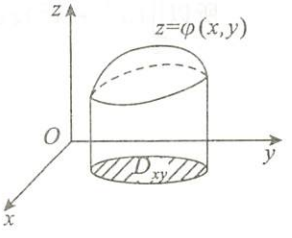


图 1-11-10

第二步,$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R[x,y,\varphi(x,y)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

其中当 $\cos\gamma\geqslant 0$ 时,二重积分前面取正号,当 $\cos\gamma<0$ 时,二重积分前面取负号.

【例 1】 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=1(z\geqslant 0)$,取下侧.

【解】 将 Σ 表示为 $\Sigma:z=\sqrt{1-x^2-y^2}$,其中 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$,

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

则$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2+\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2+\sqrt{1-r^2})r\,\mathrm{d}r=-2\pi\left(\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r+\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r\right)$

$=-2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{7\pi}{6}.$

【例 2】 计算$\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中$\Sigma:x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$，取上侧.

【解】 因为曲面Σ关于yOz面对称，所以由曲面积分的奇偶性质得$\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$；

因为曲面Σ关于xOz面对称，所以由曲面积分的奇偶性质得$\iint\limits_{\Sigma}3\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，

于是$\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Sigma}y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$

令$\Sigma_1:y=\sqrt{4-x^2-z^2}$，其中$D_{xz}:x^2+z^2\leqslant 4(z\geqslant 0)$，取右侧，

由曲面积分的奇偶性质得

$\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint\limits_{\Sigma_1}y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$=2\iint\limits_{D_{xz}}(4-x^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}r$

$=-\pi\int_0^2(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(4-r^2)=-\frac{2\pi}{5}(4-r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2=\frac{64\pi}{5}.$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 3】 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为$x^2+y^2+z^2=1$位于第一、五卦限的外侧.

【解】 设Σ_1为Σ位于xOy平面上方的部分.

因为Σ的图形和曲面的侧关于xOy平面对称，且被积分函数关于z为奇函数，

所以$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r=\pi\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r\xlongequal{r=\sin t}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$

$=\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\,\mathrm{d}t\right)=\frac{2\pi}{15}.$

【例 4】 设$\Sigma:x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$，取外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

【解】 $\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint\limits_{D_{xz}}z\sqrt{4-x^2-z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

$=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$

$=4\int_0^2 r^2\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r\xlongequal{r=2\sin t}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,\mathrm{d}(2t)=8\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=4\pi,$$

$$\iint_{\Sigma}2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=8\pi,$$

则$\iint_{\Sigma}yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=12\pi$.

【例 5】 计算 $I=\iint_{\Sigma}\dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是由柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $z=-R$ 及 $z=R(R>0)$ 所围成的立体的外表面.

【解】 令 $\Sigma_1:z=-R(x^2+y^2\leqslant R^2)$ 下侧，$\Sigma_2:z=R(x^2+y^2\leqslant R^2)$ 上侧，

$\Sigma_3:x^2+y^2=R^2(-R\leqslant z\leqslant R)$ 外侧，

$$\text{则}\iint_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{\Sigma_2}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{\Sigma_3}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\iint_{\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{\Sigma_2}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{\Sigma_1}\frac{R^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}+\iint_{\Sigma_2}\frac{R^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}=0.$$

(Σ_1 与 Σ_2 上下对称，且被积函数为 z 的偶函数).

$$\iint_{\Sigma_3}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{\Sigma_3}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}(\Sigma_3\text{ 在 }xOy\text{ 平面上投影区域的面积为零}),$$

设 Σ_3 位于 yOz 面两侧的部分分别为 Σ'_3 及 Σ''_3，因为 $\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 为 x 的奇函数，所以

$$\iint_{\Sigma_3}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=2\iint_{\Sigma'_3}\frac{\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=2\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=8\int_0^{R}\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\int_0^{R}\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}=8\cdot\frac{\pi R^2}{4}\cdot\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\Big|_0^{R}=\frac{\pi^2 R}{2}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：zjky66)

【注解】

在用二重积分计算$\iint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 时，一般需要分三次投影分别计算 $\iint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$、$\iint_{\Sigma}Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$、$\iint_{\Sigma}R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，有时可以将三种对坐标的曲面积分转化为一种形式.

设 Σ 上一点的法向量的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\cos\alpha\,\mathrm{d}S=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cdot\cos\gamma\,\mathrm{d}S=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\cos\beta\,\mathrm{d}S=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cdot\cos\gamma\,\mathrm{d}S=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

【例 6】 计算$\iint_{\Sigma}(x+1)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma:z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$，取上侧.

【解】 令 $F=z-x^2-y^2$，Σ 的法向量为 $\vec{n}=\{-2x,-2y,1\}$，

方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{-2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$，

$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\,\mathrm{d}S=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cdot\cos\gamma\,\mathrm{d}S=-2x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，则

$$\iint_{\Sigma}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(-2x^2+z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}[-2x^2+(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

（二）三重积分法 —— 高斯公式法

定理 设 Σ 为封闭曲面的外侧，其所围成的几何体为 Ω，且 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 Ω 上一阶连续可偏导，则有

$$\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v.$$

【注解】

（1）若曲面不封闭，可以通过补充曲面的方式使用高斯公式.

（2）若封闭曲面 Σ 的侧为内侧，则使用高斯公式时，前面一定带负号.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djkyb6)

【例 7】 计算 $\iint_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma:z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 取上侧.

【解】 令 $\Sigma_1:z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$ 取下侧，由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iiint_{\Omega}2z\mathrm{d}v=-2\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\pi\int_0^1 z^2\mathrm{d}z=-\frac{2\pi}{3},$$

$$\text{而}\iint_{\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\pi,$$

$$\text{故}\iint_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{2\pi}{3}-(-\pi)=\frac{\pi}{3}.$$

【例 8】 设 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$，取外侧，计算 $\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

【解】 令 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$，取下侧，

$$\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant 4-z^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^2 z(4-z^2)\mathrm{d}z=4\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_0}2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{\Sigma_0}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-8\pi,$$

所以 $\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=12\pi$.

（三）利用两类曲面积分之间的关系计算对坐标的曲面积分

【例 9】 设 $f(x,y,z)$ 连续，Σ 为 $x-y+z=1$ 位于第四卦限的上侧，计算

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【解】 曲面的法向量为 $\vec{n}=\{1,-1,1\}$，方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$，

于是 $\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\{[f(x,y,z)+x]-[2f(x,y,z)+y]+[f(x,y,z)+z]\}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

【例 10】 计算 $\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 的上侧.

【解】 曲面 Σ 的法向量为 $\vec{n}=\{-2x,-2y,1\}$，方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

于是 $\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{z-2x^2-2y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S,$$

因为 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，

所以原式 $=-\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r=-8\pi.$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第五节 场论初步

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

一、梯度

1. 方向导数 —— 设 $u=f(x,y,z)((x,y,z)\in\Omega)$，$M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$，$l$ 为从 M_0 引出的射线，取 $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\in l$，令 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，

$$\Delta u=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0),$$

称极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho}$ 为 $u=f(x,y,z)$ 在 M_0 处沿射线 l 的方向导数，记为 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$，且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma,$$ 其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 l 的方向余弦.

【注解】

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}_{M_0}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，其中 $\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}_{M_0}$ 为一个固定向量，$\vec{e}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 为射线 l 的单位向量，设两个向量之间的夹角为 θ，则有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left|\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}_{M_0}\right|\cdot\left|\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}\right|\cos\theta$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\Bigg|_{M_0}\cdot\cos\theta,$$

当 $\theta=0$，即固定向量的方向与射线 l 方向相同时，方向导数取最大值

$$\max\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\Bigg|_{M_0},$$

该方向称为梯度，于是有下面的定义：

2. 梯度 —— 设 $u=f(x,y,z)$ 连续可偏导，称 $\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}$ 为函数 $u=f(x,y,z)$ 的梯度，记为 $\mathbf{grad}u$，即 $\mathbf{grad}u=\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}$.

二、旋度

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

设 $\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，则向量 $\vec{A}$ 的旋度为

$$\mathbf{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ Q&R\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial z}&\dfrac{\partial}{\partial x}\\ R&P\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}\\ P&Q\end{vmatrix}\right\}.$$

顶尖考研（微信公众号）(ID: djky66)

三、散度

设 $\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，则向量 $\vec{A}$ 的散度为

$$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

重点题型分析

题型一　对弧长的曲线积分的计算

【例 1】　计算 $I=\oint_L x^2\mathrm{d}s$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x+y+z=0.\end{cases}$

【解】　利用对称性得 $I=\oint_L x^2\mathrm{d}s=\oint_L y^2\mathrm{d}s=\oint_L z^2\mathrm{d}s$，

于是 $I=\frac{1}{3}\oint_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{R^2}{3}\oint_L\mathrm{d}s=\frac{R^2}{3}\cdot 2\pi R=\frac{2\pi R^3}{3}$.

【例 2】 计算$\oint_L x^2(1+y\cos xy)\mathrm{d}s$，其中 $L:x^2+y^2=4x$.

【解】 由对称性得 $I=\oint_L x^2(1+y\cos xy)\mathrm{d}s=\oint_L x^2\mathrm{d}s$，

令$\begin{cases}x-2=2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta$，

则 $I=\oint_L x^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(2+2\cos\theta)^2\cdot 2\mathrm{d}\theta=8\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\cdot\mathrm{d}\theta$

$=16\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\cdot\mathrm{d}\theta=64\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2\cdot\mathrm{d}\theta=128\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^4\cdot\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$=128\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\cdot\mathrm{d}t=128I_4=128\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=24\pi$.

【例 3】 计算 $I=\oint_L|xy|\mathrm{d}s$，其中 $L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

【解】 设 L 在第一象限的部分为 L_1，由奇偶性和对称性得$\oint_L|xy|\mathrm{d}s=4\int_{L_1}xy\mathrm{d}s$，

令 $L_1:\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=3\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2})$，$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{4\sin^2 t+9\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$，

则 $\oint_L|xy|\mathrm{d}s=4\int_{L_1}xy\mathrm{d}s=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{4\sin^2 t+9\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$，

因为$(4\sin^2 t+9\cos^2 t)'=-5\sin 2t$，所以

$I=-\frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^2 t+9\cos^2 t}\,\mathrm{d}(4\sin^2 t+9\cos^2 t)$

$=-\frac{12}{5}\cdot\frac{2}{3}(4\sin^2 t+9\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{152}{5}$.

【例 4】 计算$\oint_L|y|\mathrm{d}s$，其中 $L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

【解】 $L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的极坐标方程为 $L:r^2=a^2\cos 2\theta$，

$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$，

设其位于第一象限的部分为 L_1，

则 L_1 的参数方程为 $L_1\begin{cases}x=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta\\ y=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4})$.

由对称性得$\oint_L|y|\mathrm{d}s=4\int_{L_1}y\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$

$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=-4a^2\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

微信公众号【摸鱼考研】(ID:mjky66)

题型二　二维空间对坐标的曲线积分

【例 1】　从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,0)$ 的曲线 $y=a\sin x\,(a>0)$ 中求一条曲线 L，使得 $\int_L (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 最小.

【解】　$I=\int_L (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$

$$=\oint_{L+\overrightarrow{AO}} (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y-\int_{\overrightarrow{AO}} (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y,$$

$$\oint_{L+\overrightarrow{AO}} (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=-\iint_D (2-3y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{a\sin x} (3y^2-2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi} (a^3\sin^3 x-2a\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3\sin^3 x-2a\sin x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a^3-4a,$$

$$\int_{\overrightarrow{AO}} (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=\int_{\pi}^{0}\mathrm{d}x=-\pi,$$

则 $I(a)=\frac{4}{3}a^3-4a+\pi$. 令 $I'(a)=4a^2-4=0$ 得 $a=1$，因为 $I''(1)=8>0$，所以当 $a=1$ 时积分取最小值.

【例 2】　求 $\int_L [\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y$，其中 L 为从点 $A(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的任一路径，它与线段 AB 不相交，且与 AB 围成的图形面积为 K，且 $\varphi(y)$ 连续可导.

【解】　当 L 位于线段 AB 上方时，$\int_L=\oint_{L+\overrightarrow{BA}}+\int_{\overrightarrow{AB}}$，由格林公式得

$$\oint_{L+\overrightarrow{BA}} [\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y=-\iint_D m\,\mathrm{d}\sigma=-mK,$$

$$\text{而}\int_{\overrightarrow{AB}} [\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y=\int_0^1 [\varphi(x)\mathrm{e}^x-mx]\mathrm{d}x+[\varphi'(x)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}x$$

$$=\varphi(1)\mathrm{e}-\varphi(0)-\frac{3}{2}m,$$

所以 $\int_L [\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y=\varphi(1)\mathrm{e}-\varphi(0)-\frac{3}{2}m-mK.$

当 L 位于线段 AB 下方时，$\int_L=\oint_{L+\overrightarrow{BA}}+\int_{\overrightarrow{AB}}$，由格林公式得

$$\oint_{L+\overrightarrow{BA}} [\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y=\iint_D m\,\mathrm{d}\sigma=mK,$$

$$\text{而}\int_{\overrightarrow{AB}} [\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y=\int_0^1 [\varphi(x)\mathrm{e}^x-mx]\mathrm{d}x+[\varphi'(x)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}x$$

$$=\varphi(1)\mathrm{e}-\varphi(0)-\frac{3}{2}m,$$

所以 $\int_L [\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y=\varphi(1)\mathrm{e}-\varphi(0)-\frac{3}{2}m+mK.$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky60)

【例 3】 计算$\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}$，其中 L 是不过原点的正向简单闭曲线.

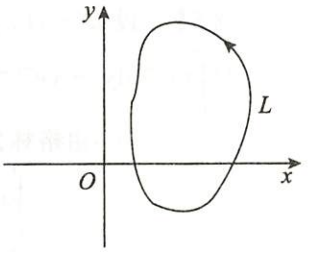


图 1-11-11

【解】 设 L 所围成的区域为 D，

$$P(x,y)=\frac{-y}{x^2+4y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+4y^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2}((x,y)\neq(0,0)).$$

(1)$O(0,0)\notin D$，见图 1-11-11，由格林公式得$\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0$；

(2)$O(0,0)\in D$，见图 1-11-12，作 $L_0:x^2+4y^2=r^2(r>0)$，L_0 在 L 内且为逆时针方向)，设 L_0 围成的椭圆区域为 D_1，L_0 与 L 围成的区域为 D_2，由格林公式得

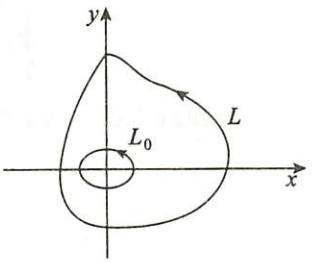


图 1-11-12

$$\oint_{L+L_0^-}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}=\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0,$$

于是有$\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}=\oint_{L_0}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_{L_0}x\,dy-y\,dx$

$$=\frac{2}{r^2}\iint_{D_1}dx\,dy=\pi.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 4】 计算$\int_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}$，其中 L 为 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 从点 $A(a,0)$ 经过点 $B(0,a)$ 到 $C(-a,0)$ 的一段，如图 1-11-13.

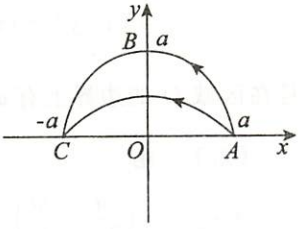


图 1-11-13

【解】 $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+4y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+4y^2}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2}$，其中$(x,y)\neq(0,0)$. 作 $C_0:x^2+4y^2=a^2$ 从点 $A(a,0)$ 经过点 $D\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 到 $C(-a,0)$ 的一段.

令 L 与 C_0^- 围成的区域为 D_1，C_0 与线段 CA 围成的区域为 D_2，由格林公式得

$$\oint_{L+C_0^-}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=0,$$

于是$\int_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}=\int_{C_0}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}=\frac{1}{a^2}\int_{C_0}x\,dy-y\,dx=\frac{1}{a^2}\left(\oint_{C_0+CA}x\,dy-y\,dx-\int_{CA}x\,dy-y\,dx\right)$，

因为$\oint_{C_0+CA}x\,dy-y\,dx=2\iint_{D_2}d\sigma=\frac{\pi}{2}a^2$，$\int_{CA}x\,dy-y\,dx=0$，

所以$\int_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}=\frac{\pi}{2}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 5】 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，其中 L 为 D 的正向边界，证明：

(1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$；(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2$.

【证明】 (1) 由格林公式得

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为 D 关于 $y=x$ 对称，所以 $\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}(2)\ 2\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x&=\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x+\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x\\&=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin x}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}\geqslant 2$，所以 $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\left[\iint_D 2\mathrm{d}\sigma+\iint_D 2\mathrm{d}\sigma\right]=2\pi^2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 6】 设 $u(x,y),v(x,y)$ 在闭区域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上一阶连续可偏导，定义

$$f(x,y)=\{v(x,y),u(x,y)\},\quad g(x,y)=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right\},$$

且在区域 D 的边界上有 $u(x,y)\equiv 1,v(x,y)\equiv y$，计算 $\iint_D f\cdot g\mathrm{d}\sigma$.

【解】 由

$$f\cdot g=v\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(uv)-\frac{\partial}{\partial y}(uv),$$

得

$$\iint_D f\cdot g\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(uv)-\frac{\partial}{\partial y}(uv)\right]\mathrm{d}\sigma=\int_L uv\mathrm{d}x+uv\mathrm{d}y=\int_L y\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y,$$

其中 L 为 D 的正向边界.

由格林公式得 $\int_L y\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=-\iint_D\mathrm{d}\sigma=-\pi$，故 $\iint_D f\cdot g\mathrm{d}\sigma=-\pi$.

【例 7】 设 $\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\varphi(x)+y^2}\equiv A(\neq 0)$，其中 L 是绕过原点的正向闭曲线，$\varphi(x)$ 可导且 $\varphi(1)=1$.

(1) 求 $\varphi(x)$；(2) 求 A.

【解】 (1) $P(x,y)=\frac{-y}{\varphi(x)+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{\varphi(x)+y^2}$，

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\varphi(x)+y^2-x\varphi'(x)}{[\varphi(x)+y^2]^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-\varphi(x)+y^2}{[\varphi(x)+y^2]^2},$$

任取一条不绕过原点的正向闭曲线 L，在 L 上任取两点 A,B，将 L 分成 L_1,L_2，过 A,B 作一条曲线 L_3，使 L_3 与 L_1,L_2 围成绕原点的闭曲线，如图 1-11-14 所示，由已知条件得

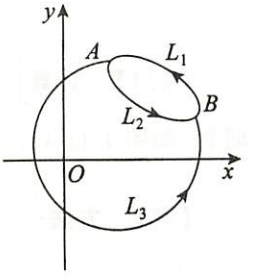


图 1-11-14

$$\oint_{L_1+L_3}\frac{x\,dy-y\,dx}{\varphi(x)+y^2}\equiv A,\quad \oint_{L_2^-+L_3}\frac{x\,dy-y\,dx}{\varphi(x)+y^2}\equiv A,$$

两式相减得 $\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{\varphi(x)+y^2}=0$，即曲线积分与路径无关，于是 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，

从而有 $\varphi(x)-x\varphi'(x)=-\varphi(x)$，即 $\varphi'(x)-\frac{2}{x}\varphi(x)=0$，解得 $\varphi(x)=Cx^2$，又因为 $\varphi(1)=1$，所以 $C=1$，于是 $\varphi(x)=x^2$.

(2) 作 $L_0:x^2+y^2=r^2$（其中 $r>0$，L_0 在 L 内，取逆时针方向），设由 L_0 围成的区域为 D_1，由 L_0,L 围成的区域为 D_2，由格林公式

$$\oint_{L+L_0^-}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0,$$

于是 $\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\oint_{L_0}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$，

而 $\oint_{L_0}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_{L_0}x\,dy-y\,dx=\frac{2}{r^2}\iint_{D_1}dx\,dy=2\pi$，故 $A=2\pi$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 8】 积分 $\int_L xy^2\,dx+y\varphi(x)\,dy$ 与路径无关，其中 φ 连续可导且 $\varphi(0)=0$.

计算 $\int_{(0,0)}^{(1,2)}xy^2\,dx+y\varphi(x)\,dy$.

【解】 因为 $\int_L xy^2\,dx+y\varphi(x)\,dy$ 与路径无关，所以 $y\varphi'(x)=2xy$，于是 $\varphi'(x)=2x$，$\varphi(x)=x^2+C$，因为 $\varphi(0)=0$，所以 $C=0$，于是 $\varphi(x)=x^2$.

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)}xy^2\,dx+x^2y\,dy=\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{(0,0)}^{(1,2)}=2.$$

【例 9】 设 L 为逐段光滑的有限有向曲线弧，$P(x,y),Q(x,y)$ 一阶连续可偏导，令 $\max\limits_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2+Q^2}=M$，又曲线弧 L 的长度为 l，证明：$\left|\int_L P\,dx+Q\,dy\right|\leqslant Ml$.

【证明】 $\left|\int_L P\,dx+Q\,dy\right|\leqslant\int_L|P\,dx+Q\,dy|$，

因为 $|P\,dx+Q\,dy|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\cdot\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{P^2+Q^2}\,ds\leqslant M\,ds$，

所以 $\left|\int_L P\,dx+Q\,dy\right|\leqslant\int_L|P\,dx+Q\,dy|\leqslant\int_L M\,ds=Ml$.

题型三　三维空间对坐标的曲线积分

【例 1】　计算$\int_L 2y\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y-yz^2\mathrm{d}z$，其中$L:\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ z=4,\end{cases}$从$z$轴正向看$L$方向为逆时针，如图 1-11-15.

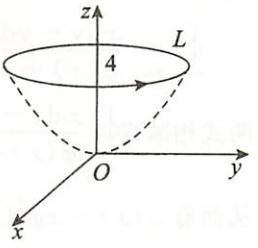


图 1-11-15

【解】　方法一　L的参数方程为$L:\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=2\sin t,\\ z=4,\end{cases}$（起点$t=0$，终点$t=2\pi$），则

$$\int_L 2y\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y-yz^2\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}4\sin t(-2\sin t)\mathrm{d}t+8\cos t\cdot 2\cos t\mathrm{d}t$$

$$=8\int_0^{2\pi}(2\cos^2 t-\sin^2 t)\mathrm{d}t=16\int_0^{\pi}(2\cos^2 t-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2 t-\sin^2 t)\mathrm{d}t=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2 t-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=32(2I_2-I_2)=8\pi.$$

方法二　设$\Sigma:z=4(x^2+y^2\leqslant 4)$，取上侧，$\Sigma$的法向量为$\vec{n}=\{0,0,1\}$，方向余弦为$\cos\alpha=0,\cos\beta=0,\cos\gamma=1$，由斯托克斯公式得

$$\int_L 2y\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y-yz^2\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2y & xz & -yz^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint_\Sigma(z-2)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_D(4-2)\mathrm{d}\sigma=2\iint_D\mathrm{d}\sigma=8\pi.$$

【例 2】　计算曲线积分$I=\oint_L(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中$L:\begin{cases}x-y+z+2=0,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$从$z$轴正向看，$L$为顺时针方向.

【解】　方法一　令$L:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=\sin t-\cos t-2\end{cases}$（起点$t=2\pi$，终点$t=0$），则

$$I=\oint_L(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{2\pi}^{0}[(-\cos t-2)(-\sin t)+(2\cos t-\sin t+2)\cos t+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{2\pi}^{0}(2\sin t+2\cos t+3\cos^2 t-\sin^2 t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}(4\sin^2 t-3)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}(4\sin^2 t-3)\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\pi}(4\sin^2 t-3)\mathrm{d}t=8\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t-6\pi=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t-6\pi=16I_2-6\pi=-2\pi.$$

方法二　设L所在的截口平面为Σ，取下侧，

微信公众号【贝大考研】(ID: dky66)

$$\vec{n}=\{-1,1,-1\},\quad \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

由斯托克斯公式得

$$I=\oint_L(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\mathrm{d}S,$$

由 $\Sigma:z=-x+y-2,D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$ 得

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

所以 $I=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\mathrm{d}S=-2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\pi.$

题型四　对坐标的曲线积分的应用

【例 1】 位于(0,1)的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\dfrac{k}{r^2}(k>0)$，其中 r 为两质点之间的距离，质点 M 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$，如图 1-11-16，求质点 A 对质点 M 所做的功.

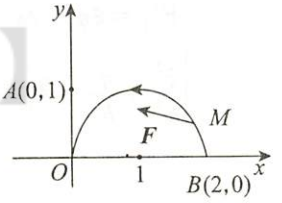


图 1-11-16

【解】 设质点 M 的坐标为 (x,y)，

$W=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，其中 $\vec{F}=\{P,Q\}$，

由题意，$|\vec{F}|=\dfrac{k}{x^2+(y-1)^2}$.

$\overrightarrow{MA}=\{-x,1-y\}$，$\vec{F}^0=\overrightarrow{MA}^0=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}\{-x,1-y\}$，

于是 $\vec{F}=|\vec{F}|\vec{F}^0=\dfrac{k}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}}\{-x,1-y\}$，则

$$W=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_L\frac{-kx}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x+\frac{k(1-y)}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y,$$

因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=3kx(y-1)[x^2+(y-1)^2]^{-\frac{5}{2}}$，所以曲线积分与路径无关，故

$$W=\int_L\frac{-kx}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x+\frac{k(1-y)}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$=\int_2^0 \frac{-kx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = k\left(1-\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

【例 2】 在变力 $\vec{F}=\{yz,zx,xy\}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问当 ξ,η,ζ 取何值时，力做功最大？求最大的功.

【解】 $W=\int_L yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$，其中 $L:\begin{cases}x=\xi t\\ y=\eta t\\ z=\zeta t\end{cases}$（起点 $t=0$，终点 $t=1$），

则 $W=\int_L yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=3\xi\eta\zeta\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=\xi\eta\zeta$.

令 $F=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)$，

由 $\begin{cases}F'_\xi=\eta\zeta+2\lambda\frac{\xi}{a^2},\\ F'_\eta=\xi\zeta+2\lambda\frac{\eta}{b^2},\\ F'_\zeta=\xi\eta+2\lambda\frac{\zeta}{c^2},\\ \frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$ 解得 $\xi=\frac{a}{\sqrt{3}},\eta=\frac{b}{\sqrt{3}},\zeta=\frac{c}{\sqrt{3}}$，所以 $W_{\max}=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

题型五 对面积的曲面积分的计算

【例 1】 计算 $\iint_\Sigma (x-y+2z)^2\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=R^2$.

【解】 由奇偶性得

$$\iint_\Sigma (x-y+2z)^2\mathrm{d}S=\iint_\Sigma (x^2+y^2+4z^2-2xy+4xz-4yz)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_\Sigma (x^2+y^2+4z^2)\mathrm{d}S,$$

由对称性得 $\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}S=\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}S=\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}S$，

于是 $\iint_\Sigma (x-y+2z)^2\mathrm{d}S=6\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}S=2\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$

$$=2R^2\iint_\Sigma \mathrm{d}S=2R^2\cdot 4\pi R^2=8\pi R^4.$$

【例 2】 计算 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=4$，且

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

【解】 由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 得 $x^2+y^2=2$（见图 1-11-17），

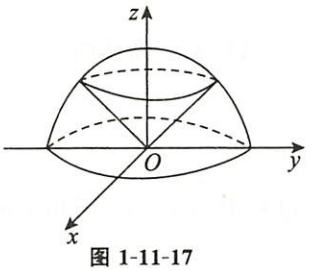


图 1-11-17

则 $\Sigma_1: z=\sqrt{4-x^2-y^2}\ ((x,y)\in D_{xy})$，其中 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 2$，

$$dS=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dx\,dy=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dx\,dy,$$

于是 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}\sqrt{x^2+y^2}\,dS=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dx\,dy$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{r^2dr}{\sqrt{4-r^2}}=4\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{r^2dr}{\sqrt{4-r^2}}\xlongequal{r=2\sin t}16\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2t\,dt$$

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)dt=8\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin 2t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=2\pi(\pi-2).$$

【例 3】 设曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=4$，求 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$.

【解】 设 Σ 位于 xOy 平面上侧的面为 Σ_1，由奇偶性得

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=2\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS.$$

$\Sigma_1: z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，$\Sigma_1$ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 4$，

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dx\,dy,$$

$$I=2\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS=4\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dx\,dy=4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{r^3}{\sqrt{4-r^2}}dr$$

$$=8\pi\int_0^2\frac{r^3}{\sqrt{4-r^2}}dr\xlongequal{r=2\sin t}8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8\sin^3t}{2\cos t}\cdot 2\cos t\,dt=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\,dt$$

$$=64\pi I_3=64\pi\cdot\frac{2}{3}=\frac{128\pi}{3}.$$

【例 4】 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0, z\geqslant 0)$.

【解】 由对称性和奇偶性得 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint\limits_{\Sigma}z\,dS$.

将 Σ 向 xOy 平面投影，则有 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，且 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant a^2$，

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint\limits_{\Sigma}z\,dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy=a\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy=\pi a^3.$$

【例 5】 设 $d(x,y,z)$ 为原点到椭球面 $\Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上一点 $P(x,y,z)$ 处的切平面的距离，求 $\iint\limits_{\Sigma}d(x,y,z)dS$.

微信公众号【研途尖考研】
(ID:yantu66)

【解】 椭球面 $\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上的点 $P(x,y,z)$ 处的法向量为

$$\vec{n}=\left\{\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right\},$$

过点 $P(x,y,z)$ 的切平面为 $\pi:\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0$，注意到 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，所以切平面方程为 $\pi:\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}-1=0$，$d(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$.

设曲面 $\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 位于平面 xOy 上的部分为 Σ_1，则

$$\iint_{\Sigma}d(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma_1}d(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

$$\Sigma_1:z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\quad D_{xy}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

$$z'_x=-\frac{c}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},\quad z'_y=-\frac{c}{b^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

则 $\iint_{\Sigma}d(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma_1}d(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint_{D_{xy}}\frac{c^2}{z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{abr\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}=4\pi abc.$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 6】 设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 平面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|\,y-2z\,|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

【解】 令 P 的坐标为 (x,y,z)，由 $S:x^2+y^2+z^2-yz-1=0$ 得 S 在点 P 处切平面的法向量为 $\vec{n}=\{2x,2y-z,2z-y\}$.

因为 S 在点 P 处的切平面与 xOy 平面垂直，所以有 $y=2z$，注意到 $P\in S$，

所以 P 点的轨迹方程为 $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1,\\ y=2z.\end{cases}$

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|\,y-2z\,|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S,$$

将 S 向 xOy 平面投影，则 $D_{xy}:x^2+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}\leqslant 1$，

$x^2+y^2+z^2-yz-1=0$ 两边对 x 求导得 $2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y-2z}$，

$x^2+y^2+z^2-yz-1=0$ 两边对 y 求导得 $2y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}-z-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z-2y}{2z-y}$，

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{|y-2z|}dx\,dy$$

$$=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}dx\,dy$$

于是 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})\,dx\,dy$

$$=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy=\sqrt{3}\times\pi\times1\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.$$

题型六　对坐标的曲面积分

【例 1】　计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)z\,dx\,dy$，其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant0)$ 取上侧.

【解】　将 Σ 向 xOy 平面投影，有 $\Sigma:z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant4$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)z\,dx\,dy=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2r^3\sqrt{4-r^2}\,dr=2\pi\int_0^2r^3\sqrt{4-r^2}\,dr\xlongequal{r=2\sin t}2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}8\sin^3t\cdot2\cos t\cdot2\cos t\,dt$$

$$=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\cdot\cos^2t\,dt=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\cdot(1-\sin^2t)\,dt$$

$$=64\pi(I_3-I_5)=64\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{128\pi}{15}.$$

【例 2】　设 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant0)$，取外侧，计算 $\iint\limits_{\Sigma}yz\,dz\,dx+2dx\,dy$.

【解】　$\iint\limits_{\Sigma}yz\,dz\,dx=2\iint\limits_{D_{zx}}z\sqrt{4-x^2-z^2}\,dx\,dz$

$$=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^2r^2\sin\theta\sqrt{4-r^2}\,dr$$

$$=4\int_0^2r^2\sqrt{4-r^2}\,dr\xlongequal{r=2\sin t}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2t\cdot2\cos t\cdot2\cos t\,dt$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^22t\,d(2t)=8\int_0^{\pi}\sin^2t\,dt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\,dt=4\pi,$$

$\iint\limits_{\Sigma}2dx\,dy=2\iint\limits_{\Sigma}dx\,dy=2\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy=8\pi$，则 $\iint\limits_{\Sigma}yz\,dz\,dx+2dx\,dy=12\pi$.

【例 3】　计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy\,dz$，其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=a^2(z\leqslant0)$，取上侧（如图 1-11-18），其中 $a>0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【解】 **方法一** 因为在 Σ 上恒有 $x^2+y^2+z^2=a^2$，所以

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

将 Σ 向 yOz 平面投影，设 Σ 位于 yOz 平面前侧的部分记为 Σ_1，由奇偶性得 $I=2\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，且 $\Sigma_1:x=\sqrt{a^2-y^2-z^2}$，$D_{yz}:y^2+z^2\leqslant a^2(z\leqslant 0)$，于是

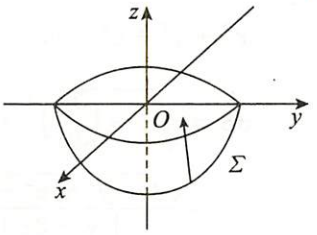


图 1-11-18

$$I=2\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-2\iint_{D_{yz}}\sqrt{a^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-2\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r=\pi\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}(a^2-r^2)=-\frac{2\pi a^3}{3}.$$

方法二 因为在 Σ 上恒有 $x^2+y^2+z^2=a^2$，所以 $I=\iint_{\Sigma}\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，补充 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$ 取下侧，$I=\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oint_{\Sigma+\Sigma_0}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma_0}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，由高斯公式得 $\oint_{\Sigma+\Sigma_0}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=-\frac{2\pi a^3}{3}$，而 $\iint_{\Sigma_0}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，所以

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{2\pi a^3}{3}.$$

微信公众号【高数考研】(id: djky66)

【例 4】 设 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=a^2$，取外侧，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是其外法向量的方向余弦，求 $I=\iint_{\Sigma}\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S$.

【解】 $I=\iint_{\Sigma}\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S=\frac{1}{a^3}\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$

$$=\frac{1}{a^3}\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a^3}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{3}{a^3}\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\frac{3}{a^3}\cdot\frac{4\pi a^3}{3}=4\pi.$$

【例 5】 求 $I=\iint_{\Sigma}\frac{ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 $\Sigma:z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧($a>0$).

【解】 $I=\iint_{\Sigma}\frac{ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

补充 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$ 取下侧，则

$$I=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\left(\oint_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint_{\Sigma_0}\right)ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由高斯公式得

$$\oint_{\Sigma+\Sigma_0}ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint_{\Omega}(2z+3a)\mathrm{d}v=-\int_{-a}^{0}(2z+3a)\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2-z^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-\pi\int_{-a}^{0}(2z+3a)(a^2-z^2)\mathrm{d}z=-\frac{3\pi a^4}{2},$$

而$\iint\limits_{\Sigma_0}ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_0}(z+a)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}a^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\pi a^4.$

故$I=-\frac{1}{2}\pi a^3.$

【例 6】 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是由$L:\begin{cases}z=\sqrt{y-1},\\x=0\end{cases}(1\leqslant y\leqslant 3)$绕$y$轴旋转一周所成的有侧曲面，其中曲面上任一点的法向量与y轴正向成钝角.

【解】 $\Sigma:y=x^2+z^2+1$，补充$\Sigma_0:y=3(x^2+z^2\leqslant 2)$，取侧指向$y$轴正方向，则

$$I=\left(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_0}\right)(8y+1)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}(8y+1)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$=\int_1^3\mathrm{d}y\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant y-1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=\pi\int_1^3(y-1)\mathrm{d}y=2\pi,$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

又$\iint\limits_{\Sigma_0}(8y+1)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_0}2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$$=-16\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant 2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-32\pi,$$

于是$I=\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=34\pi.$

【例 7】 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是$x^2+y^2=4$被$x+z=2$和$z=0$截出部分的外侧.

【解】 补充$\Sigma_1:z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$取下侧，$\Sigma_2:x+z=2$(位于柱体内的部分)取上侧，

$$I=\left(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}\right)(-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}(-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}v=0,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-4\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}(-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_2}(z+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

将Σ_2向xOy平面上投影，则$\Sigma_2:z=2-x$，$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 4$，则

$$\iint_{\Sigma_2}(z+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}(3-x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=12\pi,$$

于是 $I=\iint_{\Sigma}(-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-8\pi.$

题型七　场论初步

【例 1】　求函数 $u=\cos^2(xy)+\frac{y}{z^2}$ 在点 $M_0(1,-1,1)$ 处沿直线 $\begin{cases}x-z-2=0,\\ y-2z+4=0\end{cases}$ 在平面 $x+y-z-5=0$ 上投影直线 L 的方向向量(其中 L 的方向向量与 z 轴成锐角)的方向导数.

【解】　过直线 $\begin{cases}x-z-2=0,\\ y-2z+4=0\end{cases}$ 的平面束为 $x-z-2+\lambda(y-2z+4)=0$,即 $x+\lambda y-(1+2\lambda)z+4\lambda-2=0$,由 $\{1,\lambda,-1-2\lambda\}\cdot\{1,1,-1\}=0$ 得 $\lambda=-\frac{2}{3}$,平面束中与已知平面垂直的平面为 $x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-\frac{14}{3}=0$,即 $3x-2y+z-14=0$.

故投影直线为 $L:\begin{cases}x+y-z-5=0,\\ 3x-2y+z-14=0.\end{cases}$

方向向量 $\vec{s}=\{1,1,-1\}\times\{3,-2,1\}=\{-1,-4,-5\}$,方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{42}},\quad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{42}},\quad \cos\gamma=\frac{5}{\sqrt{42}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-y\sin 2xy,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-x\sin 2xy+\frac{1}{z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2y}{z^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,-1,1)}=-\sin 2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,-1,1)}=\sin 2+1,\quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,-1,1)}=2,$$

于是 $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\Big|_{(1,-1,1)}=\frac{14+3\sin 2}{\sqrt{42}}.$

【例 2】　设 $\boldsymbol{A}=\{x^2+y^2+z^2,x+y+z,xyz\}$,求 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}$.

【解】　$$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2+y^2+z^2 & x+y+z & xyz\end{vmatrix}=\{xz-1,2z-yz,1-2y\}.$$

测试题

一、选择题

1. 设 $\frac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某二元函数的全微分,则 a 等于(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

2. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\oiint_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}S$ 等于(　　).

(A) $\frac{\pi a^5}{9}$　　(B) $\frac{2\pi a^5}{9}$　　(C) $\frac{\pi a^5}{3}$　　(D) $\frac{4\pi a^4}{3}$

二、填空题

1. 设 $L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$，则 $\int_L |y| \mathrm{d}s =$ _____.

2. 平面 $x-y+z=1$ 被 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 所截出的椭圆面积为_____.

3. 设 $\int_L [\mathrm{e}^x+2f(x)]y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关且 $f(0)=1$，则 $f(x)=$ _____.

4. 设 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x,y)\mathrm{d}x+x\cos y\mathrm{d}y=t^2$，其中 $f(x,y)$ 一阶连续可偏导，则 $f(x,y)=$ _____.

5. 质点在平面上的变力 $\boldsymbol{F}=\{y+3x,2y-x\}$ 作用下沿 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 逆时针方向一周所做的功为_____.

6. 设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}u)=$ _____.

三、解答题

1. 计算 $\oint_L (x-2y)^2\mathrm{d}s$，其中 $L: x^2+y^2=2x$.

2. 计算 $I=\oint_L (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s$，其中 $L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

3. 计算 $\oint_L (1+y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$，其中 L 为由 $y=\sin x$ 及 $y=2\sin x(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 围成的正向闭曲线，见图 1-11-19.

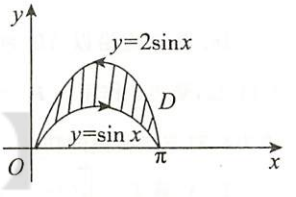


图 1-11-19

4. 求 $I=\int_L \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+ax)\mathrm{d}y$，其中 L 为从点 $A(2a,0)$ 经曲线 $y=-\sqrt{2ax-x^2}$ 至点 $O(0,0)$ 的有向曲线弧段，见图 1-11-20.

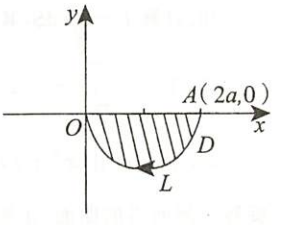


图 1-11-20

5. 设 $f(x)$ 可导，L 是连接点 $A(\pi,2)$，$B(3\pi,4)$ 的线段下方的任意正向光滑曲线且 L 与 $\overline{AB}$ 围成的区域面积为 2，计算 $I=\int_L [f(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[f'(y)\sin x-\pi]\mathrm{d}y$.

6. 设 $Q(x,y)$ 一阶连续可偏导，$\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关且满足 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，求 $Q(x,y)$.

7. 设 $f(x),g(x)$ 连续可导，对平面上任意分段光滑的曲线 L，曲线积分 $I=\int_L 2[xf(y)+g(y)]\mathrm{d}x+[x^2g(y)+2xy^2-2xf(y)]\mathrm{d}y$ 与路径无关.

(1) 当 $f(0)=-2,g(0)=1$ 时，求 $f(x),g(x)$；

(2) 设 L 是从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,\frac{\pi}{2})$ 的分段光滑曲线，求 I.

8. 计算 $I=\int_L \frac{(y-2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+(y-2)^2}$，其中 $L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，取逆时针方向.

9. 设 $f(x)$ 连续可导且 $\oint_L \frac{f(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}\equiv A\neq 0$，其中 L 是任一条绕原点的正向闭曲线. 求 $f(x)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

10. 设 $f(x)$ 可导且 $f(\pi)=1$，又曲线积分 $\int_L [\sin x - f(x)]\frac{y\mathrm{d}x}{x} + f(x)\mathrm{d}y$ 在右半平面上与路径无关.

(1) 求 $f(x)$；(2) 当 L 为从点 $A(1,0)$ 到点 $B(\pi,\pi)$ 时，求积分值.

11. 设 $f(x)$ 连续可导，求 $I=\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y}\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\mathrm{d}y$，其中 L 为从点 $A\left(3,\frac{2}{3}\right)$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段.

12. 计算 $\oint_L yz\mathrm{d}x + 3xz\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}z$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2=4y,\\ 3y-z+1=0,\end{cases}$ 从 z 轴正向看 L 为逆时针方向.

13. 求 $I=\int_L (x^2+z^2)\mathrm{d}y$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4x,\\ x^2+y^2=2x\end{cases}$ $(z\geqslant 0)$，从 z 轴正向看 L 为逆时针.

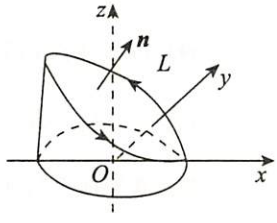


图 1-11-21

14. 当 λ 取何值时，向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=\{2xy(x^4+y^2)^\lambda, -x^2(x^4+y^2)^\lambda\}$ 在 $x>0$ 上为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

15. 计算 $I=\oint_L (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\end{cases}$ $(a>0,h>0)$，从 x 轴正向看 L 为逆时针方向，见图 1-11-21.

16. 设 P 点沿以 AB 为直径的半圆周 L 从点 $A(1,2)$ 到点 $B(3,4)$ 运动，如图 1-11-22，受力 $\boldsymbol{F}$ 作用，$|\boldsymbol{F}|=|OP|$，其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$，求力 $\boldsymbol{F}$ 对质点所做的功.

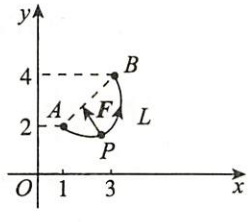


图 1-11-22

17. 计算 $I=\iint_\Sigma (2x-3y+z^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $x+y+z=2$ 被 $x^2+y^2=1$ 截出的部分.

18. 计算 $I=\iint_\Sigma z\mathrm{d}S$，其中 Σ 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=4x$ 截出的有限部分.

19. 求 $I=\iint_\Sigma [(x-2y)^2+x^2 z]\mathrm{d}S$，其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的部分.

20. 求 $I=\iint_\Sigma (x^3+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 由曲线 $L:\begin{cases}z=1-x^2,\\ y=0\end{cases}$ $(|x|\leqslant 1)$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面，正侧向外.

21. 计算 $I=\iint_\Sigma (x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧.

22. 计算 $\iint_\Sigma (y^2-6xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x^2+3y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ $(z\geqslant 0)$ 上侧.

23. 计算 $I=\iint_\Sigma \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1(z\geqslant 0)$，取上侧.

24. 设对 $x>0$ 内任意光滑有向闭曲面 Σ，总有 $\oint_\Sigma xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，其中 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，求 $f(x)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

测试题参考答案

一、选择题

1. $P(x,y)=\dfrac{x+ay}{(x+y)^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{y}{(x+y)^2}$，因为$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$为某二元函数的全微分，所以$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，于是 $a=2$，应选(C).

2. 由对称性得$\oiint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\dfrac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\dfrac{a^2}{3}\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\dfrac{a^2}{3}\cdot 4\pi a^2=\dfrac{4\pi a^4}{3}$，应选(D).

二、填空题

1. 令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$则曲线极坐标为 $L:r^2=a^2\cos 2\theta$，$\mathrm{d}S=\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$，由对称性得 $I=4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta=4a^2\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. $\Sigma:z=1-x+y$，其中 $D_{xy}:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，于是 $A=\displaystyle\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\pi ab$.

3. 由柯西-黎曼条件得 $f'(x)=\mathrm{e}^x+2f(x)$ 或 $f'(x)-2f(x)=\mathrm{e}^x$，解得 $f(x)=\left[\displaystyle\int\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\int-2\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int-2\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$，由 $f(0)=1$ 得 $C=2$，于是 $f(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$.

4. 由柯西-黎曼条件得 $f'_y(x,y)=\cos y$，则 $f(x,y)=\sin y+\varphi(x)$，$\displaystyle\int_{(0,0)}^{(t,t^2)}f(x,y)\mathrm{d}x+x\cos y\mathrm{d}y=\int_0^t\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_0^{t^2}t\cos y\mathrm{d}y=\int_0^t\varphi(x)\mathrm{d}x+t\sin t^2$，于是$\displaystyle\int_0^t\varphi(x)\mathrm{d}x+t\sin t^2=t^2$，两边求导得 $\varphi(t)=2t-\sin t^2-2t^2\cos t^2$，故 $f(x,y)=\sin y+2x-\sin x^2-2x^2\cos x^2$.

5. $W=\displaystyle\oint_L(y+3x)\mathrm{d}x+(2y-x)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D(-1-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
$=-2\cdot\pi\cdot 2\cdot 1=-4\pi$.

6. 令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$u=\ln r$，则 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}u)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r^2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r^2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{z}{r^2}\right)=\dfrac{r^2-2x^2}{r^4}+\dfrac{r^2-2y^2}{r^4}+\dfrac{r^2-2y^2}{r^4}=\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

三、解答题

1. $\displaystyle\oint_L(x-2y)^2\mathrm{d}s=\oint_L(x^2+4y^2-4xy)\mathrm{d}s=\oint_L(x^2+4y^2)\mathrm{d}s$，令$\begin{cases}x-1=\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，则$\displaystyle\oint_L(x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(2+2\cos\theta+3\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=4\pi+3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=4\pi+3\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=4\pi+6\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=4\pi+12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=4\pi+3\pi=7\pi$.

2. L 的极坐标方程为 $L:r^2=a^2\cos 2\theta$，令 L 位于第一象限的部分为 L_1，由对称性和奇偶性得 $I=$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

$\oint_L (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s = 4\int_{L_1}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s$，而 $\mathrm{d}s = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$，所以 $I = 4\int_{L_1}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(a^2\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = 2a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}(2\theta) = 2a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t = 2a^4$.

3. 方法一：$\oint_L (1+y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = \int_{L_1}(1+y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + \int_{L_2}(1+y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$

$+ x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^0 (1+4\sin^2 x)\mathrm{d}x + 4x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = -3\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x - 3\int_0^{\pi} x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = -6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

$-\frac{3}{2}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}(\sin^2 x) = -\frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}x\sin^2 x\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{3\pi}{2} + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{3\pi}{4}$.

方法二：由格林公式得 $\oint_L (1+y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = \iint_D (y-2y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{2\sin x} y\,\mathrm{d}y = -\frac{3\pi}{4}$.

4. $I = \int_L \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y + ax)\mathrm{d}y = \oint_{L+\overline{OA}} \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y + ax)\mathrm{d}y - \int_{\overline{OA}} \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y + ax)\mathrm{d}y$，

由格林公式得 $\oint_{L+\overline{OA}} \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y + ax)\mathrm{d}y = -a\iint_D \mathrm{d}\sigma = -\frac{\pi a^3}{2}$，又 $\int_{\overline{OA}} \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y + ax)\mathrm{d}y =$

$\int_0^{2a} 0\mathrm{d}x = 0$，所以原式 $= -\frac{\pi}{2}a^3$.

5. 方法一：$\overline{AB}$ 所在的直线方程为 $y = \frac{x}{\pi} + 1$. $I = \int_L [f(y)\cos x - \pi y]\mathrm{d}x + [f'(y)\sin x - \pi]\mathrm{d}y =$

$\int_L f(y)\cos x\,\mathrm{d}x + f'(y)\sin x\,\mathrm{d}y - \pi\int_L y\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$，其中 $\int_L f(y)\cos x\,\mathrm{d}x + f'(y)\sin x\,\mathrm{d}y = \int_L \mathrm{d}[f(y)\sin x] =$

$f(y)\sin x\Big|_{(\pi,2)}^{(3\pi,4)} = 0$，于是 $I = -\pi\int_L y\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = -\pi\oint_{L+\overline{BA}} y\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \pi\int_{\overline{BA}} y\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = -\pi\iint_D -\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y +$

$\pi\int_{3\pi}^{\pi}\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\mathrm{d}x = 2\pi - \pi(6\pi+2) = -6\pi^2$.

方法二：$P(x,y) = f(y)\cos x - \pi y, Q(x,y) = f'(y)\sin x - \pi$，$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \pi, I =$

$\left(\oint_{L+\overline{BA}} + \int_{\overline{AB}}\right)[f(y)\cos x - \pi y]\mathrm{d}x + [f'(y)\sin x - \pi]\mathrm{d}y$，而 $\oint_{L+\overline{BA}} [f(y)\cos x - \pi y]\mathrm{d}x + [f'(y)\sin x - \pi]\mathrm{d}y =$

$\iint_D \pi\mathrm{d}\sigma = 2\pi$，$\int_{\overline{AB}}[f(y)\cos x - \pi y]\mathrm{d}x + [f'(y)\sin x - \pi]\mathrm{d}y = \int_{\pi}^{3\pi}\left[f\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos x - \pi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\right]\mathrm{d}x +$

$\frac{1}{\pi}\left[f'\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\sin x - \pi\right]\mathrm{d}x = -2\pi(3\pi+1)$，故原式 $= -6\pi^2$.

6. 由柯西-黎曼条件得 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$，于是 $Q(x,y) = x^2 + \varphi(y)$，$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 [t^2 + \varphi(y)]\mathrm{d}y =$

$t^2 + \int_0^1 \varphi(y)\mathrm{d}y$，$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^t [1 + \varphi(y)]\mathrm{d}y$，于是有 $t^2 + \int_0^1 \varphi(y)\mathrm{d}y = \int_0^t [1+\varphi(y)]\mathrm{d}y$，两边对 t 求导得 $\varphi(t) = 2t - 1$，于是 $\varphi(y) = 2y - 1$，故 $Q(x,y) = x^2 + 2y - 1$.

7. (1) $P(x,y) = 2[xf(y) + g(y)], Q(x,y) = x^2 g(y) + 2xy^2 - 2xf(y)$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xg(y) + 2y^2 -$

$2f(y)$，$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xf'(y) + 2g'(y)$，因为曲线积分与路径无关，所以有 $2xg(y) + 2y^2 - 2f(y) = 2xf'(y) +$

$2g'(y)$，于是有 $f'(y) = g(y), y^2 - f(y) = g'(y)$，从而 $f''(y) + f(y) = y^2$，其通解为 $f(y) = C_1\cos y +$

$C_2\sin y + y^2 - 2$. 由 $f(0) = -2, f'(0) = g(0) = 1$ 得 $C_1 = 0, C_2 = 1$，故 $f(x) = \sin x + x^2 - 2, g(x) =$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$f'(x)=2x+\cos x$.

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\mathrm{d}y+\int_0^{\pi}2\left[xf\left(\frac{\pi}{2}\right)+g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\pi^2\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)$.

8. $P(x,y)=\frac{y-2}{x^2+(y-2)^2}$, $Q(x,y)=\frac{-x}{x^2+(y-2)^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-(y-2)^2}{[x^2+(y-2)^2]^2}=\frac{\partial P}{\partial y}((x,y)\neq(0,2))$, 作 $L_0:x^2+(y-2)^2=r^2(0<r<1)$ 取逆时针方向, 设 L 与 L_0 围成的区域为 D_1, L_0 围成的区域为 D_2, 在 D_1 上使用格林公式得 $\oint\limits_{L+L_0^-}\frac{(y-2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+(y-2)^2}=\iint\limits_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 于是 $I=\oint\limits_L\frac{(y-2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+(y-2)^2}=\oint\limits_{L_0}\frac{(y-2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+(y-2)^2}$, 而 $\oint\limits_{L_0}\frac{(y-2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+(y-2)^2}=\frac{1}{r^2}\oint\limits_{L_0}(y-2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=\frac{-2}{r^2}\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi$, 于是 $I=\int_L\frac{(y-2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+(y-2)^2}=-2\pi$.

9. 设 L 为任意一条不绕原点的正向闭曲线, 在 L 上任取两点 A,B, 点 A,B 将 L 分成 L_1 和 L_2, 以 A 为起点 B 为终点作 L_3, 使得 $L_1^-+L_3$ 与 L_2+L_3 都是绕原点的正向闭曲线, 如图 1-11-23, 由已知条件得 $\oint\limits_{L_1^-+L_3}\frac{f(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}\equiv A$ 及

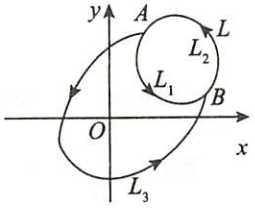


图 1-11-23

$\oint\limits_{L_2+L_3}\frac{f(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}\equiv A$, 两式相减得 $\oint\limits_L\frac{f(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$, 即曲线积分与路径无关. $P(x,y)=\frac{f(y)}{2x^2+y^4}$, $Q(x,y)=\frac{2xy}{2x^2+y^4}$, 由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 得 $\begin{cases}f'(y)=-2y,\\ f'(y)y-4f(y)=2y^2,\end{cases}$ 由 $f'(y)=-2y$ 得 $f(y)=-y^2+C$, 代入 $f'(y)y-4f(y)=2y^2$ 中得 $C=0$, 从而 $f(y)=-y^2$, 故 $f(x)=-x^2$.

10. (1) $P(x,y)=[\sin x-f(x)]\cdot\frac{y}{x}$, $Q(x,y)=f(x)$, 由柯西-黎曼条件得 $f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{\sin x}{x}$,

解得 $f(x)=\left[\int\frac{\sin x}{x}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=\frac{C-\cos x}{x}$,

由 $f(\pi)=1$ 得 $C=\pi-1$, 于是 $f(x)=\frac{\pi-1-\cos x}{x}$.

(2) $I=\int_L f'(x)y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y=\int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)}\mathrm{d}[f(x)y]=f(x)y\Big|_{(1,0)}^{(\pi,\pi)}=\pi$.

11. $P(x,y)=\frac{1+y^2f(xy)}{y}=\frac{1}{y}+yf(xy)$, $Q(x,y)=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]=xf(xy)-\frac{x}{y^2}$,

因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 所以曲线积分与路径无关,

取 $L_0:y=\frac{2}{x}$ (起点 $x=3$, 终点 $x=1$),

则 $I=\int_3^1\left[\frac{x}{2}+\frac{2}{x}f(2)\right]\mathrm{d}x+\left[-\frac{2}{x}f(2)+\frac{x}{2}\right]\mathrm{d}x=\int_3^1x\mathrm{d}x=-4$.

12. 设 L 所在的截面为 Σ, 按右手准则 Σ 取上侧, 法向量为 $\vec{n}=\{0,-3,1\}$,

法向量的方向余弦为 $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{10}}$,

由斯托克斯公式 $\oint\limits_L yz\mathrm{d}x+3xz\mathrm{d}y-xy\mathrm{d}z=\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yz & 3xz & -xy\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{10}}\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}0 & -3 & 1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yz & 3xz & -xy\end{vmatrix}\mathrm{d}S$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

$$=\frac{-2}{\sqrt{10}}\iint_{\Sigma}(3y-z)\mathrm{d}S=\frac{2}{\sqrt{10}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S.$$

由 $\Sigma:z=3y-1(x^2+y^2\leqslant 4y)$ 得 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{10}\,\mathrm{d}\sigma$，于是原式 $=\frac{2}{\sqrt{10}}\sqrt{10}\cdot\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma=8\pi$.

13. 设 L 所在的截曲面块为 Σ，按右手准则 Σ 取上侧. 法向量为 $\vec{n}=\left\{\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4x-x^2-y^2}},1\right\}$，

法向量的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{x-2}{2},\cos\beta=\frac{y}{2},\cos\gamma=\frac{z}{2}$，

由斯托克斯公式 $\int_L(x^2+z^2)\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & x^2+z^2 & 0\end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}-2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

因为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\mathrm{d}S$，所以 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\mathrm{d}S=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{x-2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

于是 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(-2z\cdot\frac{x-2}{z}+2x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi$.

14. 根据题意有 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy(x^4+y^2)^{\lambda},\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x(x^4+y^2)^{\lambda}+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1},\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-2x(x^4+y^2)^{\lambda}-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1}$，

由 $2x(x^4+y^2)^{\lambda}+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}=-2x(x^4+y^2)^{\lambda}-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1}$，

整理得 $4x(x^4+y^2)^{\lambda}+4\lambda x(x^4+y^2)^{\lambda}=0$，因为 $x>0$，所以 $\lambda=-1$.

$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy}{x^4+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y=\int_1^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y-\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y=-\arctan\frac{y}{x^2}\Big|_0^y=-\arctan\frac{y}{x^2}$，所以满足条件的二元函数为 $u(x,y)=-\arctan\frac{y}{x^2}+C$.

15. 设 L 的截口面为 Σ，取上侧，$\vec{n}=\left\{\frac{1}{a},0,\frac{1}{h}\right\}=\frac{1}{ah}\{h,0,a\}$，

方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}},\cos\beta=0,\cos\gamma=\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$，

由斯托克斯公式得 $I=\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}h & 0 & a\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{-2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$，

而 $\Sigma:z=h\left(1-\frac{x}{a}\right),D_{xy}:x^2+y^2\leqslant a^2,\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\mathrm{d}\sigma$，

于是 $I=\frac{-2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=-\frac{2(a+h)}{a}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma=-2\pi a(a+h)$.

16. 令点 P 的坐标为 (x,y)，$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

$\overrightarrow{OP}=\{x,y\},\overrightarrow{OP}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\boldsymbol{F}^0=\left\{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right\}=\{-\sin\alpha,\sin\beta\}=\{-\cos\beta,\cos\alpha\}=\left\{-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$，

微信公众号【可华考研】(ID: djky66)

则$\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{F}^0=\{-y,x\}$,于是$W=\int_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\oint_{L+\overline{BA}} -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}} -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$,

而$\oint_{L+\overline{BA}} -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$,又直线$\overline{BA}$:$y=x+1$(起点$x=3$,终点$x=1$),

则$\int_{\overline{BA}} -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_3^1 -(x+1)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x=2$,故$W=\int_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=2(\pi-1)$.

17. 将Σ向xOy平面投影,则有$\Sigma:z=2-x-y$,$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

于是$I=\iint_\Sigma (2x-3y+z^2)\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}[2x-3y+(2-x-y)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}(-2x-7y+2xy+x^2+y^2+4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2+4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(r^2+4)\mathrm{d}r=\frac{9\sqrt{3}\pi}{2}.$$

18. 将Σ向xOy平面投影得$\Sigma:z=\sqrt{x^2+y^2}$,$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 4x$,

$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则$I=\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$则$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,$0\leqslant r\leqslant 4\cos\theta$,

于是$I=\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\cos\theta}r^2\mathrm{d}r=\frac{64\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{128\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{128\sqrt{2}}{3}I_3=\frac{256\sqrt{2}}{9}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

19. $\Sigma:z=\sqrt{x^2+y^2}$,其中$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$,$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,由对称性得

$I=\iint_\Sigma[(x-2y)^2+x^2z]\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+4y^2+x^2\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+4y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=5\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\cos^2\theta\mathrm{d}r$$

$$=\frac{5\sqrt{2}\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{5}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{5\sqrt{2}\pi}{4}+\frac{4\sqrt{2}}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{5\sqrt{2}\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}\pi}{5}=\frac{29\sqrt{2}\pi}{20}.$$

20. $\Sigma:z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$,令$\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant 1)$且取下侧,

则$I=\oint_{\Sigma+\Sigma_0}(x^3+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_0}(x^3+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

而$\oint_{\Sigma+\Sigma_0}(x^3+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}v=3\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant 1-z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=3\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-z}}r^3\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{2}\int_0^1(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2},$$

$\iint_{\Sigma_0}(x^3+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi$,所以原式$=\frac{3\pi}{2}$.

21. 令 $\Sigma_0: z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$，取下侧，

则 $I=\left(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_0}\right)(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

而 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=$

$-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=-\dfrac{192\pi}{5}$，

$\iint\limits_{\Sigma_0}(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_0}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=-\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=-4\pi$，

故原式 $=-\dfrac{192\pi}{5}+4\pi=-\dfrac{172\pi}{5}$.

22. 补 $\Sigma_0: z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$ 的下侧，则 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_0}$，

而 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}(y^2-6xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+3y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(-6y+6y+0)\mathrm{d}v=0$，

$\iint\limits_{\Sigma_0}(y^2-6xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+3y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_0}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=-8\pi$，

故原式 $=8\pi$.

23. $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，取 $\Sigma_0: z=0(x^2+y^2\leqslant 1)$ 下侧，

则 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_0}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(1+2z)\mathrm{d}v=\int_0^1(1+2z)\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{7\pi}{6}$，

$\iint\limits_{\Sigma_0}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，于是 $I=\dfrac{7\pi}{6}$.

24. 由高斯公式

$\oiint\limits_{\Sigma}xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iiint\limits_{\Omega}[f(x)+xf'(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}]\mathrm{d}v=0$，

得 $f(x)+xf'(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0$，整理得 $f'(x)+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$，

解得 $f(x)=\left[\int\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\mathrm{e}^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+C)}{x}$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，所以 $C=-1$，于是 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{x}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第二部分 线性代数

第一章 行列式
第二章 矩阵
第三章 向量
第四章 线性方程组
第五章 特征值与特征向量
第六章 二次型及其标准形

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第一章　行列式

大纲点击

1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

基础复习模块——基本概念、原理、考点

一、行列式理论

(一)行列式的基本概念

1. 逆序——设 i,j 是一对不等的正整数，若 $i>j$，则称(i,j)为一对逆序.

2. 逆序数——设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，该排列所含的逆序总数称为该排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$，逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

3. 对换——对排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中任意两个数的位置进行对调，称为对该排列的一次对换，对换改变排列的奇偶性.

4. 行列式——由 n^2 个数组成的下列记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式，规定

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

特别地，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

5. 余子式与代数余子式——把行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 所在的 i 行元

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

素和j列元素去掉，剩下的$n-1$行和$n-1$列元素按照元素原来的排列次序构成的$n-1$阶行列式，称为元素a_{ij}的余子式，记为M_{ij}，称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的代数余子式.

【注解】

(1)行列式无论多少阶，从本质上来说都是一个数或一个式子(如果行列式元素中含字母).

(2)按照行列式的定义，除了二阶和三阶行列式外，一般的高阶行列式运算非常复杂.

(3)按照行列式的定义，若行列式中元素都是整数，则该行列式一定是整数.

(二)几个特殊的高阶行列式

1. 主(副)对角、上(下)三角行列式

$$(1)\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$(2)\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

$$(3)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$(4)\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 范德蒙行列式

$$V(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

3. 分块行列式

(1)设$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$都是方阵，则$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_1|\cdot|\boldsymbol{A}_2|\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{A}_m|.$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(2)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m,n 阶矩阵,则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

(3)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m,n 阶矩阵,则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

【注解】

(1)范德蒙行列式 $V(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0$ 的充分必要条件是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不相等.

(2)特殊行列式结论显示,行列式的计算一般有两个思路:将一般行列式转化为上(下)三角行列式或对行列式进行降阶.

(三)行列式的性质

1. 一般行列式化为上(下)三角行列式的性质

性质 1 行列式与其转置行列式相等.

性质 2 对调行列式的两行(或列),行列式变为其相反数.

性质 3 行列式的某行(或列)有公因子可以提取.

推论 1 若行列式某行(或列)的元素全是零,则该行列式为零.

推论 2 行列式某两行(或两列)相同,则行列式为零.

推论 3 行列式某两行(或两列)的元素成比例,则行列式为零.

性质 4 行列式某行(或列)为两个元素之和时,行列式可拆为两个行列式之和,如:

$$\begin{vmatrix}a_1+b_1 & c_1 & d_1\\ a_2+b_2 & c_2 & d_2\\ a_3+b_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1 & c_1 & d_1\\ b_2 & c_2 & d_2\\ b_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}.$$

性质 5 行列式某行(或某列)的倍数加到另一行(或另一列),行列式不变.

2. 行列式的降阶性质

性质 1 行列式等于某行(或列)的元素与其代数余子式之积的和,即

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

$$|\boldsymbol{A}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

性质 2 行列式某行(或某列)的元素与另一行(或列)元素的代数余子式之积的和为零.

【注解】

计算行列式时,若某行(或列)的零元素较多时,一般采用降阶性质计算.

二、行列式理论在线性方程组中的应用——克拉默法则

对方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \quad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{Ⅰ}$$

及

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{Ⅱ}$$

其中(Ⅱ)称为非齐次方程组,(Ⅰ)称为(Ⅱ)对应的齐次方程组或(Ⅱ)的导出方程组.

令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\cdots$, $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$,

其中 D 称为系数行列式,我们有

定理 1 (Ⅰ)只有零解的充分必要条件是 $D\neq 0$;(Ⅰ)有非零解(或者(Ⅰ)有无穷多个解)的充分必要条件是 $D=0$.

定理 2 (Ⅱ)有唯一解的充分必要条件是 $D\neq 0$,且 $x_i=\dfrac{D_i}{D}(i=1,2,\cdots,n)$;当 $D=0$ 时,(Ⅱ)要么无解,要么有无穷多个解.

【注解】

(1)用行列式求解线性方程组必须要求方程组的个数与未知数的个数相同.

(2)当系数行列式为 0 时,用克拉默法则无法求解方程组.

微信公众号【数学考研】(ID: djky66)

重点题型分析

题型一 行列式的定义与性质

【例 1】 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x+2 & -1 & 2 \\ 3 & 2x-1 & 1-x \\ 0 & -1 & 3x \end{vmatrix}$,则 x^2 的系数为_____.

【解】 含 x^2 一共有两项,分别为 $3x(x+2)(2x-1)$ 及 $(-1)(1-x)(x+2)$,且这两项分别带正号和负号,于是 x^2 的系数为 8.

【例 2】 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 为 4 维列向量,$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=2$,$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,3\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=9$,求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$.

【解】 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_1,4\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3)$,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_1,4\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3|=16|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3| \\ &=16(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|)=16\left(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|+\frac{1}{3}|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,3\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|\right) \\ &=80. \end{aligned}$$

【例 3】 设 α,β,γ 为方程 $x^3+ax+b=0$ 的三个解,计算 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$.

【解】 由一元三次方程根与系数之间的关系得 $\alpha+\beta+\gamma=0$，由行列式的基本性质得

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \beta & \gamma & \alpha\\ \gamma & \alpha & \beta\end{vmatrix}=(\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \beta & \gamma & \alpha\\ \gamma & \alpha & \beta\end{vmatrix}=0.$$

【例 4】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 m,n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a,|\boldsymbol{B}|=b$，计算 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}$.

【解】 根据行列式基本性质得

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}ab.$$

【例 5】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维线性无关的向量，$\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

【解】 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix},$$

取行列式得 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{vmatrix}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq0$，故 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{vmatrix}=-2.$

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【例 6】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，且 $a_{ij}=A_{ij}$，证明：$|\boldsymbol{A}|\neq0$.

【证明】 不妨设 $a_{11}\neq0$，因为 $a_{ij}=A_{ij}$，所以 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2>0$，即 $|\boldsymbol{A}|\neq0$.

题型二 低阶行列式转化成特殊行列式的计算

【例 1】 求 $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$.

【解】 $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=20.$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 2】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix}$.

【解】 $D=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ -1 & 7 & -3 & 4\\ 2 & -9 & 5 & 7\\ 1 & -6 & 4 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&2&-1&6\\0&-1&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=-9.$$

题型三 低阶行列式按行(列)展开的计算

【例 1】 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{*}$,若 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a>0$,则 a 为(　　).

(A)$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(B)$\sqrt{3}$　　(C)$\dfrac{1}{3}$　　(D)3

【解】 因为$|\boldsymbol{A}^{*}|=|\boldsymbol{A}|^{2}$,又因为$|\boldsymbol{A}^{*}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$,所以$|\boldsymbol{A}|(|\boldsymbol{A}|-1)=0$,于是$|\boldsymbol{A}|=0$ 或$|\boldsymbol{A}|=1$.

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{*}$,所以$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^{2}+a_{12}^{2}+a_{13}^{2}=3a^{2}>0$,于是$|\boldsymbol{A}|=1$,即 $3a^{2}=1$ 或 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,选(A).

【注解】

在行列式计算中,若出现 A_{ij} 或 $\boldsymbol{A}^{*}$ 时,一般使用如下两个知识点:

(1)$|\boldsymbol{A}^{*}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$;

(2)$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 2】 设 $D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}$,求:(1)$M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}$;　(2)$M_{31}+M_{32}$.

【解】 (1)$M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}=-A_{21}+A_{22}-A_{23}+A_{24}$

$$=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-1&1&-1&1\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&-1&1\\2&-5&1&2\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&-1&1\\0&-3&-1&4\\0&-4&-3&12\\0&-2&-3&6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-3&-1&4\\-4&-3&12\\-2&-3&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&4\\4&3&12\\2&3&6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&3&4\\3&4&12\\3&2&6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&3&4\\0&-5&0\\0&-7&-6\end{vmatrix}=-30.$$

(2)$M_{31}+M_{32}=A_{31}-A_{32}+0A_{33}+0A_{34}=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\1&-1&0&0\\4&-6&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-3&1&2\\-3&4&-1&4\\1&0&0&0\\4&-2&1&2\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}-3&1&2\\4&-1&4\\-2&1&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-3&1&1\\4&-1&2\\-2&1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-3&1&0\\4&-1&3\\-2&1&0\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}-3&1\\-2&1\end{vmatrix}=6.$$

【例 3】 计算 $\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}$.

【解】 $\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix} = 2aA_{11} + A_{12} = 2aM_{11} - M_{12} = 2a\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 0 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}$

$= 2a(2aA_{11} + A_{12}) - 3a^4 = 4a^2M_{11} - 2aM_{12} - 3a^4 = 5a^4$.

题型四 n 阶行列式的计算

【思路分析】

n 阶行列式的计算通常有如下方法：

(1)归纳法，即行列式按行或列展开得到一个递推关系，从而求出行列式.

(2)分拆法，即将某行或列写成两元素之和，然后拆成两个行列式，找出计算关系.

(3)增阶法，即将行列式添加第一行全为 1，第一列除第一个元素为 1 外其余全为零.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 1】 证明：$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = n+1$.

【证明】 当 $n=1$ 时，$D_1 = 2 = 1+1$，结论成立；

设当 $n=k$ 时，$D_k = k+1$；

当 $n=k+1$ 时，$D_{k+1} = 2A_{11} + (-1)A_{12} = 2M_{11} + M_{12}$

$= 2D_k - D_{k-1} = 2(k+1) - k = k+2 = (k+1)+1$，

由数学归纳法，对一切的 n，有 $D_n = n+1$.

【例 2】 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_i \neq 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$.

【解】 方法一：增阶法

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1+a_1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}=a_1\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

方法二　拆项法

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1+0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1+0 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}+a_nD_{n-1}=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_n(a_1a_2\cdots a_{n-2}+a_{n-1}D_{n-2})$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_n}+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_2}+a_2\cdots a_n(1+a_1)=a_1\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 3】　计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}_{2n\times 2n}$.

【解】　方法一

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a+b & & & & & a+b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a+b & a+b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}=(a+b)^n\begin{vmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b)^n\begin{vmatrix} 1 & & & & 1 \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & \\ & & 0 & a-b & \\ & \iddots & & & \ddots \\ 0 & & & & a-b \end{vmatrix}=(a+b)^n(a-b)^n=(a^2-b^2)^n.$$

方法二:递推法

将行列式按第一行展开得 $D_{2n}=a^2D_{2n-2}-b^2D_{2n-2}=(a^2-b^2)D_{2n-2}$,由递推关系得

$$D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2n-2}=(a^2-b^2)^2D_{2n-4}=\cdots=(a^2-b^2)^{n-1}D_2=(a^2-b^2)^n.$$

【例 4】 计算 $D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$.

【解】 用分拆法得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & 0+a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & 0+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_nx^{n-1}=x(xD_{n-2}+a_{n-1}x^{n-2})+a_nx^{n-1}$$

$$=x^2D_{n-2}+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^{n-1}=x^{n-1}D_1+a_2x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^{n-1}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^{n-1}=x^n+x^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

测试题

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

一、选择题

1. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$,则 $f(x)=0$ 的根的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为 3 维列向量,且 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1|=a$,$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2|=b$,则 $|\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|$ 为(　　).

(A)$a+b$　　(B)$-(a+b)$　　(C)$a-b$　　(D)$b-a$

二、填空题

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=3$,$|\boldsymbol{B}|=2$,$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ _____.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$,$\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 b,则 $A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}=$ _____.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为二维列向量,设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 且 $|\boldsymbol{A}|=4$,令 $\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2)$,则 $|\boldsymbol{B}|=$ _____.

4. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$ _____.

5. $D_5=\begin{vmatrix}1-a&a&0&0&0\\-1&1-a&a&0&0\\0&-1&1-a&a&0\\0&0&-1&1-a&a\\0&0&0&-1&1-a\end{vmatrix}=$ _____.

三、解答题

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}4&-1&-1\\-1&4&-1\\-1&-1&4\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}$.

2. 计算 $D_n=\begin{vmatrix}a+b&ab&0&\cdots&0&0\\1&a+b&ab&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a+b&ab\\0&0&0&\cdots&1&a+b\end{vmatrix}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 且 $|\boldsymbol{A}|<0$，证明：$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

测试题参考答案

一、选择题

1. $f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\x&x&x&x\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$

$=x\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\1&1&1&1\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\1&0&0&0\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}=-x\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&x-2&-2\\-3&x-7&-3\end{vmatrix}$

$=-x\begin{vmatrix}1&0&0\\1&x-2&-1\\-3&x-7&-6\end{vmatrix}=-x\begin{vmatrix}x-2&-1\\x-7&-6\end{vmatrix}=5x(x-1)$，则 $f(x)=0$ 有且仅有两个根，应选(B).

2. $|\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|=-|\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2|=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1|-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2|=-(a+b)$，应选(B).

二、填空题

1. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}||\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$

$=\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=\frac{3}{2}|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=3.$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则 $a=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} b & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=b\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=b(A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1})$，故 $A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}=\dfrac{a}{b}$.

3. $\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-28$.

4. 由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$，因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，于是 $|\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|}=\dfrac{1}{2}$.

5. 将第 2 列至第 5 列加到第 1 列得

$$D_5=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=D_4+(-1)^{5+1}(-a)\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix}=D_4-a^5=$$

$D_3+(-1)^{4+1}(-a)a^3-a^5=D_3+a^4-a^5=D_2+(-1)^{3+1}(-a)a^2+a^4-a^5=D_2-a^3+a^4-a^5=\begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix}-a^3+a^4-a^5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

三、解答题

1. (1) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=50$.

(2) 将第 2,3,4 列加到第 1 列得 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$

$$x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}=-x^4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$-x^4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=x^4$.

2. 按第 1 行展开得 $D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$ 或 $D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})$，当 $a=b$ 时，$D_n=(n+1)a^n$；当 $a\neq b$ 时，$D_n=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$.

3. 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，所以 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\cdot|\boldsymbol{A}|=1$，即 $|\boldsymbol{A}|^2=1$，又因为 $|\boldsymbol{A}|<0$，所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$. $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|=-|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$，于是 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第二章　矩　阵

大纲点击

1. 理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质.

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.

3. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵.

4. 理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

5. 了解分块矩阵及其运算.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: diky66)

第一节　矩阵概况

基础复习模块——基本概念、原理、考点

一、基本概念

(一)基本概念

1. 矩阵——形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为 m 行 n 列的矩阵，记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

【注解】

特殊的矩阵有：

(1)行数与列数皆为 n 的矩阵称为 n 阶方阵.

(2)元素全为零的矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}$.

(3)$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 称为单位矩阵.

(4)称 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 为对角矩阵，$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 分别称为上、下三角矩阵.

(5)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，若 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵；若 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.

(7)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

2. 同型矩阵及矩阵相等——若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 行数与列数相同，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，若 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，称两个矩阵相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

3. 伴随矩阵——设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的行列式，设 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，令 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$，称 $\boldsymbol{A}^{*}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

二、矩阵的运算及性质

(一)矩阵的三则运算及性质

1. 矩阵的运算

(1)矩阵的加减法

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

(2)数与矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，则 $k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

(3)矩阵与矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$，

其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s)$.

2. 矩阵三则运算的性质

(1)交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(2)结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.　$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$.

(3)分配律：$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$，　$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$，

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

(二)矩阵转置运算及性质

1. 矩阵的转置——设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，记 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，称 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

2. 矩阵转置运算的性质

(1)$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.　(2)$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$(其中 k 为常数).

(3)$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\pm\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.　(4)$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(三)矩阵对应的行列式及性质

1. 矩阵对应的行列式——设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，称 $|\boldsymbol{A}|$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的行列式.

2. 矩阵取行列式的性质

(1)设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.　(2)$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$.

(3)$|k\boldsymbol{A}|=k^{n}|\boldsymbol{A}|$.　(4)$|\boldsymbol{A}^{*}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(5)设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

【例 1】　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$.

【解】　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=(2,1,4)\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}=9$，　$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}(-2,1,3)=\begin{pmatrix}-4&2&6\\-2&1&3\\-8&4&12\end{pmatrix}$.

【例 2】　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&1&3\\1&0&4\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{*}$.

【解】　$M_{11}=\begin{vmatrix}1&3\\0&4\end{vmatrix}=4$，$A_{11}=4$，$M_{12}=\begin{vmatrix}2&3\\1&4\end{vmatrix}=5$，$A_{12}=-5$，$M_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$，$A_{13}=-1$，

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

$$M_{21}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-4,A_{21}=4,M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=2,A_{22}=2,M_{23}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1,A_{23}=-1,$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-5,A_{31}=-5,M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1,A_{32}=1,M_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3,A_{33}=3,$$

则 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4 & -5\\ -5 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

三、矩阵理论产生的背景

(一)齐次线性方程组及非齐次线性方程组解的概况

1. 齐次线性方程组解的概况

【例 1】 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2=0,\\ 2x_1+x_2=0\end{cases}$ 只有零解.

本质上该方程组有两个变量同时也有两个约束条件,因为没有自由变量,所以只有零解.

【例 2】 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2=0,\\ x_2+x_3=0\end{cases}$ 除零解外有无数个非零解.

本质上该方程组有三个变量但只有两个约束条件,存在一个自由变量,故有无数个解,除一个零解外其余都是非零解.

【结论】 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 解的情况有如下两种:

(1)只有零解⇔齐次线性方程组的约束条件个数与未知数个数相等;

(2)有非零解⇔齐次线性方程组的约束条件个数小于未知数个数.

2. 非齐次线性方程组解的概况

【例 1】 非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2=4,\\ 2x_1+x_2=2\end{cases}$ 只有唯一解 $\begin{cases}x_1=2,\\ x_2=-2.\end{cases}$

本质上该方程组有两个变量同时有两个约束条件,因为不存在自由变量,所以只有唯一解.

【例 2】 非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=3,\\ x_2-2x_3=-1\end{cases}$ 有无数个解.

本质上该方程组有三个变量,但只有两个约束条件,存在一个自由变量,故有无数个解.

【例 3】 非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\ 2x_1+2x_2=4\end{cases}$ 无解.

该方程组两个约束条件之间不相容,故无解.

【结论】 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 解的情况有如下三种:

(1)有唯一解⇔约束条件之间相容且约束条件的个数与未知数的个数相等;

(2)有无数个解⇔约束条件的个数小于未知数的个数;

(3)无解⇔方程之间有不相容的.

(二)矩阵理论的产生

1. 初中数学问题——讨论一元一次方程 $ax=b$ 的解.

(1)当 $a\neq 0$ 时,由 $ax=b$ 得 $\frac{1}{a}\times ax=\frac{1}{a}\times b$,于是 $x=\frac{b}{a}$;

(2)当 $a=0,b\neq 0$ 时,方程 $ax=b$ 无解;

(3)当 $a=0,b=0$ 时,方程组 $ax=b$ 有无数个解.

2. 一元一次方程的矩阵联想——设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,讨论方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 解的情况.

(1)设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵,且存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 得 $\boldsymbol{BAX}=\boldsymbol{Bb}$,于是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Bb}$.

(2)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,但不存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,此种方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 解的情况依赖方程组变量的个数和约束条件的个数.

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵且 $m\neq n$,此种情况方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 解的情况依赖方程组变量的个数和约束条件的个数.

【注解】

(1)线性方程组解的情形从本质上说取决于方程组未知数的个数和约束条件的个数,而方程组约束条件的个数本质上就是矩阵的秩,所以方程组的解取决于两大因素:未知数的个数和矩阵的秩.

(2)方程组解的第一种情形形成矩阵的逆阵理论.

(3)方程组解的第二、三种情形形成矩阵的秩的理论.

重点题型分析

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

题型一 矩阵的概念、运算与性质

【例 1】 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三维列向量,且 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$_____.

【解】 **方法一** 由 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(1,-1,1)$ 得 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$,于是

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=3.$$

方法二 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=k$,则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}$,又

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}3&-3&3\\-3&3&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=3\boldsymbol{A},$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=k=3$.

【例 2】 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$,又 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A}^n=$_____.

【解】 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=3\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=3\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}^n=3^{n-1}\boldsymbol{A}$,而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix},\text{故 }\boldsymbol{A}^n=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

【例 3】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$_____$(n\geqslant 2)$.

【解】 因为 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A}$，所以

$$\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{n-1}=2^{n-2}\boldsymbol{A},\text{故 }\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{O}.$$

【注解】

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维列向量，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 为数，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 n 阶方阵.

【例 4】 (1)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 为(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$　　(B)$-\boldsymbol{A}$　　(C)$\boldsymbol{E}$　　(D)$-\boldsymbol{E}$

(2)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 可逆，则$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})[\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}]$为(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$　　(B)$-\boldsymbol{A}$　　(C)$\boldsymbol{E}$　　(D)$-\boldsymbol{E}$

【解】 (1)由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$ 得$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$，显然 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$，于是

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E},$$

故选(C).

(2)$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})[\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}]=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$

$=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，

故选(C).

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

题型二　矩阵的行列式

【例 1】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明：$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

【证明】 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 两边取行列式得$|\boldsymbol{A}^*|\cdot|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^n$，于是有$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 时，$r(\boldsymbol{A}^*)<n$，此时$|\boldsymbol{A}^*|=0,|\boldsymbol{A}|=0$，于是$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

【例 2】 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，证明：

(1)$|\boldsymbol{A}|=\pm 1$；　(2)若$|\boldsymbol{A}|=-1$，则$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$.

【证明】 (1)因为 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 两边取行列式得$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\cdot|\boldsymbol{A}|=1$，而$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$，所以$|\boldsymbol{A}|^2=1$，于是$|\boldsymbol{A}|=\pm 1$.

(2)若$|\boldsymbol{A}|=-1$，则

$|E+A|=|AA^{\mathrm{T}}+A|=|A|\cdot|A^{\mathrm{T}}+E|=-|(A+E)^{\mathrm{T}}|=-|E+A|$，

于是$|E+A|=0$.

【例 3】 设$\alpha=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，令$A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，则$|aE-A^n|=$_____.

【解】 方法一 $A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，由$A^2=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=2A$得

$$A^n=2^{n-1}A=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&-2^{n-1}\\0&0&0\\-2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix},\ |aE-A^n|=\begin{vmatrix}a-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&a&0\\2^{n-1}&0&a-2^{n-1}\end{vmatrix}=a^2(a-2^n).$$

方法二 $A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$的特征值为$0,0,2$，则$aE-A^n$的特征值为$a,a,a-2^n$，由特征值的性质得$|aE-A^n|=a^2(a-2^n)$.

【例 4】 设A为三阶矩阵，且$|A|=3$，求$\left|2A^*-\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}\right|$.

【解】 由$A^*=|A|A^{-1}=3A^{-1}$，$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}=2A^{-1}$得

$$\left|2A^*-\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}\right|=|6A^{-1}-2A^{-1}|=|4A^{-1}|=4^3|A^{-1}|=\frac{64}{3}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第二节 矩阵的逆矩阵

基础复习模块——基本概念、原理、考点

一、逆矩阵的定义

设A为n阶矩阵，若存在n阶矩阵B，使得$AB=BA=E$，称矩阵A可逆，称矩阵B为矩阵A的逆矩阵，记为A^{-1}.

【注解】

(1) 若矩阵可逆，则逆矩阵是唯一的.

(2) 若$AB=E$，则$BA=E$，即若$AB=E$或$BA=E$，称矩阵A可逆.

(3) 用定义判断矩阵A是否可逆即判断是否存在另一个矩阵B，使得$AB=E$.

【例 1】 设A为n阶矩阵，且$A^2+A-2E=O$，求A的逆矩阵.

【解】 由$A^2+A-2E=O$得$A(A+E)=2E$，从而$A\cdot\frac{1}{2}(A+E)=E$，

根据逆矩阵的定义，$A^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)$.

【例 2】 设$A\neq O$，且$A^2=O$，求$(E-A)^{-1}$.

【解】 由 $E=E-A^2=(E-A)(E+A)$ 得 $(E-A)^{-1}=E+A$.

二、矩阵可逆的充分必要条件

定理 设 A 为 n 阶矩阵，则矩阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A|\neq 0$.

三、逆矩阵的求法

(一) 伴随矩阵法

根据矩阵可逆充要性定理的证明过程产生了求逆阵的伴随矩阵法：若 $|A|\neq 0$，则 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$.

【注解】

若 A 可逆时，$A^*=|A|A^{-1}$，即伴随矩阵与 A^{-1} 仅相差常数倍，所以当 A 可逆时，研究伴随矩阵往往转化为研究 A^{-1}，如下例：

【例】 设 A,B 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵，则

(1) $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^*=$_____；　(2) $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*=$_____.

【解】 (1) $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=|A|\cdot|B|\cdot\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=(-1)^{mn}|A|\cdot|B|\cdot\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$

$$=(-1)^{mn}\begin{pmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{pmatrix}.$$

(二) 初等变换法

$(A\vdots E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E\vdots A^{-1})$.

【注解】

(1) 伴随矩阵法求逆矩阵常用于理论证明，因为伴随矩阵运算量比较大，所以一般求逆阵使用初等变换法.

(2) 若 A 可逆，对方程组 $AX=b$ 两边乘以 A^{-1} 得 $X=A^{-1}b$，此过程等价于将 A 转化为 E.

四、初等变换法求逆矩阵的思想体系

1. 方程组三种同解变形 —— 解线性方程组时，如下三种变形只改变方程组的形式，但不改变方程组的解：

对调两个方程(事实上方程组的解与方程组的次序无关)；

某个方程两边同乘以非零常数；

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

某个方程的倍数加到另一个方程，即加减消元法.

以上三种变形称为方程组的三种同解变形.

2. 矩阵的三种初等行变换 —— 因为任何线性方程组都可以化成矩阵形式，所以方程组的三种同解变形对应矩阵的如下三种变换：

对调矩阵的两行；

矩阵的某行乘以非零常数倍；

矩阵某行的倍数加到另一行.

以上三种变换称为矩阵的三种初等行变换，从本质上说方程组同解变形与矩阵的三种初等行变换相同.

【注解】

(1) 若对矩阵的列进行以上三种变换，称为矩阵的初等列变换，矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

(2) 解方程组过程中对方程组的矩阵只能进行初等行变换而不能进行初等列变换.

3. 三个初等矩阵及性质

(1) 初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ —— 将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行与第 j 行或者第 i 列与第 j 列对调所得到的矩阵，称为第一种初等矩阵，记为 $\boldsymbol{E}_{ij}$，如 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_{23}$.



微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(2) 初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(c)(c\neq 0)$ —— 将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行乘以非零常数 c 或第 i 列乘以非零常数 c 所得到的矩阵，称为第二种初等矩阵，记为 $\boldsymbol{E}_i(c)(c\neq 0)$，如 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_2(4)$.

(3) 初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ —— 将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行或第 i 列的 k 倍加到第 j 列所得到的矩阵，称为第三种初等矩阵，记为 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$，如 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_{32}(4)$.

4. 与初等变换相关的三个问题

问题 1　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}$ 是否可以经过有限次初等行变换化为 $\boldsymbol{E}$？

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&3\\0&1&2\end{pmatrix}$，因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&3\\0&1&2\end{vmatrix}=-6\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&4\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-4\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-4\\0&0&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E},$$

等价于 $\boldsymbol{E}_{12}(-2)\cdot\boldsymbol{E}_{13}(1)\cdot\boldsymbol{E}_{23}(4)\cdot\boldsymbol{E}_3\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\boldsymbol{E}_{32}(-1)\cdot\boldsymbol{E}_2(-1)\cdot\boldsymbol{E}_{21}(-1)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

结论　任何一个可逆的矩阵总可以通过有限次初等行变换化为 $\boldsymbol{E}$.

问题 2　设 A 是 n 阶不可逆矩阵，A 是否可以经过有限次初等行变换化为 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$？

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，因为 $|A|=0$，所以 A 不可逆.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

显然 A 不可以经过有限次初等行变换化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

结论　n 阶不可逆矩阵不一定可以通过有限次初等行变换化为 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

问题 3　设 A 是 n 阶不可逆矩阵，A 是否可以经过有限次初等变换化为 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$？

结论　问题 3 的结论是肯定的.

5. 初等变换法求逆矩阵的结论

定理 1　设 A 为 n 阶可逆矩阵，则 A 可经过有限次初等行变换化为 E，若 $(A\vdots E)\xrightarrow{\text{行}}(E\vdots C)$，则 $C=A^{-1}$；

A 也可经过有限次初等列变换化为 E，若 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix}$，则 $D=A^{-1}$.

定理 2　设 A 是 n 阶不可逆矩阵，则存在 n 阶可逆矩阵 P 和 Q，使得 $PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

定理 3　设 A 是 n 阶可逆矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，则 $(A\vdots B)\xrightarrow{\text{行}}(E\vdots A^{-1}B)$.

五、逆矩阵的性质

1. $(A^{-1})^{-1}=A$；
2. $(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$（其中 k 为非零常数）；
3. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，更进一步 $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1}=A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$；
4. $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$；
5. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 可逆，则 $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix}$；
6. 设 A,B 都是可逆矩阵，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

重点题型分析

题型一 矩阵的逆矩阵的存在性与逆矩阵的计算

【思路分析】

1. 求矩阵的逆矩阵通常有如下几种情况及方法：

(1) 关于抽象矩阵的逆矩阵问题，往往利用逆矩阵的定义求.

(2) 普通矩阵的逆矩阵的求法通常有伴随矩阵法和初等变换法. 但伴随矩阵法求逆矩阵通常是针对三阶以下的矩阵，否则运算量偏大；其他情况和阶数较高的矩阵逆矩阵的计算往往采用初等变换法. 有一点特别注意，若 A 可逆，则 A^* 与 A^{-1} 之间只相差常数 $|A|$，所以 A^* 与 A^{-1} 问题可以相互转化，两者之间仅相差一个常数.

(3) 分块矩阵的逆矩阵通常先求各块的逆矩阵，然后利用公式 $\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_m^{-1} \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

2. 矩阵可逆的判断问题：

(1) 根据逆矩阵定义判断矩阵的可逆性.

(2) 根据矩阵可逆的充分必要条件判断可逆性.

(3) 根据矩阵是否满秩判断可逆性.

(4) 根据特征值是否全非零判断可逆性.

微信搜索【顶尖考研】

【例 1】 设 A 为 n 阶矩阵且满足 $A^2-A-3E=O$. 证明：

(1) A 可逆，并求 A^{-1}； (2) $A+2E$ 可逆，并求 $(A+2E)^{-1}$.

【证明】 (1) 由 $A^2-A-3E=O$ 得 $A\cdot\frac{1}{3}(A-E)=E$，根据矩阵可逆的定义得 A 可逆且 $A^{-1}=\frac{1}{3}(A-E)$.

(2) 由 $A^2-A-3E=O$ 得 $(A+2E)(A-3E)=-3E$，即 $(A+2E)\cdot\left[-\frac{1}{3}(A-3E)\right]=E$，根据矩阵可逆的定义得 $A+2E$ 可逆，且 $(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-3E)$.

【例 2】 设 A 为 n 阶非零矩阵且 $A^4=O$，求 $(E-A)^{-1}$.

【解】 由 $E=E-A^4=(E-A)(E+A+A^2+A^3)$，得 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+A^3$.

【例 3】 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$，又 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(E+B)^{-1}=$ _____.

【解】 由 $E+B=E+(E+A)^{-1}(E-A)=(E+A)^{-1}(E+A)+(E+A)^{-1}(E-A)$

$=2(E+A)^{-1}$，

得$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}$.

【例 4】 设$a_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$且$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$,求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

【解】 令$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_{n-1}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=(a_n)$,则$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

由$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,得$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&a_n^{-1}\\a_1^{-1}&0&\cdots&0&0\\0&a_2^{-1}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}^{-1}&0\end{pmatrix}$.

【例 5】 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分别为$m$和$n$阶可逆矩阵,$\boldsymbol{C}$为$m\times n$矩阵,求$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}$及$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【解】 令$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11}&\boldsymbol{X}_{12}\\\boldsymbol{X}_{21}&\boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}$,由$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11}&\boldsymbol{X}_{12}\\\boldsymbol{X}_{21}&\boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m&\\&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{11}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{E}_m,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{12}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{E}_n,$$

于是$\boldsymbol{X}_{11}=\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{X}_{12}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$,故

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}.$$

令$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_{11}&\boldsymbol{Y}_{12}\\\boldsymbol{Y}_{21}&\boldsymbol{Y}_{22}\end{pmatrix}$,由$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_{11}&\boldsymbol{Y}_{12}\\\boldsymbol{Y}_{21}&\boldsymbol{Y}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m&\\&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$,得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_{11}=\boldsymbol{E}_m,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_{12}=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}_{11}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_{21}=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}_{12}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_{22}=\boldsymbol{E}_n,$$

于是有$\boldsymbol{Y}_{11}=\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{Y}_{12}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{Y}_{21}=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{Y}_{22}=\boldsymbol{B}^{-1}$,故

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}.$$

【例 6】 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\-3&0&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$,判断$\boldsymbol{A}$是否可逆,若$\boldsymbol{A}$可逆,求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

【解】 因为$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&1\\-3&0&2\\-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&6&5\\0&3&2\end{vmatrix}=-3\neq 0$,所以$\boldsymbol{A}$可逆.

方法一 伴随矩阵法

$M_{11}=\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}=-2,A_{11}=-2,M_{12}=\begin{vmatrix}-3&2\\-1&1\end{vmatrix}=-1,A_{12}=1,M_{13}=\begin{vmatrix}-3&0\\-1&1\end{vmatrix}=-3,A_{13}=-3$,

$$M_{21}=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1,A_{21}=-1,M_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2,A_{22}=2,M_{23}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}=3,A_{23}=-3,$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}2&1\\0&2\end{vmatrix}=4,A_{31}=4,M_{32}=\begin{vmatrix}1&1\\-3&2\end{vmatrix}=5,A_{32}=-5,M_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\-3&0\end{vmatrix}=6,A_{33}=6,$$

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-1&4\\1&2&-5\\-3&-3&6\end{pmatrix}$.

方法二:初等变换法

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&0&0\\-3&0&2&0&1&0\\-1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&0&0\\0&6&5&3&1&0\\0&3&2&1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&0&0\\0&3&2&1&0&1\\0&0&1&1&1&-2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&0&-1&2\\0&3&0&-1&-2&5\\0&0&1&1&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&0&-1&2\\0&1&0&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{5}{3}\\0&0&1&1&1&-2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{5}{3}\\0&0&1&1&1&-2\end{array}\right),$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

于是 $\boldsymbol{A}^{-1}=-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-1&4\\1&2&-5\\-3&-3&6\end{pmatrix}$.

【例 7】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,证明:$\boldsymbol{A}$ 可逆.

【证明】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$,不妨设 $a_{11}\neq0$,$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$,

因为 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{n1}\\\vdots&&\vdots\\A_{1n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,所以 $a_{ij}=A_{ij}$,于是

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=a_{11}^{2}+a_{12}^{2}+\cdots+a_{1n}^{2}>0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

【例 8】 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆阵,证明:$(\boldsymbol{AB})^{*}=\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{A}^{*}$.

【证明】 $(\boldsymbol{AB})^{*}=|\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\cdot|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{A}^{*}$.

【例 9】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&2&3\\1&-2&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{*}$.

【解】 令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

$|\boldsymbol{A}|=(-1)^{2\times2}|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|=-1$,则 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-\boldsymbol{A}^{-1}=-\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,而 $\boldsymbol{B}^{-1}=$

$\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

【例 10】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，b 为常数，令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*} & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}.$$

(1) 计算 $\boldsymbol{PQ}$；(2) 证明：$\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

【解】 (1) $\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*} & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})\end{pmatrix}.$$

(2) 因为 $|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{P}$ 可逆，于是 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{PQ}$ 可逆，而 $|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{A}|^{2}(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$，所以 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件为 $b\neq\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

题型二 初等变换与初等矩阵

【例 1】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_{1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_{2}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则(　　).

(A) $\boldsymbol{AP}_{1}\boldsymbol{P}_{2}=\boldsymbol{B}$　　(B) $\boldsymbol{AP}_{2}\boldsymbol{P}_{1}=\boldsymbol{B}$

(C) $\boldsymbol{P}_{1}\boldsymbol{P}_{2}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　(D) $\boldsymbol{P}_{2}\boldsymbol{P}_{1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

【解】

$$\boldsymbol{P}_{2}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}_{1}\boldsymbol{P}_{2}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13}\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{P}_{1}\boldsymbol{P}_{2}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，选(C).

【例 2】 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，求 $\boldsymbol{A}^{2012}$.

【解】 因为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_{13}$，所以 $\boldsymbol{B}^{2}=\boldsymbol{E}$，由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$ 得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，于是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2012}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{2012}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}^{2012}=\boldsymbol{PP}^{-1}=\boldsymbol{E}$.

【例 3】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对调得矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(1) 证明：$\boldsymbol{B}$ 可逆；(2) 求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$.

【解】 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}_{ij}||\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(2)$AB^{-1}=A(E_{ij}A)^{-1}=AA^{-1}E_{ij}^{-1}=E_{ij}^{-1}=E_{ij}$.

【例 4】 设 A 为 n 阶可逆矩阵($n\geqslant 2$),对调 A 的第 1,2 两行得矩阵 B,则(　　).

(A) 对调 A^* 的第 1,2 两列得 B^*　　(B) 对调 A^* 的第 1,2 两行得 B^*

(C) 对调 A^* 的第 1,2 两列得 $-B^*$　　(D) 对调 A^* 的第 1,2 两行得 $-B^*$

【解】 $B=E_{12}A$,两边取行列式得 $|B|=-|A|\neq 0$.

$B^*=|B|B^{-1}=-|A|(E_{12}A)^{-1}=-|A|A^{-1}E_{12}^{-1}=-A^*E_{12}$ 或 $-B^*=A^*E_{12}$,即对调 A^* 的第 1,2 两列得 $-B^*$,应选(C).

第三节　矩阵的秩

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

一、矩阵秩的定义

设 A 是 $m\times n$ 矩阵,A 中任取 r 行和 r 列且元素按原有次序所成的 r 阶行列式,称为 A 的 r 阶子式. 若 A 中至少有一个 r 阶子式不等于零,而所有 $r+1$ 阶子式(如果有)皆为零,称 r 为矩阵 A 的秩,记为 $r(A)=r$,若 A 是 $m\times n$ 矩阵,则 A 共有 $C_m^r\times C_n^r$ 个 r 阶子式.

微信公众号【顶尖考研】

二、矩阵秩的求法

将 A 用初等行变换化为阶梯矩阵,阶梯矩阵的非零行数即为矩阵 A 的秩. 例如:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&3&2\\1&2&1&0&-1\\1&-1&4&3&2\\2&3&0&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&3&2\\0&1&2&-3&-3\\0&-2&5&0&0\\0&1&2&-3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&3&2\\0&1&2&-3&-3\\0&0&9&-6&-6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $r(A)=3$.

【注解】

(1)$r(A)=0$ 的充分必要条件为 $A=O$;

(2)$r(A)\geqslant 1$ 的充分必要条件是 $A\neq O$;

(3)$r(A)\geqslant 2$ 的充分必要条件是 A 至少有两行不成比例.

三、矩阵秩的性质

性质 1　$r(A)=r(A^{\mathrm{T}})=r(A^{\mathrm{T}}A)=r(AA^{\mathrm{T}})$.

性质 2　(1)$r(A)$ 或 $r(B)\leqslant r(A\vdots B)\leqslant r(A)+r(B)$;

(2)$r(A)$ 或 $r(B)\leqslant r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leqslant r(A)+r(B)$;

(3)$r\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$.

性质 3 $r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

性质 4 $\begin{cases}r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A}),\\ r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B}),\end{cases}$ 或 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

性质 5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

性质 6 设 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 为可逆矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{AQ})=r(\boldsymbol{PAQ}).$$

性质 7 $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,(n\geqslant 2)\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$

【证明】 若 $r(\boldsymbol{A})=n$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，

由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得

$$|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n,$$

再由 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 得 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\neq 0$，故 $r(\boldsymbol{A}^*)=n$；

若 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，由 $r(\boldsymbol{A})<n$ 得 $|\boldsymbol{A}|=0$，

从而 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{O}$，于是 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n$，即 $r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$；

因为 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以存在 $M_{ij}\neq 0$，从而存在 $A_{ij}\neq 0$，于是 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，即 $r(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$，

故 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$；

若 $r(\boldsymbol{A})<n-1$，则一切的 $M_{ij}=0$，从而 $A_{ij}=0$，于是 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，故 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$.

性质 8 $r(\boldsymbol{A})=1$ 的充分必要条件是：存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

【证明】 “⇒”设 $r(\boldsymbol{A})=1$，即 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的所有行都成比例，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

令 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为非零向量，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

“⇐”因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为非零向量，所以 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，从而 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$；

又 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha})=1$，故 $r(\boldsymbol{A})=1$.

四、等价矩阵

定义 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价.

定理 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

重点题型分析

题型一 矩阵秩的证明

【例 1】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

【证明】 因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$，又因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，所以 $r(\boldsymbol{A})=0$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

【例 2】 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是三维列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，

(1) 证明：$r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$； (2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，证明：$r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$.

【证明】 (1) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{\alpha})+r(\boldsymbol{\beta})\leqslant 1+1=2$.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$ 或 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$（其中 k 为实数），不妨设 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(1+k^2)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，于是 $r(\boldsymbol{A})=r[(1+k^2)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}]=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{\alpha})\leqslant 1$.

【例 3】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=n$.

【证明】 由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\leqslant n$；又

$$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\geqslant r[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})]=r(3\boldsymbol{E})=n,$$

所以 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=n$.

【例 4】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$n>m$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明：$r(\boldsymbol{B})=m$.

【证明】 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{E})=m$，因为 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$，所以 $r(\boldsymbol{B})\geqslant m$，又因为 $r(\boldsymbol{B})\leqslant\min\{m,n\}=m$，所以 $r(\boldsymbol{B})=m$.

【例 5】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵唯一.

【证明】 令 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$，于是 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\leqslant n$，因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $r(\boldsymbol{A})=n$，从而 $r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\leqslant 0$，而 $r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\geqslant 0$，于是 $r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=0$，故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

【例 6】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵且 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，证明：存在 k，使得 $(\boldsymbol{A}^*)^2=k\boldsymbol{A}^*$.

【证明】 因为 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，于是存在 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，使得 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，故 $(\boldsymbol{A}^*)^2=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^*$，其中 $k=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

【例 7】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，证明：$r(\boldsymbol{A})<n$.

【证明】 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$，又因为 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，所以 $r(\boldsymbol{A})<n$.

【例 8】 已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，

(1) 证明：$r(\boldsymbol{A})<n$； (2) 求 $r(\boldsymbol{A})$.

【解】 (1) **方法一**

$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，故 $r(\boldsymbol{A})<n$.

方法二 因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，从而 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant n$，

又因为 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{E})=n$，所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$，

若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即 $r(\boldsymbol{A})=n$，则 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，矛盾，故 $|\boldsymbol{A}|=0$.

方法三 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$，

因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零向量，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 有非零解，故 $r(\boldsymbol{A})<n$.

方法四 令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，因为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\cdot\boldsymbol{\alpha}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 有一个特征值 $\lambda=1$，

从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 有一个特征值 $\lambda=0$，于是 $|\boldsymbol{A}|=0$，故 $r(\boldsymbol{A})<n$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 得 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，则 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{\alpha})=1$，

再由 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$ 得 $r(\boldsymbol{A})=n-1$.

微信公众号【硕学考研】
(ID: ajky66)

【例 9】 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，证明：$r(\boldsymbol{A})=n$.

【证明】 由 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 得 $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，于是 $r(\boldsymbol{A})=n$.

【注解】

在讨论由向量构成的矩阵的秩时，往往使用矩阵的幂从而得到矩阵的多项式.

【例 10】 (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，举例说明 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，证明：若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

【解】 (1) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，

又因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^2)=0$，所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

【例 11】 (1) 举例说明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})=n$，证明：若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

【解】 (1) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&-4&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}$，

显然 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

(2) 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$，由矩阵秩的性质得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\leqslant n$，

由 $r(\boldsymbol{A})=n$ 得 $r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=0$，故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

题型二 矩阵方程

【思路分析】

求未知矩阵是重要的考查点，总体来说求未知矩阵有三种类型：

(1) 化简矩阵关系式得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$；

(2) 化简矩阵关系式得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为不可逆的方阵或 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵，

令 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_s)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s)$，

则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 等价于 $\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{AX}_s=\boldsymbol{b}_s$，求解 $\boldsymbol{X}$ 即求解 s 个线性方程组；

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 及线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

【例 1】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$.

【解】 由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1}$，而

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

【例 2】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{X}$.

【解】 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+\boldsymbol{E}$，继续化简得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}$，因为 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆，于是

$$\boldsymbol{X}=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}]^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 3】 设 $X=AX+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$，求 X.

【解】 由 $X=AX+B$ 得 $(E-A)X=B$，$E-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$，因为 $|E-A|=3\neq 0$，所以 $E-A$ 可逆，于是 $X=(E-A)^{-1}B$，由

$$(E-A\vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&1&2&4&-2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&1&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{array}\right),$$

得 $X=(E-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

【例 4】 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&1\\2&-1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\2&2\end{pmatrix}$，且 $AX=B$，求 X.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 因为 $|A|=0$，所以 A 不可逆，

令 $X=(X_1,X_2)$，$B=(b_1,b_2)$，则 $AX=B$ 等价于 $AX_1=b_1$，$AX_2=b_2$.

由 $(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\1&0&1&1&2\\2&-1&3&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&1&-1&0&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&2\\0&1&-1&0&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$$X_1=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1+1\\k_1\\k_1\end{pmatrix},\quad X_2=k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_2+2\\k_2+2\\k_2\end{pmatrix},$$

故 $X=\begin{pmatrix}-k_1+1&-k_2+2\\k_1&k_2+2\\k_1&k_2\end{pmatrix}$（其中 k_1,k_2 为任意常数）.

【例 5】 设 A 为 2 阶实对称矩阵，A 的每行元素之和为 2，又 $A^2-aA=0$，求 a 及 A.

【解】 令 $AX=\lambda X$，由 $(A^2-aA)X=(\lambda^2-a\lambda)X=0$ 得

$\lambda^2-a\lambda=0$，即 A 的特征值为 $\lambda_1=a$，$\lambda_2=0$.

因为 A 的每行元素之和为 2，所以 $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，

即 A 的一个特征值为 2，对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，于是 $a=2$；

令 $\lambda_2=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，

因为 $A^{\mathrm{T}}=A$，所以 $\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2=0$，即 $x_1+x_2=0$，

从而 $\lambda_2=0$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

测试题

一、选择题

1. 下列结论正确的是(　　).

(A)若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$

(B)若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*$ 可逆

(C)若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 一定不可逆

(D)若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不是方阵，但 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 都是 n 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$ 为(　　).

(A)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$　　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　(C)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$　　(D)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}-2a_{11}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}-2a_{31}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}-2a_{21}\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(　　).

(A)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$　　(B)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^{-1}$　　(C)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$　　(D)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $(k\boldsymbol{A})^*$ 为(　　).

(A)$k\boldsymbol{A}^*$　　(B)$k^n\boldsymbol{A}^*$　　(C)$k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$　　(D)$k^{n+1}\boldsymbol{A}^*$

微信公众号【顶尖考研】
ID: djky66)

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则(　　).

(A)当 $t=6$ 时，$r(\boldsymbol{B})=1$　　(B)当 $t=6$ 时，$r(\boldsymbol{B})=2$

(C)当 $t\neq6$ 时，$r(\boldsymbol{B})=1$　　(D)当 $t\neq6$ 时，$r(\boldsymbol{B})=2$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则(　　).

(A)$r(\boldsymbol{A})<n$ 且 $r(\boldsymbol{B})<n$　　(B)$r(\boldsymbol{A})=0$ 且 $r(\boldsymbol{B})<n$

(C)$r(\boldsymbol{A})=n$ 或 $r(\boldsymbol{B})=n$　　(D)$r(\boldsymbol{A})=n$ 且 $r(\boldsymbol{B})=n$

7. 设 $ab\neq0$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$ 且 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，则(　　).

(A)$a\neq b$ 且 $a+2b\neq0$　　(B)$a=b$ 且 $a+2b\neq0$

(C)$a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　(D)$a=b$ 且 $a+2b=0$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，下列结论正确的是(　　).

(A)当 $m>n$ 时，一定有 $|\boldsymbol{AB}|=0$　　(B)当 $m>n$ 时，一定有 $|\boldsymbol{AB}|\neq0$

(C)当 $m<n$ 时，一定有 $|\boldsymbol{AB}|=0$　　(D)当 $m<n$ 时，一定有 $|\boldsymbol{AB}|\neq0$

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶可逆矩阵且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$，若 $r(\boldsymbol{A})=r,r(\boldsymbol{B})=s$，则(　　).

(A)$r>s$　　(B)$r=s$　　(C)$r<s$　　(D)r,s 大小不确定

二、填空题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，则 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=$_____.

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 且 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$_____.

3. 设 A,B 为三阶矩阵，将 A 的第 1 行的 -2 倍加到 2 行得 A_1，将 B 的第 2,3 两列对调得 B_1，且 $A_1B_1=\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&1&3\\-2&4&0\end{pmatrix}$，则 $AB=$_____.

4. 设三阶矩阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$，且 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $B=$_____.

5. 设 A,B 都是二阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，又 $|A|=2,|B|=3$，令 $C=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$，则 $C^*=$_____(用 A^*,B^* 表示).

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，又设 B 为非零矩阵且 $AB=O$，则 $t=$_____.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&a&2\\2&b&3&3\\1&3&1&1\end{pmatrix}$ 且 $r(A)=2$，则 $a=$_____，$b=$_____.

三、解答题

1. 证明任何一个方阵总可以表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.

2. 设 A,B 为 n 阶幂等矩阵，即 $A^2=A,B^2=B$，且 $(A+B)^2=A+B$，证明：$AB=O$.

3. 设 A 是 n 阶可逆矩阵($n\geqslant 2$)，证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

4. 设三阶矩阵 B 满足 $A^2-AB+3B=9E$，且 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&3\\0&0&5\end{pmatrix}$，求 B.

5. 设 A 为四阶矩阵且 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，又 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求矩阵 B.

6. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2-A-3E=O$.

(1)证明 A 可逆，并求 A^{-1}；　(2)证明 $A+E$ 可逆，并求 $(A+E)^{-1}$.

7. 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2=A$，证明：$r(A)+r(E-A)=n$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

测试题参考答案

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

一、选择题

1. 因为 A,B 可逆，所以 $|A|\neq 0,|B|\neq 0$，而 $|A^{-1}B^*|=\dfrac{|B|^{n-1}}{|A|}\neq 0$，所以 $A^{-1}B^*$ 可逆，应选(B).

2. 因为 $(A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1}B=(E+B^{-1}A)[B^{-1}(A+B)]^{-1}=(E+B^{-1}A)(E+B^{-1}A)^{-1}=E$，所以应选(C).

3. 将 A 的第 2,3 两行对调，再将第 1 列的 -2 倍加到第 3 列得矩阵 B，

于是 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P_1AP_2^{-1}$，选(B).

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则 $k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix}$，设 A_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，B_{ij} 为 $k\boldsymbol{A}$ 中元素 ka_{ij} 的代数余子式，因为 $B_{ij}=k^{n-1}A_{ij}$，所以 $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$，应选(C).

5. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$，因为 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，所以 $r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$. 当 $t=6$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1$，所以 $1\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant 2$，(A)，(B)都不对；当 $t\neq 6$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $r(\boldsymbol{B})=1$，选(C).

6. 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$，又因为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵，所以 $r(\boldsymbol{A})>0$ 且 $r(\boldsymbol{B})>0$，从而 $r(\boldsymbol{A})<n$ 且 $r(\boldsymbol{B})<n$，应选(A).

7. 因为 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，所以 $r(\boldsymbol{A})=2<3$，而 $|\boldsymbol{A}|=(a+2b)(a-b)^2$，所以 $a+2b=0$ 或 $a=b$，若 $a=b$，则 $r(\boldsymbol{A})=1$，矛盾，于是 $a\neq b$ 且 $a+2b=0$，应选(C).

8. 当 $m>n$ 时，$r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}=n$，$r(\boldsymbol{B})\leqslant\min\{m,n\}=n$，因为 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$，所以 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant n<m$，即 $\boldsymbol{AB}$ 为降秩矩阵，于是 $|\boldsymbol{AB}|=0$，应选(A).

9. 因为 $\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵，所以 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AC})=r(\boldsymbol{A})$，于是 $r=s$，选(B).

二、填空题

1. 因为 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$，所以

$$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|\left(-\frac{2}{3}\right)\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3|\boldsymbol{A}^{-1}|=-\frac{16}{27}.$$

2. 由 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}$，两边同加 $2\boldsymbol{E}$ 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，整理得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$ 或 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，于是 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 由 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{AB}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $|\boldsymbol{A}|=-2$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}$，得 $-2\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{ABA}-8\boldsymbol{A}$，两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{AB}+4\boldsymbol{E}$，从而 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{E}$，于是 $\boldsymbol{B}=4(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*=\frac{1}{3}\boldsymbol{B}^*$，$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}=6$，$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}^*=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1}=6\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \frac{1}{3}\boldsymbol{B}^* \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

6. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$，因为 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，所以 $r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，于是 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2<3$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$. 而 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=7(t+3)$，所以 $t=-3$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

7. $A=\begin{pmatrix}1&2&a&2\\2&b&3&3\\1&3&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&a&2\\0&b-4&3-2a&-1\\0&1&1-a&-1\end{pmatrix}$，因为 $r(A)=2$，所以 $\frac{b-4}{1}=\frac{3-2a}{1-a}=\frac{-1}{-1}$，解得 $a=2,b=5$.

三、解答题

1. 设 A 是 n 阶矩阵，则 $A=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$，令 $\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})=B$，$\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})=C$，显然 $B^{\mathrm{T}}=B$，$C^{\mathrm{T}}=-C$，即 B，C 分别为对称及反对称矩阵，且 $A=B+C$.

2. 由 $(A+B)^2=A+B$ 得 $A^2+B^2+AB+BA=A+B$，再由 $A^2=A$，$B^2=B$ 得 $AB+BA=O$，于是 $AB=-BA$. $AB=-BA$ 两边左乘 A 得 $A^2B=-ABA$ 或 $AB=-ABA$；$AB=-BA$ 两边右乘 A 得 $ABA=-BA^2$ 或 $-ABA=BA$，于是 $AB=BA$，故 $AB=O$.

3. 因为 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，所以 $r(A^*)=n$，即 A^* 可逆. 由 $(A^*)^*A^*=|A^*|E=|A|^{n-1}E$ 得 $(A^*)^*=|A|^{n-1}(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-2}A$.

4. 由 $A^2-AB+3B=9E$ 得 $(A-3E)B=A^2-9E=(A-3E)(A+3E)$，因为 $A-3E=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\0&-1&3\\0&0&2\end{pmatrix}$ 可逆，所以 $B=A+3E=\begin{pmatrix}4&-1&1\\0&5&3\\0&0&8\end{pmatrix}$.

5. 由 $|A^*|=8=|A|^3$ 得 $|A|=2$. $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 两边右乘 A 得 $AB=B+3A$，整理得 $(A-E)B=3A$，$B=3(A-E)^{-1}A=3[A^{-1}(A-E)]^{-1}=3(E-A^{-1})^{-1}=6(2E-|A|A^{-1})^{-1}=6(2E-A^*)^{-1}$

$=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$.

6. (1)由 $A^2-A-3E=O$ 得 $A(A-E)=3E$，于是 $A\cdot\frac{1}{3}(A-E)=E$，由逆矩阵的定义，A 可逆且 $A^{-1}=\frac{1}{3}(A-E)$.

(2)由 $A^2-A-3E=O$ 得 $(A+E)(A-2E)-E=O$ 或 $(A+E)(A-2E)=E$，由矩阵可逆的定义，$A+E$ 可逆且 $(A+E)^{-1}=A-2E$.

7. 由 $A^2=A$ 得 $A(E-A)=O$，由矩阵秩的性质得 $r(A)+r(E-A)\leqslant n$，又因为 $r(A)+r(E-A)\geqslant r[A+(E-A)]=r(E)=n$，所以 $r(A)+r(E-A)=n$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第三章　向　量

大纲点击

1. 理解 n 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.

2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.

3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.

4. 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.

5. 了解 n 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念.

6. 了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵.

7. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法.

8. 了解规范正交基、正交矩阵的概念以及它们的性质.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第一节　向量的基本概念及相关性理论

基础复习模块——基本概念、原理、考点



一、向量概念及运算

1. 向量的概念——n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所构成的一个数组称为向量，其中 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为 n 维行向量，$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ 称为 n 维列向量，构成向量的所有元素皆为零的向量称为零向量.

2. 向量的三则运算——设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则规定

(1)向量的加法：$\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_n\pm b_n)^{\mathrm{T}}$；

(2)数与向量的乘法：$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^{\mathrm{T}}$；

3. 向量的内积——称 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积.

4. 向量组的线性相关与线性无关——对齐次线性方程组，有

(1)若 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时成立，即齐次线性方程组只有零解，称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

例如：$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}x_2=\mathbf{0}$，即 $\begin{cases}x_1+2x_2=0,\\2x_1-x_2=0\end{cases}$ 只有零解，则 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 线性无关.

(2)存在不全为零的常数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$ 成立，即齐次线性方程组有非零解，称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

例如：$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}x_3=\mathbf{0}$，即 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$ 除零解外有非零解，则向量组 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ 线性相关.

5. 向量组的线性表示——对非齐次线性方程组，有

(1)若存在常数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$ 成立，称向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

例如：$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}x_2=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}x_1+2x_2=4,\\2x_1-x_2=3,\end{cases}$ 此方程组有解 $\begin{cases}x_1=2,\\x_2=1,\end{cases}$ 则 $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ 可由向量 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 线性表示.

(2)不存在常数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$ 成立，即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$ 无解，称向量 $\boldsymbol{b}$ 不可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

例如：$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}x_2=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}x_1+2x_2=1,\\2x_1+4x_2=4,\end{cases}$ 此方程组无解，则向量 $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ 不可由 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ 线性表示.

微信公众号【考研】(ID: djky66)

二、向量组相关性与线性表示理论

性质 1 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则其中至少有一个向量可由其余向量线性表出.

【注解】

(1)若一个向量组中含有零向量，则该向量组一定线性相关.

(2)两个向量线性相关的充分必要条件是两个向量对应分量成比例.

(3)向量组线性相关可以直观地解读为对应的齐次线性方程组有非零解或该向量组中至少有一个多余向量(即可由其余向量线性表示的向量).

性质 2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示方法唯一.

性质 3 若一个向量组线性无关，则其中任意一个部分向量组也必然线性无关.

性质 4 若一个向量组的一个部分向量组线性相关，则此向量组一定线性相关.

性质 5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个 n 维向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关$\Leftrightarrow|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq0$；

【例】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\a\\3\end{pmatrix}$ 线性相关，求 a 的值.

【解】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 向量的个数与维数相等，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$，而 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&1&a\\2&1&3\end{vmatrix}=3a+12$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的充分必要条件是 $a=-4$.

性质 6 若一个向量组的个数大于维数，则此向量组一定线性相关.

性质 7 设 $\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}'_n$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 扩充了分量的向量组，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}'_n$ 也线性无关，反之不对.

性质 8 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为一个两两正交的非零向量组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

重点题型分析

题型一 向量组的相关性的判断与讨论

【思路分析】

讨论或证明向量组的相关性问题通常有如下思路：

(1)利用相关性的定义法，先令向量组的线性组合等于零，再讨论系数取值情况.

(2)利用向量组相关性性质，例如：当向量的个数等于向量维数时，向量组线性无关的充分必要条件是该向量组构成的行列式不等于零；又例如：当向量的个数大于向量的维数时，该向量组一定线性相关，等.

(3)利用向量组的秩与矩阵的秩相等的性质将向量组的相关性问题转化为矩阵的秩的问题.

(4)将向量组的相关性问题转化为齐次线性方程组有无非零解的问题.

【例 1】 讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\a\\-3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ 的相关性.

【解】 因为该向量组的个数与维数相等，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq0$，而 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&-1&3\\-1&a&1\\2&-3&4\end{vmatrix}=-2(a-1)+4=-2(a-3)$，所以当 $a\neq3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；当 $a=3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

【例 2】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，讨论 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性相关性.

【解】 **方法一 定义法**

令 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，即

$$(k_1+2k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1-3k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\begin{cases}k_1+2k_2+k_3=0,\\-k_1+k_2+k_3=0,\\k_1-3k_2+k_3=0,\end{cases}$ 又 $D=\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&1&1\\1&-3&1\end{vmatrix}=10\neq0$，所以 $k_1=k_2=k_3=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

方法二：矩阵法

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&1\\1&-3&1\end{pmatrix},$$

因为 $\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&1&1\\1&-3&1\end{vmatrix}=10\neq0$，所以 $\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&1\\1&-3&1\end{pmatrix}$ 可逆，于是

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【例 3】 (1)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

(2)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$，判断 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的线性相关性.

【证明】 (1)令 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，即

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\begin{cases}k_1+k_3=0,\\k_1+k_2=0,\\k_2+k_3=0,\end{cases}$ 因为 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$，所以 $k_1=k_2=k_3=0$，由线性无关的定义，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

(2)由 $\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_4-\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$，得 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{0}$，由向量组的线性相关性定义得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关.

【例 4】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n(n\geqslant3)$ 线性无关，令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$，讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的线性相关性.

【解】 令 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0}$，即

$$(k_1+k_n)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+(k_{n-1}+k_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，所以有

$$\begin{cases}k_1+k_n=0,\\k_1+k_2=0,\\\vdots\\k_{n-1}+k_n=0,\end{cases}$$

该方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1},$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

当 n 为奇数时，因为 $D=2\neq 0$，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关；

当 n 为偶数时，因为 $D=0$，所以关于 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 的齐次线性方程组有非零解，故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性相关.

【例 5】 (1)s 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ $(s\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少含有一个零向量

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有两个向量成比例

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少存在一个个数小于 s 的线性相关的部分向量组

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示

(2)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量不成比例

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中向量的维数不小于向量的个数

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中不存在零向量

(D)向量 b 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 唯一线性表示

【解】 (1)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$，显然该向量组线性相关，但不含零向量、任意两个向量不成比例且任意个数小于 3 的部分向量组线性无关，故(A)，(B)，(C)不对，选(D).

(2)$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 中任意两个向量不成比例且不存在零向量，但 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，(A)，(C)不对；$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ 的维数大于个数，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，(B)不对，应选(D).

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 6】 设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示，且 $r<s$，讨论向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的相关性.

【解】 因为Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示，所以 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})$. 注意到 $r(\text{Ⅱ})\leqslant r<s$，所以 $r(\text{Ⅰ})<s$，于是向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

题型二　向量组的线性表示问题

【思路分析】

向量组的线性表示问题本质上是非齐次线性方程组有无解的问题，常用方法有：

(1)根据线性表示的性质.

(2)根据两个向量的秩的关系.

(3)转化为非齐次线性方程组的解的讨论.

【例 1】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，将 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

【解】 令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}$，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\-1&-3&1&4\\1&1&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&2&5\\0&-1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&2&5\\0&0&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-1&0&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{pmatrix},$$

于是 $x_1=1,x_2=-1,x_3=2$,故 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

【例 2】 设非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,但不可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,下列结论正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 又可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示

(B)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$,但可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示

(C)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$,但不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示

(D)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 既不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$,又不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示

【解】 因为 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,所以存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{m-1},k_m$,使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$,因为 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,所以 $k_m\neq0$,于是 $\boldsymbol{\alpha}_m=-\dfrac{k_1}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_1-\dfrac{k_2}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\dfrac{k_{m-1}}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\dfrac{1}{k_m}\boldsymbol{\beta}$,即 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示.

若 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,矛盾,选(B).

微信公众号【周先考研】
(ID:zjky66)

【例 3】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\c\end{pmatrix}$,问:$a,c$ 取何值时,

(1)$\boldsymbol{b}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?

(2)$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示?

(3)$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表示方法不唯一?求出其一般表达式.

【解】 $\boldsymbol{b}$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示等价于非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}$ 是否有解.

(1)因为 $\boldsymbol{b}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{b})\leqslant3$,于是

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&a&-1\\-4&1&3\end{vmatrix}=0,\text{解得 }a=-1.$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&-2&1&2\\2&-1&-1&1\\-4&1&3&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&2\\0&3&-3&-3\\0&-7&7&c+8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&c+1\end{pmatrix},$$

由 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$ 得 $c\neq-1$,于是 $a=-1,c\neq-1$ 时,$\boldsymbol{b}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2)当 $a\neq-1,c$ 为任意常数时,$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示.

(3)当 $a=-1,c=-1$ 时,$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表示法不唯一,由

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $AX=b$ 的通解为 $X=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\k-1\\k\end{pmatrix}$，于是 $b=k\alpha_1+(k-1)\alpha_2+k\alpha_3$（$k$ 为任意常数）.

【例 4】 设Ⅰ：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，Ⅱ：$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}a+3\\1\\a\end{pmatrix}$，且向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ线性表示，但反之不可，求常数 a.

【解】 因为向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ线性表示，而向量组Ⅱ不可由向量组Ⅰ线性表示，所以 $r(\text{Ⅰ})<r(\text{Ⅱ})\leqslant 3$，从而 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(a+2)(a-1)^2=0$，于是 $a=-2$ 或 $a=1$.

当 $a=1$ 时，结论显然成立.

当 $a=-2$ 时，因为 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=2$，所以结论不成立，于是 $a=1$.

题型三 向量组命题的证明

【例 1】 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，证明：α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

【证明】 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 α_2,α_3 线性无关，又因为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，所以 α_4 可由 α_2,α_3 线性表示，即存在 k_2,k_3，使得 $\alpha_4=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，于是 $\alpha_4=0\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，即 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

【例 2】 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个 n 维向量，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{vmatrix}\neq 0.$$

【证明】 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则 $A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}$.

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $r(A)=n$，因为 $r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A)$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $r(A^{\mathrm{T}}A)=n$，而 $r(A^{\mathrm{T}}A)=n$ 的充分必要条件是

$$|A^{\mathrm{T}}A|=\begin{vmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{vmatrix}\neq 0.$$

【例 3】 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为两两不等的数，令 $\alpha_i=(1,a_i,a_i^2,\cdots,a_i^{n-1})^{\mathrm{T}}(1\leqslant i\leqslant n)$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

微信公众号【搜索考研】(ID: djky66)

【证明】 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$，因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不等，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

【例 4】 设 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量且 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一线性表示.

【证明】 “必要性”：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，令 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 及 $\boldsymbol{b}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n$，两式相减得 $(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_n-l_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，所以 $k_1-l_1=k_2-l_2=\cdots=k_n-l_n=0$ 或 $k_i=l_i(1\leqslant i\leqslant n)$，于是 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一线性表示.

“充分性”：设 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一线性表示，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$. 令 $\boldsymbol{b}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n$，则 $\boldsymbol{b}=(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_n+l_n)\boldsymbol{\alpha}_n$，即 $\boldsymbol{b}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一线性表示，矛盾，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

【例 5】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维向量，且存在正整数 k，使得 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

【证明】 令 $l_0\boldsymbol{\alpha}+l_1\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+l_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，上式两边左乘 $\boldsymbol{A}^{k-1}$ 得 $l_0\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，注意到 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，从而 $l_0=0$，于是有 $l_1\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+l_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，上式两边左乘 $\boldsymbol{A}^{k-2}$ 得 $l_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，从而 $l_1=0$，以此类推得 $l_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，从而 $l_{k-1}=0$，于是向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

【例 6】 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 皆为三维线性无关的向量组，证明：存在非零向量 $\boldsymbol{\delta}$，使得 $\boldsymbol{\delta}$ 可同时由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示.

【证明】 因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 4 个 3 维向量组，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，由线性相关的定义，存在不全为零的常数 k_1,k_2,l_1,l_2，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$. 令 $\boldsymbol{\delta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$，若 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{0}$，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，$l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，所以 $k_1=k_2=0$，$l_1=l_2=0$，矛盾，故 $\boldsymbol{\delta}\neq\boldsymbol{0}$.

第二节 向量组的秩与向量组等价

基础复习模块——基本概念、原理、考点

一、基本概念

1. 向量组的极大线性无关组与向量组的秩——设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为一个向量组，若满足如下两个条件：

(1)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中存在含 r 个向量的线性无关的子向量组；

(2)任意 $r+1$ 个向量构成的子向量组(如果有)线性相关，

称含 r 个向量的线性无关的子向量组为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大线性无关组，r 称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩.

2. 向量组的等价——设 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为两个向量组，若

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=k_{11}\boldsymbol{\beta}_1+k_{12}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{1n}\boldsymbol{\beta}_n,\\ \boldsymbol{\alpha}_2=k_{21}\boldsymbol{\beta}_1+k_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{2n}\boldsymbol{\beta}_n,\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m=k_{m1}\boldsymbol{\beta}_1+k_{m2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{mn}\boldsymbol{\beta}_n,\end{cases}$$

则称向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示，若两个向量组可以相互线性表示，称两个向量组等价.

【注解】

(1)等价的两个向量组所含的向量的个数不一定相等.

(2)一个向量组和它的极大线性无关组等价.

二、向量组秩的性质

性质 1 矩阵的行向量组的秩、列向量组的秩及矩阵的秩都相等.

性质 2 设 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为两个向量组，若 A 组可由 B 组线性表示，则 A 组的秩不超过 B 组的秩.

性质 3 等价的向量组有相等的秩. 反之，若两个向量组的秩相等，则两个向量组不一定等价.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

重点题型分析

向量组的极大线性无关组

【例】 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\6\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}-1\\-6\\5\end{pmatrix}$ 的一组极大线性无关组，并将其余的向量用该极大线性无关组线性表示.

【解】 由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&0&0&3&-1\\3&1&-1&6&-6\\-1&0&1&-1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&-1\\0&1&-1&-3&-3\\0&0&1&2&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&-1\\0&1&0&-1&1\\0&0&1&2&4\end{pmatrix}$$

得一组极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，且 $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_4=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\\ \boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3.\end{cases}$

第三节 向量空间、基及向量的坐标

基础复习模块——基本概念、原理、考点

定义 1 n 维向量空间——所有 n 维实向量构成的集合记为 $\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^n$ 上定义加法和乘法，满足：

(1)存在 $\mathbf{0}$，对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

(2)对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，存在 $-\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，使得 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$；

(3)对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^n$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(4)对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbf{R}^n$，有 $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$；

(5)对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，有 $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(6)$k(t\boldsymbol{\alpha})=(kt)\boldsymbol{\alpha}$，其中 $k,t\in\mathbf{R}$；

(7)$(k+t)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\alpha}$，其中 $k,t\in\mathbf{R}$；

(8)$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$，

$\mathbf{R}^n$ 为 n 维实向量空间.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

定义 2 (1)向量空间的基——设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的线性无关的向量组且 $\mathbf{R}^n$ 中任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基.

(2)向量的坐标——任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}$ 一定线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一线性表示，设 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$，称 $\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标.

(3)过渡矩阵——设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的两组基，向量两组基可以互相唯一线性表示，令

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_2=k_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=k_{n1}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{n2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n,\end{cases}$$

即 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{21}&\cdots&k_{n1}\\k_{12}&k_{22}&\cdots&k_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{1n}&k_{2n}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)Q$，

称矩阵 Q 为从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

【例 1】 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}4\\-5\\-8\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$ 为三维空间的两组基，求从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

【解】 令 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)Q$，则

$$Q=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&-2&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}.$$

【例 2】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ 为三维空间的一组基，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}6\\-5\\-12\end{pmatrix}$，求向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

【解】 令 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}$，于是

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.$$

重点题型分析

基与过渡矩阵

【例】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$ 为三维空间的两组基.

(1)求从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵；

(2)求向量 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

【解】 (1)设过渡矩阵为 $\boldsymbol{Q}$，则有 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{Q}$，于是

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}.$$

(2)$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $\{3,1,-2\}$.

测试题

一、选择题

1. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，下列向量组中线性无关的向量组为(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则下列结论正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

(B)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

(C)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

(D)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，下列结论成立的是(　　).

(A)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

(C) 若 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

(D) 若 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,而 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,对任意常数 k,下列结论正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

5. 设向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 且向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示,下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $r>s$,则 Ⅰ 一定线性相关　　(B) 若 $r>s$,则 Ⅱ 一定线性相关

(C) 若 $r<s$,则 Ⅰ 一定线性相关　　(D) 若 $r<s$,则 Ⅱ 一定线性相关

二、填空题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三维列向量,若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$ _____.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\a\end{pmatrix}$ 线性相关,则 $a=$ _____.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $A\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,则 $a=$ _____.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&0\\3&1&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&a&-1\\1&2a-2&-3\end{pmatrix}$ 且 $r(AB)=2$,则 $a=$ _____.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、解答题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,判断 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性相关性.

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix}$.

(1) 设 $\boldsymbol{b}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,求常数 a,b 满足的条件;

(2) 设 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,求常数 a,b,并求出表达式.

3. 设向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 3;向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩也为 3;向量组 Ⅲ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 4,证明向量组 Ⅳ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 为 $n-1$ 个 n 维线性无关的向量组,非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 正交,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

5. 设 A 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维列向量组,其中 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 是非零向量,若 $A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

6. 设 A 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 n 维向量且 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$,又 $A\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

7. 设向量组 A:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 B:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示,证明:向量组 A 的秩小于等于向量组 B 的秩.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 为三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的两

组基，且 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为$\{-1,2,1\}$，求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

测试题参考答案

一、选择题

1. 因为$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 且$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 可逆，所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，选(C).

2. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$，因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵，所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1,r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，于是 $r(\boldsymbol{A})<n$，$r(\boldsymbol{B})<n$，根据矩阵的秩、矩阵行向量组的秩与矩阵列向量组的秩相等，选(D).

3. 令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$，则$(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)=\boldsymbol{AB}$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $r(\boldsymbol{B})<s$，因为 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})<s$，所以 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关，应选(B).

4. 因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，应选(A).

5. 因为向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示，所以 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})\leqslant r$，若 $r<s$，则 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})\leqslant r<s$，即向量组 Ⅰ 的秩小于所含向量的个数，从而 Ⅰ 线性相关，应选(C).

二、填空题

1. 方法一：因为 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(1,-1,1)$，所以 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2=3$.

方法二：设 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=k$，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}$，又 $\boldsymbol{A}^2=3\boldsymbol{A}$，所以 $3\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，故 $k=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$.

2. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三个三维向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的充要条件是 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$，而 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&1&0\\2&4&a\end{vmatrix}=4a+20$，所以 $a=-5$.

3. $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 成比例，设 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则有 $\begin{cases}a=\lambda a,\\2a+3=\lambda,\\3a+4=\lambda,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

4. 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $r(\boldsymbol{B})=2$，而 $\boldsymbol{B}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&a+2&-5\\0&2a-1&-5\end{pmatrix}$，于是 $\dfrac{a+2}{2a-1}=\dfrac{-5}{-5}$，解得 $a=3$.

三、解答题

1. 方法一：定义法

令 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，整理得$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2k_1+k_2-k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+4k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\begin{cases}k_1+k_3=0,\\2k_1+k_2-k_3=0,\\k_2+4k_3=0,\end{cases}$ 因为 $\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\0&1&4\end{vmatrix}=7\neq 0$，所以 $k_1=k_2=k_3=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

方法二：矩阵法

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\0&1&4\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$$

因为 $|\boldsymbol{A}|=7\neq 0$，

微信公众号「同尘考研」(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，由矩阵秩的性质得 $r(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

2. $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的充分必要条件是非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}$ 有解. $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{pmatrix}$.

(1) 当 $b\neq 2$ 时，$\boldsymbol{b}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $b=2$ 时，设 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

情形一：当 $a\neq 1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，故 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3$；

情形二：当 $a=1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k-1\\k+2\\k\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{b}=(-2k-1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k+2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$（$k$ 为任意常数）.

3. 显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩也为 3，所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 4，所以 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，于是 $\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则存在不全为零的常数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4(\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=\boldsymbol{0}$. 显然 $k_4\neq 0$，若 $k_4=0$，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关得 $k_1=k_2=k_3=0$，矛盾. 若 $k_4\neq 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，又矛盾，故假设不对，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

4. 令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+k_0\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，则 $(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+k_0\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0$，即 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})+\cdots+k_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta})+k_0(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0$，由 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 正交得 $k_0(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0$，即 $k_0\|\boldsymbol{\beta}\|^2=0$. 因为 $\boldsymbol{\beta}$ 是非零向量，所以 $\|\boldsymbol{\beta}\|^2>0$，从而 $k_0=0$，于是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{0}$，注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-1}=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

5. 令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}(*)$，$(*)$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}$ 得 $k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，再对 $k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 并以此类推得

$$\begin{cases}k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},\\k_1\boldsymbol{\alpha}_3+k_2\boldsymbol{\alpha}_4+\cdots+k_{n-2}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},\\\vdots\\k_1\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},\\k_1\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},\end{cases}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_n\neq\boldsymbol{0}$，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

6. 令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}(*)$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$ 得 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1,(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 两边左乘 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，$k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$ 两边再左乘 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 得 $k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以由 $\begin{cases}k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},\\k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0},\\k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},\end{cases}$ 得 $k_1=k_2=k_3=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

7. 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$ 因为向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示，所以有 $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=k_{11}\boldsymbol{\beta}_1+k_{12}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{1n}\boldsymbol{\beta}_n,\\ \boldsymbol{\alpha}_2=k_{21}\boldsymbol{\beta}_1+k_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{2n}\boldsymbol{\beta}_n,\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m=k_{m1}\boldsymbol{\beta}_1+k_{m2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{mn}\boldsymbol{\beta}_n,\end{cases}$ 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}k_{11}&k_{21}&\cdots&k_{m1}\\k_{12}&k_{22}&\cdots&k_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{1n}&k_{2n}&\cdots&k_{mn}\end{pmatrix}$，令 $\begin{pmatrix}k_{11}&k_{21}&\cdots&k_{m1}\\k_{12}&k_{22}&\cdots&k_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{1n}&k_{2n}&\cdots&k_{mn}\end{pmatrix}=\boldsymbol{K}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BK}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{BK})\leqslant r(\boldsymbol{B})$ 且向量组的秩与其构成的矩阵的秩相等，所以向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于等于向量组 $\boldsymbol{B}$ 的秩.

8. 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第四章　线性方程组

大纲点击

1. 会用克拉默法则.

2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件.

3. 理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.

4. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.

5. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

基础复习模块——基本概念、原理、考点

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

一、方程组的几种形式及等价结论

1. 方程组的基本形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

2. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，则有方程组的矩阵形式

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}.$$

3. 令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$，则有方程组的向量形式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},$$
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}.$$

【结论 1】

(1)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n$(即未知数的个数与约束条件的个数相等)

$\Leftrightarrow$向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关

$\Leftrightarrow$向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩为 n.

(2)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$(即未知数的个数多于约束条件的个数)

$\Leftrightarrow$向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关

$\Leftrightarrow$向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩小于 n.

【结论 2】

(1)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解$\Leftrightarrow$向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示

$\Leftrightarrow$向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 的秩相等

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

(2)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 无解$\Leftrightarrow$向量 $\boldsymbol{b}$ 不可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示

$\Leftrightarrow$向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 的秩不等(即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 的秩比向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩多 1)

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

二、线性方程组解的结构

微信公众号【顶尖考研】(ID: djkv66)

1. 设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_s$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{X}_s$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意常数. 特殊情形:$\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 及 $k\boldsymbol{X}_1$(k 为任意常数)都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

2. 设 $\boldsymbol{X}_0$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,$\boldsymbol{\eta}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解,则 $\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{\eta}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解.

3. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解,则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

4. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一组解,则 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\eta}_t$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解的充分必要条件是 $k_1+k_2+\cdots+k_t=1$.

三、线性方程组解的基本定理

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,则

(1)齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$.

(2)齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解(或者无穷多个解)的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})<n$.

【注解】

(1)齐次线性方程组系数矩阵的秩从本质上说就是该方程组的约束条件的个数.

(2)齐次线性方程组解的情况取决于未知数的个数与约束条件的个数,若未知数的个数与约束条件的个数相等,则该方程组只有零解;若未知数的个数多于约束条件的个数,即存在自由变量,则方程组有无数个解.

定理 2　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则

(1)非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 无解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

(2)非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$. 更进一步地，当 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；当 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=r<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解.

【例】　设齐次线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+ax_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$ 有非零解，求 a 的值.

【解】　令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$，因为方程组有非零解，所以 $r(\boldsymbol{A})<3$，于是 $|\boldsymbol{A}|=0$，而 $|\boldsymbol{A}|=(a+2)(a-1)^2$，所以 $a=-2$ 或 $a=1$.

四、线性方程组的通解

(一)齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系与通解

设 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，不妨将 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换阶梯化(本质上即为方程组的同解变形)得 $\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{E}_r=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & \cdots & c_{1n}\\ c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{r,r+1} & c_{r,r+2} & \cdots & c_{rn}\end{pmatrix}$，则原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-c_{1,r+1}x_{r+1}-c_{1,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{1n}x_n,\\ x_2=-c_{2,r+1}x_{r+1}-c_{2,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{2n}x_n,\\ \vdots\\ x_r=-c_{r,r+1}x_{r+1}-c_{r,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{rn}x_n,\end{cases}$$

取 $\begin{pmatrix}x_{r+1}\\ x_{r+2}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$，则得到原方程组的一组解

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-c_{1,r+1}\\ \vdots\\ -c_{r,r+1}\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-c_{1,r+2}\\ \vdots\\ -c_{r,r+2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\begin{pmatrix}-c_{1n}\\ \vdots\\ -c_{rn}\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$

显然 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关，且可以生成方程组的任何解，称 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$(其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数).

微信公众号【顶尖考研】(ID: dijy66)

(二)非齐次线性方程组 $AX=b$ 的通解

设 $r(A)=r(\overline{A})=r<n$,且 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $AX=b$ 的导出方程组 $AX=0$ 的一个基础解系,η_0 为 $AX=b$ 的一个解,则 $AX=b$ 的通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta_0$,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

知识延拓模块——方程组的若干理论问题

定理 1 若齐次线性方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解,则 $r(A)=r(B)$,反之不对.

【注解】

对齐次线性方程组 $AX=0$ 及 $BX=0$,若 $r(A)=r(B)$ 且 $AX=0$ 的解为 $BX=0$ 的解,则方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

【例 1】 证明:$r(A)=r(A^TA)$.

【证明】 令

$$AX=0 \tag{1}$$

$$A^TAX=0 \tag{2}$$

若 $AX_0=0$,则 $A^TAX_0=0$;

反之,若 $A^TAX_0=0$,则 $X_0^TA^TAX_0=0$,即 $(AX_0)^T(AX_0)=0$,令 $AX_0=\alpha$,因为 $\alpha^T\alpha=\|\alpha\|^2=0$,所以 $\alpha=0$,即 $AX_0=0$.

于是方程组(1)与(2)同解,故 $r(A)=r(A^TA)$.

【例 2】 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为 s 个 n 维线性无关的向量,B 为 $m\times n$ 矩阵且 $r(B)=n$,证明:向量组 $B\alpha_1,B\alpha_2,\cdots,B\alpha_s$ 线性无关.

【证明】 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,则 $(B\alpha_1,B\alpha_2,\cdots,B\alpha_s)=BA$.

令

$$AX=0 \tag{1}$$

$$BAX=0 \tag{2}$$

若 $AX_0=0$,显然有 $BAX_0=0$;

反之,若 $BAX_0=0$,令 $AX_0=Y_0$,则有 $BY_0=0$,因为 $r(B)=n$,所以 $BY=0$ 只有零解,所以由 $BY_0=0$ 得 $Y_0=0$,即 $AX_0=0$,于是方程组(1)和(2)同解,故 $r(A)=r(BA)$.

再由向量组的秩与其构成矩阵的秩相等得 $r(A)=r(BA)=s$,于是 $B\alpha_1,B\alpha_2,\cdots,B\alpha_s$ 线性无关.

定理 2 $AB=O$,则 B 的列向量组为方程组 $AX=0$ 的一组解.

【例 3】 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times s$ 矩阵,若 $AB=O$,则 $r(A)+r(B)\leqslant n$.

【证明】 令 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$,因为 $AB=O$,所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 为方程组 $AX=0$ 的一组解.

因为 $AX=0$ 的基础解系含 $n-r(A)$ 个线性无关的解向量,所以 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\leqslant n-r(A)$,即 $r(B)\leqslant n-r(A)$,于是 $r(A)+r(B)\leqslant n$.

【注解】

若解题过程中出现 $AB=O$ 的条件,一般有如下两种解读方式:

(1)$r(A)+r(B)\leqslant n$;

(2)B 的列向量组为方程组 $AX=0$ 的解.

微信公众号【快乐考研】(ID: djky36)

【例 4】　设 A 为三阶非零矩阵，$B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&5&a\\2&0&1\end{pmatrix}$，且 $AB=O$.

(1)求常数 a 的值；　(2)求齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解.

【解】　(1)由 $AB=O$，得 $r(A)+r(B)\leqslant 3$.

因为 $A\neq O$，所以 $r(A)\geqslant 1$，从而 $r(B)\leqslant 2$，注意到 B 至少有两列不成比例，$r(B)\geqslant 2$，于是 $r(B)=2$，$r(A)=1$.

由 $|B|=0$ 得 $a=-8$.

(2)因为 $AB=O$，所以 B 的列向量组为 $AX=0$ 的一组解，于是 $AX=0$ 的通解为

$$X=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\5\\0\end{pmatrix}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 5】　设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$ 为非零矩阵，且 $AX=0$ 有非零解，令 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$ 为 A 的伴随矩阵，证明：A^* 的列向量组为 $AX=0$ 的解向量，若 $A_{21}\neq 0$，求方程组 $AX=0$ 的通解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【解】　因为 $AX=0$ 有非零解，所以 $|A|=0$.

由 $AA^*=|A|E=O$ 得 A^* 的列向量为 $AX=0$ 的解向量.

若 $A_{21}\neq 0$，则 $r(A^*)\geqslant 1$，由 $r(A)<n$ 得 $r(A^*)=1$，从而 $r(A)=n-1$，于是 $AX=0$ 的通解为 $X=C(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^{\mathrm{T}}$.

定理 3　设 $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 正交，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 为方程组 $AX=0$ 的一组解.

定理 4　设 A 为 $m\times n$ 矩阵且 $r(A)=r(\overline{A})=r<n$，则

(1)方程组 $AX=b$ 最多有 $n-r+1$ 个线性无关的解向量；

(2)设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r+1}$ 为方程组 $AX=b$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量，方程组 $AX=b$ 的通解为 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\beta}_{n-r+1}(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1)$.

重点题型分析

题型一　方程组解的概念、解的结构与性质问题

【例 1】　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则下列结论正确的是(　　).

(A)若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 只有唯一解

(B)若 $AX=0$ 有非零解,则 $AX=b$ 有无数个解

(C)若 $AX=b$ 有唯一解,则 $AX=0$ 有无数个解

(D)若 $AX=b$ 有无数个解,则 $AX=0$ 有无数个解

【解】 因为 $AX=b$ 有无数个解,所以 $r(A)=r(\overline{A})<n$,从而 $r(A)<n$,于是 $AX=0$ 有无数个解,应选(D).

【例 2】 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,则下列结论正确的是(　　).

(A)若 $r(A)=n$,则 $AX=b$ 只有唯一解

(B)若 $r(A)<n$,则 $AX=b$ 有无数个解

(C)$AX=b$ 有无数个解的充分必要条件是 $AX=0$ 有非零解

(D)若 $r(A)=m$,则 $AX=b$ 一定有解

【解】 因为 $r(A)=m$,所以 $r(A)=r(\overline{A})=m$,所以方程组 $AX=b$ 一定有解,应选(D).

【例 3】 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 维线性无关的向量组,讨论齐次线性方程组

$$(\alpha_1+\alpha_2)x_1+(\alpha_2+\alpha_3)x_2+\cdots+(\alpha_n+\alpha_1)x_n=0$$

的解的情况.

【解】 方程组 $(\alpha_1+\alpha_2)x_1+(\alpha_2+\alpha_3)x_2+\cdots+(\alpha_n+\alpha_1)x_n=0$ 的解的情况等价于向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 的线性相关性.

令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,$B=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1)$,则

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}=AC,\quad |C|=1+(-1)^{n+1}.$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,所以 A 可逆,于是 $r(B)=r(C)$.

当 n 为偶数时,$r(B)=r(C)<n$,向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性相关,故方程组 $(\alpha_1+\alpha_2)x_1+(\alpha_2+\alpha_3)x_2+\cdots+(\alpha_n+\alpha_1)x_n=0$ 有非零解;

当 n 为奇数时,$r(B)=r(C)=n$,向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性无关,故方程组 $(\alpha_1+\alpha_2)x_1+(\alpha_2+\alpha_3)x_2+\cdots+(\alpha_n+\alpha_1)x_n=0$ 只有零解.

【例 4】 求下列方程组的通解:

(1)设 A 为 n 阶矩阵,且 A 的各行元素之和为 0,$r(A)=n-1$,求 $AX=0$ 的通解;

(2)设 $AX=b$ 为四元非齐次线性方程组,且 $r(A)=3$,又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为方程组 $AX=b$ 的三个解向量,且 $\alpha_1=(2,1,-1,3)^{\mathrm{T}}$,$\alpha_2+\alpha_3=(3,-3,1,5)^{\mathrm{T}}$,求 $AX=b$ 的通解.

【解】 (1)因为 $r(A)=n-1$,所以方程组 $AX=0$ 的基础解系只含一个线性无关的解向量,又因为 A 的各行元素之和为零,所以 $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=0$,于是 $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 为方程组 $AX=0$ 的一个基础解系,故方程组 $AX=0$ 的通解为 $X=k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

(2)由 $r(A)=3$ 得方程组 $AX=0$ 的基础解系含一个线性无关的解向量,由线性方程组解的结构得 $AX=0$ 的基础解系为

$$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_1-\alpha_3)=2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=(1,5,-3,1)^{\mathrm{T}}.$$

故方程组 $AX=b$ 的通解为 $X=k(1,5,-3,1)^{\mathrm{T}}+(2,1,-1,3)^{\mathrm{T}}$.

【例 5】　$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}4\\5\\-3\\11\end{pmatrix}$ 为 $\begin{cases}a_1x_1+2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1,\\4x_1+b_2x_2+3x_3+b_4x_4=d_2,\\3x_1+c_2x_2+5x_3+c_4x_4=d_3\end{cases}$ 的三个解，求其通解.

【解】　由非齐次线性方程组有解得 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$，因为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有两行不成比例，所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$.

因为 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}3\\6\\-3\\9\end{pmatrix}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关解，所以 $4-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，即 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，于是 $r(\boldsymbol{A})=2$.

故方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\-3\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

【例 6】　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为四维列向量组，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

【解】　显然 $r(\boldsymbol{A})=2$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个线性无关的解向量，因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 等价于 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 即 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $(3,2,-1)^{\mathrm{T}}$，于是通解为 $\boldsymbol{X}=k(3,2,-1)^{\mathrm{T}}$.

【例 7】　设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

【解】　显然 $r(\boldsymbol{A})=3$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含一个线性无关的解向量，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1=3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，所以 $(1,-3,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 等价于 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，再由 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4$ 得方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解为 $(1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$，于是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k(1,-3,-1,0)^{\mathrm{T}}+(1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$.

题型二　不含参数的齐次和非齐次线性方程组的通解

【例 1】　求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3-3x_4=0,\\x_1+x_2+x_4=0,\\x_2-x_3+2x_4=0\end{cases}$ 的通解.

【解】　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&-3\\1&1&0&1\\0&1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-3\\0&2&-2&4\\0&1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

方法一　方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_3+x_4,\\x_2=x_3-2x_4,\end{cases}$ 通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-x_3+x_4\\ x_3-2x_4\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

方法二 方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$，通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

【例 2】 判断 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ x_2+2x_3=1,\\ 4x_1+3x_2+2x_3=3\end{cases}$ 是否有解. 若有解求出其通解.

【解】 $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\4&3&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&-1&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，所以方程组有无数个解.

方法一 方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3,\\ x_2=-2x_3+1,\end{cases}$ 通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_3\\-2x_3+1\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

方法二 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的特解为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，故原方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=C\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

题型三 向量组中的方程组问题

【思路分析】

判断向量组相关无关问题本质上就是讨论齐次线性方程组有无非零解的问题；判断一个向量可否由一个向量组线性表示本质上就是讨论非齐次线性方程组有无解的问题.

【例】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+a\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1+a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+a\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\a\\a^2\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: dikv66)

(1)当 a 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示?

(2)当 a 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表示方法不唯一?并写出一般表达式.

(3)当 a 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?

【解】 方法一　$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+a & 1 & a\\ 1 & 1 & 1+a & a^2\end{pmatrix}\rightarrow$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+a & a^2\\ 0 & a & -a & a-a^2\\ 0 & -a & -2a-a^2 & -a^2(1+a)\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+a & a^2\\ 0 & a & -a & a-a^2\\ 0 & 0 & -3a-a^2 & -a(a^2+2a-1)\end{pmatrix}.$$

(1)当 $a\neq 0$ 且 $a\neq -3$ 时,因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$,所以 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示;

(2)当 $a=0$ 时,$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=1<3$,所以 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表示方法不唯一.

令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$,通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1-k_2\\ k_1\\ k_2\end{pmatrix}$,于是

$$\boldsymbol{\beta}=(-k_1-k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3,\text{其中 } k_1,k_2 \text{ 为任意常数.}$$

(3)当 $a=-3$ 时,$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 9\\ 0 & -3 & 3 & -12\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$,因为 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$,所以 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

微信公众号【贝尔考研】(ID:djky66)

方法二　$D=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}=(a+3)a^2.$

(1)当 $D\neq 0$,即 $a\neq 0$ 且 $a\neq -3$ 时,因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$,所以 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示;

(2)当 $a=0$ 时,$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=1<3$,所以 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表示方法不唯一.

令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$,通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1-k_2\\ k_1\\ k_2\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{\beta}=(-k_1-k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 k_1,k_2 为任意常数.

(3)当 $a=-3$ 时,$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 9\\ 0 & -3 & 3 & -12\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$,

因为 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

题型四　含参数的齐次和非齐次线性方程组解的讨论

【例 1】　设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶非零矩阵，第一行元素 a,b,c 不全为零，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

【解】　由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$，因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1,r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，于是 $1\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

(1)当 $k\neq 9$ 时，因为 $r(\boldsymbol{B})=2$，所以 $r(\boldsymbol{A})=1$，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含两个线性无关的解向量，且 $\boldsymbol{B}$ 的列向量中含 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，于是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}$.

(2)当 $k=9$ 时，$r(\boldsymbol{B})=1$.

情形一：若 $r(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个线性无关的解向量，于是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

情形二：若 $r(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含两个线性无关的解向量，不妨设 $a\neq 0$，由

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}a&b&c\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{b}{a}&\frac{c}{a}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$.

【例 2】　设三阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 的解.

(1)求 λ 的值；　(2)证明：$|\boldsymbol{B}|=0$.

【解】　令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则原方程组化为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$.

因为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，于是 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$，又因为 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，所以 $r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，于是 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2<3$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$，由 $|\boldsymbol{A}|=5(\lambda-1)=0$ 得 $\lambda=1$.

(2)因为 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，所以 $r(\boldsymbol{B})\leqslant 2<3$，于是 $|\boldsymbol{B}|=0$.

【例 3】　a,b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ 有唯一解、无解、有无数个解？在有无数个解时求出通解.

【解】　$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1)当 $a\neq 1$ 时，因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，所以方程组有唯一解；

(2)当 $a=1,b\neq -1$ 时，因为 $r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，所以方程组无解；

(3)当 $a=1,b=-1$ 时，因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<4$，所以方程组有无数个解，由

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 4】　设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$ 有无数个解，求常数 a,b，并求该方程组的通解.

【解】　$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 2-5a \end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2a \end{pmatrix}.$$

因为原方程组有无数个解，所以 $\begin{cases} b-3a=0, \\ 2-2a=0, \end{cases}$ 解得 $a=1,b=3$.

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

题型五 方程组的解与向量组的正交性问题

【例 1】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 为 $n-1$ 个 n 维线性无关的向量组，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为非零向量且与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 正交.

(1)证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 成比例；(2)令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$，证明：$r(\boldsymbol{B})=1$.

【证明】 (1)令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关，所以 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，又因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 正交，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

因为 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个线性无关的解向量，于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 成比例.

(2)因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为非零向量且成比例，所以存在非零常数 k，使得 $\boldsymbol{\beta}_2=k\boldsymbol{\beta}_1$，代入得 $\boldsymbol{B}=2k\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$，于是 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{\beta}_1)=1$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 2】 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{in}\end{pmatrix}$ $(i=1,2,\cdots,r,r<n)$ 为 n 维向量组，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ 为 $\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\vdots\\a_{r1}x_1+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$ 的非零解，问 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

【解】 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，则方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\vdots\\a_{r1}x_1+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$ 可写成 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 正交.

令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k_0\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，由 $(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k_0\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0$，即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})+\cdots+k_r(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta})+k_0(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0,$$

得 $k_0(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0$ 或 $k_0\|\boldsymbol{\beta}\|^2=0$，而 $\boldsymbol{\beta}$ 为非零向量，所以 $k_0=0$，于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0},$$

再由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关得 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

题型六　方程组公共解问题

【例 1】 设线性方程组(Ⅰ)$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0\end{cases}$与(Ⅱ)$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$

(1)求两个方程组的基础解系；　(2)求两个方程组的公共解.

【解】 (1)$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$,方程组(Ⅰ)的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}};$$

$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$,方程组(Ⅱ)的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

(2)**方法一**　两个方程组的公共解即为方程组$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的解.

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

公共解为$\boldsymbol{X}=C(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

方法二　方程组(Ⅰ)的通解为$\boldsymbol{X}=k_1(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}=(-k_2,k_2,k_1,k_2)^{\mathrm{T}}$,代入方程组(Ⅱ)得$\begin{cases}-k_2-k_2+k_1=0,\\ k_2-k_1+k_2=0,\end{cases}$即$k_1=2k_2$,取$k_2=C$,则两方程组的公共解为

$$\boldsymbol{X}=C(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

方法三　方程组(Ⅰ)的通解为$\boldsymbol{X}=k_1(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}=(-k_2,k_2,k_1,k_2)^{\mathrm{T}}$,方程组(Ⅱ)的通解为$\boldsymbol{X}=l_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+l_2(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}=(-l_2,l_1-l_2,l_1,l_2)^{\mathrm{T}}$,令$(-k_2,k_2,k_1,k_2)^{\mathrm{T}}=(-l_2,l_1-l_2,l_1,l_2)^{\mathrm{T}}$,得$l_1=k_1=2k_2$,$l_2=k_2$,取$k_2=C$,两方程组的公共解为

$$\boldsymbol{X}=C(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

【例 2】 设线性方程组(Ⅰ)$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$与(Ⅱ)$x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解，求$a$的值及公共解.

【解】 方程组(Ⅰ),(Ⅱ)的公共解即为方程组(Ⅲ)$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$的解.

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&a-1\\0&0&a^2-1&-3(a-1)\\0&0&a-1&-(a-1)\end{pmatrix},$$

微信公众号【顶尖考研】(id: djky66)

当 $a=1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，方程组的公共解为 $\boldsymbol{X}=C\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $a\neq1$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&a-1\\0&0&a+1&-3\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&a-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&a-2\end{pmatrix},$$

因为两个方程组有公共解，所以 $a=2$，由

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故两个方程组的公共解为 $\boldsymbol{X}=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

【例 3】 设齐次线性方程组(Ⅰ)$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$ 与(Ⅱ)$\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$ 有公共的非零解，求常数 a,b,c 的值，并求所有非零公共解.

【解】 因为方程组(Ⅰ)有非零解，所以 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-1\\0&-1&a-3\end{vmatrix}=0$ 得 $a=2$.

方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)的公共解即为方程组

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+2x_3=0,\\x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

的解.

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\\1&b&c\\2&b^2&c+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-1\\0&-1&-1\\0&b-2&c-3\\0&b^2-4&c-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&c-b-1\\0&0&c-b^2-1\end{pmatrix},$$

因为两个方程组有公共的非零解，所以 $r(\boldsymbol{A})<3$，于是 $\begin{cases}c-b-1=0,\\c-b^2-1=0,\end{cases}$ 解得 $b=0,c=1$ 或 $b=1,c=2$，故所求常数为 $\begin{cases}a=2,\\b=0,\\c=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\b=1\\c=2,\end{cases}$，方程组(Ⅲ)与 $\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=-x_3\end{cases}$ 同解，于是公共非零解为

$$\boldsymbol{X}=C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}(C\text{ 为非零常数}).$$

题型七　方程组基础解系与通解的理论证明问题

【例 1】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，令 $\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$（其中 t_1,t_2 为常数），当 t_1,t_2 满足什么条件时，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系？

【分析】 证明一个向量组为齐次线性方程组的基础解系需证明三点：

(1)该向量组为齐次线性方程组的解；

(2)该向量组线性无关；

(3)该向量组所含向量的个数与方程组自由变量的个数相等.

【解】 由齐次线性方程组解的结构得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一组解，于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的充分必要条件是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

令 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{0}$，即

$$(t_1k_1+t_2k_s)\boldsymbol{\alpha}_1+(t_2k_1+t_1k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，所以有 $\begin{cases}t_1k_1+t_2k_s=0,\\t_2k_1+t_1k_2=0,\\\vdots\\t_2k_{s-1}+t_1k_s=0,\end{cases}$ 系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}t_1&0&\cdots&0&t_2\\t_2&t_1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&t_1&0\\0&0&\cdots&t_2&t_1\end{vmatrix}=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s.$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

当 $t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s\neq0$ 时，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 全取零，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关，从而为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

【例 2】 证明：若方程组(Ⅰ) $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$ 有解，则方程组

(Ⅱ) $\begin{cases}a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m=0,\\a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m=0,\\\vdots\\a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m=0\end{cases}$ 与(Ⅲ) $\begin{cases}a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m=0,\\a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m=0,\\\vdots\\a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m=0,\\b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m=0\end{cases}$ 同解.

【分析】 设 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 为两个齐次线性方程组，若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解，且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

【证明】 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$，则三个方程组可表示为(Ⅰ)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，(Ⅱ)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$，(Ⅲ)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$.

因为方程组(Ⅰ)有解，所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$，从而 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

因为方程组(Ⅲ)的解一定是方程组(Ⅱ)的解，且 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，所以方程组(Ⅱ)，(Ⅲ)同解.

【例 3】 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系，其中 $r=r(\boldsymbol{A})$，又 $\boldsymbol{\eta}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的特解，令 $\boldsymbol{\beta}_0=\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}=\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$，证明：

(1)$\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 线性无关；

(2)$k_0\boldsymbol{\beta}_0+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解，其中 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数且 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=1$.

【证明】 (1)令 $k_0\boldsymbol{\beta}_0+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\beta}_{n-r}=\boldsymbol{0}$，即

$$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

上式左乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{A\eta}+k_1\boldsymbol{A\xi}_1+k_2\boldsymbol{A\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{A\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{A\xi}_1=\boldsymbol{A\xi}_2=\cdots=\boldsymbol{A\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}$，所以 $(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，于是有

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

注意到 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，进一步有 $k_0=0$，故 $\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 线性无关.

(2)非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$，于是有

$$\boldsymbol{X}=(1-k_1-k_2-\cdots-k_{n-r})\boldsymbol{\beta}_0+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\beta}_{n-r},$$

令 $1-k_1-k_2-\cdots-k_{n-r}=k_0$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=k_0\boldsymbol{\beta}_0+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\beta}_{n-r},$$

其中 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数且 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=1$.

【例 4】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，证明：若 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$ 可逆，则 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}$ 可逆.

【证明】 若 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}$ 不可逆，则 $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})<n$，于是方程组 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，不妨设 $\boldsymbol{X}_0\neq\boldsymbol{0}$，使得 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0}$，于是 $\boldsymbol{BAX}_0=-\boldsymbol{X}_0$，显然 $\boldsymbol{AX}_0\neq\boldsymbol{0}$，否则 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0}$.

因为 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AX}_0)=\boldsymbol{AX}_0+\boldsymbol{ABAX}_0=\boldsymbol{AX}_0-\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{0}$，即方程组 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，所以 $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})<n$，即 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$ 不可逆，矛盾，所以 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}$ 可逆.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

题型八　未知矩阵问题

【思路分析】

求矩阵等式中的未知矩阵，是线性代数的一个重要考点，在矩阵部分已经研究过一种情况，未知矩阵的左或右为可逆矩阵，矩阵等式经过化简有如下情形：

(1)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$；

(2)$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(3)$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$.

还有一种情况，矩阵等式经过化简化为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为不可逆方阵，或 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵，该种情形可以转化为求解几个方程组.

【例 1】　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维线性无关的列向量，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，设$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{X}$.

【解】　由$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\alpha}_4$ 得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$可逆，于是$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，

由$\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\0&1&1&-2\\-1&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\0&1&1&-2\\0&-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$得

$$\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}(k\text{ 为任意常数}).$$

【例 2】　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&5\\1&0&7\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\\3&-1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

【解】　显然$|\boldsymbol{A}|=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，令 $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)$，

则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 等价于$\begin{cases}\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{b}_1,\\\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{b}_2,\end{cases}$

由$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&-2\\0&1&5&2&1\\1&0&7&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&-2\\0&1&5&2&1\\0&1&5&2&1\end{pmatrix}$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&-2\\0&1&5&2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&7&3&-1\\0&1&5&2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $\boldsymbol{X}_1=k_1\begin{pmatrix}-7\\-5\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7k_1+3\\-5k_1+2\\k_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}_2=k_2\begin{pmatrix}-7\\-5\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7k_2-1\\-5k_2+1\\k_2\end{pmatrix}$，

故 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-7k_1+3&-7k_2-1\\-5k_1+2&-5k_2+1\\k_1&k_2\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数）.

测试题

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则（　　）.

(A) 当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B) 当 $r(\boldsymbol{A})=m$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有解

(C) 当 $m=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有解

(D) 当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无数个解

2. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，对任意常数 k_1,k_2，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为（　　）.

(A) $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$　　(B) $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2}{2}$

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，下列可作为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的是（　　）.

(A) $\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&2&1\\4&4&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，若 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})$，下列结论正确的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 有无数个解　　(B) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 有唯一解

(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 只有零解　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 有无数个解

5. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为四阶矩阵，且 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1,-4,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，对方程组(Ⅰ)：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与(Ⅱ)：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，则有（　　）.

(A)(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不一定是(Ⅰ)的解

(B)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，但(Ⅰ)的解不一定是(Ⅱ)的解

微信公众号（顶尖考研）(ID:djky66)

(C)(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解,(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解

(D)(Ⅰ)与(Ⅱ)是同解方程组

二、填空题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解,$r(\boldsymbol{A})=2$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为_____.

2. 设方程组 $\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ 无解,则 $a=$_____.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\-7\\-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ 是方程组 $\begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3=d,\\x_1+x_2-4x_3=e,\\2x_1+x_2+x_3=-4\end{cases}$ 的两个解,则该方程组的通解是_____.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&a&6-a\end{pmatrix}$,且 $r(\boldsymbol{A})=2$,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的通解是_____.

三、解答题

1. 求方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+2x_4-x_5=0,\\x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5=0,\\2x_1+4x_2-7x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$ 的通解.

2. 判断方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=2,\\x_1-2x_2-x_3=8,\\2x_1-x_2+10x_3=-2\end{cases}$ 是否有解,若有解求其通解.

3. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为四阶矩阵,且方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k(1,-2,4,0)^{\mathrm{T}}+(1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$,令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\alpha}_4)$,求 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解.

4. 求 a 的不同取值情况讨论方程组 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 何时有唯一解、无解、有无数个解?当有无数个解时,求其通解.

5. 对方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+kx_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0,\end{cases}$ 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&k\\3&1&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,存在三阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求 k 的值.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}$,且方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含两个线性无关的解向量,求齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

7. 设方程组 $\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3,\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3,\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3,\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3.\end{cases}$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

(1) 证明:若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不等,则方程组无解;

(2) 若 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq 0)$,求方程组的通解.

8. a,b 取何值时,方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_2+2x_3+2x_4=1,\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1,\end{cases}$

(1) 有唯一解? (2) 无解? (3) 有无数个解?并求出一般解.

9. 设齐次线性方程组 $\begin{cases}ax_1+bx_2+\cdots+bx_n=0,\\ bx_1+ax_2+\cdots+bx_n=0,\\ \vdots\\ bx_1+bx_2+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$ 其中 $ab\neq 0,n\geqslant 2,a,b$ 取何值时,

(1) 方程组只有零解; (2) 方程组有无数个解,并求其通解.

10. 设非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有三个线性无关解 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明 $r(\boldsymbol{A})=2$; (2) 求常数 a,b 的值及通解.

11. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-3a\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\-b-2\\a+2b\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$,讨论 a,b 的取值情况,使

(1) $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示.

(2) $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表示方法不唯一,求一般表示式.

(3) $\boldsymbol{b}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

12. 若方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=0,\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=0\end{cases}$ 的每个解都是方程组 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots b_nx_n=0$ 的解,

令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{1n}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\vdots\\a_{2n}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m=\begin{pmatrix}a_{m1}\\a_{m2}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$,证明:$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

13. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&4&0\\-1&0&-2\\a&b&c\end{pmatrix}$.

(1) 求常数 a,b,c 的值,使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解; (2) 求 $\boldsymbol{X}$.

14. 设方程组(Ⅰ):$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\end{cases}$ 方程组(Ⅱ)的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求方程组(Ⅰ)的基础解系;

(2) a 为何值时,两个方程组有公共的非零解?并求出两个方程组的公共解.

15. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$,证明方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有公共的非零解.

测试题参考答案

一、选择题

1. 因为当 $r(\boldsymbol{A})=m$,则 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=m$,于是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解,应选(B).

2. $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含两个线性无关的解向量，虽然 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1$ 都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，但不能保证线性无关，所以(A)不对；因为 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关解，且 $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$ 又是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的特解，所以 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解，选(B)；因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个解，但不能保证线性无关，所以(C)不对；因为 $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2}{2}$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的特解，所以(D)不对.

3. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 基础解系至少含2个线性无关的解向量，于是 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$，且 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，只有选项(B)的矩阵满足条件，应选(B).

4. 因为 $r(\boldsymbol{A})\leqslant n$ 且 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})$，所以 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\leqslant n$，而方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 有 $n+1$ 个变量且 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\leqslant n<n+1$，所以方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 一定有无数个解，选(D).

5. 因为 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_4$，又因为 $\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2=(2,0,-4,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $2\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_3$，不选(C)和(D)；因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含两个线性无关的解向量，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，选(B).

6. 若 $\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{0}$；反之，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_0=0$ 或 $(\boldsymbol{AX}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_0=0$，令 $\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{\alpha}$，于是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2=0$，故 $\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{0}$，即两个方程组同解，应选(D).

二、填空题

1. $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(1,-4,8)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的特解为 $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}1\\-4\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

2. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$，因为方程组 $\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ 无解，所以 $r(\boldsymbol{A})<3$，于是 $|\boldsymbol{A}|=0$，而 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$，所以 $a=-2$ 或 $a=1$. 当 $a=-2$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，所以方程组有无数个解；当 $a=1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，所以方程组无解，故 $a=1$.

3. 因为 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，所以该方程组对应的齐次线性方程组的基础解系最多含一个线性无关的解向量，而 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1=(-5,9,1)^{\mathrm{T}}$ 为其对应的齐次线性方程组的一个非零解，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$，该方程组的通解为 $k(-5,9,1)^{\mathrm{T}}+(2,-7,-1)^{\mathrm{T}}$.

4. 因为 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{6-a}$，解得 $a=2$. 又因为 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，从而 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含两个线性无关的解向量，由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的列向量为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，故 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

三、解答题

1. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2&2&-1\\1&2&-1&3&-2\\2&4&-7&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2&2&-1\\0&0&1&1&-1\\0&0&-3&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&4&-3\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，则原方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=C_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-4\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

2. $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\1&-2&-1&8\\2&-1&10&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\0&-1&-4&6\\0&1&4&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&7&-4\\0&1&4&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，所以原方程组有无数个解，通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}-7\\-4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-6\\0\end{pmatrix}$.

3. 显然 $r(\boldsymbol{A})=3$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{b}\end{cases}$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，由 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 得 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故 $r(\boldsymbol{B})=2$. 由 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 得 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的一个特解；由 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 及 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 得 $\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$ 为方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的一个基础解系，故 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=C_1\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

4. $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{vmatrix}=-(a+1)(a-3)$.

(1) 当 $a\neq-1$ 且 $a\neq3$ 时，方程组有唯一解；

(2) 当 $a=-1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&1&3\\1&-1&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&-3&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，所以方程组无解；

(3) 当 $a=3$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&5&3\\1&3&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&3&1\\0&1&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&-3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&7&3\\0&1&-3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，所以方程组有无数个解，通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}-7\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$.

5. 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一组解，又因为 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解，于是 $r(\boldsymbol{A})<3$，即 $|\boldsymbol{A}|=0$. 由 $|\boldsymbol{A}|=5(k-1)=0$ 得 $k=1$.

6. 因为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含两个线性无关的解向量，所以 $4-r(\boldsymbol{A})=2$，即 $r(\boldsymbol{A})=2$. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\0&t-2&-1&-1\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\dfrac{1}{t-2}=\dfrac{t}{-1}=\dfrac{t}{-1}$，解得 $t=1$. 于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

7. (1) $|\overline{\boldsymbol{A}}|=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{vmatrix}=(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)$，因为 a_1，a_2，a_3，a_4 两两不等，所以 $|\overline{\boldsymbol{A}}|\neq 0$，即 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，而 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 3$，于是 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，故方程组无解；

(2) 若 $a_1=a_3=k$，$a_2=a_4=-k$，则 $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&k&k^2&k^3\\1&-k&k^2&-k^3\\1&k&k^2&k^3\\1&-k&k^2&-k^3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&k&k^2&k^3\\0&1&0&k^2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&k^2&0\\0&1&0&k^2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，所以方程组有无数个解，通解为 $\boldsymbol{X}=C\begin{pmatrix}-k^2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\k^2\\0\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研(ID:djky66)】
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

8. $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&2\\0&-1&a-3&-2\\3&2&1&a\end{vmatrix}=(a-1)^2$.

(1) 当 $a\neq 1$，b 任意时，方程组有唯一解.

(2) 当 $a=1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&-2&-2&b\\3&2&1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&-2&-2&b\\0&-1&-2&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&b+1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，当 $a=1$，$b\neq -1$ 时，方程组无解.

(3) 当 $a=1$，$b=-1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<4$，所以方程组有无数个解，通解为 $\boldsymbol{X}=C_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

9. $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$.

(1) 当 $a\neq(1-n)b$ 且 $a\neq b$ 时，方程组只有零解.

(2) 当 $a=b$ 时，$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，方程组的通解为 $\boldsymbol{X}=C_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+C_{n-1}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

当 $a=(1-n)b$ 时，$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1-n&1&\cdots&1\\1&1-n&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1-n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&-1\\0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-1\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以原方程组基础解系含一个线性无关的解向量，注意到 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 0，所以通解为 $\boldsymbol{X}=C(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

10. (1) 令 $r(\boldsymbol{A})=r$，因为系数矩阵至少有两行不成比例，所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 为对应的齐次线性方程组的两个解，令 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，即 $(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_1-k_1\boldsymbol{\alpha}_2-k_2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $k_1=k_2=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，于是对应的齐次线性方程组的基础解系至少含两个线性无关解向量，即 $4-r\geqslant 2$ 或 $r\leqslant 2$，故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(2) $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&1+a\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，所以 $\dfrac{-1}{1-a}=\dfrac{1}{3-a}=\dfrac{-5}{b-a}=\dfrac{3}{1+a}$，解得 $a=2,b=-3$，于是 $\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

11. $\boldsymbol{b}$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示等价于非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}$ 有无解. $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{pmatrix}$.

(1) 当 $a\neq 0$ 且 $a\neq b$ 时，因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，所以方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，于是 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示.

(2) 当 $a=b\neq 0$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-a&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1-\dfrac{1}{a}\\0&1&-1&\dfrac{1}{a}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，所以方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}$ 有无数个解，从而 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示方法不唯一. 方程组通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-a^{-1}\\a^{-1}\\0\end{pmatrix}$，故一般表示式为 $\boldsymbol{b}=(1-\dfrac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_1+(k+\dfrac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$.

(3) 当 $a=0,b$ 为任意常数时，$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&0&-b&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，所以方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}$ 无解，于是 $\boldsymbol{b}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

12. 因为方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$的每个解都是方程$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$的解，所以方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$与$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0,\\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0\end{cases}$同解，于是$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，进一步有$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})$，故$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

13. 令$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$等价于$\begin{cases}\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{b}_1,\\ \boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{b}_2,\\ \boldsymbol{AX}_3=\boldsymbol{b}_3.\end{cases}$

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\-1&1&0&-1&0&-2\\1&0&1&a&b&c\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&2&2&0&4&-2\\0&-1&-1&a-1&b-4&c\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&a-1&b-2&c-1\end{array}\right).$$

(1) 当$a=1,b=2,c=1$时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解.

(2) 当$a=1,b=2,c=1$时，$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$，方程组$\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{b}_1$的通解为$\boldsymbol{X}_1=k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_1\\-k_1\\k_1\end{pmatrix}$($k_1$为任意常数)；方程组$\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{b}_2$的通解为$\boldsymbol{X}_2=k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-k_2\\2-k_2\\k_2\end{pmatrix}$($k_2$为任意常数)；方程组$\boldsymbol{AX}_3=\boldsymbol{b}_3$的通解为$\boldsymbol{X}_3=k_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_3\\-1-k_3\\k_3\end{pmatrix}$($k_3$为任意常数)，所以$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1-k_1&2-k_2&1-k_3\\-k_1&2-k_2&-1-k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$.

14. (1)$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\2&3&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-5&3\\0&1&3&-2\end{pmatrix}$，方程组(Ⅰ)的基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=(5,-3,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-3,2,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 方程组(Ⅱ)通解为$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2k_1-k_2\\-k_1+2k_2\\(a+2)k_1+4k_2\\k_1+(a+8)k_2\end{pmatrix}$，代入方程组(Ⅰ)得$\begin{cases}(a+1)k_1=0,\\(a+1)k_1-(a+1)k_2=0,\end{cases}$因为两个方程组有公共的非零解，所以上述关于$k_1,k_2$的方程组有非零解，从

微信公众号(顶尖考研)(ID: dkv66)

而 $\begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ a+1 & -(a+1) \end{vmatrix} = 0$，解得 $a = -1$，于是两个方程组的公共解为 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2k_1 - k_2 \\ -k_1 + 2k_2 \\ k_1 + 4k_2 \\ k_1 + 7k_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

15. 方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}$ 的公共解即为方程组 $\begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0} \end{cases}$ 或 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的解，因为 $r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \leqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) < n$，所以方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 有非零解，从而方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}$ 有公共的非零解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第五章　特征值与特征向量

大纲点击

1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量.

2. 理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.

3. 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

引　言

特征值与特征向量是线性代数的核心内容，研究特征值与特征向量主要是应用于矩阵相似对角化，而矩阵相似对角化的应用是二次型的标准形. 本章主要要掌握如下内容：

1. 熟练掌握矩阵特征值与线性无关的特征向量的计算.

2. 熟练掌握矩阵特征值与特征向量的性质(尤其要注意掌握实对称矩阵有哪些其他矩阵不一定有的性质).

3. 会通过特征值与特征向量判断矩阵是否可以对角化及矩阵对角化过程.

微信公众号(顶尖考研)
(ID:djky66)

第一节　特征值与特征向量的概念与性质

基础复习模块——基本概念、原理、考点



一、特征值与特征向量的概念

1. 矩阵的特征值、特征向量——设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在一个数 λ 和非零向量 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，称 $\boldsymbol{X}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量.

2. 特征多项式、特征方程——令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，称

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

【注解】

(1)若特征值为单值,则其对应的线性无关的特征向量也是一个.

(2)若特征值为 $r(>1)$ 重,则其对应的线性无关的特征向量有两种情况,一种情况是线性无关的特征向量也是 r 个,另一种情况是小于 r.

二、特征值与特征向量的性质

因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots,$$

所以特征方程为 $\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots=0$,根据一元 n 次方程根与系数之间的关系得以下性质:

性质 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$,则有



(1)$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$,$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 主对角线上元素之和,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹.

(2)$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\lambda_1\neq0,\lambda_2\neq0,\cdots,\lambda_n\neq0$.

性质 2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应不同特征值的特征向量线性无关.

性质 3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,λ_0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{X}_0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的特征向量,则

(1)若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 λ_0^{-1} 是矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值,$\boldsymbol{X}_0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的对应于 λ_0^{-1} 的特征向量.

(2)若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值,$\boldsymbol{X}_0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的对应于 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 的特征向量.

(3)设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为一元 n 次多项式,称 $f(\boldsymbol{A})=a_n\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$ 为关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵多项式,则有 $f(\lambda_0)$ 为矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值,$\boldsymbol{X}_0$ 是矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 的对应于 $f(\lambda_0)$ 的特征向量.

性质 4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$\lambda_1\neq\lambda_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$ 为 λ_1,λ_2 对应的特征向量,则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 不是特征向量.

重点题型分析

题型一 特征值、特征向量的概念与性质

【例 1】 设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为_____.

【解】 设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$,转置得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$,再右乘 $\boldsymbol{AX}$,得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$,即 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 或 $(\lambda^2-1)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0$,因为 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\|\boldsymbol{X}\|^2>$

0，于是 $\lambda^2-1=0$，故 A 的特征值为 -1 或者 1.

【例 2】　设 A 为可逆阵，且 $A\alpha=\lambda_0\alpha$，则 $(A^*)^2+2A+E$ 的特征值为_____.

【解】　由 $A\alpha=\lambda_0\alpha$，得 $A^*\alpha=\dfrac{|A|}{\lambda_0}\alpha$，于是 $[(A^*)^2+2A+E]\alpha=\left[\left(\dfrac{|A|}{\lambda_0}\right)^2+2\lambda_0+1\right]\alpha$，故 $(A^*)^2+2A+E$ 的特征值为 $\left(\dfrac{|A|}{\lambda_0}\right)^2+2\lambda_0+1$.

【例 3】　设 $A\sim B$，且 A,B 都是四阶矩阵，A^* 的特征值为 $-1,1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}$，则 $|B^{-1}+3E|$ =_____.

【解】　$|A^*|=-\dfrac{1}{8}$，因为 $|A^*|=|A|^3$，所以 $|A|=-\dfrac{1}{2}$，于是 A 的特征值为 $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-1,-2$.

因为 $A\sim B$，所以 B 的特征值为 $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-1,-2$，$B^{-1}$ 的特征值为 $2,-2,-1,-\dfrac{1}{2}$，于是 $B^{-1}+3E$ 的特征值为 $5,1,2,\dfrac{5}{2}$，故 $|B^{-1}+3E|=25$.

【例 4】　设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，则 $|E-A^n|=$_____.

【解】　$A^2=2A$，令 $AX=\lambda X$，则 $(A^2-2A)X=(\lambda^2-2\lambda)X=0$，注意到 $X\neq 0$，于是 $\lambda^2-2\lambda=0$，故 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$.

因为 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}(A)=2$，所以 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=2$，于是 $E-A^n$ 的特征值为 $1,1,1-2^n$，故 $|E-A^n|=1-2^n$.

【例 5】　设 $A=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$，$|A|=-1$，且 $\alpha=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 为 A^* 的属于特征值 μ 的特征向量，求 a,b,c,μ 的值及 A 对应的特征值 λ_0.

【解】　显然 $\alpha=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 也是矩阵 A 的特征向量，令 $A\alpha=\lambda_0\alpha$，即

$$\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\text{于是有}\begin{cases}c-a+1=-\lambda_0,\\-b-2=-\lambda_0,\\c-a-1=\lambda_0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}\lambda_0=-1,\\b=-3,\\a=c.\end{cases}$$

由 $\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&-3&3\\1-a&0&-a\end{vmatrix}=a-3=-1$，得 $a=c=2$，且 $\mu=\dfrac{|A|}{\lambda_0}=1$.

【例 6】　设 A 是三阶矩阵，特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$，又 $b=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$，求 A^nb.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【解】 令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}$，由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&2&3&1\\1&4&9&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&2&-1\\0&3&8&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&2&-1\\0&0&2&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&2&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix},$$

得 $x_1=2,x_2=1,x_3=-1$，即 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3$，所以 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_2=2^n\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_3=3^n\boldsymbol{\alpha}_3$，

于是 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}-3^n\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2^n-3^n\\2+2^{n+1}-3^{n+1}\\2+2^{n+2}-3^{n+2}\end{pmatrix}$.

【例 7】 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

求 $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$.

【解】 由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3$，

$|\boldsymbol{A}|=(-1)\cdot(-2)\cdot2=4$，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\lambda_1=\frac{4}{-1}=-4,\lambda_2=\frac{4}{-2}=-2,\lambda_3=\frac{4}{2}=2$，

由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_1=-4\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_2=-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3$ 得

$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=-4\boldsymbol{\alpha}_1+6\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$.

微信公众号（顶尖考研）
（ID：djky66）

题型二 矩阵特征值与特征向量的计算

【例 1】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及线性无关的特征向量.

【解】 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda-1)^2=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-5,\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=-5$ 时，由 $(-5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $(5\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\lambda_1=-5$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$；得 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的线性无关的特征向量为

$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 2】 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【解】 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1 & 1\\ 7 & \lambda-5 & 1\\ 6 & -6 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$,得 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-2$ 时,由 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,即 $(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\lambda=-2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=4$ 时,由 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

题型三 特征值与特征向量的理论证明

【例 1】 (1)设 λ_1,λ_2 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个单的特征值,其对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$,证明:$\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 不可能是任何特征值的特征向量;

(2)设 λ_1,λ_2 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个重的特征值,其对应的线性无关的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$,证明:$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关.

【证明】 (1)(反证法)设 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_3 的特征向量,则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)=\lambda_3(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)$.

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1=\lambda_1\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2=\lambda_2\boldsymbol{X}_2$,得 $\lambda_1\boldsymbol{X}_1+\lambda_2\boldsymbol{X}_2=\lambda_3(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)$,整理得

$$(\lambda_1-\lambda_3)\boldsymbol{X}_1+(\lambda_2-\lambda_3)\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 是不同特征值对应的特征向量,所以 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 线性无关,从而有 $\lambda_1-\lambda_3=\lambda_2-\lambda_3=0$,于是 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$,矛盾,故 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 不是任何特征值的特征向量.

(2)由特征值与特征向量的定义,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_i(i=1,2,\cdots,s)$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i=\lambda_2\boldsymbol{\eta}_i(i=1,2,\cdots,t)$.

令
$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s+l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t=\boldsymbol{0},\tag{*}$$

(*)式两边左乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\lambda_1(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s)+\lambda_2(l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t)=\boldsymbol{0},\tag{**}$$

(*)$\times\lambda_2-$(**),得

$$(\lambda_2-\lambda_1)(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s)=\boldsymbol{0},$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$,所以 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s=\boldsymbol{0}$,注意到 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关,所以 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,进一步有 $l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t=\boldsymbol{0}$,再由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关得 $l_1=l_2=\cdots=l_t=0$,故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关.

【例 2】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵.

(1)证明:$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 特征值相同; (2)问:$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 是否相似?

【解】 (1)若 $\lambda_0\neq0$ 为 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值,其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$,则有 $\boldsymbol{AB\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$,两边左乘 $\boldsymbol{B}$,得 $(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B\alpha}=\lambda_0(\boldsymbol{B\alpha})$,显然 $\boldsymbol{B\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,否则若 $\boldsymbol{B\alpha}=\boldsymbol{0}$,则 $\lambda_0\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,于是 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,矛盾,所以由 $(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B\alpha}=\lambda_0(\boldsymbol{B\alpha})$ 得 λ_0 也是 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值,反之亦然;

若 $\lambda_0=0$ 为 AB 的特征值，其对应的特征向量为 α，则 $AB\alpha=0\alpha=0$，即 AB 的属于 $\lambda_0=0$ 的特征向量 α 为 $ABX=0$ 的非零解.

由 $ABX=0$ 有非零解得 $|AB|=0$，于是 $|BA|=|AB|=0$，即方程组 $BAX=0$ 有非零解，设 ξ 为 $BAX=0$ 的非零解，即 $BA\xi=0\xi=0$，所以 $\lambda_0=0$ 也是 BA 的特征值，反之亦然，于是 AB 与 BA 特征值相同.

(2) AB 与 BA 不一定相似，

例如：令 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，则 $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，显然 AB 与 BA 特征值相同，因为 $r(AB)\neq r(BA)$，所以 AB 与 BA 不相似.

【例 3】 设 A，B 为 n 阶实对称矩阵，证明：$|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$.

【证明】 因为 $A^{\mathrm{T}}=A$，$B^{\mathrm{T}}=B$，所以 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=BA$，于是

$$|\lambda E-AB|=|(\lambda E-AB)^{\mathrm{T}}|=|\lambda E-(AB)^{\mathrm{T}}|=|\lambda E-BA|.$$

第二节 矩阵对角化

基础复习模块——基本概念、原理、考点

微信公众号【顶尖考研】
ID：dingjiky66

一、基本概念

1. 矩阵相似——设 A，B 为两个 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则称 A 与 B 相似，记为 $A\sim B$.

2. 矩阵的相似对角化——若一个矩阵与对角矩阵相似，则称矩阵可以对角化. 设 A 是 n 阶矩阵，所谓 A 可对角化，即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 为对角矩阵.

3. 向量组的施密特正交化——$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为一组线性无关的向量组，以下过程称为施密特正交化：

(1) 令 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,\cdots,$

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1},$$

此过程称为施密特正交化，所得的新向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 两两正交.

(2) 令 $\gamma_i=\dfrac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 为两两正交的单位向量组.

例如：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，正交规范化过程为：令

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交. 再令

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 两两正交且规范.

二、相似矩阵及矩阵对角化的性质

性质 1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

性质 2　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值对应的线性无关的特征向量的个数与该特征值的重数相等.

性质 3　设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数.

性质 4　设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向量正交.

性质 5′　设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化. 更进一步地，设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、非实对称矩阵的对角化步骤

第一步，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

第二步，求方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}(1\leqslant i\leqslant n)$ 的基础解系，从而得到各个特征值对应的线性无关的特征向量，各特征值对应的线性无关的特征向量所组成的向量组一定线性无关，设为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_m(m\leqslant n)$.

第三步，若 $m<n$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可以相似对角化. 若 $m=n$，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化. 因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_n=\lambda_n\boldsymbol{\xi}_n,$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)$，因为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{\xi}_n)$$

$$=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

【例 1】　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及特征向量，判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化.

【解】 由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -4\\ -2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-4)=0$,得 A 的特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=4$.

当$\lambda_1=-2$时,由$(-2E-A)X=0$,即$(2E+A)X=0$,得$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$;

当$\lambda_2=4$时,由$(4E-A)X=0$,得$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

因为 A 有两个线性无关的特征向量,所以 A 可对角化,令$P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$,则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$.

【例 2】 设$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\-7 & 5 & -1\\-6 & 6 & -2\end{pmatrix}$,求 A 的特征值及特征向量,判断 A 是否可对角化.

【解】 由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1 & 1\\7 & \lambda-5 & 1\\6 & -6 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$ 得$\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=4$.

当$\lambda_1=\lambda_2=-2$时,由$(-2E-A)X=0$,即$(2E+A)X=0$,得$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$;

当$\lambda_3=4$时,由$(4E-A)X=0$,得$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

因为 A 只有两个线性无关的特征向量,所以 A 不可以相似对角化.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

四、实对称矩阵对角化的步骤



第一步,由$|\lambda E-A|=0$求出 A 的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

第二步,求方程组$(\lambda_iE-A)X=0(1\leqslant i\leqslant n)$的基础解系,设为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$.

第三步,将$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$进行施密特正交化和规范化得$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$,令$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$,则 Q 是正交矩阵,且$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

【例】 设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\2 & -2 & 2\\4 & 2 & 1\end{pmatrix}$,求正交矩阵 Q,使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角矩阵.

【解】 由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -4\\-2 & \lambda+2 & -2\\-4 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)^2(\lambda-6)=0$,得 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-3,\lambda_3=6$.

当$\lambda_1=\lambda_2=-3$时,由$(-3E-A)X=0$,即$(3E+A)X=0$,得$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda_3=6$ 时，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}\boldsymbol{\beta}_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

答疑解惑

【问题 1】 矩阵的非零特征值个数是否与该矩阵的秩相等？

【答】 不一定.

(1)当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，因为 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，所以 $\lambda_i\neq0(i=1,2,\cdots,n)$，此时矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩与其非零特征值个数一致.

(2)当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，因为 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，所以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中至少有一个特征值为零，但降秩矩阵的秩与其非零特征值个数不一定一致，例如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-2\\0&\lambda&-2\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1$，显然 $r(\boldsymbol{A})=2$，而 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值只有一个.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【问题 2】 非对称矩阵与实对称矩阵在特征值、特征向量及矩阵对角化上的区别在哪里？

【答】 区别主要有：

(1)非对称矩阵特征值不一定是实数，而实对称矩阵特征值一定是实数.

(2)非对称矩阵不同特征值对应的特征向量线性无关，而实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交.

(3)非对称矩阵不一定可以相似对角化，而实对称矩阵一定可以相似对角化.

【问题 3】 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征向量是否一定是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量？

【答】 不一定，例如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，因为 $\boldsymbol{A}^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征向量，而 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

【问题 4】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 特征值相同，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否一定相似？

【答】 不一定，例如：对矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$

特征值相同. 因为 $r(\boldsymbol{A})=1\neq r(\boldsymbol{B})=2$,所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不相似.

【问题 5】 设 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$,且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可以相似对角化,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否一定相似?

【答】 一定,设 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有公共特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可对角化,所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$,使得

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

于是 $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$,取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

【问题 6】 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可否与同一对角阵相似?

【答】 不一定,因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,但 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可能都不可对角化.

【问题 7】 设 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,$\boldsymbol{B}$ 不可对角化,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可否相似?

【答】 因为相似具有传递性,所以可对角化矩阵与不可对角化矩阵不可能相似.

【问题 8】 设 $\boldsymbol{A}$ 是非对称可对角化的矩阵,设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的线性无关的特征向量,可否对 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 正交化和规范化,从而得到正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵?

【答】 不能. 因为非对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交化后的向量不一定是特征向量,而实对称矩阵不同特征值对应的特征向量已经正交,即正交化是在同一个特征值对应的特征向量内部进行,不同特征值之间不需要正交化,故正交化后的向量仍为特征向量.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

知识延拓模块

一、特征值的求法

由特征值特征向量的定义,满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0})$ 的数 λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,特征值的求法常见有如下三种方法:

(一)定义法

【例 1】 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的每行元素之和分别为 a,b,其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(1)求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和; (2)求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的每行元素之和.

【解】 (1)因为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$,所以 a 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,又因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆,所以 $a\neq0$,于是有 $\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{a}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$,即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和为 $\frac{1}{a}$.

(2)因为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$,所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}b\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=b\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=ab\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$,于是

$\boldsymbol{AB}$ 的每行元素之和为 ab.

【例 2】 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

【解】 令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，由 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，得 $(\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $(\lambda^2+3\lambda)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda^2+3\lambda=0$，于是 $\lambda=-3$ 或 $\lambda=0$.

【例 3】 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及其重数.

【解】 令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=2\lambda\boldsymbol{X}$，于是 $(\lambda^2-2\lambda)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda^2-2\lambda=0$，故 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$.

由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & \cdots & a_1b_n\\ \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$，得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2$，因为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$，所以 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=2$，于是 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$，$\lambda_n=2$.

(二)公式法

当一个矩阵给定时(包括其中含有待定的字母)，可以通过 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(三)关联矩阵法

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$ 及与 $\boldsymbol{A}$ 相似的矩阵都是 $\boldsymbol{A}$ 的关联矩阵，它们之间的特征值有如下关系：

(1)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值，即 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$，但特征向量不一定相同.

(2)$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之间是倒数关系，但特征向量对应相同.

(3)当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，若 $\boldsymbol{AX}_0=\lambda_0\boldsymbol{X}_0$，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}_0=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}\boldsymbol{X}_0$.

(ID:djky6)

【例 1】 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维线性无关的向量，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

【解】 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{P}$ 可逆，由

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&0&4\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&0&4\end{pmatrix},$$

得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&0&4\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&0&4\end{pmatrix}$，于是

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-2&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-4)=0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=4$.

【例 2】 设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为二阶非零向量，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，又 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-8\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

(1)证明：$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关；　(2)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

【解】 (1)(反证法)不妨设 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,由向量组线性相关的定义,存在不全为零的常数 k_1, k_2,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2A\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 显然 $k_2\neq 0$,若 $k_2=0$,则有 $k_1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $k_1=0$,与 k_1, k_2 不全为零矛盾,所以 $k_2\neq 0$. 于是 $A\boldsymbol{\alpha}=-\dfrac{k_1}{k_2}\boldsymbol{\alpha}$,因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是矩阵 A 的特征向量,所以又矛盾,故 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

(2)**方法一** 令 $P=(\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha})$,因为 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关,所以 P 可逆.

$$AP=A(\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha})=(A\boldsymbol{\alpha}, A^2\boldsymbol{\alpha})=(A\boldsymbol{\alpha}, 8\boldsymbol{\alpha}+2A\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}0 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

即 $AP=P\begin{pmatrix}0 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$,或 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$,所以 $A\sim\begin{pmatrix}0 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$,由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -8\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-8=0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=-2, \lambda_2=4$.

方法二 由 $A^2\boldsymbol{\alpha}-2A\boldsymbol{\alpha}-8\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,得 $(A^2-2A-8E)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,

因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,所以方程组 $(A^2-2A-8E)X=\boldsymbol{0}$ 有非零解,从而 $|A^2-2A-8E|=0$,

即 $|4E-A|\cdot|2E+A|=0$,于是 $|4E-A|=0$ 或 $|2E+A|=0$.

若 $|4E-A|\neq 0$,则 $4E-A$ 为可逆矩阵,由 $(4E-A)(2E+A)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 两边左乘 $(4E-A)^{-1}$,得 $(2E+A)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,即 $A\boldsymbol{\alpha}=-2\boldsymbol{\alpha}$,因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 非矩阵 A 的特征向量,矛盾,故 $|4E-A|=0, \lambda_1=4$ 为矩阵 A 的特征值.

若 $|2E+A|\neq 0$,则 $2E+A$ 为可逆矩阵,由 $(2E+A)(4E-A)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 两边左乘 $(2E+A)^{-1}$,得 $(4E-A)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,即 $A\boldsymbol{\alpha}=4\boldsymbol{\alpha}$,因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 非矩阵 A 的特征向量,矛盾,故 $|2E+A|=0, \lambda_2=-2$ 为矩阵 A 的特征值.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

二、矩阵对角化问题

【思路分析】

判断矩阵可相似对角化通常有四个思路:

(1)若矩阵 A 的特征值都是单值,则 A 一定可以相似对角化.

(2)若矩阵 A 为实对称矩阵,则 A 一定可以相似对角化.

(3)若 n 阶矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量,则 A 一定可以相似对角化.

(4)若矩阵 A 的每个特征值的重数与其对应的线性无关的特征向量的个数一致,则 A 一定可以相似对角化.

【例 1】 设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$,且 $ad-bc<0$,证明:A 可对角化.

【证明】 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc$,

因为 $\lambda_1\lambda_2=ad-bc<0$,所以 $\lambda_1\neq\lambda_2$,即 A 的特征值为单值,故 A 可对角化.

【例 2】 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为正交的三维单位列向量,且 $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.

(1)证明:$\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 都是矩阵 A 的特征向量；　(2)证明:矩阵 A 可对角化.

【证明】　(1)因为 α,β 为正交的非零向量,所以 $\alpha+\beta\neq 0,\alpha-\beta\neq 0$.

由 $A(\alpha+\beta)=(\alpha\beta^{\mathrm{T}}+\beta\alpha^{\mathrm{T}})(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$,得 $\alpha+\beta$ 为矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量;

由 $A(\alpha-\beta)=(\alpha\beta^{\mathrm{T}}+\beta\alpha^{\mathrm{T}})(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$,得 $\alpha-\beta$ 为矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量.

(2)**方法一**　因为 $A^{\mathrm{T}}=(\alpha\beta^{\mathrm{T}}+\beta\alpha^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\alpha\beta^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}+(\beta\alpha^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\beta\alpha^{\mathrm{T}}+\alpha\beta^{\mathrm{T}}=A$,所以 A 可相似对角化.

方法二　因为 $r(A)=r(\alpha\beta^{\mathrm{T}}+\beta\alpha^{\mathrm{T}})\leqslant r(\alpha\beta^{\mathrm{T}})+r(\beta\alpha^{\mathrm{T}})\leqslant r(\alpha)+r(\beta)\leqslant 1+1=2<3$,所以 $|A|=0$,于是 $\lambda_3=0$.

因为 A 的特征值都是单值,所以 A 可对角化.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

重点题型分析

题型一　判断矩阵是否可以对角化问题

【思路分析】

矩阵对角化判断有两大方向:

1. 若 A 为实对称矩阵,则 A 一定可以相似对角化;

2. 若 A 不是对称矩阵,则一定从 A 的特征值入手,具体有如下三种情形:

(1)若 A 的特征值都是单值,则 A 一定可相似对角化;

(2)若 n 阶矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量,则 A 一定可相似对角化;

(3)若矩阵 A 的每个特征值的重数与其对应的线性无关的特征向量个数相等,则 A 可相似对角化.

【例 1】　设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$,(1)求 A 的特征值；　(2)求 A 的每个特征值对应的线性无关的特征向量；　(3)研究矩阵对角化过程.

【解】　(1)由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$,得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$.

(2)当 $\lambda=-1$ 时,由 $(-E-A)X=0$ 即 $(E+A)X=0$,得 $\lambda=-1$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=5$ 时,由 $(5E-A)X=0$,得 $\lambda=5$ 对应的线性无关的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(3)由 $A\xi_1=-\xi_1, A\xi_2=-\xi_2, A\xi_3=5\xi_3$,得 $(A\xi_1,A\xi_2,A\xi_3)=(-\xi_1,-\xi_2,5\xi_3)$,而

$$(A\xi_1,A\xi_2,A\xi_3)=A(\xi_1,\xi_2,\xi_3),(-\xi_1,-\xi_2,5\xi_3)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix},$$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$,因为 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关,所以 P 可逆,由 $AP=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ 两边左乘 P^{-1},得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

【例 2】 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,(1)求 A 的特征值; (2)求 A 的每个特征值对应的线性无关的特征向量,并研究 A 可否进行对角化.

【解】 (1)由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\0&\lambda&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)=0$,得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1$.

(2)当 $\lambda=0$ 时,由 $(0E-A)X=0$,即 $AX=0$,得 $\lambda=0$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=1$ 时,由 $(E-A)X=0$,得 $\lambda=1$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$,由于 $\lambda=0$ 为二重特征值,但其对应的线性无关的特征向量只有一个,故 A 不能进行对角化.

【注解】

矩阵可以对角化的充分必要条件是每个特征值的重数与其对应的线性无关特征向量个数一致.

【例 3】 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量,求 x,y 满足的条件.

【解】 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$,得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$.

因为 A 可对角化,所以 $r(E-A)=1$,由 $E-A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $x+y=0$ 时 A 可相似对角化.

【例 4】 设 $A^2+A-2E=O$,证明:A 可对角化.

【解】 由 $A^2+A-2E=O$,得 $(2E+A)(E-A)=O$,于是 $r(2E+A)+r(E-A)\leqslant n$,又

$$r(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant r[(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]=r(3\boldsymbol{E})=n,$$

所以 $r(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$.

当 $r(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=n$ 时，$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；

当 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$ 时，$r(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=0$，则 $\boldsymbol{A}=-2\boldsymbol{E}$；

当 $r(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})<n$，$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})<n$ 时，由 $|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$.

$\lambda_1=-2$ 对应的线性无关的特征向量为方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，其线性无关的解向量个数为 $n-r(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$；

$\lambda_2=1$ 对应的线性无关的特征向量为方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，其线性无关的解向量个数为 $n-r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$.

因为 $n-r(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+n-r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

【例 5】　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零阵，且存在正整数 $k>1$ 使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 不可以对角化.

【解】　**方法一(反证法)：**

设 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，两边 k 次方得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，所以 $\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$，于是 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$，进一步得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

方法二　令 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0})$，则 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}=\lambda^k\boldsymbol{X}$，因为 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda^k=0$，于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，因为 $r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，所以 $n-r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant n-1$，即 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量最多 $n-1$ 个，故 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

题型二　实对称矩阵对角化问题

【例】　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不唯一.

(1)求 a 的值；

(2)求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵；

(3)求正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵.

【解】　(1)因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不唯一，所以 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2=0$，于是 $a=-2$ 或 $a=1$.

当 $a=1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，所以方程组无解，于是 $a=-2$.

(2)由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)\lambda(\lambda-3)=0$，得 $\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=3$.

当 $\lambda_1=-3$ 时，由 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 即 $(3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=3$ 时，由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(3)令 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

题型三 反求矩阵问题

【例 1】 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

【解】 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$，所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\-2&-2&3\end{pmatrix}$.

【例 2】 设三阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1,2,3,$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1,2 的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$.(1)求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量；(2)求 $\boldsymbol{A}$.

【解】 (1)令 $\lambda_3=3$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,因为实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交,所以 $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0,\\x_1-2x_2-x_3=0,\end{cases}$ 于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_3=3$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(2)令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&-2&2\\1&-2&-1\\3&0&3\end{pmatrix}$,由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}$.

【例 3】 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=1$,齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【解】 令 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$,由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$,得 $\lambda^2\boldsymbol{X}=2\lambda\boldsymbol{X}$,即 $(\lambda^2-2\lambda)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,因为 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$,又 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵且 $r(\boldsymbol{A})=1$,故 $\lambda_1=\lambda_2=0$,$\lambda_3=2$.

设 $\lambda_3=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

因为实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交,所以 $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_1+x_3=0,\end{cases}$ 于是 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$,由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,

得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

【例 4】 设 A 为三阶实对称矩阵，$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & a & d\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & e\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & f\end{pmatrix}$ 为正交矩阵，二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$ 经过正交变换 $X=QY$ 化为 $-y_1^2+2y_2^2+ky_3^2$，且 $|A|=-4$. 求：

(1)k 的值；

(2)正交矩阵 Q；

(3)矩阵 A.

【解】 (1)因为二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$ 经过正交变换 $X=QY$ 化为 $-y_1^2+2y_2^2+ky_3^2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=k$.

由 $|A|=-4$ 得 $k=2$，即 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$.

(2)由 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & a & d\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & e\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & f\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1=-1$ 对应的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 为 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的特征向量，由 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 得 $x_1+x_2+x_3=0$，于是 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，

规范化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，则 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

(3)由 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 得 $A=Q\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

题型四　求矩阵的幂矩阵问题

【思路分析】

求矩阵的幂矩阵常用如下方法：

(1)若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维列向量，则 $\boldsymbol{A}^n=k^{n-1}\boldsymbol{A}$，其中 $k=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

(2)归纳法，即通过求 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3$ 总结规律而得到 $\boldsymbol{A}^n$.

(3)特征法，先将 $\boldsymbol{A}$ 对角化，即求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix}$，于是

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^n\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$.

【例】　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

【解】　由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$，得 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

当 $\lambda_1=1$ 时，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，两边 n 次方得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 2^n-1 & 2^n & 1-2^n\\ 2^n-1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

测试题

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$（其中 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$），则 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}$ 的属于特征值 λ 的特

征向量为(　　).

(A)$P\alpha$　　(B)$P^{T}\alpha$　　(C)$P^{-1}\alpha$　　(D)$(P^{-1})^{T}\alpha$

2. 设 n 阶矩阵 A 有 n 个单值特征值是矩阵 A 可相似对角化的(　　).

(A) 必要条件　　(B) 充分条件　　(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

3. 设 A 是三阶矩阵,$\lambda_1=-2,\lambda_2=1$ 为 A 的特征值且 $|A|=2$,则(　　).

(A)$E-A$ 可逆　　(B)$E+A$ 可逆　　(C)$2E-A$ 可逆　　(D)$2E+A$ 可逆

4. 设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同特征值,其对应的特征向量为 α_1,α_2,则 $\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充要条件是(　　).

(A)$\lambda_1=0$　　(B)$\lambda_2=0$　　(C)$\lambda_1\neq 0$　　(D)$\lambda_2\neq 0$

5. 下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$,则 $A\sim B$

(B) 若 $A\sim B$,则 A,B 与同一个对角矩阵相似

(C) 若 $\lambda E-A\sim\lambda E-B$,则 $A\sim B$

(D)n 阶矩阵 A 的秩与 A 的非零特征值个数相等

6. 设 A 为三阶矩阵且 $r(A)=1$,则(　　).

(A)$\lambda=0$ 为 A 的一重特征值　　(B)$\lambda=0$ 为 A 的二重特征值

(C)$\lambda=0$ 不是 A 的特征值　　(D)$\lambda=0$ 为 A 的至少二重特征值

7. 下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $r(A)=r(B)$,则 $A\sim B$

(B) 若 A,B 有相同的特征值,则 $A\sim B$

(C) 若 A,B 特征值相同,则 $r(A)=r(B)$

(D) 若 $A\sim B$ 且 A 可对角化,则 B 一定可以相似对角化

8. 设 A 为三阶可对角化的矩阵,其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2$,对应的线性无关的特征向量为 ξ_1,ξ_2,ξ_3,取 $P=(2\xi_1,\xi_1+4\xi_2,-3\xi_3)$,则 $P^{-1}AP=$(　　).

(A)$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-5&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$　(B)$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-5&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(C)$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(D)$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$

二、填空题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-6&1\\0&-2&-3\\0&0&8\end{pmatrix}$,则 $|4A^{-1}-E|=$_____.

2. 设 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值为 λ_0,则 $(A^{*})^2+2A^{-1}+E$ 有一个特征值为_____.

3. 设 A 是二阶矩阵,α_1,α_2 是线性无关的二维列向量,且 $A\alpha_1=0,A\alpha_2=\alpha_1-4\alpha_2$,则 A 的特征值是_____.

4. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 都是三阶矩阵 A 的对应于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量,$b=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$,则 $Ab=$_____.

5. 设 λ_1,λ_2 是 n 阶实对称矩阵 A 的两个不同特征值,α_1 是 λ_1 对应的单位特征向量,令 $B=A-\lambda_1\alpha_1\alpha_1^{T}$,则 B 一定有特征值_____及_____.

6. 设 A 是三阶实对称矩阵,$\alpha_1=(k,-k,1)^{T}$ 是 $AX=0$ 的解,$\alpha_2=(k,2,1)^{T}$ 为方程组 $(E+A)X=0$ 的解,则常数 $k=$_____.

三、解答题

1. 设 $A=\begin{pmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$，求 A 的特征值与线性无关的特征向量.

2. 求下列矩阵的特征值与线性无关的特征向量：

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ 为 A^* 的特征向量.

(1) 求 a,b 的值；　(2) 求 A^* 对应的特征值.

4. 设 A 为 n 阶实矩阵.

(1) 证明：A 与 A^{T} 具有相同的特征值；

(2) 设 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 是 A 和 A^{T} 的特征值，$A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}$，$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\lambda_2\boldsymbol{\beta}$（$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为非零向量），证明：$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交.

5. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2=2A$，求 A 的特征值，并证明 $E-A$ 可逆.

6. 设 A 是三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 个线性无关的三维列向量，且满足 $A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$A\boldsymbol{\alpha}_2=3\boldsymbol{\alpha}_3$，$A\boldsymbol{\alpha}_3=4\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3$，求矩阵 A 的特征值.

7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，求 $B+2E$ 的特征值和特征向量.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

8. 设 A 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维非零向量，且 $A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$A\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_2$，$A\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明：$\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关；　(2) 令 $P=(\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha})$，求 B，使得 $P^{-1}AP=B$.

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求 a,b 的值及 A 的特征值；　(2) A 可否对角化？

10. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 有一个二重特征值.

(1) 求 a 的值；　(2) 讨论 A 可否相似对角化.

11. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为三维线性无关的单位列向量，$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 是 A 的特征向量；　(2) 证明：A 可相似对角化.

12. 设 A 为三阶矩阵，A 的特征值为 $\lambda_1=a_1,\lambda_2=a_2,\lambda_3=a_3$ 且 a_1,a_2,a_3 两两不等，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明：$\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

13. 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值，判断 A,B 是否相似.

14. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，判断 A,B 是否相似，若相似求可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

15. A 为实对称矩阵，其各行元素之和为 3 且满足 $AB+B=O$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$. 求 A 的特征值及线性无关的特征向量.

16. 设 A 为三阶矩阵，α_1,α_2 是矩阵 A 的相应于特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$.

(1) 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；(2) 求 A 的特征值并判断 A 可否对角化.

17. 设 A 为三阶实对称矩阵，其特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，且 $\lambda_1=-1$ 对应的特征向量为 $\alpha_1=(0,1,1)^T$，求 A.

18. 设 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$ 为三阶实对称矩阵 A 的特征值，特征值 1 对应的线性无关的特征向量为 $\xi_1=(-1,1,0)^T,\xi_2=(-1,0,1)^T$.

(1) 求 $\lambda_3=2$ 对应的线性无关的特征向量；(2) 求 A.

19. 设实矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\x&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量.

(1) 求 x 的值；(2) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

20. 设 A 是三阶矩阵，其各行元素之和均为 3. 向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $AX=0$ 的两个解.

(1) 求矩阵 A 的特征值与特征向量；(2) 求矩阵 A.

21. 设三阶矩阵 A 的各行元素之和均为 2 且 $AB=O$，其中 $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&-1&-3\\-1&2&5\end{pmatrix}$，令 $b=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$，求 A^nb.

22. 设 A 为三阶实对称矩阵，A 的每行元素之和为 2，且 $r(A)=1$，求 A.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

测试题参考答案

一、选择题

1. 由 $(P^{-1}AP)^TP^T\alpha=P^TA\alpha=\lambda P^T\alpha$，得 $(P^{-1}AP)^T$ 的属于特征值 λ 的特征向量为 $P^T\alpha$，选(B).

2. 选(B).

3. 因为 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，所以 $\lambda_3=-1$，于是 $|E-A|=|E+A|=|(-2)E-A|=0$，应选(C).

4. $B=(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2))=(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$，因为 α_1,α_2 线性无关，所以 (α_1,α_2) 可逆，于是 $\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充要条件是 $r(B)=r\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=2$，即 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2\neq0$，应选(D).

5. 取 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，显然 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\lambda^2$，因为 $r(A)\neq r(B)$，所以 A,B 不相似，不选(A)；设 $A\sim B$，若 A,B 都是不可对角化的矩阵，则 A,B 不与同一个对角矩阵相似，不选(B)；取 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，由 $|\lambda E-A|=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1$，$A$ 的非零特征值的个数为 1，但 $r(A)=2$，不选(D)；若

$\lambda E-A\sim\lambda E-B$，则存在可逆矩阵 P，使得 $\lambda E-B=P^{-1}(\lambda E-A)P$，从而有 $P^{-1}AP=B$，即 $A\sim B$，应选(C).

6. 因为 $r(A)=1<3$，所以 $|A|=0$，于是 $\lambda=0$ 一定是 A 的特征值，不选(C)；因为 $r(A)=r(0E-A)$，所以 $(0E-A)X=0$ 的基础解系含有两个线性无关的解向量，即 $\lambda=0$ 至少有两个线性无关的特征向量，于是 $\lambda=0$ 至少是 A 的二重特征值，不选(A)；取 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，显然 $r(A)=1$，$\lambda=0$ 为 A 的三重特征值，故选(D).

7. 若 $r(A)=r(B)$，因为 A,B 特征值不一定相同，(A) 不选；取 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，显然 A,B 特征值都是零，因为 $r(A)\neq r(B)$，所以 A 与 B 不相似，(B) 不对，同样(C) 不对；若 A 与 B 相似，则 A,B 特征值相同，不妨设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，且存在可逆阵 P_1，使得 $P_1^{-1}AP_1=B$. 因为 A 可对角化，所以存在可逆阵 P_2，使得 $P_2^{-1}AP_2=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$，即 $A=P_2\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}P_2^{-1}$，于是 $(P_2^{-1}P_1)^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}P_2^{-1}P_1=B$，即 B 与对角阵相似，于是 B 一定可以对角化，选(D).

8. 因为 ξ_1,ξ_2 为特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的线性无关的特征向量，所以 $2\xi_1,\xi_1+4\xi_2$ 也是特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的线性无关的特征向量. 同理 ξ_3 是特征值 $\lambda_3=2$ 的特征向量，则 $-3\xi_3$ 也是特征值 $\lambda_3=2$ 的特征向量，于是 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，选(C).

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

二、填空题

1. A 的特征值为 $2,-2,8$，A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{8}$，$4A^{-1}$ 的特征值为 $2,-2,\frac{1}{2}$，则 $4A^{-1}-E$ 的特征值为 $1,-3,-\frac{1}{2}$，故 $|4A^{-1}-E|=\frac{3}{2}$.

2. 设 $A\alpha=\lambda_0\alpha$，则 $A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda_0}\alpha$，$A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda_0}\alpha$，于是 $[(A^*)^2+2A^{-1}+E]\alpha=[(\frac{|A|}{\lambda_0})^2+\frac{2}{\lambda_0}+1]\alpha$.

3. 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2)$，因为 α_1,α_2 线性无关，所以 P 可逆，

$AP=(A\alpha_1,A\alpha_2)=(0,\alpha_1-4\alpha_2)=P\begin{pmatrix}0&1\\0&-4\end{pmatrix}$，从而 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&1\\0&-4\end{pmatrix}=B$，于是 $A\sim B$，

由 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-4$.

4. $A\alpha_1=2\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，因为 $b=\alpha_1-2\alpha_2$，所以 $Ab=A\alpha_1-2A\alpha_2=2(\alpha_1-2\alpha_2)=2b=\begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix}$.

5. 因为 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$ 且 α_1 为单位向量，所以 $B\alpha_1=A\alpha_1-\lambda_1\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1=\lambda_1\alpha_1-\lambda_1\alpha_1=0\alpha_1$，于是 0 为 B 的一个特征值. 设 α_2 为 A 的对应于特征值 λ_2 的特征向量，由 $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$ 且 α_1,α_2 正交得 $B\alpha_2=A\alpha_2-\lambda_1\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，于是 λ_2 为 B 的另一个特征值.

6. 因为 $\alpha_1=(k,-k,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $AX=0$ 的解，所以 $\alpha_1=(k,-k,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_1=0$ 的特征值；又因为 $\alpha_2=(k,2,1)^{\mathrm{T}}$ 为方程组 $(E+A)X=0$ 的解，所以 $\alpha_2=(k,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量，而实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交，于是 $\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2=k^2-2k+1=0$，故 $k=1$.

三、解答题

1. 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-n & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-n & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-n\end{vmatrix}=[\lambda-(2n-1)][\lambda-(n-1)]^{n-1}=0$ 得 $\lambda_1=2n-1,\lambda_2=\cdots=\lambda_n=n-1$. 当 $\lambda_1=2n-1$ 时，由 $[(2n-1)E-A]X=0$ 得 $\lambda=2n-1$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$. 当 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=n-1$ 时，由 $[(n-1)E-A]X=0$ 得 $\lambda=n-1$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_2=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\xi_3=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\xi_n=(-1,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$.

2. (1) 令 $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -1\\ -2 & \lambda & -1\\ -1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$ 得 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$. 当 $\lambda_1=1$ 时，由 $(E-A)X=0$ 得 $\lambda=1$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$；当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，由 $(2E-A)X=0$ 得 $\lambda=2$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

(2) 令 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$，由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$. 当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，由 $(2E-A)X=0$ 得 $\lambda=2$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

3. (1) A^* 的特征向量也为 A 的特征向量，所以令 $A\alpha=\lambda_0\alpha$，则有 $\begin{cases}3+b=\lambda_0,\\ 1+a+b=\lambda_0,\\ 2+2b=\lambda_0 b,\end{cases}$ 解得 $a=2,b=1$ 或 $a=2,b=-2,\lambda_0=4$ 或 $\lambda_0=1$.

(2) $|A|=4$，A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_0}$，故 A^* 的特征值为 1 或者 4.

4. (1) 因为 $|\lambda E-A^{\mathrm{T}}|=|(\lambda E-A)^{\mathrm{T}}|=|\lambda E-A|$，所以 A 与 A^{T} 具有相同的特征值.

(2) $A\alpha=\lambda_1\alpha$ 两边转置得 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\lambda_1\alpha^{\mathrm{T}}$，两边右乘 β 得 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\beta=\lambda_1\alpha^{\mathrm{T}}\beta$，即 $\lambda_2\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\lambda_1\alpha^{\mathrm{T}}\beta$，因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta=0$，即 α,β 正交.

5. 令 $AX=\lambda X(X\neq 0)$，由 $A^2=2A$ 得 $\lambda^2X=2\lambda X$ 或 $(\lambda^2-2\lambda)X=0$，因为 $X\neq 0$，所以 $\lambda^2-2\lambda=0$，于是 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$. 因为 A 的特征值为 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$，所以 $E-A$ 的特征值为 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$，于是 $E-A$ 可逆.

6. 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 P 可逆，$AP=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,3\alpha_3,4\alpha_2-4\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$，即 $A\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$，由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & -4\\ -2 & -3 & \lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda+6)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=-6,\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

7. 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7)=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7$. 当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，由 $(E-A)X=0$ 得 $\lambda=1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；

微信公众号【顶尖考研】(ID:dijky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

当 $\lambda_3=7$ 时,由 $(7E-A)X=0$ 得 $\lambda=7$ 对应的线性无关的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 因为 $|A|=7$,所以 A^* 对应的特征值为 $\mu_1=\mu_2=\frac{|A|}{\lambda_1}=7,\mu_3=\frac{|A|}{\lambda_3}=1$,又因为 $B+2E=P^{-1}(A^*+2E)P\sim A^*+2E$,所以 $B+2E$ 的特征值为 9,9,3. 因为 $(A^*+2E)\xi_1=9\xi_1,(A^*+2E)\xi_2=9\xi_2,(A^*+2E)\xi_3=3\xi_3$,所以 $P^{-1}(A^*+2E)PP^{-1}\xi_1=9P^{-1}\xi_1$,即 $(B+2E)P^{-1}\xi_1=9P^{-1}\xi_1$,同理 $(B+2E)P^{-1}\xi_2=9P^{-1}\xi_2$,$(B+2E)P^{-1}\xi_3=3P^{-1}\xi_3$,即 $(B+2E)$ 的特征向量为 $\eta_1=P^{-1}\xi_1,\eta_2=P^{-1}\xi_2,\eta_3=P^{-1}\xi_3$. 由 $(P\vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$ 得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则 $B+2E$ 的线性无关特征向量为 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

8. (1) $A\alpha=A\alpha_1+A\alpha_2-2A\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2-4\alpha_3,A^2\alpha=A\alpha_1-A\alpha_2-4A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2-8\alpha_3$,$(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-2&-4&-8\end{pmatrix}$,因为 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-2&-4&-8\end{vmatrix}=12\neq0$,所以 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-2&-4&-8\end{pmatrix}$ 可逆,于是 $r(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$,故 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha$ 线性无关.

(2) 令 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,则 $P=(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)=(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2-4\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2-8\alpha_3)=P_1\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-2&-4&-8\end{pmatrix}$,$AP=AP_1\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-2&-4&-8\end{pmatrix}$,而 $AP_1=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,-\alpha_2,2\alpha_3)=P_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,于是 $AP=P_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-2&-4&-8\end{pmatrix}$,

故 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-2&-4&-8\end{pmatrix}^{-1}P_1^{-1}P_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-2&-4&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}=B$.

9. (1) 因为 α 是 A 的特征值,所以 $A\alpha=\lambda\alpha$,于是有 $\begin{cases}-1=\lambda,\\2+a=\lambda,\\1+b=-\lambda,\end{cases}$ 解得 $\lambda=-1,a=-3,b=0$,故 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$. 由 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

(2) 因为 $r(-E-A)=2$,所以 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 对应的线性无关的特征向量只有一个,故 A 不可对角化.

10. (1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+3a+18)$,若 $\lambda=2$ 为二重特征值,则当 $\lambda=2$ 时,$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$,解得 $a=-2$;若 $\lambda=2$ 为单特征值,则 $\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$ 有二重根,从而 $\Delta=64-4(3a+18)=0$,于是 $a=-\frac{2}{3}$.

(2) 当 $a=-2$ 时,A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$,$2E-A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,因

微信公众号:顶尖考研
(ID:dikyo6)

为 $r(2E-A)=1$,所以 $\lambda=2$ 有两个线性无关的特征向量,故 A 可对角化;当 $a=-\frac{2}{3}$ 时,A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4$,因为 $r(4E-A)=2$,所以 $\lambda=4$ 只有一个线性无关的解向量,故 A 不可对角化.

11. (1) 因为 α,β 线性无关,所以 $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 都是非零向量. 因为 $A(\alpha+\beta)=2\alpha+\alpha+2\beta+\beta=3(\alpha+\beta)$,$A(\alpha-\beta)=2\alpha-\alpha+\beta-2\beta=\alpha-\beta$,所以 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 是 A 的属于特征值 3 和 1 的特征向量.

(2) 方法一　因为 $A^{\mathrm{T}}=A$,所以 A 可以相似对角化.

方法二　因为 $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 为 $\lambda=3$ 和 1 对应的线性无关的特征向量,又因为 $r(A)=r(\alpha\beta^{\mathrm{T}}+\beta\alpha^{\mathrm{T}})\leqslant r(\alpha\beta^{\mathrm{T}})+r(\beta\alpha^{\mathrm{T}})\leqslant r(\alpha)+r(\beta)=2$,所以 $|A|=0$,于是 $\lambda=0$ 为 A 的单的特征值,$\lambda=0$ 对应一个线性无关的特征向量,即 A 存在三个线性无关的特征向量,故 A 可以对角化.

12. $A\alpha=A\alpha_1+A\alpha_2+A\alpha_3=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3$,$A^2\alpha=A^2\alpha_1+A^2\alpha_2+A^2\alpha_3=a_1^2\alpha_1+a_2^2\alpha_2+a_3^2\alpha_3$,

$(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&a_1&a_1^2\\1&a_2&a_2^2\\1&a_3&a_3^2\end{pmatrix}$,因为 $\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2\\1&a_2&a_2^2\\1&a_3&a_3^2\end{vmatrix}=(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)\neq 0$,所以

$\begin{pmatrix}1&a_1&a_1^2\\1&a_2&a_2^2\\1&a_3&a_3^2\end{pmatrix}$ 可逆,于是 $r(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$,即 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha$ 线性无关.

13. 由 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=(\lambda+1)^2(\lambda-3)=0$ 得 A,B 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=3$. 由 $r(-E-A)=r(E+A)=2$ 得 A 不可对角化;由 $r(-E-B)=r(E+B)=1$ 得 B 可对角化,于是 A,B 一定不相似.

14. 由 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$ 得 A,B 有相同特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$,因为特征值都是单值,所以 A,B 都可对角化,故 $A\sim B$. 由 $(-E-A)X=0$ 即 $(E+A)X=0$ 得 $\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$;由 $(E-A)X=0$ 得 $\xi_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$;由 $(2E-A)X=0$ 得 $\xi_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,令 $P_1=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则 $P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 由 $(-E-B)X=0$ 即 $(E+B)X=0$ 得 $\eta_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$;由 $(E-B)X=0$ 得 $\eta_2=(-1,3,0)^{\mathrm{T}}$;由 $(2E-B)X=0$ 得 $\eta_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$,令 $P_2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&3&1\\1&0&0\end{pmatrix}$,则 $P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 由 $P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$ 得 $(P_1P_2^{-1})^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$,取 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&0&1\\3&1&0\end{pmatrix}$,则 $P^{-1}AP=B$.

15. 由 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1=3$,对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 由 $AB+B=O$ 即 $(A+E)B=O$ 得 $r(A+E)+r(B)\leqslant 3$,因为 $r(B)=2$,所以 $r(A+E)\leqslant 1$,又由 $A+E\neq O$ 得 $r(A+E)=1$. 由 $|A+E|=0$ 得 $\lambda=-1$ 为 A 的特征值,且 $\lambda=-1$ 对应两个线性无关的特征向量,故 $\lambda=-1$ 为二重特征值. 由 $AB=-B$ 得 B 的列向量都是 $\lambda=-1$ 的特征向量,于是 $\lambda=-1$ 对应的两个线性无关的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

16. (1) 令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$　$(*)$,两边左乘 A 得 $k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=0$,整理得 $-k_1\alpha_1$

$+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$　(**)，两式相减得 $2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $k_1=k_3=0$，代入(*)得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\mathbf{0}$，所以 $k_2=0$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，由 $\boldsymbol{AP}=(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=(-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$. 因为 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=2$，所以 $\boldsymbol{B}$ 不可对角化，故 $\boldsymbol{A}$ 也不可对角化.

17. 令 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，因为实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$，即 $x_2+x_3=0$，于是 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交，单位化 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

18. (1) 令 $\lambda_3=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，因为实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交，所以 $\begin{cases}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_3=0,\\\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_3=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_1+x_2=0,\\-x_1+x_3=0,\end{cases}$ 则 $\lambda_3=2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$.

19. (1) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-2\\-x&\lambda-1&-1\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$ 得 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，于是 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\-x&0&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\-(x+1)&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $x=-1$.

(2) 当 $\lambda_1=-2$ 时，由 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 即 $(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$；当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

20. (1) 因为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以 $\lambda_3=3,\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 因为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 等价于 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$，故 $\lambda_1=\lambda_2=$

0，对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

21. 由 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1=2$，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，从而 $r(\boldsymbol{A})<3$，于是 $|\boldsymbol{A}|=0$，故 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 $\boldsymbol{B}$ 的列向量为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征向量，因为 $r(\boldsymbol{B})=2$，所以特征值 0 有两个线性无关的特征向量，故 $\lambda=0$ 为二重特征值，其对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

显然 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1=2^n\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2=0^n\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_3=0^n\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0}$，令 $x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2+x_3\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{b}$，

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\1&1&-1&3\\1&-1&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&1\\0&-1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&1\\0&0&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-5\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

则 $x_1=5$，$x_2=-5$，$x_3=-3$，即 $\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{\xi}_1-5\boldsymbol{\xi}_2-3\boldsymbol{\xi}_3$，故 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1-5\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2-3\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_3=5\times2^n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

22. 因为 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 2，所以 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，于是 $\lambda_1=2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=1$，所以 $\lambda_2=\lambda_3=0$.

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 为 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 对应的特征向量，由 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 得 $x_1+x_2+x_3=0$，

于是 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}.$$

第六章　二次型及其标准形

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

大纲点击

1. 掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型秩的概念，了解合同变换和合同矩阵的概念，了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理.

2. 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形.

3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法.

第一节　二次型及其标准形

基础复习模块——基本概念、原理、考点

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

一、二次型的基本概念

1. 二次型 —— 含 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 且每项皆为二次的多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

称为二次型.

令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，则二次型的矩阵形式为 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. 称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为二次型的矩阵，显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即二次型的矩阵都是对称矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型的秩.

例如：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_2^2+x_3^2$，令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$；

又例如：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$，令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&3\\-1&3&2\end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

2. 标准二次型——只含有平方项不含交叉项的二次型，即形如

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1x_1^2+l_2x_2^2+\cdots+l_nx_n^2,$$

称为标准二次型.

3. 可逆的线性变换——设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}$ 为可逆的矩阵，称 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 为可逆的线性变换，若 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，称 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 为正交变换，正交变换是一种特殊的可逆线性变换.

4. 二次型的标准化——设 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 为一个二次型，若经过可逆的线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 把二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 化为

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}}{=\!=\!=}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{Y}=l_1y_1^2+l_2y_2^2+\cdots+l_my_m^2,$$

称为二次型的标准化.

5. 规范二次型——系数为 1 和 −1 的标准二次型称为规范二次型.

【注解】

(1)任何一个二次型矩阵都是唯一的，且任何二次型的矩阵都是对称矩阵.

(2)非标准二次型的矩阵是对称矩阵但不是对角矩阵.

(3)二次型是标准二次型的充分必要条件是其矩阵是对角矩阵.

(4)二次型的标准化等价于将二次型的矩阵对角化.

微信公众号【顶尖考研】

二、二次型的标准化方法

(一)配方法化二次型为标准形

【例 1】 用配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2-3x_2^2+2x_3^2$ 化成标准二次型.

【解】 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&-3&0\\0&0&2\end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$，配方得

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2-3x_2^2+2x_3^2=(x_1-2x_2)^2-7x_2^2+2x_3^2,$$

令 $\begin{cases}x_1-2x_2=y_1,\\x_2=y_2,\\x_3=y_3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=y_1+2y_2,\\x_2=y_2,\\x_3=y_3,\end{cases}$ 即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，则

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}}{=\!=\!=}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{Y}=y_1^2-7y_2^2+2y_3^2.$$

【例 2】 用配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2+2x_3^2$ 化为标准形.

【解】 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-3&0\\1&0&2\end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$.

$$\begin{aligned}x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2+2x_3^2&=(x_1+x_2+x_3)^2-4x_2^2-2x_2x_3+x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)^2-5x_2^2+(x_2-x_3)^2,\end{aligned}$$

令$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=y_1,\\x_2=y_2,\\x_2-x_3=y_3\end{cases}$或$\begin{cases}x_1=y_1-2y_2+y_3,\\x_2=y_2,\\x_3=y_2-y_3,\end{cases}$即$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，其中$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，

显然$\boldsymbol{P}$可逆，则$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{Y}=y_1^2-5y_2^2+y_3^2$.

【例 3】　将$f(x_1,x_2)=x_1x_2$化成标准形.

【解】　令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$，则$f(x_1,x_2)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$.

方法一　令$\begin{cases}x_1=y_1-y_2,\\x_2=y_1+y_2,\end{cases}$即$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，其中$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$可逆，则

$$f(x_1,x_2)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}}y_1^2-y_2^2.$$

方法二　令$\begin{cases}x_1=y_1-3y_2,\\x_2=y_1+3y_2,\end{cases}$即$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，其中$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-3\\1&3\end{pmatrix}$可逆，则

$$f(x_1,x_2)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}}y_1^2-9y_2^2.$$

【注解】

(1)二次型的标准形不是唯一的，事实上任何一个非标准二次型有无数个标准形.

(2)二次型的标准形不唯一，但标准形的系数中正系数、负系数的个数是确定的.

微信公众号：djky66

(二)正交变换法

第一步，将二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$矩阵化得$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$，其中$\boldsymbol{A}$是对称而不对角的矩阵.

第二步，由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，求出$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

第三步，由$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，求出$\lambda_i$对应的线性无关的特征向量$(1\leqslant i\leqslant n)$.

第四步，将线性无关的特征向量$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$进行施密特正交化及单位化得$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$，令$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$，则$\boldsymbol{Q}$是正交矩阵，且$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$.

第五步，作正交变换将二次型化为标准形，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ})\boldsymbol{Y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

【注解】

(1)若用配方法，则二次型的标准形有无数个.

(2)若使用正交变换法化二次型为标准形，在不考虑特征值的次序下，二次型的标准形是唯一的，标准形的系数一定为特征值.

三、二次型标准化定理

定理 1　设二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$，则存在可逆线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y}=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2.$$

定理 2(惯性定理) 二次型的标准形系数中正系数、负系数的个数是保持不变的. 其中正系数的个数称为二次型的正惯性指数,负系数的个数称为二次型的负惯性指数.

四、矩阵的合同与二次型的合同

(一)合同的概念

1. 矩阵合同 ——设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,记为 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

2. 二次型的合同 ——设 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$ 为两个二次型,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$,称二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$ 合同.

(二)矩阵合同的判别方法

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$ 正、负惯性指数相同.

定理 2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个实对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值中正、负特征值个数相等.

【注解】

(1)讨论矩阵的合同关系一般指实对称矩阵.

(2)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个实对称矩阵,若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$,反之不对.

微信(ID: djky66)

(三)矩阵合同的性质

(1)$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$.

(2)若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$.

(3)若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$.

知识延拓模块

一、向量组的正交与正交化

(一)向量组正交的概念

1. 向量的正交 ——设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是两个列向量,若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$,称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交,记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

2. 正交规范向量组 ——设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 都是单位向量,且任意两个向量正交,称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为正交规范的向量组.

(二)向量组的线性无关与正交的关系

性质 1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为两两正交的非零向量组,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 一定线性无关,反之不对.

性质 2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,则可将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 进行施密特正交化和规范化得到两两正交且规范的向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$. 正交规范化过程如下:

(1)正交化过程

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,$

$$\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_n-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_{n-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_{n-1})}\boldsymbol{\beta}_{n-1},$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 两两正交.

(2)规范化

令 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_n\|}\boldsymbol{\beta}_n$，则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 为两两正交的规范向量组.

二、正交矩阵

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(一)正交矩阵的概念

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

(二)正交矩阵的等价条件

定理　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为两两正交的规范向量组.

(三)正交矩阵的性质

性质 1　设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

性质 2　设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$.

性质 3　设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 ±1.

性质 4　设 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}$，则 $\|\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{Y}\|$，在二维和三维空间中，正交变换本质上相当于坐标系作一个旋转变换.

【例 1】　设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|<0$，证明：$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$.

【证明】　因为 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵且 $|\boldsymbol{A}|<0$，所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$，于是

$$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|=-|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|,$$

故 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$.

【例 2】　求椭圆 $x^2+4xy+5y^2=1$ 围成的面积.

【解】　令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，则椭圆 $x^2+4xy+5y^2=1$ 可写成 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=1$.

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$.

作 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，则椭圆 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=1$ 化成 $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2=1$ 或 $\dfrac{u^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2}+\dfrac{v^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2}=1$，于是

$$S=\pi\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}.$$

因为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+1$，所以 $\lambda_1\lambda_2=1$，故椭圆的面积为 $S=\pi$.

三、矩阵之间的三大关系

(一)矩阵等价

1. 定义——设 A,B 为两个同型矩阵,若 A 经过有限次初等变换化为 B,称矩阵 A 与矩阵 B 等价.

2. 矩阵等价的判别方法

定理 1 设 A,B 是两个同型矩阵,则 A,B 等价的充分必要条件是 $r(A)=r(B)$.

(二)矩阵相似

1. 定义——设 A,B 是 n 阶方阵,若存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=B$,称矩阵 A 与 B 相似,记为 $A\sim B$.

2. 判别方法

定理 2 若 A,B 都是实对称矩阵,则 $A\sim B$ 的充分必要条件是 A,B 特征值相同.

定理 3 设 A,B 为 n 阶矩阵,且 A,B 可对角化,则 $A\sim B$ 的充要条件是 A,B 特征值相同.

(三)矩阵合同

1. 定义——设 A,B 为 n 阶矩阵,若存在可逆矩阵 P,使得 $P^{\mathrm{T}}AP=B$,称 A 与 B 合同,记为 $A\simeq B$.

2. 判别法

定理 4 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵,则 $A\simeq B$ 的充要条件是 A,B 正、负惯性指数相同. 特别地,$A\simeq B$ 的充要条件是 A,B 特征值中正、负个数相同.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

重点题型分析

题型一 二次型的矩阵及性质

【例 1】 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$ 表示成矩阵形式.

【解】 令 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&3\\2&3&1\end{pmatrix}$,$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX$.

【例 2】 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实对称可逆矩阵,A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式,设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j.$$

(1)将二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式;

(2)令 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,二次型 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$,问二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是否合同?

【解】 (1)由 $A^*=|A|A^{-1}$,得

$$(A^*)^{\mathrm{T}}=(|A|A^{-1})^{\mathrm{T}}=|A|(A^{-1})^{\mathrm{T}}=|A|(A^{\mathrm{T}})^{-1}=|A|A^{-1}=A^*,$$

即 A^* 为实对称矩阵.

令 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{-1},$$

即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$.

(2)因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值互为倒数，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的正、负特征值个数相等，于是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同，故二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 合同.

【例 3】 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2ax_2x_3$ 的秩为 2，求常数 a 的值.

【解】 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&a\\1&a&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

因为二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的秩为 2，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$，而 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&a\\1&a&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&a-2\\0&a-2&1\end{pmatrix}$，

于是 $\frac{1}{a-2}=\frac{a-2}{1}$，故 $a=1$ 或 $a=3$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 4】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&3&0\\3&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则下列矩阵中与 $\boldsymbol{A}$ 合同但不相似的是(　　).

(A) $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}0&2&0\\2&4&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}0&2&0\\2&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

【解】 显然 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，3，−3，而 $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 的特征值为 4，1，−1，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 合同但不相似，选(A).

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 既相似又合同，(B)不对；

$\begin{pmatrix}0&2&0\\2&4&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $2+2\sqrt{2}$，$2-2\sqrt{2}$，−1，显然与 $\boldsymbol{A}$ 正负惯性指数不同，(C)不对；

因为 $\begin{pmatrix}0&2&0\\2&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的秩为 2，所以不可能与 $\boldsymbol{A}$ 合同，(D)不对.

题型二 配方法化二次型为标准形

【例 1】 用配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-6x_2x_3$ 化成标准形.

【解】 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&-3\\0&-3&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-6x_2x_3=(x_1+2x_2)^2-2\left(x_2+\frac{3}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}x_3^2,$$

令 $\begin{cases}x_1+2x_2=y_1,\\x_2+\dfrac{3}{2}x_3=y_2,\\x_3=y_3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=y_1-2y_2+3y_3,\\x_2=y_2-\dfrac{3}{2}y_3,\\x_3=y_3,\end{cases}$ 即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$,其中 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&-\dfrac{3}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$

可逆,于是 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}}y_1^2-2y_2^2+\frac{3}{2}y_3^2$.

【例 2】 用配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3$ 化为标准形.

【解】 令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3=2x_1(x_2+x_3),$$

令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2+x_3=y_1-y_2,\\x_3=y_3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_2-y_3,\\x_3=y_3,\end{cases}$ 即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$,其中 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆,于是 $f(x_1,x_2,x_3)\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}}2y_1^2-2y_2^2$.

题型三 正交变换法化二次型为标准形

【例 1】 设 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

(1)写出二次型的矩阵形式; (2)用正交变换法求二次型的标准形,写出正交矩阵.

【解】 (1)令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

(2)由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&2\\-2&\lambda-4&-4\\2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+6)(\lambda-1)(\lambda-6)=0$,得 $\lambda_1=-6,\lambda_2=1,\lambda_3=6$.

当 $\lambda_1=-6$ 时，由 $(-6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $(6\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=1$ 时，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=6$ 时，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$.

施密特正交化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-6&0&0\\0&1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，于是

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xrightarrow{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}-6y_1^2+y_2^2+6y_3^2.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 2】 用正交变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 化为标准形.

【解】 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-17&2&2\\2&\lambda-14&4\\2&4&\lambda-14\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-18)^2=0,$$

得 $\lambda_1=9$，$\lambda_2=\lambda_3=18$.

当 $\lambda_1=9$ 时，由 $(9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=18$ 时，由 $(18\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\xi}_3-\frac{(\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\-4\\5\end{pmatrix}$，单位化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\-4\\5\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xrightarrow{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$.

题型四　含参数的二次型的标准化问题

【思路分析】

求含待定参数的二次型中的参数主要有如下思路：

(1)通过二次型矩阵的秩求出未知参数.

(2)通过特征值特征向量的定义求未知参数.

(3)通过性质 $\begin{cases}|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\end{cases}$ 求未知参数，但必须注意，如果在使用该方法求未知参数时出现几组可能的取值，一定要验证特征值是否一致.

【例 1】 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 经过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 化为 $f=y_2^2+2y_3^2$.

(1)求常数 a,b 的值；

(2)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

【解】 (1)令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，则 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

微信公众号【贝贝考研】(ID：djky66)

因为 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 经过正交变换化为 $f=y_2^2+2y_3^2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2$. 又由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-1&-b\\-1&-b&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2+(2-a^2-b^2)\lambda+(a-b)^2,$$

得 $\begin{cases}a=b,\\2-a^2-b^2=2,\end{cases}$ 于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 且 $a=b=0$.

(2)由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\lambda_1=0$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\lambda_2=1$ 对应的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$；

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\lambda_3=2$ 对应的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，规范化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xrightarrow{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}y_2^2+2y_3^2$.

【例 2】 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+8x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3-4x_2x_3\ (a>0)$ 的秩为 2，求常数 a 的值.

【解】　令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 5 & -2\\ a & -2 & 8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，则 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 5 & -2\\ a & -2 & 8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 4 & -a-2\\ 0 & -2-a & 8-a^2\end{pmatrix},$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

因为二次型的秩为 2，所以有 $\dfrac{4}{-2-a}=\dfrac{-a-2}{8-a^2}$，解得 $a=2$.

【例 3】　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2bx_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换化为 $3y_1^2+3y_2^2$.

(1)求常数 a，b 的值；

(2)求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，使二次型化为标准形.

【解】　(1)令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -b\\ 1 & a & 1\\ -b & 1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

因为二次型经过正交变换化为 $3y_1^2+3y_2^2$，所以由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$.

由 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$，得 $a=2$. 又 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$ 且 $|\boldsymbol{A}|=-2(b+2)(b-1)$，所以 $b=-2$ 或 $b=1$.

当 $b=-2$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$，

因为 $|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-9\neq 0$，所以 $b=-2$ 舍去，于是 $b=1$.

(2)当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xrightarrow{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}3y_1^2+3y_2^2$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

第二节 正定矩阵与正定二次型

基础复习模块——基本概念、原理、考点

一、基本概念

(一)两个例子

【例 1】 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+2x_3^2=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,分析其特征.

【解】 (1)对任意的 $\boldsymbol{X}$,有 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\geqslant 0$;

(2)$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,或者对任意的 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 有 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$.

【例 2】 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2+2x_3^2=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,分析其特征.

【解】 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2+2x_3^2=(x_1-x_2)^2+3x_2^2+2x_3^2$,

显然也具备特征:

(1)对任意的 $\boldsymbol{X}$,有 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\geqslant 0$;

(2)$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,或对任意的 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 有 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$.

(二)正定二次型的定义

1. 正定二次型——设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,若对于任意的 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,总有 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$,称 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正定二次型,其中 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

2. 正定二次型的等价定义——设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,若对于任意的 $\boldsymbol{X}$,总有 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\geqslant 0$,且 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,称 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正定二次型,其中 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

二、正定二次型或矩阵为正定矩阵的判别定理

定理 1 二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正.

定理 2 二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正定二次型的充分必要条件是

$$a_{11}>0,\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\cdots,|\boldsymbol{A}|>0,$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式都大于零.

定理 3 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 或 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{E}$.

定理 4 二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的正惯性指数为 n.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

重点题型分析

正定二次型的判断与理论证明

【思路分析】

判断二次型正定或矩阵为正定矩阵常见有三个方法：

(1)定义法，即 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，若对任意的 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$，则 $\boldsymbol{A}$ 正定.

(2)特征值法，设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，若 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都是正值，则 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

(3)顺序主子式法，设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的所有各阶顺序主子式都大于零，则 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

【例 1】　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定阵，证明：$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|>1$.

【解】　因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，于是 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1+\lambda_i>1(i=1,2,\cdots,n)$，故 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n)>1$.

【例 2】　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 为正定二次型，求 t 的取值范围.

【解】　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，因为二次型为正定二次型，所以 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，于是 $\begin{cases}1>0,\\ \begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}>0,\\ |\boldsymbol{A}|>0,\end{cases}$

解得 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

【例 3】　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，证明：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

【证明】　因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

对任意的 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$，因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}>0$，于是 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}>0$，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

【例 4】　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正定矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^{-1}$ 为正定矩阵.

【证明】　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 正定，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$，$\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\mu_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$.

因为 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*$，$(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}$，所以 $\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^{-1}$ 为实对称矩阵.

由 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_i}>0(1\leqslant i\leqslant n)$，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值为 $\dfrac{1}{\mu_i}>0(1\leqslant i\leqslant n)$，得 $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^{-1}$ 都是正定矩阵，故 $\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也为正定矩阵.

【例 5】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵，证明：$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为正定矩阵.

【证明】　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，因为 $(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，所以 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为实对称矩阵.

对任意的 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{X})$，令 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$，则 $\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}$，若 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，注意到 $r(\boldsymbol{P})=n$，则有 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，矛盾，故 $\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}>0$，于是 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为正定

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

矩阵.

【例 6】 设 A 为 m 阶实对称正定矩阵，B 为 $m\times n$ 实矩阵，证明：若 $r(B)=n$，则 $B^{\mathrm{T}}AB$ 是正定矩阵.

【证明】 $A^{\mathrm{T}}=A$，因为 $(B^{\mathrm{T}}AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}B=B^{\mathrm{T}}AB$，所以 $B^{\mathrm{T}}AB$ 对称.

对任意的 $X\neq 0$，$X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}ABX=(BX)^{\mathrm{T}}A(BX)$，令 $BX=\alpha$，若 $\alpha=0$，则由 $r(B)=n$，所以方程组 $BX=0$ 只有零解，即 $X=0$，矛盾，故 $\alpha\neq 0$. 因为 A 为正定矩阵，所以 $X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}ABX=(BX)^{\mathrm{T}}A(BX)=\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha>0$，即 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵.

【例 7】 设 $D=\begin{pmatrix}A & C\\ C^{\mathrm{T}} & B\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 A，B 分别为 m 及 n 阶实对称矩阵，C 为 $m\times n$ 矩阵.

(1)计算 $P^{\mathrm{T}}DP$，其中 $P=\begin{pmatrix}E_m & -A^{-1}C\\ O & E_n\end{pmatrix}$；

(2)判断 $B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C$ 是否为正定矩阵.

【解】 (1)$P^{\mathrm{T}}DP=\begin{pmatrix}E_m & O\\ -C^{\mathrm{T}}A^{-1} & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & C\\ C^{\mathrm{T}} & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m & -A^{-1}C\\ O & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C\end{pmatrix}$.

(2)由 $(B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}-C^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}C=B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C$，得 $B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C$ 对称.

因为 D 正定，且 P 可逆，所以 $P^{\mathrm{T}}DP$ 也是正定矩阵，于是 $P^{\mathrm{T}}DP$ 的特征值都是正数，又因为 $|\lambda E-P^{\mathrm{T}}DP|=|\lambda E-A|\cdot|\lambda E-(B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C)|$，且 A 及 $B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C$ 的特征值即为 $P^{\mathrm{T}}DP$ 的特征值，所以 $B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C$ 的特征值全是正数，于是 $B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C$ 正定.

【例 8】 设 A 是 n 阶正定矩阵，证明：存在正定矩阵 B，使得 $A=B^2$.

【证明】 因为 A 正定，所以 A 的特征值 $\lambda_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$，存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，于是 $A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$，可进一步改写为

$$A=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}\cdot Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}},$$

令 $Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}=B$，显然 B 为正定矩阵，且 $A=B^2$.

测试题

一、选择题

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则 A 与 B(　　).

(A) 相似但不合同　　(B) 合同但不相似　　(C) 合同且相似　　(D) 不合同也不相似

2. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则 A 正定的充分必要条件是(　　).

(A) $|A|>0$　　(B) A 所有特征值都是非负的

(C) $r(A)=n$　　(D) A^{-1} 为正定矩阵

二、填空题

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+8x_2x_3$ 的矩阵为_____.

2. 二次曲面 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 经过正交变换化为 $u^2+4v^2=4$，则 $a=$_____，$b=$_____.

3. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经过正交变换化为标准形 $6y_1^2$，则 $a=$_____.

三、解答题

1. 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3$ 为标准形.

2. 用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准形.

3. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2(a>0)$ 经过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 化为标准形 $f=y_2^2+4y_3^2$.

(1) 求常数 a 的值；(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

4. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+kx_3^2-2x_1x_3-2x_2x_3$，且 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\k\\-2\end{pmatrix}$ 是二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 求 a,k 的值；(2) 用正交变换法化二次型为标准形.

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求常数 a 的值；(2) 用正交变换法化二次型为标准形.

6. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_1x_3+2cx_2x_3$. 令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&1\\1&0&5\end{pmatrix}$ 且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

(1) 求常数 a,b,c 的值；(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 为标准形.

7. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+2ax_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$（其中 a 为整数）经过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+6y_2^2+by_3^2$. 求：

(1) a,b 的值；(2) 正交变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，又 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及重数；(2) 当 k 取何值时 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，证明：$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

测试题参考答案

一、选择题

1. 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 4,1,1，而 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 1,2,3，因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正、负惯性指数相同，但特征值不同，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同但不相似，应选(B).

2. 选(D).

二、填空题

1. 填 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-3\\2&1&4\\-3&4&-2\end{pmatrix}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

2. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$，二次曲面可写为 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=4$，因为经过正交变换二次曲面化为 $u^2+4v^2=4$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=0$，由 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2,\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|\end{cases}$ 得 $a=3,b=1$.

3. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 2 & 2\\ 2 & a & 2\\ 2 & 2 & a\end{pmatrix}$，因为 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=6=3a$，所以 $a=2$.

三、解答题

1. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，则二次型的矩阵形式为 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3)^2-x_2^2-x_3^2+2x_2x_3=(x_1+x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2$，

令 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=y_1,\\ x_2-x_3=y_2,\\ x_3=y_3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2,\\ x_2=y_2+y_3,\\ x_3=y_3,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 可逆，

于是 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xrightarrow{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}}y_1^2-y_2^2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

2. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，二次型的矩阵形式为 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 即 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=5$ 时，由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\xi}_3$，

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$，于是$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}{=}-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$.

3. (1) 令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&a&0\\a&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-a&0\\-a&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+4-a^2).$$

因为二次型$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$经过正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$化为$f=y_2^2+4y_3^2$，所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$，从而$4-a^2=0$，于是$a=2$，故$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(2) 由$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$得$\lambda_1=0$对应的线性无关特征向量为$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$；由$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$得$\lambda_2=1$对应的线性无关特征向量为$\boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$；由$(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$得$\lambda_3=4$对应的线性无关特征向量为$\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，单位化得$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，则正交矩阵为$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

4. (1) 令$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&-1\\0&a&-1\\-1&-1&k\end{pmatrix}$，则二次型表示为$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. 因为$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\k\\-2\end{pmatrix}$为$\boldsymbol{A}$的特征向量，所以$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$，即$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\k\\-2\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}1\\k\\-2\end{pmatrix}$，于是$\begin{cases}a+2=\lambda_0,\\ak+2=k\lambda_0,\\-1-k-2k=-2\lambda_0,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=1,\\\lambda_0=2,\\a=0,\end{cases}$于是$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

(2) 由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&1\\0&\lambda&1\\1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)=0$得$\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=2$.

当$\lambda_1=-1$时，由$(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$即$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$得$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

当$\lambda_2=0$时，由$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$得$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$；当$\lambda_3=2$时，由$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$得$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，

于是 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，故 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}=-y_1^2+2y_3^2$.

5.(1) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则二次型可表示为 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&5&-3\\5&-1&3\\3&-3&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&5&-3\\0&24&-12\\0&12&a-9\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\frac{24}{12}=\frac{-12}{a-9}$，解得 $a=3$，于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(2) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$；当 $\lambda_2=4$ 时，由 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$；当 $\lambda_3=9$ 时，由 $(9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}4y_2^2+9y_3^2$.

6.(1) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&b\\a&4&c\\b&c&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，所以 $\begin{cases}1+b=0,\\2a-4=0,\\3b+c+5=0,\end{cases}$ 解得 $a=2,b=-1,c=-2$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$.

(2) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-6)=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=6$.

当 $\lambda=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=6$ 时，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$，

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}&\dfrac{1}{\sqrt{30}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{5}}&\dfrac{2}{\sqrt{30}}&-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\\0&\dfrac{5}{\sqrt{30}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，

则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}}{=\!=\!=}6y_3^2$.

7.(1) $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a&-2\\a&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$，则二次型的矩阵形式为 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

因为二次型经过正交变换化为 $y_1^2+6y_2^2+by_3^2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=b$.

由 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}),\\\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|\end{cases}$ 即 $\begin{cases}7+b=1,\\6b=3a^2-16a-16,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-6.\end{cases}$

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$，特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$.

当 $\lambda_1=1$ 时，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$；当 $\lambda_2=6$ 时，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=-6$ 时，由 $(-6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 即 $(6\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}&\dfrac{1}{\sqrt{30}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\0&\dfrac{5}{\sqrt{30}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{5}}&\dfrac{2}{\sqrt{30}}&\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&6&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$，

则 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xrightarrow{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$.

8.(1) 令 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$,由 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 得 $\lambda^2+3\lambda=0$,解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-3$,因为 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,所以 $\boldsymbol{A}$ 的秩与 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数相同,于是 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=-3$.

(2)$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda_1=k,\lambda_2=\lambda_3=k-3$,因为 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定的充分必要条件是特征值都是正值,所以当 $k>3$ 时,$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定.

9.因为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,所以 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵.对任意的 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})$,因为 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\|\boldsymbol{X}\|^2>0$,$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\|^2\geqslant 0$,所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}>0$,即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第三部分 概率统计

第一章 随机事件与事件的概率
第二章 随机变量及其分布
第三章 多维随机变量及其分布
第四章 随机变量的数字特征
第五章 大数定律与中心极限定理
第六章 数理统计的基本概念
第七章 参数估计
第八章 假设检验

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第一章　随机事件与事件的概率

大纲点击

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式.

3. 理解事件的独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

基础复习模块——基本概念、原理、考点

一、随机试验与随机事件

(一)基本概念

1. 随机试验——若一个试验满足如下条件:

(1)可重复性,即在相同的条件下可重复进行;

(2)结果的多样性,即试验的可能的结果不唯一,且每次试验之前所有可能的基本结果是确定的;

(3)某次试验之前不知道确切的结果,

这样的试验称为随机试验,简称试验.

2. 样本空间——设 E 为随机试验,该试验的所有可能的基本结果构成的集合,称为随机试验 E 的样本空间,用 Ω 表示,其中每个基本结果称为样本点.

3. 随机事件——样本空间 Ω 的子集称为随机事件,其中 $\varnothing$ 及 Ω 分别称为不可能事件和必然事件.

(二)事件的运算

1. 事件运算的定义

(1)事件的和——设 A,B 为两个事件,称事件 A 或事件 B 发生的事件为事件 A 与 B 的和事件,记为 $A+B$.

(2)事件的积——设 A,B 为两个事件,称事件 A,B 同时发生的事件为事件 A,B 的积事件,记为 AB.

(3)事件的差——设 A,B 为两个事件,称事件 A 发生且事件 B 不发生的事件为事件 A,B 的差事件,记为 $A-B$.

(4)事件的补——设 A 为一个事件,称 A 不发生的事件为事件 A 的补事件,记为 $\overline{A}$.

微信公众号【顶尖考研】

2. 事件运算的性质

(1) 事件和的性质

1) $A+A=A$.　　2) $A+\varnothing=A$.

3) $A+B=B+A$.　　4) $(A+B)+C=A+(B+C)$.

5) $A+\overline{A}=\Omega$.

(2) 事件积的性质

1) $AA=A$.　　2) $A\Omega=A$.

3) $A\overline{A}=\varnothing$.　　4) $AB=BA$.

5) $(AB)C=A(BC)$.

(3) 积对和的分配律

$(A+B)C=AC+BC$.

(三) 事件的关系



1. 事件关系的定义

(1) 包含 —— 设 A,B 是两个事件，若事件 A 发生，事件 B 一定发生，称事件 A 包含于事件 B，记为 $A\subset B$.

(2) 相等 —— 设 A,B 是两个事件，若事件 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，称两事件相等，记为 $A=B$.

(3) 互斥(不相容)—— 设 A,B 是两个事件，若 A,B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，称事件 A,B 互斥.

(4) 事件对立 —— 设 A,B 是两个事件，若 A,B 不能同时发生且至少有一个发生，即 $AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega$ 或 $B=\overline{A}$，称事件 A,B 对立.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

2. 事件关系的性质

(1) $\varnothing\subset A\subset\Omega$.　　(2) $AB\subset A\subset A+B$.

二、随机事件的概率及性质

(一) 随机事件概率的定义

设 E 为随机试验，Ω 为其样本空间，定义随机事件的函数 $P(\cdot)$，若 $P(\cdot)$ 满足如下三个条件：

(1) 对任意的随机事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$(非负性)；

(2) $P(\Omega)=1$(归一性)；

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为可列的两两互斥的随机事件组，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)\text{(可列可加性)},$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

(二) 概率的性质

1. $P(\varnothing)=0$.

2. (有限可加性)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个两两互斥的事件组，则有 $P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

(三) 概率基本公式

1. (补概率公式) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

2.（减法公式）　$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$.

3.（加法公式）　(1)$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

(2)$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

(3)$P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$.

【例 1】　设 A,B 为随机事件，则 $P[(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})]=$_____.

【解】　因为　$(A+B)(A+\overline{B})=A+AB+A\overline{B}=A+A(B+\overline{B})=A+A=A$，

$(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\overline{A}+\overline{A}B+\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{A}+\overline{A}(B+\overline{B})=\overline{A}+\overline{A}=\overline{A}$，

所以　$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=A\cdot\overline{A}=\varnothing$，

于是　$P[(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})]=0$.

【例 2】　设事件 $P(A)=a,P(B)=b,P(A+B)=c$，则 $P(A\overline{B}+\overline{A}B)$ 为(　　).

(A)$c-a$　　(B)$c-b$　　(C)$2c-a-b$　　(D)$a+b$

【解】　由 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，得 $P(AB)=a+b-c$.

因为 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互斥，所以由有限可加性及减法公式得

$$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A-B)+P(B-A)$$
$$=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)=2c-a-b,$$

应选(C).

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三、条件概率与事件的独立性

(一) 条件概率

设事件 $P(A)>0$，则事件 A 发生的情况下，事件 B 发生的条件概率记为 $P(B\mid A)$，且 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

【注解】

(1)$P(A\mid\Omega)=P(A)$.

(2)$P(A+B\mid C)=P(A\mid C)+P(B\mid C)-P(AB\mid C)$.

(3)$P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A)$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(二) 事件的独立性

1. 两个事件独立的定义 —— 设 A,B 为两个随机事件，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，称事件 A,B 独立.

2. 三个事件独立的定义 —— 设 A,B,C 为三个随机事件，若

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\P(AC)=P(A)P(C),\\P(BC)=P(B)P(C),\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C),\end{cases}$$

称事件 A,B,C 独立.

【注解】

(1) 设 A,B 为随机事件，且 $P(A)>0,P(B)>0$，则

若 A,B 独立，则 A,B 一定不互斥；

若 A,B 互斥，则 A,B 一定不独立.

(2) 事件 A,B 独立还有如下等价条件：

1) 若 $P(A)>0$，则事件 A,B 独立的充分必要条件是 $P(B\mid A)=P(B)$.

2) 若 $0<P(A)<1$，则事件 A,B 独立的充分必要条件是 $P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$.

3) 若 $0<P(A)<1$，则事件 A,B 独立的充分必要条件是 $P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid \overline{A})=1$.

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一组独立的事件，则事件 $\varphi(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 与事件 $\varphi(B_1,B_2,\cdots,B_n)$ 独立. 例如：事件 A,B,C,D,E 独立，则事件 $A\overline{B}+C$ 与 $D-E$ 独立.

【例 1】 盒子中有 10 件产品，其中 8 件正品 2 件次品，任取 2 件产品，每次取 1 件且不放回.

(1) 求第一次取次品且第二次取正品的概率；

(2) 求第一次取次品条件下，第二次取正品的概率.

【解】 令 $A_1=\{$第一次取正品$\}$，$A_2=\{$第二次取正品$\}$，则

$$(1)P(\overline{A}_1A_2)=\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{8}{45}.$$

$$(2)P(\overline{A}_1)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5},\ P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{P(\overline{A}_1A_2)}{P(\overline{A}_1)}=\frac{8}{9}.$$

【例 2】 设 A,B 为随机事件，且 $P(A)\neq 0,P(B\mid A)=1$，则有(　　).

(A)$P(A+B)=P(AB)$　　(B)$P(A+B)=P(A)$

(C)$P(A+B)=P(B)$　　(D)$P(A+B)=P(A)+P(B)$

【解】 因为 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=1$，所以 $P(AB)=P(A)$，于是

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(B),$$

应选(C).

四、乘法公式及全概率公式与贝叶斯公式

(一) 乘法公式

1. 设 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$.

2. 设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(二) 全概率公式

1. 完备事件组 —— 设 Ω 为样本空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n$(n 有限或者无穷) 为一组随机事件，若满足：

(1)$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥；　(2)$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，

称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一个完备事件组，如图 3-1-1.

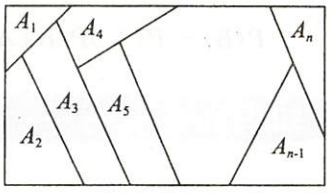


图 3-1-1

2. 全概率公式 —— 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一个完备事件组，B 为任一个随机事件，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

（三）贝叶斯公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一个完备事件组，B 为一个随机事件且 $P(B)>0$，则

$$P(A_k\mid B)=\frac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}.$$

【例 1】 有甲乙丙三个厂家生产同种产品，总产品的产量中三个厂家所占的比例分别为 60%，25% 及 15%，又三个厂家所生产产品的次品率分别为 6%，8% 及 12%，现从该批产品中任意抽取一件产品，求产品为次品的概率.

【解】 设 $A_1=\{$甲厂产品$\}$，$A_2=\{$乙厂产品$\}$，$A_3=\{$丙厂产品$\}$，令 $B=\{$所取产品为次品$\}$，则

$$P(A_1)=0.6,\quad P(A_2)=0.25,\quad P(A_3)=0.15,$$
$$P(B\mid A_1)=0.06,\quad P(B\mid A_2)=0.08,\quad P(B\mid A_3)=0.12,$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)\\&=0.6\times0.06+0.25\times0.08+0.15\times0.12=0.074.\end{aligned}$$

【例 2】 甲乙丙三个人射击的命中率分别为 $\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ 及 $\frac{2}{3}$，就以下两种情况求命中率：

(1) 甲、乙、丙同时向目标射击，求目标被命中的概率；

(2) 甲、乙、丙中先选一个人，再进行射击，求目标被命中的概率.

【解】 (1) 设 $A=\{$甲命中目标$\}$，$B=\{$乙命中目标$\}$，$C=\{$丙命中目标$\}$，则

$$P(A)=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{1}{4},\quad P(C)=\frac{2}{3},$$

事件 $A+B+C$ 为目标被命中，则目标被命中的概率为

$$\begin{aligned}&P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{8}.\end{aligned}$$

(2) 设 $A_1=\{$三个人中选中甲$\}$，$A_2=\{$三个人中选中乙$\}$，$A_3=\{$三个人中选中丙$\}$，$B=\{$目标被击中$\}$，

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{1}{2},\quad P(B\mid A_2)=\frac{1}{4},\quad P(B\mid A_3)=\frac{2}{3},$$

由全概率公式得

微信公众号（顶尖考研）
(ID: djkyhb)

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)=\frac{17}{36}.$$

知识延拓模块 —— 古典概型、伯努利概型与几何概型

一、古典概型

设随机试验只有有限个可能的基本结果，且每个可能的基本结果等可能发生，称这样的概型为古典概型. 若随机事件 A 中所含的样本点个数为 k，样本空间中样本点总数为 n，则 $P(A)=\dfrac{k}{n}$.

【例 1】 口袋中装有 10 个球，其中 4 个白球，6 个红球，从中任取 2 个球，求至少取到一个白球的概率.

【解】 令 $A=\{$任取两个球至少有一个白球$\}$，则 $\overline{A}=\{$两个球都是红球$\}$，样本点总数为 $n=C_{10}^2=45$，$\overline{A}$ 的有利样本点数为 $k=C_6^2=15$，于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{15}{45}=\frac{2}{3}.$$

【例 2】 口袋中共有 12 只球，其中 4 只白球，8 只红球.

(1) 每次抽取一个球，连续抽取两次，取后不放回，求两球中一个白球和一个红球的概率；

(2) 每次抽取一个球，取后放回，连续抽取两次，求两球中一个白球和一个红球的概率.

【解】 (1) 样本点总数为 $n=C_{12}^1\times C_{11}^1=132$，

有利样本点数为 $k=C_4^1\times C_8^1+C_8^1\times C_4^1=64$，

所以两球中一个白球一个红球的概率为 $p=\dfrac{64}{132}=\dfrac{16}{33}$.

(2) 样本点总数为 $n=12^2=144$，

有利样本点数为 $k=4\times 8+8\times 4=64$，

两球中一个白球和一个红球的概率为 $p=\dfrac{64}{144}=\dfrac{4}{9}$.

【例 3】 一个盒子中有 5 个红球、5 个白球，现按照如下方式，分别求取到 2 个红球和 2 个白球的概率.

(1) 一次性抽取 4 个球；(2) 逐个抽取，取后无放回；(3) 逐个抽取，取后放回.

【解】 (1) 设 $A_1=\{$一次性抽取 4 个球，其中 2 个红球 2 个白球$\}$，则

$$P(A_1)=\frac{C_5^2C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{10}{21}.$$

(2) 设 $A_2=\{$逐个抽取 4 个球，取后不放回，其中 2 个红球 2 个白球$\}$，则

$$P(A_2)=\frac{C_4^2A_5^2A_5^2}{A_{10}^4}=\frac{10}{21}.$$

(3) 设 $A_3=\{$逐个抽取 4 个球，取后放回，其中 2 个红球 2 个白球$\}$，则

$$P(A_3)=\frac{C_4^2\times 5^2\times 5^2}{10^4}=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}=\frac{3}{8}.$$

【例 4】 某家庭有 3 个孩子，已知至少有一个女孩，则该家庭至少有一个男孩的概率

为_____.

【解】 3个孩子一共有$2^3=8$种可能性，在至少有一个女孩的条件下，样本点总数为7，至少有一个男孩的样本点个数为6，故所求的概率为$\frac{6}{7}$.

二、伯努利概型

若随机试验E满足：(1) 每次试验只有两个可能的结果且每次试验两种可能结果发生的概率不变；(2) 各次试验相互独立. 若E重复试验n次，称这样的试验为n重伯努利试验.

若每次只有A和$\overline{A}$两种可能结果且$P(A)=p(0<p<1)$，独立重复试验n次，设$A_k=\{n$次试验中A出现k次$\}$，则

$$P(A_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n).$$

【例1】 设每次试验击中目标的概率为p，进行4次重复射击，求击中目标不少于一次的概率.

【解】 设$A_k=\{4$次射击中击中目标k次$\}(k=0,1,2,3,4)$，所求概率为

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)=1-P(A_0)=1-(1-p)^4.$$

【例2】 设每次独立试验出现A及$\overline{A}$，且每次试验中概率不变，设$P(A)=p$，且三次试验中A至少出现一次的概率为$\frac{19}{27}$，则$p=$_____.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 设三次试验中A出现的次数为X，则$X\sim B(3,p)$. 因为$P\{X\geqslant 1\}=\frac{19}{27}$，

$$P\{X=0\}=C_3^0 p^0(1-p)^3=1-\frac{19}{27}=\frac{8}{27},$$

所以$p=\frac{1}{3}$.

【例3】 在伯努利试验中，事件A发生的概率为p，求n次独立试验中事件A发生奇数次的概率.

【解】 令$B=\{n$次试验中A出现奇数次$\}$，$C=\{n$次试验中A出现偶数次$\}$，则

$$P(B)=C_n^1 pq^{n-1}+C_n^3 p^3 q^{n-3}+C_n^5 p^5 q^{n-5}+\cdots,$$

$$P(C)=C_n^0 p^0 q^n+C_n^2 p^2 q^{n-2}+C_n^4 p^4 q^{n-4}+\cdots,\text{其中 } q=1-p,$$

由 $P(B)+P(C)=(p+q)^n=1$，$P(C)-P(B)=(q-p)^n=(1-2p)^n$，

得 $P(B)=\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$.

三、几何概型

设随机试验的样本空间为一个区域Ω(如一维空间的区间、二维空间的平面区域、三维空间的几何体等，其几何度量分别为区间的长度、平面区域的面积、几何体的体积)，且Ω中每个样本点等可能取到，设事件A所在的区域为Ω_0，则

$$P(A)=\frac{\Omega_0\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}.$$

【例1】 随机地向半圆$\Omega=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{2ax-x^2}\}(a>0)$内扔一点，设落入半

圆内每一点等可能，则原点和该点的连线与 x 轴夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为_____.

【解】 如图 3-1-2，Ω 的面积为 $\frac{\pi a^2}{2}$，点落入的区域面积为

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r\,\mathrm{d}r=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}(2\theta)$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi a^2}{4}+\frac{a^2}{2},$$

所求概率为 $\dfrac{\frac{\pi a^2}{4}+\frac{a^2}{2}}{\frac{\pi a^2}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.

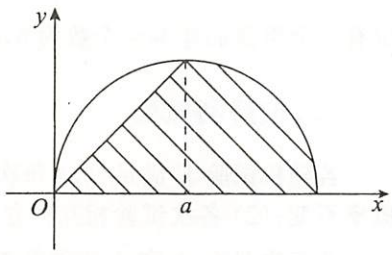


图 3-1-2

【例 2】 甲乙两人约好上午 8 点至 12 点见面. 若甲先到，则等半小时离去；若乙先到，则等 1 小时离去，求甲乙两人能见面的概率.

【解】 如图 3-1-3，设甲、乙到达的时间点分别为 x，y，则 $8\leqslant x\leqslant 12$，$8\leqslant y\leqslant 12$，令

$$\Omega=\{(x,y)\mid 8\leqslant x\leqslant 12,8\leqslant y\leqslant 12\},$$

则甲、乙不能见面的事件为

$$A=\{(x,y)\mid y-x\geqslant\frac{1}{2},x-y\geqslant 1\},$$

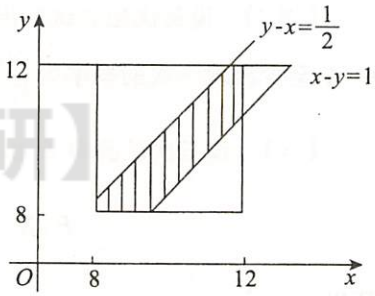


图 3-1-3

于是 $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}=\dfrac{10.625}{16}=0.664$，

则甲、乙能见面的概率为 $1-0.664=0.336$.

重点题型分析

题型一 事件的运算及关系

【例 1】 设 $P(A)=p$，$P(B)=q$，$P(A+B)=r$，则 $P(A\overline{B})=$_____，$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=$_____.

【解】 因为 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，

所以 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=p+q-r$，

于是 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=p-(p+q-r)=r-q$，

$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-r$.

【例 2】 设 A，B 是两个随机事件，当 A，B 同时发生时，事件 C 一定发生，下列结论正确的

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

是(　　).

(A)$P(C)=P(A+B)$　　(B)$P(C)=P(AB)$

(C)$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$　　(D)$P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$

【解】　因为事件A,B发生时,事件C一定发生,所以$AB\subset C$,于是$P(C)\geqslant P(AB)$,而

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)\geqslant P(A)+P(B)-1,$$

所以$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$,选(C).

【例 3】　设A,B为两个随机事件,$P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B\mid A)=\frac{1}{4}$,则$P(A\overline{B})=$_____.

【解】　由$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$,得$P(AB)=\frac{1}{12}$,于是

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$

【例 4】　设$P(A)=\frac{1}{3}$,$P(A\mid B)=P(B\mid A)=\frac{1}{4}$,则$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=$_____.

【解】　由$P(A\mid B)=P(B\mid A)=\frac{1}{4}$,得$P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$,且

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{12},$$

于是　$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{5}{12}$.

【例 5】　设A,B是两个随机事件,下列结论正确的是(　　).

(A) 若$P(A)=0$,$P(B)=1$,则$AB=\varnothing$且$A+B=\Omega$

(B) 若$P(A)=1$,则A为必然事件

(C) 若$P(AB)=0$,则A,B一定互斥

(D) 若$P(A)=1$,则A,B相互独立

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【解】　由$P(A)=1$得$P(\overline{A})=0$,因为$\overline{A}B\subset\overline{A}$,所以$P(\overline{A}B)=0$,于是$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$,即$\overline{A},B$独立,故$A,B$一定独立,选(D).

【例 6】　设A,B为两个随机事件,且$P(B\mid A)=1$,下列结论正确的是(　　).

(A)$P(\overline{A}B)=0$　(B)$P(A\overline{B})=0$　(C)$A\subset B$　(D)$B=\Omega$

【解】　由$P(B\mid A)=1$得$P(AB)=P(A)$,于是$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0$,选(B).

题型二　条件概率与事件独立性问题

【例 1】　设$P(A)>0$,$P(B)>0$,且A,B互斥,则下列结论正确的是(　　).

(A)A,B独立　(B)$\overline{A},\overline{B}$互斥　(C)$\overline{A},\overline{B}$相容　(D)$P(A\overline{B})=P(A)$

【解】　因为A,B互斥,所以$P(AB)=0$. 由减法公式得$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)$,应选(D).

【例 2】　设事件A,B独立,且A,B都不发生的概率为$\frac{1}{9}$,又A发生B不发生与B发生A不发生的概率相等,则$P(A)=$_____.

【解】 由 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$,

又由 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$, $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$,

得 $P(A)=P(B)$. 令 $P(A)=p$, 由 $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=\frac{1}{9}$, 得 $P(A+B)=\frac{8}{9}$, 又 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=2p-p^2$, 即 $2p-p^2=\frac{8}{9}$, 解得 $P(A)=\frac{2}{3}$.

【例 3】 若 M 件产品中包含 m 件次品, 任取两件产品.

(1) 已知取出的两件产品中有一件是次品的条件下, 求另一件也是次品的概率;

(2) 已知两件产品中有一件为正品的情况下, 求另一件是次品的概率;

(3) 求取出的两件产品中至少有一件是次品的概率.

【解】 (1) 设 $A=\{$两件产品中有一件是次品$\}$, $B=\{$两件都是次品$\}$,

$$P(A)=\frac{C_m^1C_{M-m}^1+C_m^2}{C_M^2},\quad P(B)=\frac{C_m^2}{C_M^2},$$

显然 $B\subset A$, 于是 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{m-1}{2M-m-1}$.

(2) 令 $A=\{$两件产品中有一件是正品$\}$, $B=\{$两件中恰有一件次品$\}$,

$$P(A)=\frac{C_{M-m}^2+C_m^1C_{M-m}^1}{C_M^2},\quad P(B)=\frac{C_m^1C_{M-m}^1}{C_M^2},$$

显然 $B\subset A$, 于是 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{2m}{M+m-1}$.

(3) 令 $A=\{$取出的两件产品中至少有一件次品$\}$, 则

$$P(A)=\frac{C_m^1C_{M-m}^1+C_m^2}{C_M^2}=\frac{m(2M-m-1)}{M(M-1)}.$$

题型三 全概率公式与贝叶斯公式

【例 1】 口袋中有 4 个白球 6 个红球, 每次取一个球, 取后不放回, 求第二次取到红球的概率.

【解】 令 $A_1=\{$第一次取到白球$\}$, $A_2=\{$第一次取到红球$\}$, $B=\{$第二次取到红球$\}$,

$$P(A_1)=\frac{4}{10},\quad P(A_2)=\frac{6}{10},\quad P(B\mid A_1)=\frac{6}{9},\quad P(B\mid A_2)=\frac{5}{9},$$

由全概率公式得

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{6}{10}.$$

【注解】

在多种产品中第一次取一件产品且不放回(不知道第一次的结果)情况下, 第二次取某种产品的概率与第一次取某种产品的概率相等.

【例 2】　袋中有 a 只黑球，b 只白球，甲、乙、丙三人依次从袋中取出一只球（不放回），分别求三人各自取到白球的概率（其中 $b \geqslant 3$）.

【解】　设 $A=\{$甲取到白球$\}$，$B=\{$甲取出一球后乙取到白球$\}$，$C=\{$甲、乙各取一球后，丙取到白球$\}$，则

$$P(A)=\frac{b}{a+b},$$

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b-1}=\frac{b}{a+b},$$

$$\begin{aligned}P(C)=&\ P(AB)P(C\mid AB)+P(A\overline{B})P(C\mid A\overline{B})+P(\overline{A}B)P(C\mid \overline{A}B)+P(\overline{AB})P(C\mid \overline{AB})\\=&\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}\cdot\frac{b-2}{a+b-2}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}\cdot\frac{b-1}{a+b-2}+\\&\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b-1}\cdot\frac{b-1}{a+b-2}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}\cdot\frac{b}{a+b-2}\\=&\frac{b}{a+b}.\end{aligned}$$

【例 3】　从 0 ～ 9 中随机取两个数，求其和大于 10 的概率.

【解】　设 $A_i=\{$第一个数取到 $i\}(0\leqslant i\leqslant 9)$，$B=\{$两数之和大于 10$\}$，则

$$P(A_i)=\frac{1}{10}(0\leqslant i\leqslant 9),$$

$$P(B\mid A_0)=P(B\mid A_1)=0,\ P(B\mid A_2)=\frac{1}{9},P(B\mid A_3)=\frac{2}{9},P(B\mid A_4)=\frac{3}{9},$$

$$P(B\mid A_5)=\frac{4}{9},P(B\mid A_6)=\frac{4}{9},P(B\mid A_7)=\frac{5}{9},P(B\mid A_8)=\frac{6}{9},P(B\mid A_9)=\frac{7}{9},$$

由全概率公式得 $P(B)=\sum\limits_{i=0}^{9}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{16}{45}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 4】　甲袋中有 3 个白球和 3 个红球，乙袋中有 4 个白球 2 个红球. 从甲袋中取出一球放入乙袋，再从乙袋中取出一球.

(1) 求从乙袋中取出的是红球的概率；

(2) 若从乙袋中取出的球为白球，求从甲袋中取出的是红球的概率.

【解】　(1) 令 $A_1=\{$从甲袋中取出白球$\}$，$A_2=\{$从甲袋中取出红球$\}$，$B=\{$从乙袋中取出红球$\}$，

$$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2},\quad P(B\mid A_1)=\frac{2}{7},\quad P(B\mid A_2)=\frac{3}{7},$$

则
$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{5}{14}.$$

(2)
$$P(A_2\mid \overline{B})=\frac{P(A_2)P(\overline{B}\mid A_2)}{P(\overline{B})}=\frac{4}{9}.$$

【例 5】　三人同时向飞机开火，击中的概率分别为 0.4，0.6，0.5. 若一人击中飞机，则飞机被击落的概率为 0.3，若两人击中飞机，则飞机被击落的概率为 0.5，若三人同时击中飞机，则飞机被击落的概率为 0.9.

(1) 求飞机被击落的概率；　(2) 若飞机被击落，求是由两人击中的概率.

【解】 (1) 令 $A_i=\{$第 i 个人击中飞机$\}$，$B_i=\{$有 i 个人击中飞机$\}(i=1,2,3)$，$C=\{$飞机被击落$\}$，则

$$B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

$$B_2=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3,B_3=A_1A_2A_3.$$

$$P(C\mid B_1)=0.3,\quad P(C\mid B_2)=0.5,\quad P(C\mid B_3)=0.9.$$

因为 $P(A_1)=0.4,P(A_2)=0.6,P(A_3)=0.5$ 且 A_1,A_2,A_3 相互独立，所以

$$P(B_1)=0.38,$$

$$P(B_2)=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)=0.38,$$

$$P(B_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.12,$$

于是 $P(C)=P(B_1)P(C\mid B_1)+P(B_2)P(C\mid B_2)+P(B_3)P(C\mid B_3)=0.412.$

$$(2)P(B_2\mid C)=\frac{P(B_2C)}{P(C)}=\frac{P(B_2)P(C\mid B_2)}{P(C)}=\frac{190}{412}.$$

测试题

一、选择题

1. 设 A,B 是两个随机事件，$B\subset A$，则下列结论正确的是(　　).

(A)$P(B-A)=P(B)-P(A)$　　(B)$P(B\mid A)=P(B)$

(C)$P(A+B)=P(A)$　　(D)$P(AB)=P(A)$

2. 设随机事件 A,B 满足 $P(B\mid A)=1$ 且 $P(A)>0,0<P(B)<1$，则(　　).

(A)$B\subset A$　　(B)$P(A\mid\overline{B})=0$

(C)$A=\Omega$　　(D)$P(A\cup B)=P(A)$

3. 在电炉上安装 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的，在使用过程中只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电. 用 E 表示事件“电炉断电”，设 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于(　　).

(A)$\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　　(B)$\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$　　(C)$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　　(D)$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

4. 下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $P(A)=0$，则 A 为不可能事件

(B) 若 $P(A)=1$，则 A 为必然事件

(C) 设 $P(A)>0,P(B)>0$，若 A,B 独立，则 A,B 一定互斥

(D) 若 $P(A)=0$，则 A,B 独立

5. 设 $0<P(A)<1$ 且 $P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$，则(　　).

(A)$P(A+B)=P(A)+P(B)$　　(B)$P(B\mid A)=P(B)$

(C)$P(AB)\neq P(A)P(B)$　　(D)$P(A)+P(B)=1$

6. 设 A,B 为两个随机事件且 $P(A\overline{B})=P(A)$，则(　　).

(A) 事件 A,B 独立　　(B) 事件 A,B 互斥

(C)$P(A)=0$ 或 $P(B)=0$　　(D)AB 不一定为不可能事件

二、填空题

1. 设 A,B,C 为随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3},P(AB)=\frac{1}{6},P(AC)=\frac{1}{12},P(BC)=0$，则 A,B,C 全不发生的概率为_____.

微信公众号【启航考研】(ID: djkyhb)

2. 三个元件独立工作，正常工作的概率为$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，则至少有一个元件不能正常工作的概率为_____.

3. 设试验成功的概率为p，进行n次独立试验，则至少成功一次的概率为_____.

4. 设$P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，且$P(B\mid A)=0.8$，则$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=$_____.

5. 设事件A，B满足$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且$P(A)=p$，则$P(B)=$_____.

6. 一实习生用同一台机器连续独立制造3个同样零件，第i个零件不合格的概率为$\frac{1}{i+1}(i=1,2,3)$，用X表示3件中不合格的个数，则$P\{X=2\}=$_____.

三、解答题

1. 三个规格相同的箱子，第一个箱子5个黑球1个白球，第二个箱子4个黑球2个白球，第三个箱子3个黑球3个白球. 现从中任取一只箱子，再从中取出一个球.

(1) 求取出的是黑球的概率；

(2) 若取出的球是黑球，求这个黑球是从第一只箱子取出的概率.

2. 12件产品中有4件次品，在先取一件的情况之下，任取2件产品皆为正品，求先取的1件为次品的概率.

3. 甲、乙两袋各有10件产品，其中甲袋中含正品7个次品3个，乙袋中含正品8个次品2个，从甲袋中取两件产品放入乙袋，再从乙袋中任取一件产品，求取出的产品是正品的概率.

4. 甲、乙两人对同一目标射击，命中目标概率分别为0.6和0.5，下列两种情形，分别求事件“已知目标命中，求是甲命中”的概率.

(1) 在甲、乙两人中随机挑选一人，由他射击一次；

(2) 甲、乙两人独自各射击一次.

5. 设有来自三个地区的各10,15,25名考生的报名表，其中女生的报名表分别为3,7,5份，随机取出一个地区的报名表，从中先后任意抽取两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表格的概率；

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率.

6. 设随机变量X服从参数为1的泊松分布，随机变量Y在$0\sim X$之间等可能取整数，求$P\{Y=2\}$.

微信公众号【顶尖考研】
(微信号：dingjiankaoyan-dikv66)

测试题参考答案

一、选择题

1. 因为$B\subset A$，所以$A+B=A$，于是有$P(A+B)=P(A)$，应选(C).

2. 因为$P(B\mid A)=1$，所以$P(A)=P(AB)$，于是$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0$，故$P(A\mid\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=0$，应选(B).

3. 因为$\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$表示不低于临界值的温控器个数为4个，$\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$表示不低于临界值的温控器个数为3个，$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$表示不低于临界值的温控器个数为2个，$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$表示不低于临界值的温控器个数为1个，应选(C).

4. 不可能事件的概率为0，但概率为零的事件不一定是不可能事件，(A)不对；同样必然事件概率为1，但概率为1的事件不一定是必然事件，(B)不对；设$P(A)>0$，$P(B)>0$，若A，B独立，则$P(AB)=P(A)P(B)>0$，则$AB\neq\varnothing$，即A，B一定不互斥，(C)不对；若$P(A)=0$，因为$AB\subset A$，所以$P(AB)\leqslant P(A)=0$，于是$P(AB)=0$，故$P(AB)=P(A)P(B)$，即A，B独立，应选(D).

5. 由$P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$得$P(B\mid A)=1-P(\overline{B}\mid\overline{A})=P(B\mid\overline{A})$，再由条件概率公式得$\frac{P(AB)}{P(A)}$

$=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，整理得 $P(AB)=P(A)P(B)$，应选(B).

6. 因为 $P(A\overline{B})=P(A)$，所以 $P(A)-P(AB)=P(A)$，于是 $P(AB)=0$，由 $P(AB)$ 不一定等于 $P(A)P(B)$ 得不出 A,B 的独立性，(A) 不对；若 A,B 互斥，则 $P(AB)=0$，反之不对，(B) 不对，(C) 显然不对，应选(D).

二、填空题

1. 因为 $ABC\subset BC$，所以 $P(ABC)\leqslant P(BC)=0$，于是 $P(ABC)=0$. $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C)=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)=\dfrac{1}{4}$.

2. 设 $A_i=\{$第 i 个元件正常工作$\}(i=1,2,3)$，则 $P(A_1)=\dfrac{1}{2}$，$P(A_2)=\dfrac{2}{3}$，$P(A_3)=\dfrac{3}{4}$，$P(\overline{A}_1)=\dfrac{1}{2}$，$P(\overline{A}_2)=\dfrac{1}{3}$，$P(\overline{A}_3)=\dfrac{1}{4}$，至少一个元件不能正常工作的事件表示为 $\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$，于是有 $P(\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)+P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_3)-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)-P(\overline{A}_1\overline{A}_3)-P(\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.

3. 令 $A_k=\{n$ 次试验成功 k 次$\}(k=0,1,2,\cdots,n)$，则至少成功一次的概率为 $1-P(A_0)=1-C_n^0(1-p)^n=1-(1-p)^n$.

4. 由 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.8$ 得 $P(AB)=0.4$，因为 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互斥，所以 $P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)+P(B)-2P(AB)=0.5+0.6-0.8=0.3$.

5. 由 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$ 得 $P(A)+P(B)=1$，故 $P(B)=1-p$.

6. 令 $A_i=\{$第 i 件产品合格$\}(i=1,2,3)$，则 $P(A_1)=\dfrac{1}{2}$，$P(A_2)=\dfrac{2}{3}$，$P(A_3)=\dfrac{3}{4}$，于是 $P\{X=2\}=P(A_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\,A_2\,\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2A_3)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$.

三、解答题

1. 令 $A_i=\{$取出第 i 个箱子$\}(i=1,2,3)$，则 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{1}{3}$，令 $B=\{$取出黑球$\}$，$P\{B\mid A_1\}=\dfrac{5}{6}$，$P(B\mid A_2)=\dfrac{4}{6}$，$P(B\mid A_3)=\dfrac{3}{6}$.

(1) $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{4}{6}+\dfrac{3}{6}\right)=\dfrac{2}{3}$.

(2) $P(A_1\mid B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\dfrac{5}{12}$.

2.【分析】本题分两步完成，且知道第二步的结果求第一步发生的结果，一定使用贝叶斯公式.

【解答】令 $A=\{$先取的一件为次品$\}$，则 $A,\overline{A}$ 为完备事件组，$P(A)=\dfrac{4}{12}$，$P(\overline{A})=\dfrac{8}{12}$；令 $B=\{$后取的 2 件皆为正品$\}$，则 $P(B\mid A)=\dfrac{C_8^2}{C_{11}^2}=\dfrac{28}{55}$，$P(B\mid\overline{A})=\dfrac{C_7^2}{C_{11}^2}=\dfrac{21}{55}$，由贝叶斯公式得

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}=\frac{\dfrac{4}{12}\times\dfrac{28}{55}}{\dfrac{4}{12}\times\dfrac{28}{55}+\dfrac{8}{12}\times\dfrac{21}{55}}=\frac{2}{5}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

3. 设 $A_0=\{$甲袋中取出两件次品$\}$，$A_1=\{$甲袋中取出两件产品中一件正品一件次品$\}$，$A_2=\{$甲袋中取出两件都是正品$\}$，$B=\{$乙袋中取出一件为正品$\}$，$P(A_0)=\dfrac{C_3^2C_7^0}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{15}$，$P(A_1)=\dfrac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}=\dfrac{7}{15}$，$P(A_2)=\dfrac{C_7^2C_3^0}{C_{10}^2}=\dfrac{7}{15}$，$P(B\mid A_0)=\dfrac{8}{12}$，$P(B\mid A_1)=\dfrac{9}{12}$，$P(B\mid A_2)=\dfrac{10}{12}$，则 $P(B)=P(A_0)P(B\mid A_0)+P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)=\dfrac{1}{15}\times\dfrac{8}{12}+\dfrac{7}{15}\times\dfrac{9}{12}+\dfrac{7}{15}\times\dfrac{10}{12}=\dfrac{47}{60}$.

4. (1) 令 $A_1=\{$选中甲$\}$，$A_2=\{$选中乙$\}$，$B=\{$目标被射中$\}$，$P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{2}$，

$P(B\mid A_1)=0.6$，$P(B\mid A_2)=0.5\Rightarrow P(A_1\mid B)=\dfrac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{\sum\limits_{i=1}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)}=\dfrac{0.5\times0.6}{0.5\times0.6+0.5\times0.5}=\dfrac{6}{11}$；(发生在两个不同阶段的条件概率用贝叶斯公式)

(2) 令 $A=\{$甲命中目标$\}$，$B=\{$乙命中目标$\}$，$C=\{$目标被击中$\}\Rightarrow C=A+B$，$P(A\mid C)=\dfrac{P[A(A+B)]}{P(A+B)}=\dfrac{P(A)}{P(A+B)}=\dfrac{3}{4}$.

5. (1) 首先取一个地区，记 A_i 表示取到的是第 i 个地区的盒子($i=1,2,3$)，A_1,A_2,A_3 为一个完备事件组. 其次，取两份表格，B_i 表示第 i 次取的表格为女生($i=1,2$).

$P(B_1)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_1\mid A_i)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{15}+\dfrac{5}{25}\right)=\dfrac{29}{90}$.

(2) $P(B_1\mid\overline{B}_2)=\dfrac{P(B_1\overline{B}_2)}{P(\overline{B}_2)}$，

$P(B_1\overline{B}_2)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_1\overline{B}_2\mid A_i)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3\times7}{10\times9}+\dfrac{7\times8}{15\times14}+\dfrac{5\times20}{25\times24}\right)=\dfrac{2}{9}$.

$P(\overline{B}_2)=1-P(B_2)=1-P(B_1)=\dfrac{61}{90}$，所以 $P(B_1\mid\overline{B}_2)=\dfrac{P(B_1\overline{B}_2)}{P(\overline{B}_2)}=\dfrac{20}{61}$.

6. X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{1^k}{k!}e^{-1}=\dfrac{1}{k!}e^{-1}(k=0,1,2,\cdots)$，

令 $A_k=\{X=k\}$，则 $P(A_k)=\dfrac{1}{k!}e^{-1}(k=0,1,2,\cdots)$，

令 $B=\{Y=2\}$，$P(B\mid A_0)=P(B\mid A_1)=0$，$P(B\mid A_2)=\dfrac{1}{3}$，$P(B\mid A_3)=\dfrac{1}{4}$，$\cdots$，

于是 $P\{Y=2\}=P(B)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P(A_k)P(B\mid A_k)=e^{-1}\left(\dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{1}{4}+\cdots\right)=e^{-1}\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$

$=e^{-1}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}-1-1-\dfrac{1}{2!}\right)=1-\dfrac{5}{2e}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第二章　随机变量及其分布

大纲点击

1. 理解随机变量的概念，理解分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}(-\infty<x<+\infty)$$

的概念及性质，会计算与随机变量相联系的事件的概率.

2. 理解离散型随机变量及其概率分布的概念，掌握 0－1 分布、二项分布 $B(n,p)$、几何分布、超几何分布、泊松(Poisson) 分布 $P(\lambda)$ 及其应用.

3. 了解泊松定理的结论和应用条件，会用泊松分布近似表示二项分布.

4. 理解连续型随机变量及其概率密度的概念，掌握均匀分布 $U(a,b)$、正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$、指数分布及其应用，其中参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布 $E(\lambda)$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{若 } x>0,\\ 0, & \text{若 } x\leqslant 0.\end{cases}$$

5. 会求随机变量函数的分布.

微信公众号【顶尖考研】

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

一、随机变量及分布

(一) 定义

1. 随机变量 —— 取值与随机事件的结果对应的变量称为随机变量，或样本空间 Ω 的实函数 $X=X(\omega)(\omega\in\Omega)$ 称为随机变量，随机变量的取值范围可以看成随机事件.

2. 分布函数 —— 设 X 为一个随机变量，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，称

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\in(-\infty,x]\}$$

为随机变量 X 的分布函数，即 $F(x)$ 表示随机变量 X 位于 $(-\infty,x]$ 上的概率.

(二) 分布函数的性质

(1) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$.

(2) $F(x)$ 是 x 的单调不减的函数.

(3) $F(x)$ 右连续，即任何一点处有 $F(x)=F(x+0)$.

(4) $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$.

反之，若一个函数 $F(x)$ 满足以上四个特征，则该函数为某随机变量的分布函数.

【例】 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，判断下列函数是否为某个随机变量的分布函数：

(1) $F(2x-1)$；　(2) $F(-x)$；　(3) $F(1-x^2)$.

【解】 (1) 因为 $F(x)$ 满足分布函数的四个性质，所以 $F(2x-1)$ 也满足分布函数的四个

性质，于是 $F(2x-1)$ 仍是某个随机变量的分布函数.

(2) 因为 $F(-x)$ 与 $F(x)$ 图像关于 y 轴对称，所以 $F(-x)$ 为单调不增函数且左连续，故 $F(-x)$ 不是某随机变量的分布函数.

(3) 因为 $F(1-x^2)\big|_{x=+\infty}=0$，所以 $F(1-x^2)$ 不是分布函数.

(三) 分布函数与概率的关系

设 X 为随机变量，$F(x)$ 为其分布函数，则

(1) $P\{X<a\}=F(a-0)$.

(2) $P\{a<X\leqslant b\}=P\{X\leqslant b\}-P\{X\leqslant a\}=F(b)-F(a)$.

(3) $P\{X=a\}=P\{X\leqslant a\}-P\{X<a\}=F(a)-F(a-0)$.

(4) $P\{a<X<b\}=P\{X<b\}-P\{X\leqslant a\}=F(b-0)-F(a)$.

(5) $P\{a\leqslant X<b\}=P\{X<b\}-P\{X<a\}=F(b-0)-F(a-0)$.

(6) $P\{a\leqslant X\leqslant b\}=P\{X\leqslant b\}-P\{X<a\}=F(b)-F(a-0)$.

二、两类常见的随机变量 —— 离散型随机变量与连续型随机变量



(一) 离散型随机变量

1. 离散型随机变量的定义 —— 设 X 为随机变量，若 X 的可能取值为有限个或可列个，称 X 为离散型随机变量.

2. 离散型随机变量的分布律 —— 反映离散型随机变量的可能取值及其对应的概率，称为 X 的分布律，可表示为

$$P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots,n,\text{其中 } n \text{ 为有限或无穷}),$$

或

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

【例】 设随机变量 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，求 X 的分布函数 $F(x)$ 并作图.

【解】 因为 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$，所以

当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=P\{X=0\}=\dfrac{1}{4}$；

当 $1\leqslant x<2$ 时，$F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=1$，

于是 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$ 图形如图 3-2-1.

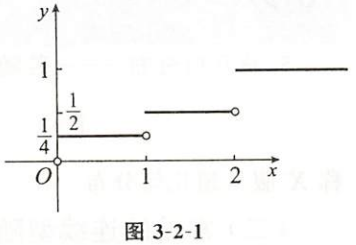


图 3-2-1

（二）连续型随机变量

设 X 为随机变量，其分布函数为 $F(x)$，若存在非负可积函数 $f(x)$，使得对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

称 X 为连续型随机变量，$f(x)$ 称为其概率密度函数或密度函数.

三、常见的随机变量及其分布

（一）常见的离散型随机变量及其分布

1. 0-1 分布 —— 若随机变量 X 的分布律为

X	0	1
P	$1-p$	p

其中 $0<p<1$，称随机变量服从 0-1 分布（0-1 分布即为 1 重伯努利试验对应的概型）.

2. 二项分布 —— 若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(\text{其中 } k=0,1,2,\cdots,n,\text{且 } 0<p<1),$$

则称随机变量 X 服从二项分布，记为 $X \sim B(n,p)$.

【注解】

n 重伯努利试验中，若试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，用 X 表示 n 次试验中成功的次数，则 $X \sim B(n,p)$.

微信公众号（顶尖考研）
（ID：djky66）

3. 泊松分布 —— 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}(\text{其中 } k=0,1,2,\cdots,\text{且 } \lambda>0),$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X \sim P(\lambda)$.

4. 几何分布 —— 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}(\text{其中 } k=1,2,\cdots,\text{且 } 0<p<1),$$

则称随机变量 X 服从几何分布，记为 $X \sim G(p)$.

【注解】

若每次试验中成功的概率为 $p(0<p<1)$，用 X 表示首次成功的试验次数，则 $X \sim G(p)$.

5. 超几何分布 —— 若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=m\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N, k \leqslant M),$$

称 X 服从超几何分布.

（二）常见的连续型随机变量及其分布

1. 均匀分布 —— 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称随机变量 X 在区间 (a,b) 内服从均匀分布，记为 $X\sim U(a,b)$，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

2. 指数分布——设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，记为 $X\sim E(\lambda)$，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

【注解】

设 $X\sim E(\lambda)$，则 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 于是当 $a>0,b>0$ 时，

$$P\{X>a+b\mid X>a\}=\frac{P\{X>a+b,X>a\}}{P\{X>a\}}=\frac{P\{X>a+b\}}{P\{X>a\}},$$

而　$P\{X>a+b\}=1-P\{X\leqslant a+b\}=1-F(a+b)=1-[1-e^{-\lambda(a+b)}]=e^{-\lambda(a+b)}$，

$P\{X>a\}=1-P\{X\leqslant a\}=1-F(a)=1-(1-e^{-\lambda a})=e^{-\lambda a}$，

故　$P\{X>a+b\mid X>a\}=e^{-\lambda b}=P\{X>b\}$.

该性质称为指数分布的无记忆性性质.

3. 正态分布——设随机变量 X 的密度函数为

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$（其中 μ 为常数，σ 为正常数且 $-\infty<x<+\infty$），则称随机变量 X 服从正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，如图 3-2-2.

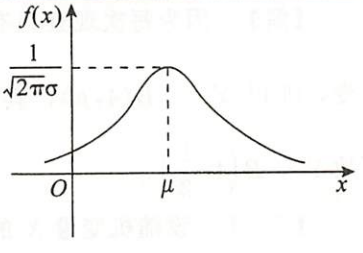


图 3-2-2

特别地，当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，称 X 服从标准正态分布，记为 $X\sim N(0,1)$，其密度函数为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ (-\infty<x<+\infty),$$

分布函数为　$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

四、随机变量函数的分布

设 X 为随机变量，$y=\varphi(x)$ 为一个实函数，称 $Y=\varphi(X)$ 为随机变量 X 的函数，Y 仍然是随机变量. 随机变量函数 Y 的分布有如下几种情况：

(一)X 为离散型随机变量,Y 也为离散型随机变量

求出其可能的取值及对应的概率,即若 $P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots,n)$,则 Y 的分布律为

$$P\{Y=\varphi(x_i)\}=p_i(i=1,2,\cdots,n),$$

其中 X 不同值对应 Y 具有相同值时将 X 不同值的概率相加.

【例 1】 设 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$,且 $Y=X^2+1$,求 Y 的分布律.

【解】 随机变量 Y 的可能取值为 1,2,5,因为

$$P\{Y=1\}=P\{X=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=2\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=5\}=P\{X=2\}=\frac{1}{4},$$

所以 Y 的分布律为 $Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

(二)X 为连续型随机变量,Y 为离散型随机变量

【例 2】 设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对 X 连续观察 4 次,用 Y 表示 4 次中观察到 X 大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数,求 Y 的分布律.

【解】 因为每次观察只有两个可能结果 $\left\{X\leqslant\frac{\pi}{3}\right\}$ 及 $\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}$,且两种结果的概率不变,所以 $Y\sim B(4,p)$,其中 $p=P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}$,故 $Y\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

【例 3】 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi(1+x^2)}, & -1<x<0,\\ \frac{9x^2}{4}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

令 $Y=\begin{cases}-1, & X<0,\\ 1, & X\geqslant 0,\end{cases}$ 求 Y 的分布.

【解】 Y 的可能取值为 $-1,1$,且

$$P\{Y=-1\}=P\{X<0\}=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X\geqslant 0\}=\int_{0}^{1}\frac{9x^2}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4},$$

于是 $Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

(三)X 为连续型随机变量,Y 也为连续型随机变量

设 X 的密度函数为 $f(x)$,$\varphi(x)$ 为连续函数,则 $Y=\varphi(X)$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\varphi(X)\leqslant y\}=\int_{\varphi(x)\leqslant y}f(x)\mathrm{d}x.$$

【注解】

求 Y 的密度函数通常有如下方法:

(1) 定义法 —— 先求出 $F_Y(y)$,则 $f_Y(y)=\begin{cases}F'_Y(y), & y\text{ 为 }F_Y(y)\text{ 的可导点},\\ 0, & y\text{ 为 }F_Y(y)\text{ 的不可导点};\end{cases}$

(2) 公式法 —— 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$,又 $\varphi(x)$ 单调且 $\varphi'(x)\neq 0$,$x=h(y)$ 为 $y=\varphi(x)$ 的反函数,则随机变量 $Y=\varphi(X)$ 的密度函数公式为

$$f_Y(y)=\begin{cases}|h'(y)|f_X[h(y)], & \alpha<y<\beta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 (α,β) 为 $\varphi(X)$ 的值域.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djkyoo)

【例 4】 设 $X\sim E(1)$,且 $Y=2X+1$,求 Y 的密度函数.

【解】 **方法一:定义法**

因为 $X\sim E(1)$,所以 $f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{2X+1\leqslant y\}=P\left\{X\leqslant\frac{y-1}{2}\right\},$$

当 $y<1$ 时,$F_Y(y)=0$;

当 $y\geqslant 1$ 时,$F_Y(y)=P\left\{X\leqslant\frac{y-1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{y-1}{2}}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{y-1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{\frac{1-y}{2}}$,

于是 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 1-\mathrm{e}^{\frac{1-y}{2}}, & y\geqslant 1,\end{cases}$ 故 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 1,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1-y}{2}}}{2}, & y>1.\end{cases}$

方法二:公式法

$Y=2X+1$ 在 $[0,+\infty)$ 上的值域为 $(1,+\infty)$,$y=2x+1$ 单调且 $y'=2\neq 0$,其反函数为 $x=\frac{y-1}{2}$,于是 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 1,\\ |h'(y)|f_X[h(y)], & y>1\end{cases}=\begin{cases}0, & y\leqslant 1,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1-y}{2}}}{2}, & y>1.\end{cases}$$

【例 5】 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求：(1)$Y=e^X$；(2)$Y=X^2+1$ 的密度函数.

【解】 随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<+\infty)$.

(1) **方法一：公式法**

因为 $y=e^x$ 单调增加且可微，当 $-\infty<x<+\infty$ 时，$0<y<+\infty$，其反函数为 $x=h(y)=\ln y(y>0)$ 且 $h'(y)=\frac{1}{y}$，所以 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|\,h'(y)\,|=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0. \end{cases}$$

方法二：定义法

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{e^X\leqslant y\},$$

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{X\leqslant \ln y\}=\int_{-\infty}^{\ln y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$，

于是 $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0. \end{cases}$

(2)$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2+1\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y-1\}$，

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\geqslant 1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y-1}\leqslant X\leqslant\sqrt{y-1}\}=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^{\sqrt{y-1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

于是 Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{2}}, & y>1, \\ 0, & y\leqslant 1. \end{cases}$

微信搜索【顶尖考研】(ID:djky66)

重点题型分析

题型一 随机变量分布的概念与基本性质

【例 1】 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为偶函数 $f(x)$，其分布函数为 $F(x)$，则(　　).

(A)$F(x)$ 为奇函数　　(B)$F(x)$ 为偶函数

(C)$F(a)=1-F(-a)$　　(D)$F(a)=1-\int_0^a f(x)dx$

【解】 由 $F(x)$ 的非负性，(A) 不对；由 $F(x)$ 的单调不减性，(B) 不对；

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以

$$F(a)=\int_{-\infty}^a f(t)dt=\int_{-\infty}^0 f(t)dt+\int_0^a f(t)dt=\frac{1}{2}+\int_0^a f(t)dt=1-\int_0^a f(x)dx,$$

只有当$\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}$时，(D) 才成立，所以(D) 不对.

由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 得

$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a} f(t)\mathrm{d}t \overset{t=-u}{=} \int_{a}^{+\infty} f(-u)\mathrm{d}u=\int_{a}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1-\int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t=1-F(a),$$

于是选(C).

【例 2】 设连续型随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 为偶函数，$F(x)$ 为其分布函数. 证明：

(1)$P\{|X|<a\}=2F(a)-1$；　(2)$P\{|X|>a\}=2F(-a)$.

【证明】 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，

(1)$P\{|X|<a\}=P\{-a<X<a\}=P\{-a<X\leqslant a\}=F(a)-F(-a)$，

而　$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a} f(t)\mathrm{d}t \overset{t=-u}{=} \int_{+\infty}^{a} f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_{a}^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u=1-\int_{-\infty}^{a} f(u)\mathrm{d}u=1-F(a)$，

所以　$P\{|X|<a\}=F(a)-[1-F(a)]=2F(a)-1$.

(2)$P\{|X|>a\}=1-P\{|X|\leqslant a\}=1-P\{|X|<a\}=1-[2F(a)-1]$

$=2-2F(a)=2[1-F(a)]=2F(-a)$.

【例 3】 设 X,Y 为连续型随机变量，其分布函数分别为 $F_1(x),F_2(x)$，其密度函数分别为 $f_1(x),f_2(x)$，下列结论正确的是(　　).

(A)$f_1(x)f_2(x)$ 为某随机变量的密度函数

(B)$f_1(x)+f_2(x)$ 为某随机变量的密度函数

(C)$F_1(x)+F_2(x)$ 为某随机变量的分布函数

(D)$F_1(x)F_2(x)$ 为某随机变量的分布函数

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【解】 因为 $f_1(x),f_2(x)$ 为密度函数，所以$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x=1$，于是

$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=2$，故 $f_1(x)+f_2(x)$ 不满足密度函数的条件，不选(B)；

因为 $F_1(x),F_2(x)$ 为分布函数，所以 $F_1(+\infty)=F_2(+\infty)=1$，于是 $F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2$，故 $F_1(x)+F_2(x)$ 不满足分布函数的条件，不选(C)；

显然 $F_1(x)F_2(x)$ 满足分布函数的四个特征，选(D)；

可以举出反例说明(A) 不对，例如：$X_1\sim E(1),X_2\sim E(2)$，则

$$f_1(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases} f_2(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases} f_1(x)f_2(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

因为$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\neq 1$，所以 $f_1(x)f_2(x)$ 不是密度函数.

【例 4】 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in[0,1],\\ \frac{2}{9}, & x\in[3,6],\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 若 $P\{X\geqslant k\}=\frac{2}{3}$，则实数 k 的范围为_____.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【解】 由 $P\{X\geqslant k\}=\frac{2}{3}$ 得 $P\{X<k\}=\frac{1}{3}$，所以 $1\leqslant k\leqslant 3$.

题型二　正态分布标准化问题

【例 1】　设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-\mu|<3\sigma\}=$_____.

【解】　由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，得 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，于是

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|<3\right\}$$

$$=P\left\{-3<\frac{X-\mu}{\sigma}<3\right\}=\Phi(3)-\Phi(-3)=2\Phi(3)-1.$$

【例 2】　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其分布函数为 $F(x)$，则下列结论正确的是(　　).

(A) $F(a)+F(-a)=1$　　(B) $F(a)+F(-a)>1$

(C) $F(a)+F(-a)<1$　　(D) $F(\mu+a)+F(\mu-a)=1$

【解】　因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $F(a)=\Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$，$F(-a)=\Phi\left(\dfrac{-a-\mu}{\sigma}\right)$，于是

$$F(a)+F(-a)=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{-a-\mu}{\sigma}\right),\quad \frac{a-\mu}{\sigma}+\frac{-a-\mu}{\sigma}=-\frac{2\mu}{\sigma}.$$

当 $\mu=0$ 时，$F(a)+F(-a)=1$；

当 $\mu<0$ 时，因为 $-\dfrac{2\mu}{\sigma}>0$，所以 $F(a)+F(-a)>1$；

当 $\mu>0$ 时，因为 $-\dfrac{2\mu}{\sigma}<0$，所以 $F(a)+F(-a)<1$，于是(A)，(B)，(C) 都不正确；

因为

$$F(\mu+a)+F(\mu-a)=\Phi\left(\frac{\mu+a-\mu}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\mu-a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)+1-\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)=1,$$

所以选(D).

【例 3】　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且方程 $x^2+4x+X=0$ 无实根的概率为 $\dfrac{1}{2}$，求 μ.

【解】　$x^2+4x+X=0$ 无实根 $\Leftrightarrow 16-4X<0\Rightarrow X>4$.

根据题意，$P\{X>4\}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\mu=4$.

【例 4】　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$(　　).

(A) 与 μ 及 σ^2 都有关　　(B) 与 μ 有关，与 σ^2 无关

(C) 与 μ 无关，与 σ^2 有关　　(D) 与 μ 及 σ^2 都无关

【解】　因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，于是

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=P\left\{-1<\frac{X-\mu}{\sigma}<1\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1,$$

故 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ 与 μ 及 σ^2 都无关，选(D).

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 5】　设随机变量 $X\sim N(3,\sigma^2)$，且 $P\{3<X<6\}=0.2$，则 $P\{X<0\}=$ _____.

【解】　因为 $X\sim N(3,\sigma^2)$，所以 $\dfrac{X-3}{\sigma}\sim N(0,1)$，由

$$P\{3<X<6\}=P\left\{0<\frac{X-3}{\sigma}<\frac{3}{\sigma}\right\}=P\left\{0<\frac{X-3}{\sigma}\leqslant\frac{3}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right)-\Phi(0)=0.2,$$

得 $\Phi\left(\dfrac{3}{\sigma}\right)=0.7$. 于是

$$P\{X<0\}=P\left\{\frac{X-3}{\sigma}<-\frac{3}{\sigma}\right\}=P\left\{\frac{X-3}{\sigma}\leqslant-\frac{3}{\sigma}\right\}=\Phi\left(-\frac{3}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right)=0.3.$$

题型三　求随机变量分布中的待定常数

【例 1】　设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{kx^2}{(1+x)^2}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

(1) 求常数 k 的值；　(2) 求 $P\{-2\leqslant X\leqslant 1\}$.

【解】　(1) 因为 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，所以 $F(+\infty)=1$，于是 $k=1$.

(2) $P\{-2\leqslant X\leqslant 1\}=P\{-2<X\leqslant 1\}=F(1)-F(-2)=F(1)=\dfrac{1}{4}$.

【例 2】　设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=A\mathrm{e}^{-|x|}$.

(1) 求常数 A 的值；　(2) 求分布函数 $F(x)$；　(3) 求 $P\{-2<X<2\}$.

【解】　(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2A=1$，得 $A=\dfrac{1}{2}$.

(2) $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.

当 $x<0$ 时，$F(x)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\int_0^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$，

于是 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(3) $P\{-2<X<2\}=P\{-2<X\leqslant 2\}=F(2)-F(-2)$

$$=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}=1-\mathrm{e}^{-2}.$$

【例 3】　设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=a+b\arctan x$，求：

(1) 常数 a,b 的值；　(2) X 的密度函数.

【解】　(1) 因为 $F(x)$ 为分布函数，所以 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，即 $\begin{cases}a-\dfrac{\pi}{2}b=0,\\ a+\dfrac{\pi}{2}b=1,\end{cases}$

微信公众号【启航考研】(ID: djky66)

解得 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{\pi}$.

(2) 密度函数为

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}(-\infty<x<+\infty).$$

题型四　一维随机变量的分布

【例 1】 汽车经过 3 个有信号灯的路口，且每个信号灯为红或绿相互独立，且绿灯时间是红灯时间的两倍，设 X 表示汽车首次遇到红灯时已通过的路口数，求 X 的分布律.

【解】 X 的可能取值为 0,1,2,3，则

$$P\{X=0\}=\frac{1}{3},\qquad P\{X=1\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9},$$

$$P\{X=2\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27},\qquad P\{X=3\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27},$$

则 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 2】 设随机变量 X 分布为：$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，在事件 $\{-1<X<1\}$ 发生下，随机变量 X 落在 $(-1,1)$ 内任一子区间上的概率与该子区间长度成正比，其余部分概率为零，求 X 的分布函数 $F(x)$.

【解】 $P\{-1<X<1\}=1-P\{X=-1\}-P\{X=1\}=\frac{5}{8}$.

当 $x<-1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $-1\leqslant x<1$ 时，$F(x)=P\{X=-1\}+P\{-1<X\leqslant x\}=\frac{1}{8}+\frac{x+1}{2}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5x}{16}+\frac{7}{16}$；

当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=1$.

于是 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{5x}{16}+\frac{7}{16}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

题型五　随机变量函数的分布

【例 1】 设 $X\sim U(0,2)$，且 $Y=X^2$，求 $f_Y(y)$.

【解】 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$，

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $0\leqslant y<4$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{y}}{2};$$

当 $y\geqslant 4$ 时，$F_Y(y)=1$，于是 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{\sqrt{y}}{2}, & 0\leqslant y<4,\\ 1, & y\geqslant 4,\end{cases}$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

【例 2】　设 $X\sim N(0,1)$，且 $Y=X^2$，求 $f_Y(y)$.

【解】　因为 $X\sim N(0,1)$，所以 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<+\infty)$，于是

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\},$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y\geqslant 0$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x,$$

即 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x, & y\geqslant 0,\end{cases}$ 故 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0.\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: diky66)

【例 3】　设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$，又 $Y=X^2$，求 $f_Y(y)$.

【解】　$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$，

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y\geqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\displaystyle\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}$，

即 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y\geqslant 0,\end{cases}$ 故 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y>0.\end{cases}$

【例 4】　设 $X\sim E(2)$，又 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$，求 Y 服从的分布.

【解】　**方法一：定义法**

因为 $X\sim E(2)$，所以 $f_X(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-2x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\leqslant y\}$，

当 $y<0$ 时，$X<0$，则 $F_Y(y)=P\{X<0\}=0$；

当 $y\geqslant 1$ 时，$X\geqslant 0$，则 $F_Y(y)=P\{X\geqslant 0\}=1$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{1-e^{-2X}\leqslant y\}=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{2}\ln(1-y)\right\}$$

$$=F_X\left(-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right)=y,$$

即 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$ 密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ 1, & 0<y<1,\\ 0, & y\geqslant 1,\end{cases}$ 故 $Y\sim U(0,1)$.

方法二:公式法

$y=1-e^{-2x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值域为 $(0,1)$,函数 $y=1-e^{-2x}$ 单调且 $y'=2e^{-2x}\neq 0$,其反函数为 $x=-\frac{1}{2}\ln(1-y)$,则 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}|h'(y)|f_X[h(y)], & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

即 $Y\sim U(0,1)$.

【例 5】 设随机变量 $X\sim E(\lambda)$,求随机变量 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数.

【解】 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min(X,2)\leqslant y\}=1-P\{\min(X,2)>y\}$

$$=1-P\{X>y\}P\{2>y\},$$

当 $y\geqslant 2$ 时,$P\{2>y\}=0$,$F_Y(y)=1$,

当 $y<2$ 时,$P\{2>y\}=1$,$F_Y(y)=1-P\{X>y\}=F_X(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0,\end{cases}$

所以 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-e^{-\lambda y}, & 0\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

测试题

一、选择题

1. 下列四个函数可作为随机变量的分布函数 $F(x)$ 的为(　　).

(A) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2x, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \operatorname{arccot}x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ 1, & x\geqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$

2. 设 X 为连续型随机变量,则其分布函数 $F(x)$ 为(　　).

(A) 阶梯函数　　(B) 有间断点的非阶梯函数

(C) 连续但不一定可导的函数　　(D) 可导函数

3. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则下列结论正确的是(　　).

(A)$F(1-x)$ 为分布函数　　(B)$F(x^2)$ 为分布函数

(C)$F(2x+3)$ 为分布函数　　(D)$1-F(x)$ 为分布函数

4. 设随机变量 X_1, X_2 的分布函数为 $F_1(x), F_2(x)$，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 为某个随机变量的分布函数，在下列各组数中应取(　　).

(A)$a=\frac{3}{5}, b=-\frac{2}{5}$　　(B)$a=\frac{2}{3}, b=\frac{2}{3}$

(C)$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$　　(D)$a=\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{2}$

5. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=b\lambda^k(k=1,2,\cdots)(b>0)$，则 λ 为(　　).

(A)$\lambda=1$　　(B)$\lambda=\frac{1}{b}$　　(C)$\lambda=\frac{1}{b+1}$　　(D)$\lambda=b+1$

二、填空题

1. 设 $X\sim P(\lambda)$，且 $P\{X=2\}=P\{X=3\}$，则 $P\{X=4\}=$ _____.

2. 设随机变量 $X\sim B(2,p)$，$Y\sim B(3,p)$，且 $P\{X\geqslant 1\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{Y\geqslant 1\}=$ _____.

3. 设某时间段内一路口车流量服从泊松分布，用 X 表示通过的汽车数，设 $X\sim P(2)$，则该时间段内通过的汽车数不少于一辆的概率为_____.

4. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，且 $P\{X\leqslant a\}=P\{X>a\}$，则 $a=$ _____.

5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{4}, & -1\leqslant x<2,\\ 1-e^{-2x}, & x\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $P\{X=2\}=$ _____.

6. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=ae^{-x^2+x+1}$，则常数 $a=$ _____.

7. 设 $X\sim N(1,\sigma^2)$，$F(x)$ 为 X 的分布函数，则 $F(1+a)+F(1-a)=$ _____.

三、解答题

1. 甲、乙两箱装有同种产品，其中甲箱中 3 件正品 3 件次品，乙箱中 3 件正品，从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱，求：

(1) 乙箱中次品的分布律；　(2) 从乙箱中任取一件产品，求取出产品是次品的概率.

2. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0,\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

(1) 求分布函数 $F(x)$；　(2) 求 $P\{-2\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\}$.

3. 设随机变量 X 在 $[-1,1]$ 上取值，且 $P\{X=0\}=\frac{1}{4}$，当 $X\neq 0$，X 在区间上的取值概率与该区间长度成正比，求 X 的分布函数.

4. 设一设备在时长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布.

(1) 求相邻两次故障之间的时间间隔 T 的分布；

(2) 求在设备无故障工作 8 小时下，再无故障运行 8 小时的概率.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

5. 设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 又 $Y=X^2$，求 $f_Y(y)$.

6. 设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的密度函数.

7. 设随机变量 $X\sim U(0,2\pi)$，又 $Y=\cos X$，求 Y 的密度函数 $f_Y(y)$.

测试题参考答案

一、选择题

1. 分布函数 $F(x)$ 满足：(1)$0\leqslant F(x)\leqslant 1$. (2)$F(x)$ 单调不减. (3)$F(x)$ 右连续. (4)$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$. (A) 选项不满足(1)、(2)；(B) 选项 $F(x)$ 不单调不减；(D) 选项 $F(x)$ 在 $0\leqslant x<1$ 单调减少，(C) 选项符合分布函数的所有条件，应选(C).

2. 根据连续型随机变量的定义，一定存在非负可积的函数 $f(x)$，使得 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 连续，但 $f(x)$ 可能有间断点，所以 $F(x)$ 不一定可导，应选(C).

3. 具备如下四个特征：(1)$0\leqslant F(x)\leqslant 1$；(2)$F(x)$ 单调不减；(3)$F(x)$ 右连续；(4)$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$ 的函数为分布函数. 显然 $F(1-x)$ 无右连续性，不选(A)；当 $x=-\infty$ 时，$F(x^2)=1$，不选(B)；显然 $F(2x+3)$ 具备分布函数的四个特征，选(C)；当 $x=-\infty$ 时，$1-F(x)=1$，不选(D).

4. 若 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 为分布函数，则 $aF_1(+\infty)-bF_2(+\infty)=a-b=1$，显然只有(A)满足条件，应选(A).

5. 由分布律的归一性得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b\lambda^k=\dfrac{b\lambda}{1-\lambda}=1$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{b+1}$，应选(C).

二、填空题

1. $P\{X=2\}=\dfrac{\lambda^2}{2!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，$P\{X=3\}=\dfrac{\lambda^3}{3!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，因为 $P\{X=2\}=P\{X=3\}$，所以 $\lambda=3$，于是 $P\{X=4\}=\dfrac{\lambda^4}{4!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\dfrac{27}{8\mathrm{e}^3}$.

2. 由 $P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X=0\}=1-\mathrm{C}_2^0p^0(1-p)^2=\dfrac{5}{9}$ 得 $p=\dfrac{1}{3}$，

于是 $P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-\mathrm{C}_3^0p^0(1-p)^3=\dfrac{19}{27}$.

3. 因为 $X\sim P(2)$，所以 $P\{X=k\}=\dfrac{2^k}{k!}\mathrm{e}^{-2}(k=0,1,2,\cdots)$，

于是 $P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X<1\}=1-P\{X=0\}=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

4. 显然 $0<a<1$，又 $P\{X\leqslant a\}=P\{X>a\}$ 得 $\int_0^a 2x\,\mathrm{d}x=\int_a^1 2x\,\mathrm{d}x$，于是 $a^2=1-a^2$，解得 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. $P\{X=2\}=P\{X\leqslant 2\}-P\{X<2\}=F(2)-F(2-0)=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^4}$.

6. $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2+x+1}\mathrm{d}x=a\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=a\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=2a\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

$\overset{x^2=t}{=}2a\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=a\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=a\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{\pi}$，故 $a=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$.

7. $F(1+a)+F(1-a)=\Phi\left(\frac{1+a-1}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{1-a-1}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)+1-\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)=1.$

三、解答题

1. (1) 设 X 表示乙箱中次品个数，则 X 的可能取值为 0,1,2,3，$P\{X=0\}=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$，$P\{X=1\}=\frac{C_3^1\cdot C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$，$P\{X=2\}=\frac{C_3^1\cdot C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$，$P\{X=3\}=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$，则 $X\sim\begin{pmatrix}0&1&2&3\\\frac{1}{20}&\frac{9}{20}&\frac{9}{20}&\frac{1}{20}\end{pmatrix}$.

(2) 令 $A_k=\{$乙箱中有 k 件次品$\}(k=0,1,2,3)$，$B=\{$乙箱中取出一件为次品$\}$，$P(B\mid A_0)=0$，$P(B\mid A_1)=\frac{1}{6}$，$P(B\mid A_2)=\frac{2}{6}$，$P(B\mid A_3)=\frac{3}{6}$，则 $P(B)=P(A_0)P(B\mid A_0)+P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)=\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$.

2. (1) 当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$；当 $-1\leqslant x<0$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-1}^{x}(1+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+x)^2$；当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}x^2$；当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=1$，于是 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{2}(1+x)^2, & -1\leqslant x<0,\\ \frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(2) $P\left\{-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\}=P\left\{-2<x\leqslant\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(-2)=\frac{7}{8}$.

3. $P\{X=0\}=\frac{1}{4}$，$P\{-1\leqslant X<0\}+P\{0<X\leqslant 1\}=\frac{3}{4}$. 当 $x<-1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；当 $-1\leqslant x<0$ 时，$F(x)=P\{-1\leqslant X<x\}=\frac{3}{4}\cdot\frac{x-(-1)}{2}=\frac{3(x+1)}{8}$；当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=P\{-1\leqslant X<0\}+P\{X=0\}+P\{0<X<x\}=\frac{3}{4}\cdot\frac{0-(-1)}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{x-0}{2}=\frac{5}{8}+\frac{3x}{8}=\frac{5+3x}{8}$；当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=1$，于是有 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{3(x+1)}{8}, & -1\leqslant x<0,\\ \frac{5+3x}{8}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

4. (1) 随机变量 T 的分布函数为 $F_T(t)$，当 $t<0$ 时，$F_T(t)=0$；当 $t\geqslant 0$ 时，$F_T(t)=P\{T\leqslant t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{N(t)=0\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$，于是 $F_T(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t\geqslant 0\end{cases}$，即 $T\sim E(\lambda)$.

(2) $P\{T\geqslant 16\mid T\geqslant 8\}=\frac{P\{T\geqslant 16,T\geqslant 8\}}{P\{T\geqslant 8\}}=\frac{P\{T\geqslant 16\}}{P\{T\geqslant 8\}}=\frac{1-P\{T<16\}}{1-P\{T<8\}}=\frac{1-P\{T\leqslant 16\}}{1-P\{T\leqslant 8\}}=\frac{1-F_T(16)}{1-F_T(8)}=\mathrm{e}^{-8\lambda}$.

5. $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$，当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $0\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3\sqrt{y}}{4}$；当 $1\leqslant y<4$ 时，$F_Y(y)=P\{-1\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{y}}{4}$；当 $y\geqslant 4$ 时，$F_Y(y)=1$，于是有 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{3\sqrt{y}}{4}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{y}}{4}, & 1\leqslant y<4,\\ 1, & y\geqslant 4,\end{cases}$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

6. $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}\leqslant y\}=P\{X\geqslant(1-y)^3\}=1-P\{X<(1-y)^3\}=1-P\{X\leqslant(1-y)^3\}=1-F_X[(1-y)^3]$，于是 $f_Y(y)=3(1-y)^2f_X[(1-y)^3]=\frac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}$.

7. 因为 $X\sim U(0,2\pi)$，所以 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0<x<2\pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $y=\cos x$ 的值域为 $(-1,1)$.

因为 $y=\cos x$ 在 $(0,2\pi)$ 内是非单调函数，但在 $(0,\pi)$ 及 $(\pi,2\pi)$ 内单调，当 $x\in(0,\pi)$ 时，反函数为 $x=h_1(y)=\arccos y$，且 $h'_1(y)=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$；当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，反函数为 $x=h_2(y)=2\pi-\arccos y$ 且 $h'_2(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$，于是当 $y\in(-1,1)$ 时，Y 的密度函数为 $f_Y(y)=|h'_1(y)|f_X[h_1(y)]+|h'_2(y)|f_X[h_2(y)]=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$，故 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)



第三章　多维随机变量及其分布

大纲点击

1. 理解多维随机变量的概念，理解多维随机变量的分布的概念和性质，理解二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布，理解二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度，会求与二维随机变量相关事件的概率.

2. 理解随机变量的独立性及不相关性的概念，掌握随机变量相互独立的条件.

3. 掌握二维均匀分布，了解二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的概率密度，理解其中参数的概率意义.

4. 会求两个随机变量简单函数的分布，会求多个相互独立随机变量简单函数的分布.

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

一、二维随机变量及其分布的概念与性质

(一) 定义

1. 二维随机变量 —— 设 X,Y 为两个随机变量，则称 (X,Y) 为二维随机变量.

2. 二维随机变量联合分布函数 —— 设 (X,Y) 为二维随机变量，称

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$$

为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数.

3. 边缘分布函数 —— 称

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,-\infty<y<+\infty\}=F(x,+\infty)$$

为随机变量 X 的边缘分布函数；称

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{-\infty<x<+\infty,Y\leqslant y\}=F(+\infty,y)$$

为随机变量 Y 的边缘分布函数.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(二) 联合分布函数的性质

1. $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$.

2. $F(x,y)$ 关于 x 和 y 都是单调不减的函数.

3. $F(x,y)$ 关于 x 和 y 都右连续.

4. $F(-\infty,-\infty)=F(-\infty,+\infty)=F(+\infty,-\infty)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$.

反之，具备以上四个性质的二元函数也为二维随机变量的联合分布函数.

二、两类二维随机变量及分布

(一) 二维离散型随机变量

1. 二维离散型随机变量的概念 —— 若二维随机变量 (X,Y) 的可能取值为有限个或无限

可列个，称(X,Y)为二维离散型随机变量.

2. 二维离散型随机变量的联合分布律 —— 二维离散型随机变量(X,Y)的可能取值及概率称为联合分布律，可表示为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n),$$

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}

3. 随机变量X,Y的边缘分布律 —— 随机变量X的分布律称为X的边缘分布律，且

$$P\{X=x_i\}=p_{i1}+p_{i2}+\cdots+p_{in}=p_{i\cdot}\ (i=1,2,\cdots,m);$$

随机变量Y的分布律称为Y的边缘分布律，且

$$P\{Y=y_j\}=p_{1j}+p_{2j}+\cdots+p_{mj}=p_{\cdot j}(j=1,2,\cdots,n).$$

二维离散型随机变量的联合分布律与边缘分布律关系为：

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	$p_{m\cdot}$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot n}$	1

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【注解】

(1) $p_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}=1$.

(2) $\sum\limits_{i=1}^{m}p_{i\cdot}=1,\sum\limits_{j=1}^{n}p_{\cdot j}=1$.

【例】 设随机事件A,B满足$P(A)=\dfrac{1}{4}$，又$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)=\dfrac{1}{8}$，令随机变量

$$X=\begin{cases}1,A\text{ 发生},\\0,\overline{A}\text{ 发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1,B\text{ 发生},\\0,\overline{B}\text{ 发生},\end{cases}$$

求(X,Y)的联合分布.

【解】 因为 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$，$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$，

所以由$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$得$P(A)=P(B)=\dfrac{1}{4}$且$P(AB)=\dfrac{1}{8}$.

(X,Y) 的可能取值为$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$，

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{5}{8};$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{8};$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{8};$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{8},$$

故(X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	5/8	1/8
1	1/8	1/8

（二）二维连续型随机变量

1. 二维连续型随机变量的概念 —— 设(X,Y) 为二维随机变量，其联合分布函数为 $F(x,y)$，若存在非负可积函数 $f(x,y)$，使得对任意实数 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}v,$$

称(X,Y) 为二维连续型随机变量，称 $f(x,y)$ 为(X,Y) 的联合概率密度函数或联合密度.

2. 边缘分布 —— 分别称 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 及 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 为随机变量 X 和 Y 的边缘密度函数.

3. 边缘分布函数 —— 分别称 $F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)\mathrm{d}x$ 及 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$ $=\int_{-\infty}^{y}f_Y(y)\mathrm{d}y$ 为随机变量 X 和 Y 的边缘分布函数.

三、常见的二维连续型随机变量

1. 均匀分布 —— 设二维连续型随机变量(X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

其中 A 为区域 D 的面积，称(X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布.

2. 正态分布 —— 设二维连续型随机变量(X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},$$

则称(X,Y) 服从二维正态分布，记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，其中 $\sigma_1>0,\sigma_2>0$.

【例】 设随机变量(X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，其中 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,$

微信公众号【帅考研】
(ID: dkv66)

$0<y<x\}$，如图 3-3-1，求 X,Y 的边缘密度函数.

【解】 因为 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，所以联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

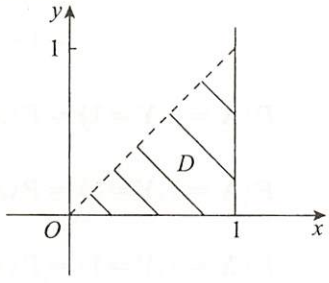


图 3-3-1

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$，

当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_0^x 2\mathrm{d}y=2x$，则 X 的边缘密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$，

当 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 1$ 时，$f_Y(y)=0$；

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_y^1 2\mathrm{d}x=2(1-y)$，则 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

【注解】

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}, & (x,y)\text{为}F(x,y)\text{的二阶可偏导点},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=1$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

四、二维随机变量的条件分布及独立性

(一) 二维随机变量的条件分布

1. 离散型随机变量的条件概率分布 —— 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n),$$

在 $P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}>0$ 下 $\{Y=y_j\}$ 的条件分布律为

$$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}(j=1,2,\cdots,n).$$

在 $P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}>0$ 下 $\{X=x_i\}$ 的条件分布律为

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}(i=1,2,\cdots,m).$$

2. 二维连续型随机变量的条件密度函数 —— 设 X 的边缘密度函数 $f_X(x)>0$，则在 $X=x$ 的条件下，Y 的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

设 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)>0$，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

【例 1】　设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求边缘密度函数 $f_X(x)$ 及 $f_Y(y)$；　(2) 求 Y 的条件密度函数 $f_{Y|X}(y\mid x)$.

【解】　(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$,

当 $x\leqslant 0$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}6e^{-(2x+3y)}\mathrm{d}y=2e^{-2x}$，于是 X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0;\end{cases}$$

同理 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(2) 当 $x>0$ 时，$f_X(x)>0$，则

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

【例 2】　设随机变量(X,Y)在区域 D 上服从均匀分布，其中 $D=\{(x,y)\mid y>|x|,0<y<1\}$，如图 3-3-2，求：

(1) X,Y 的边缘密度函数；

(2) 条件密度函数 $f_{X|Y}(x\mid y)$；

(3) $P\{X>0\mid Y>\frac{1}{2}\}$.

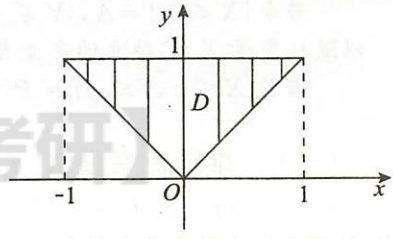


图 3-3-2

【解】　因为(X,Y)在 D 上服从均匀分布，所以(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & y>|x|,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$,

当 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_X(x)=0$；当 $-1<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{|x|}^{1}1\mathrm{d}y=1-|x|$，故

$$f_X(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$,

当 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 1$ 时，$f_Y(y)=0$；当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-y}^{y}1\mathrm{d}x=2y$，故

$$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 当 $0<y<1$ 时，$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & y>|x|,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(3) $P\left\{X>0 \mid Y>\frac{1}{2}\right\}=\dfrac{P\left\{X>0, Y>\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{Y>\frac{1}{2}\right\}}$,

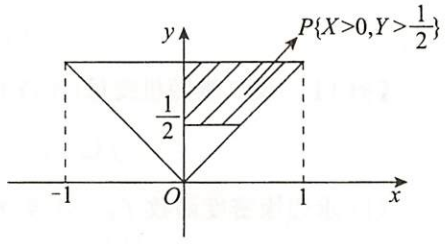


图 3-3-3

而如图 3-3-3, $P\left\{X>0, Y>\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$, $P\left\{Y>\frac{1}{2}\right\}=1-2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$,

于是 $P\left\{X>0 \mid Y>\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$.

(二) 二维随机变量独立的定义

设 (X,Y) 为二维随机变量,若对任意实数 x,y 有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),\text{即 } P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\},$$

称随机变量 X,Y 相互独立.

【注解】

若令 $\{X\leqslant x\}=A$, $\{Y\leqslant y\}=B$,事件 A,B 独立的定义为 $P(AB)=P(A)P(B)$,所以随机变量 X,Y 独立的定义自然为:

若 $P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\}$ 或 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$,称 X,Y 独立.

(三) 二维随机变量 X,Y 独立的等价条件

1. 二维离散型随机变量 X,Y 独立的等价条件 —— 设 (X,Y) 为二维离散型随机变量,则 X,Y 相互独立的充要条件是

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\times p_{\cdot j}(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$$

2. 连续型随机变量 X,Y 独立的等价条件 —— 设 (X,Y) 为二维连续型随机变量,则 X,Y 相互独立的充要条件是

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

(可能除去一些点外,只要有 $\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{y}f_Y(y)\mathrm{d}y$.)

【注解】

(1) 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$,则 X,Y 独立的充分必要条件是 $\rho=0$.

(2) 设 (X,Y) 为二维随机变量,若 (X,Y) 不是二维离散型和二维连续型随机变量,判断 X,Y 是否独立时,一般用定义判断.

【例 1】 设随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	1
1	1/8	a
2	b	1/4
3	1/24	1/8

(1) 求 a,b 的关系；　(2) 若 X,Y 独立，求常数 a,b 的值.

【解】　(1) 由概率的归一性得 $a+b+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{24}+\frac{1}{8}=1$，于是 $a+b=\frac{11}{24}$.

(2) 若 X,Y 独立，则

$$P\{X=3,Y=-1\}=P\{X=3\}P\{Y=-1\},$$

即 $\frac{1}{24}=\left(\frac{1}{8}+b+\frac{1}{24}\right)\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)$，解得 $b=\frac{1}{12}$，于是 $a=\frac{3}{8}$，$b=\frac{1}{12}$.

【例 2】　设随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，且 $P\{X=2,Y=-1\}=0$.

(1) 求 (X,Y) 的联合分布律；　(2) 判断 X,Y 的独立性.

【解】　(1) 因为　$P\{X=2\}=P\{X=2,Y=-1\}+P\{X=2,Y=1\}$，

所以　$P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{2}$；

因为　$P\{Y=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=1\}+P\{X=3,Y=1\}$，

所以　$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=3,Y=1\}=0$；

由　$P\{X=1\}=P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}$

得　$P\{X=1,Y=-1\}=\frac{1}{4}$；

由　$P\{Y=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=2,Y=-1\}+P\{X=3,Y=-1\}$

得　$P\{X=3,Y=-1\}=\frac{1}{4}$，

于是 (X,Y) 的联合分布律为

Y \ X	1	2	3
-1	1/4	0	1/4
1	0	1/2	0

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(2) 因为 $P\{X=2,Y=-1\}\neq P\{X=2\}P\{Y=-1\}$，所以 X,Y 不独立.

【例 3】　设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2<1,\\ 0, & x^2+y^2\geqslant 1.\end{cases}$

(1) 求 X,Y 的边缘密度函数；　(2) 判断 X,Y 的独立性.

【解】　(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$，

当 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $-1<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$，

于是 X 的边缘密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$

由对称性得 Y 的边缘密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1,\\ 0, & |y|\geqslant 1.\end{cases}$

(2) 因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 不独立.

【例 4】 设 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x(y+1)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 求 X,Y 的边缘密度函数并判断 X,Y 的独立性.

【解】 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$，

当 $x\leqslant 0$ 时，$f_X(x)=0$；当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(y+1)}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$，

于是 X 的边缘密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$，

当 $y\leqslant 0$ 时，$f_Y(y)=0$；当 $y>0$ 时，

$$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(y+1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^{+\infty}x(y+1)\mathrm{e}^{-x(y+1)}\mathrm{d}[x(y+1)]$$

$$=\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{(y+1)^2}\Gamma(2)=\frac{1}{(y+1)^2},$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

于是 Y 的边缘密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y+1)^2}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 不独立.

五、随机变量函数的分布

设随机变量 (X,Y) 的分布已知，称 $Z=\varphi(X,Y)$ 为随机变量 X,Y 的函数，通常情况下 Z 的分布有如下情形：

1. (X,Y) 为二维离散型随机变量，其联合分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则 Z 的分布律为 $P\{Z=\varphi(x_i,y_j)\}=p_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，相同值对应的概率应合并.

2. (X,Y) 为二维连续型随机变量，$Z=\varphi(X,Y)$ 为离散型随机变量，先求出 Z 的可能取值，再求出可能取值对应的概率.

3. (X,Y) 为二维连续型随机变量，$Z=\varphi(X,Y)$ 为连续型随机变量，求 Z 的密度函数可以采用公式法或定义法.

【例】 如图 3-3-4，设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(1) 求 X,Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 及 $f_Y(y)$；

(2) 设 $Z=2X-Y$，求 $f_Z(z)$.

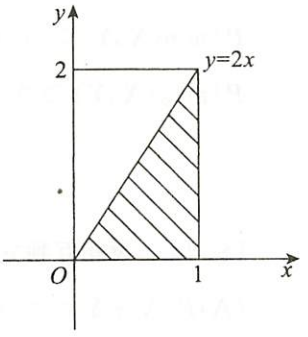


图 3-3-4

【解】 (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$，

当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_X(x)=0$；当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_0^{2x}1\mathrm{d}y=2x$，于是

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$，

当 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 2$ 时，$f_Y(y)=0$；当 $0<y<2$ 时，$f_Y(y)=\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x=1-\frac{y}{2}$，于是

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(2) $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X-Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $0<z<2$ 时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\iint\limits_{2x-y>z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{2x-z}\mathrm{d}y=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}(2x-z)\mathrm{d}x=z-\frac{z^2}{4};$$

当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=1$.

于是 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ z-\frac{z^2}{4}, & 0<z<2,\\ 1, & z\geqslant 2,\end{cases}$ 故 $f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

重点题型分析

题型一　二维随机变量的分布的概念与性质

【例 1】 设 X,Y 为两个随机变量，且 $P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7}$，$P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7}$，则 $P\{\min\{X,Y\}\geqslant 0\}=$_____，$P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=$_____.

【解】 令 $A=\{X\geqslant 0\}$，$B=\{Y\geqslant 0\}$，则 $P(A)=P(B)=\frac{4}{7}$，$P(AB)=\frac{3}{7}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:dky66)

$$P\{\min(X,Y)\geqslant 0\}=P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7};$$

$$\begin{aligned}P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}&=1-P\{\max(X,Y)<0\}=1-P\{X<0,Y<0\}\\&=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(A+B)\\&=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{8}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.\end{aligned}$$

【例 2】 设相互独立的随机变量 X,Y 分别服从 $N(0,1)$ 及 $N(1,1)$，则(　　).

(A)$P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$　　(B)$P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$

(C)$P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$　　(D)$P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$

【解】 因为 X,Y 独立，所以 $X+Y\sim N(1,2)$，于是 $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$，选(B).

题型二　随机变量的联合分布与边缘分布

【例 1】 袋中有 10 个大小相同的球，其中 6 个红球 4 个白球，随机抽取 2 个，每次抽取 1 个，定义如下两个随机变量：

$$X=\begin{cases}1, & \text{第 1 次抽到红球},\\ 0, & \text{第 1 次抽到白球},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & \text{第 2 次抽到红球},\\ 0, & \text{第 2 次抽到白球},\end{cases}$$

就下列两种情况，求(X,Y) 的联合分布律：

(1) 每次抽取后放回；　　(2) 每次抽取后不放回.

【解】 (1) $P\{X=0,Y=0\}=\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{4}{25}$，　$P\{X=0,Y=1\}=\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{6}{25}$，

$P\{X=1,Y=0\}=\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{6}{25}$，　$P\{X=1,Y=1\}=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{9}{25}$；

(2) $P\{X=0,Y=0\}=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$，　$P\{X=0,Y=1\}=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{4}{15}$，

$P\{X=1,Y=0\}=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$，　$P\{X=1,Y=1\}=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{15}$.

【例 2】 设随机变量 X 等可能取 1,2,3，随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能取值，求(X,Y) 的联合分布.

【解】 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，

(X,Y) 的可能取值为(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)，而

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2\}P\{Y=1\mid X=2\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2\}P\{Y=2\mid X=2\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=3,Y=1\}=P\{X=3\}P\{Y=1\mid X=3\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3\}P\{Y=2\mid X=3\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=3,Y=3\}=P\{X=3\}P\{Y=3\mid X=3\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

则(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	1	2	3
1	1/3	1/6	1/9
2	0	1/6	1/9
3	0	0	1/9

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 3】　设X与Y的概率分布为$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$,$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,且$P\{XY=0\}=1$.

(1) 求X,Y的联合分布律；　(2) 问X,Y是否相互独立？为什么？

【解】　(1) 因为$P\{XY=0\}=1$,所以

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=1,Y=1\}=0,\quad P\{X=-1,Y=0\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{4},\qquad P\{X=0,Y=0\}=0,$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}.$$

(2) 因为$P\{X=0,Y=0\}=0\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{1}{4}$,所以$X,Y$不相互独立.

【例 4】　设某班车起点站上车人数X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布,每位乘客中途下车的概率为$p(0<p<1)$,且每个乘客下车与否相互独立,用Y表示中途下车的人数,求：

(1) 在开始上车人数为n的条件下,中途有m个人下车的概率；

(2)(X,Y)的联合分布律.

【解】　(1)$P\{Y=m\mid X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}(m=0,1,2,\cdots,n)$.

(2) $P\{X=n,Y=m\}=P\{X=n\}P\{Y=m\mid X=n\}$

$$=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}(m=0,1,2,\cdots,n;n=0,1,2,\cdots).$$

【例 5】　设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数 k 的值；(2) 求 (X,Y) 的联合分布函数；(3) 求 X,Y 的边缘密度函数.

【解】 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=1$ 得 $k\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=1$,

而 $k\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\frac{k}{2}$,所以 $k=2$,于是 $f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

(2) $F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$,

当 $x\leqslant 0$ 或 $y\leqslant 0$ 时,$F(x,y)=0$;当 $x>0,y>0$ 时,

$$F(x,y)=\int_{0}^{x}\mathrm{d}x\int_{0}^{y}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}y=(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-2y}),$$

即 $F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-2y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

(3) 当 $x\leqslant 0$ 时,$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=0$;

当 $x>0$ 时,$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$,

于是 $f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 同理 $f_Y(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

题型三 随机变量的独立性

【例 1】 设 $X\sim N(1,1),Y\sim N(1,4)$ 且 X,Y 相互独立,求 $P\{XY+1\leqslant X+Y\}$.

【解】 因为 $X\sim N(1,1),Y\sim N(1,4)$,

所以 $P\{X\leqslant 1\}=P\{X>1\}=\frac{1}{2},P\{Y\leqslant 1\}=P\{Y>1\}=\frac{1}{2}$,

又因为 X,Y 独立,

所以 $P\{XY+1\leqslant X+Y\}=P\{(X-1)(Y-1)\leqslant 0\}$

$$=P\{X\leqslant 1\}P\{Y\geqslant 1\}+P\{X>1\}P\{Y<1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

【例 2】 设随机变量 X,Y 独立同分布,且 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$,则下列结论正确的是(　　).

(A) $P\{X=Y\}=\frac{5}{8}$　(B) $P\{X=Y\}=\frac{1}{3}$　(C) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$　(D) $X=Y$

【解】 $P\{X=Y\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}$

$$=P\{X=-1\}P\{Y=-1\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{5}{8},$$

故选(A).

【例 3】 设 $(X,Y)\sim N(1,1;1,4;0)$,求 $P\{XY+1\leqslant X+Y\}$.

【解】 因为 $\rho=0$,所以随机变量 X,Y 独立,且 $X\sim N(1,1),Y\sim N(1,4)$,

从而 $P\{XY+1\leqslant X+Y\}=P\{(X-1)(Y-1)\leqslant 0\}$

$=P\{X-1\leqslant 0,Y-1\geqslant 0\}+P\{X-1\geqslant 0,Y-1\leqslant 0\}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: dkv66)

$$=P\{X\leqslant 1,Y\geqslant 1\}+P\{X\geqslant 1,Y\leqslant 1\}$$

$$=P\{X\leqslant 1\}P\{Y\geqslant 1\}+P\{X\geqslant 1\}P\{Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

【例 4】　设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 X,Y 的边缘密度函数，并判断其独立性.

【解】　当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=0$；

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 4xy\mathrm{d}y=2x$，

即 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ 同理 $f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，

所以 X,Y 独立.

【例 5】　设(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & x>0,y>x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 X,Y 的边缘密度函数及判断 X,Y 的独立性；

(2) 求 X,Y 的条件密度函数.

【解】　(1) 当 $x\leqslant 0$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$，

于是 $f_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0.\end{cases}$

当 $y\leqslant 0$ 时，$f_Y(y)=0$；当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=\int_0^y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x=y\mathrm{e}^{-y}$，

于是 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ y\mathrm{e}^{-y}, & y>0.\end{cases}$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 不独立.

(2) 当 $x>0$ 时，在 $X=x$ 的条件下，Y 的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-y}, & y>x,\\ 0, & y\leqslant x.\end{cases}$$

当 $y>0$ 时，在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & y>x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

【例 6】　设随机变量 $X\sim U(0,1)$，当 $X=x(0<x<1)$ 时，随机变量 $Y\sim U(x,1)$.

(1) 求(X,Y)的联合密度；

(2) 求 Y 的边缘密度 $f_Y(y)$，并判断 X,Y 的独立性；

(3) 求方程 $x^2-Yx+\dfrac{X}{4}=0$ 有实根的概率.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 (1) 由 $X\sim U(0,1)$,得 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

如图 3-3-5,而

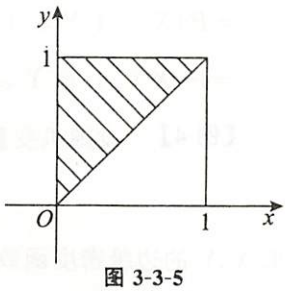


图 3-3-5

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

所以 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

(2) 当 $0<y<1$ 时,$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^y\dfrac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-y)$;

当 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 1$ 时,$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=0$.

于是 $f_Y(y)=\begin{cases}-\ln(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,所以 X,Y 不独立.

(3) 方程 $x^2-Yx+\dfrac{X}{4}=0$ 有实根的充分必要条件是 $Y^2-X\geqslant 0$,则方程 $x^2-Yx+\dfrac{X}{4}=0$ 有实根的概率为

$$P\{Y^2\geqslant X\}=\iint\limits_{x\leqslant y^2}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1\frac{1}{1-x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x\overset{x=t^2}{=}\int_0^1\frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t=2-2\ln 2.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:dijky66)

【例 7】 设 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(1) 判断 X,Y 是否独立; (2) 判断 X^2,Y^2 是否独立.

【解】 (1) 当 $|x|<1$ 时,$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\dfrac{1+xy}{4}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}$;

当 $|x|\geqslant 1$ 时,$f_X(x)=0$.

于是 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1;\end{cases}$ 同理 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |y|<1,\\ 0, & |y|\geqslant 1.\end{cases}$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,所以 X,Y 不独立.

(2) 设 X^2,Y^2 的分布函数分别为 $F_1(x),F_2(x)$,

当 $x<0$ 时,$F_1(x)=P\{X^2\leqslant x\}=0$;

当 $0\leqslant x<1$ 时,$F_1(x)=P\{X^2\leqslant x\}=P\{-\sqrt{x}\leqslant X\leqslant\sqrt{x}\}=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x=\sqrt{x}$;

当 $x\geqslant 1$ 时,$F_1(x)=1$,于是 $F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \sqrt{x}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

同理 $F_2(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \sqrt{y}, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$

(X^2,Y^2) 的联合分布函数为 $F(x,y)=P\{X^2\leqslant x,Y^2\leqslant y\}$,

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时,$F(x,y)=0$;

当 $0\leqslant x<1,y\geqslant 1$ 时,$F(x,y)=\sqrt{x}$;

当 $x\geqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 时,$F(x,y)=\sqrt{y}$;

当 $0\leqslant x<1,0\leqslant y<1$ 时,

$$F(x,y)=P\{-\sqrt{x}\leqslant X\leqslant\sqrt{x},-\sqrt{y}\leqslant Y\leqslant\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1+xy}{4}\mathrm{d}y=\sqrt{xy};$$

当 $x\geqslant 1,y\geqslant 1$ 时,$F(x,y)=1$.

故 $F(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<1,y\geqslant 1,\\ \sqrt{y}, & x\geqslant 1,0\leqslant y<1,\\ \sqrt{xy}, & 0\leqslant x<1,0\leqslant y<1,\\ 1, & x\geqslant 1,y\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

因为 $F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$,所以 X^2,Y^2 独立.

【例 8】 随机变量 $(X,Y)\sim U(D)$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<2\}$,令 $Z=\begin{cases}0, & X<Y,\\ 1, & X\geqslant Y,\end{cases}$ 判断随机变量 X,Z 的独立性.

【解】 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

设 (X,Z) 的联合分布函数为 $F(x,z)$,则

$$F\left(\frac{1}{2},0\right)=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Z\leqslant 0\right\}=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Z=0\right\}=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},X<Y\right\}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^2\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(2-x)\mathrm{d}x=\frac{7}{16},$$

$$F_X\left(\frac{1}{2}\right)=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2},$$

$$F_Z(0)=P\{Z\leqslant 0\}=P\{Z=0\}=P\{X<Y\}$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1(2-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4},$$

因为 $F\left(\frac{1}{2},0\right)\neq F_X\left(\frac{1}{2}\right)F_Z(0)$,所以 X,Z 不独立.

题型四　随机变量的函数的分布

【思路分析】

设(X,Y)为二维随机变量，称$Z=\varphi(X,Y)$为二维随机变量(X,Y)的函数，随机变量Z的分布即二维随机变量函数的分布，通常分为如下情形：

(1)(X,Y)为二维离散型随机变量；

(2)(X,Y)为二维连续型随机变量；

(3)(X,Y)中一个为离散型随机变量、一个为连续型随机变量.

【例1】 设$X\sim P(\lambda_1)$,$Y\sim P(\lambda_2)(\lambda_1>0,\lambda_2>0)$,且$X,Y$相互独立，证明：$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

【证明】 因为$X\sim P(\lambda_1)$,$Y\sim P(\lambda_2)$,所以

$$P\{X=m\}=\frac{\lambda_1^m e^{-\lambda_1}}{m!},\quad P\{Y=n\}=\frac{\lambda_2^n e^{-\lambda_2}}{n!}(m,n=0,1,2,\cdots),$$

于是

$$P\{X+Y=k\}=P\{X=0,Y=k\}+P\{X=1,Y=k-1\}+\cdots+P\{X=k,Y=0\}$$

$$=\frac{\lambda_1^0}{0!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}+\frac{\lambda_1^1}{1!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda_2}+\frac{\lambda_1^2}{2!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda_2}+\cdots+\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^0}{0!}e^{-\lambda_2}$$

$$=\frac{1}{k!}(C_k^0\lambda_1^0\cdot\lambda_2^k+C_k^1\lambda_1^1\cdot\lambda_2^{k-1}+C_k^2\lambda_1^2\cdot\lambda_2^{k-2}+\cdots+C_k^k\lambda_1^k\cdot\lambda_2^0)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(k=0,1,2,\cdots),$$

故$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

【例2】 设X,Y独立且都服从$[0,1]$上的均匀分布，求$Z=X+Y$的密度函数.

【解】 X,Y的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

因为X,Y相互独立，所以$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$；

当$0\leqslant z<1$时，$F_Z(z)=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}\mathrm{d}y=\frac{z^2}{2}$；

当$1\leqslant z<2$时，$F_Z(z)=1-\int_{z-1}^1\mathrm{d}x\int_{z-x}^1\mathrm{d}y=2z-1-\frac{z^2}{2}$；

当$z\geqslant 2$时，$F_Z(z)=1$.

微信公众号（顶尖考研）(ID:djky66)

故 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{z^2}{2}, & 0\leqslant z<1,\\ 2z-1-\dfrac{z^2}{2}, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2,\end{cases}$ 于是 $f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0\leqslant z<1,\\ 2-z, & 1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

【例 3】 设 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求：

(1) $Z=X+2Y$ 的分布函数；　(2) $P\{X+2Y\leqslant 1\}$ 及 $P\{X<Y\}$.

【解】 (1) $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+2Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+2y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}\mathrm{d}y=1-e^{-z}-ze^{-z}$；

当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$.

所以 $F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$

(2) $P\{X+2Y\leqslant 1\}=F_Z(1)=1-2e^{-1}$，

$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty} e^{-2y}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{3}$.

【例 4】 设 X,Y 相互独立，且 X,Y 的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

令 $Z=X+Y$，求 $f_Z(z)$.

【解】 因为 X,Y 独立，所以 X,Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\leqslant x\leqslant 1,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x} e^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^z (1-e^{x-z})\mathrm{d}x=z-1+e^{-z}$；

当 $z\geqslant 1$ 时，$F_Z(z)=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{z-x} e^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^1 (1-e^{x-z})\mathrm{d}x=1+(1-e)e^{-z}$.

故 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z-1+e^{-z}, & 0\leqslant z<1,\\ 1+(1-e)e^{-z}, & z\geqslant 1,\end{cases}$ 于是 $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ (e-1)e^{-z}, & z\geqslant 1.\end{cases}$

【例 5】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i\sim E(\lambda_i)(\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n)$. 求 $Y=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布.

【解】 因为 $X_i\sim E(\lambda_i)$，所以 $F_{X_i}(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_i x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，由分布函

微信公众号【店小考研】(ID: djky66)

数的定义得

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\leqslant y\}\\&=1-P\{\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}>y\}=1-P\{X_1>y,X_2>y,\cdots,X_n>y\}\\&=1-P\{X_1>y\}P\{X_2>y\}\cdots P\{X_n>y\}\\&=1-[1-P\{X_1\leqslant y\}][1-P\{X_2\leqslant y\}]\cdots[1-P\{X_n\leqslant y\}],\end{aligned}$$

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)y}$.

于是 $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$ 故 $Y\sim E(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$.

【例 6】 设 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$，$Y\sim N(0,1)$，$Z=XY$，求 Z 的分布函数.

【解】 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X=0\}P\{XY\leqslant z\mid X=0\}+P\{X=1\}P\{XY\leqslant z\mid X=1\}$

$$=\frac{1}{4}P\{0\leqslant z\}+\frac{3}{4}P\{Y\leqslant z\}=\frac{1}{4}P\{0\leqslant z\}+\frac{3}{4}\Phi(z),$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=\frac{3}{4}\Phi(z)$；当 $z\geqslant 0$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\Phi(z)$，

即 $F_Z(z)=\begin{cases}\frac{3}{4}\Phi(z), & z<0,\\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\Phi(z), & z\geqslant 0.\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 7】 设 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<2\}$ 上服从均匀分布，令 $Z=\begin{cases}0, X<Y,\\ 1, X\geqslant Y\end{cases}$

(1) 求 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$；

(2) 令 $U=X+Z$，求 U 的分布函数 $F_U(x)$.

【解】 (1) 因为 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布，所以联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

(2) $F_U(x)=P\{U\leqslant x\}=P\{X+Z\leqslant x\}$，

当 $x<0$ 时，$F_U(x)=0$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$F_U(x)=1$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$\begin{aligned}F_U(x)&=P\{X+Z\leqslant x\}=P\{Z=0,X\leqslant x\}=P\{X<Y,X\leqslant x\}\\&=\int_0^x dx\int_x^2\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}\int_0^x(2-x)dx=\frac{1}{2}(2x-\frac{1}{2}x^2)=x-\frac{1}{4}x^2;\end{aligned}$$

当 $1\leqslant x<2$ 时，

$$\begin{aligned}F_U(x)&=P\{X+Z\leqslant x\}=P\{Z=0,X\leqslant x\}+P\{Z=1,X\leqslant x-1\}\\&=P\{X<Y,X\leqslant 1\}+P\{X\geqslant Y,X\leqslant x-1\}=\int_0^1 dx\int_x^2\frac{1}{2}dy+\int_0^{x-1}dx\int_0^x\frac{1}{2}dy\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(2-x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{x-1}x\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}+\frac{(x-1)^2}{4},$$

故
$$F_U(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x-\frac{1}{4}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{3}{4}+\frac{(x-1)^2}{4}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

【例 8】　设 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$，$Y$ 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2,0<y<1,\\ 0, \quad \text{其他},\end{cases}$ 且 X,Y 相互独立，$Z=X+Y$，求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$.

【解】　$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$，

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$F_Z(z)=P\{X=0,Y\leqslant z\}=P\{X=0\}P\{Y\leqslant z\}=\frac{1}{4}\int_0^z 3y^2\mathrm{d}y=\frac{z^3}{4}$；

当 $1\leqslant z<2$ 时，$F_Z(z)=P\{X=0,Y\leqslant z\}+P\{X=1,Y\leqslant z-1\}$

$$=P\{X=0\}P\{Y\leqslant 1\}+P\{X=1\}P\{Y\leqslant z-1\}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\int_0^{z-1}3y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{4}+\frac{3(z-1)^3}{4};$$

当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=1$，

故
$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{z^3}{4}, & 0\leqslant z<1,\\ \frac{1}{4}+\frac{3(z-1)^3}{4}, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

测试题

一、选择题

1. 设随机变量 $X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，令 $p_1=P\{X\leqslant\mu-4\}$，$p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}$，则(　　).

(A) 对任何实数 μ，都有 $p_1=p_2$　　(B) 对任何实数 μ，都有 $p_1<p_2$

(C) 只有对个别实数 μ，才有 $p_1=p_2$　　(D) 对任何实数 μ，都有 $p_1>p_2$

2. 设随机变量 X,Y 相互独立，分布函数分别为 $F_1(x),F_2(x)$，令 $Z=\min\{X,Y\}$，则 Z 的分布函数 $F_Z(z)$ 为(　　).

(A) $F_1(z)F_2(z)$　　(B) $\max\{F_1(z),F_2(z)\}$

(C) $F_1(z)+F_2(z)-F_1(z)F_2(z)$　　(D) $\min\{F_1(z),F_2(z)\}$

3. 设随机变量 X,Y 相互独立，分布函数分别为 $F_1(x),F_2(x)$，令 $Z=\max\{X,Y\}$，则 Z 的分布函数 $F_Z(z)$ 为(　　).

(A) $F_1(z)F_2(z)$　　(B) $\max\{F_1(z),F_2(z)\}$

(C) $F_1(z)+F_2(z)-F_1(z)F_2(z)$　　(D) $\min\{F_1(z),F_2(z)\}$

4. 设随机变量 X,Y 独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，令 $Z=XY$，则 Z 的分布函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为(　　).

(A)0 个　　(B)1 个　　(C)2 个　　(D)3 个

5. 设随机变量 X,Y 独立同分布且 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则下列结论正确的是(　　).

(A)$P\{X+Y=0\}=\frac{1}{3}$　　(B)$P\{X+Y=0\}=\frac{1}{4}$

(C)$P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$　　(D)$P\{X=Y\}=\frac{1}{4}$

二、填空题

1. 设 $X\sim N(1,4)$，$Y\sim N(-1,9)$ 且 X,Y 相互独立，令 $Z=2X-Y+1$，则 $Z\sim$ _____.

2. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $F_X(x)=$ _____，$F_Y(y)=$ _____.

3. 设 X,Y 独立且 $X\sim U(0,2)$，$Y\sim U(0,1)$，则 $P\{X^2+Y^2\leqslant 2X\}=$ _____.

4. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $Z=\frac{X+Y}{2}$ 的密度函数为 _____.

5. 设随机变量 X,Y 独立，且都服从 $(0,2)$ 上的均匀分布，令 $Z=\min\{X,Y\}$，则 $P\{Z\leqslant 1\}=$ _____.

6. 设 $X\sim E(\lambda)$，$Y\sim E(\lambda)(\lambda>0)$ 且 X,Y 独立，令 $Z=\max\{X,Y\}$，则 Z 的分布函数为_____.

三、解答题

1. 设随机变量 X,Y 独立且同分布，又 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，令 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，求 (U,V) 的联合分布.

2. 随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}a(1-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & x^2+y^2>1.\end{cases}$

(1) 求常数 a 的值；　(2) 求随机变量 (X,Y) 位于 $x^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}$ 内的概率.

3. 设 X,Y 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求 X,Y 的边缘密度；　(2) 判断 X,Y 是否独立；　(3) 计算 $P\{X<Y\}$.

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}axe^{-x(y+1)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求常数 a 的值；　(2) 求 (X,Y) 关于 X 和 Y 的边际密度函数.

5. 设随机变量 X,Y 在区域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上服从均匀分布，求：

(1) X,Y 的边缘密度函数；　(2) X,Y 的条件密度函数.

6. 设 X,Y 相互独立，其密度函数分别为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$ 令 $Z=X+Y$，求 $f_Z(z)$.

7. 设 $X\sim U(0,1)$，$Y\sim E(1)$，且 X,Y 独立，$Z=X+Y$，求 $f_Z(z)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

8. 设随机变量 X,Y 独立，且 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$，而 Y 的密度函数为 $f(y)$，求 $Z=X+Y$ 的密度函数.

9. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim E\left(\frac{1}{2}\right)$ 且 X,Y 相互独立.

(1) 求 $U=X^2$ 的密度函数；　(2) 求 $V=U+Y$ 的密度函数.

10. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim U[-\pi,\pi]$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数(结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示).

11. 设随机变量 X,Y 独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim B\left(2,\frac{1}{2}\right)$，令 $Z=XY$，求 $F_Z(z)$.

12. 设 X,Y 同分布且 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ 且 $P\{XY=0\}=1$.

(1) 求 (X,Y) 的联合分布律；　(2) 求 $P\{X=-Y\}$.

测试题参考答案

一、选择题

1. $X\sim N(\mu,4^2)$，$p_1=P\{X\leqslant\mu-4\}\Rightarrow p_1=P\{X\leqslant\mu-4\}=P\left\{\frac{X-\mu}{4}\leqslant-1\right\}=\Phi(-1)$；

$Y\sim N(\mu,5^2)$，$p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}\Rightarrow p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}=1-P\{Y<\mu+5\}=1-P\left\{\frac{Y-\mu}{5}<1\right\}=1-\Phi(1)=\Phi(-1)$，所以选(A).

2. $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\min\{X,Y\}\leqslant z\}=1-P\{\min\{X,Y\}>z\}=1-P\{X>z,Y>z\}=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}=1-[1-P\{X\leqslant z\}][1-P\{Y\leqslant z\}]=1-[1-F_1(z)][1-F_2(z)]=F_1(z)+F_2(z)-F_1(z)F_2(z)$，应选(C).

3. $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=F_1(z)F_2(z)$，应选(A).

4. Z 的分布函数为 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\}=P\{Y=0\}P\{XY\leqslant z\mid Y=0\}+P\{Y=1\}P\{XY\leqslant z\mid Y=1\}=\frac{1}{2}[P\{0\leqslant z\}+P\{X\leqslant z\}]$，当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}\Phi(z)$；当 $z\geqslant0$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}[1+\Phi(z)]$，显然 $z=0$ 为 $F_Z(z)$ 的唯一间断点，应选(B).

5. $P\{X+Y=0\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=1,Y=-1\}=P\{X=-1\}P\{Y=1\}+P\{X=1\}P\{Y=-1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，故(A)，(B) 不对；$P\{X=Y\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}+P\{X=-1\}P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}$，应选(C).

二、填空题

1. 因为 X,Y 为相互独立的正态变量，所以其线性组合服从正态分布，又因为 $E(Z)=4$，$D(Z)=25$，所以 $Z\sim N(4,25)$.

2. 填 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant0,\end{cases}F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-3y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant0.\end{cases}$

3. X,Y 的边缘密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 因为 X,Y 独立，所以 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 令 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant2x,x>$

微信公众号【顶尖考研】
QQ：diky66)

$0,y>0\}$，于是 $P\{X^2+Y^2\leqslant 2X\}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x} f(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}S_D=\frac{\pi}{4}$.

4. Z 的分布函数为 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant 2z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant 2z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $z\geqslant 0$ 时，$F_Z(z)=\int_0^{2z}\mathrm{d}x\int_0^{2z-x}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y=1-\mathrm{e}^{-2z}-2z\mathrm{e}^{-2z}$，所以 $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\ 4z\mathrm{e}^{-2z}, & z>0.\end{cases}$

5. X,Y 的边缘密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 因为 X,Y 独立，所以 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<x<2,0<y<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ $P\{Z\leqslant 1\}=P\{\min\{X,Y\}\leqslant 1\}=1-P\{\min\{X,Y\}>1\}=1-P\{X>1,Y>1\}=1-\iint\limits_{x>1,y>1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^2\frac{1}{4}\mathrm{d}y=\frac{3}{4}$.

6. 由 $X\sim E(\lambda),Y\sim E(\lambda)$ 得 X 及 Y 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=P\{X\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\}=F^2(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ (1-\mathrm{e}^{-\lambda z})^2, & z\geqslant 0.\end{cases}$

三、解答题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

1. (U,V) 的可能取值为 $(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)$，$P\{U=1,V=1\}=P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{9}$；$P\{U=2,V=1\}=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}+P\{X=2\}P\{Y=1\}=\frac{2}{9}$；$P\{U=2,V=2\}=P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2\}P\{Y=2\}=\frac{1}{9}$；$P\{U=3,V=1\}=P\{X=1,Y=3\}+P\{X=3,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=3\}+P\{X=3\}P\{Y=1\}=\frac{2}{9}$；$P\{U=3,V=2\}=P\{X=2,Y=3\}+P\{X=3,Y=2\}=P\{X=2\}P\{Y=3\}+P\{X=3\}P\{Y=2\}=\frac{2}{9}$；$P\{U=3,V=3\}=P\{X=3,Y=3\}=P\{X=3\}P\{Y=3\}=\frac{1}{9}$，于是 (U,V) 的联合分布律为

U \ V	1	2	3
1	1/9	0	0
2	2/9	1/9	0
3	2/9	2/9	1/9

2. (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=a\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(1-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1-r)\mathrm{d}r=\frac{\pi a}{3}=1$ 得 $a=\frac{3}{\pi}$.

(2) 设 $D_0=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}\right\}$，则

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D_0}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}}r(1-r)\mathrm{d}r=\frac{1}{2}.$$

3. (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+y)}dy=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ e^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 同理 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+y)}dx=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ e^{-y}, & y>0.\end{cases}$

(2) 因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 独立.

(3) $P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=\frac{1}{2}$.

4. (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=1\Rightarrow a\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}xe^{-x(y+1)}dy=1\Rightarrow a=1$

$$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(y+1)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$. 当 $x\leqslant 0$ 时，$f_X(x)=0$；当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}xe^{-x(y+1)}dy=e^{-x}\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ e^{-x}, & x>0.\end{cases}$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$. 当 $y\leqslant 0$ 时，$f_Y(y)=0$；当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x(y+1)}dx=\frac{1}{(y+1)^2}\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{1}{(y+1)^2}, & y>0.\end{cases}$

5. X,Y 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2<1,\\ 0, & x^2+y^2\geqslant 1.\end{cases}$

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，当 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $-1<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$，

故 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 由对称性得 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 当 $-1<x<1$ 时，$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2},\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ 同理

当 $-1<y<1$ 时，$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2}<x<\sqrt{1-y^2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

6. 因为 X,Y 独立，所以 X,Y 的联合密度函数为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)dxdy$，如图 3-3-6，当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $z\geqslant 0$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}2e^{-(x+2y)}dy=\int_0^z e^{-x}(1-e^{2x-2z})dx=1-2e^{-z}+e^{-2z}$，于是

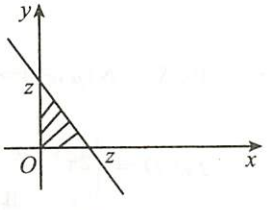


图 3-3-6

$$f_Z(z)=\begin{cases}2(e^{-z}-e^{-2z}), & z>0\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

微信公众号【预测考研】(ID: djky66)

7. 由 $X\sim U(0,1)$ 得 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 由 $Y\sim E(1)$ 得 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$ 因为 X,Y 独立，所以 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1,y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $0\leqslant z<1$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}e^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^z(1-e^{x-z})\mathrm{d}x=z-1+e^{-z}$；当 $z\geqslant 1$ 时，$F_Z(z)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-x}e^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^1(1-e^{x-z})\mathrm{d}x=1-e^{1-z}+e^{-z}$，故 Z 的密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ e^{1-z}-e^{-z}, & z>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

8. $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$，由全概率公式得 $F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}=P\{X=1\}P\{X+Y\leqslant z\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{X+Y\leqslant z\mid X=2\}=0.4P\{Y\leqslant z-1\}+0.6P\{Y\leqslant z-2\}=0.4F_Y(z-1)+0.6F_Y(z-2)$，故 Z 的密度函数为 $f_Z(z)=0.4f(z-1)+0.6f(z-2)$.

9. (1) 因为 $X\sim N(0,1)$，所以 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. 当 $u<0$ 时，$F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{X^2\leqslant u\}=0$；当 $u\geqslant 0$ 时，$F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{X^2\leqslant u\}=P\{-\sqrt{u}\leqslant X\leqslant\sqrt{u}\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{u}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$，于是 $f_U(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0,\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}, & u>0.\end{cases}$

(2) 因为 $Y\sim E(\frac{1}{2})$，所以 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\end{cases}$ 又因为 X,Y 独立，所以 U,Y 独立，于是 U,Y 的联合密度函数为 $f(u,y)=f_U(u)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u+y}{2}}, & u>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ V 的分布函数为 $F_V(v)=P\{V\leqslant v\}=P\{U+Y\leqslant v\}$. 当 $v<0$ 时，$F_V(v)=0$；当 $v\geqslant 0$ 时，$F_V(v)=\int_0^v\mathrm{d}u\int_0^{v-u}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u+y}{2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^v u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}\mathrm{d}u\int_0^{v-u}e^{-\frac{y}{2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^v u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}(1-e^{\frac{u-v}{2}})\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^v u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}\mathrm{d}u-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^v u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{v}{2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^v u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}\mathrm{d}u-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{v}e^{-\frac{v}{2}}$，于是 $f_V(v)=\begin{cases}0, & v\leqslant 0,\\ \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v}{2}}, & v>0.\end{cases}$

10. $X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$，$Y\sim U[-\pi,\pi]\Rightarrow$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi\leqslant y\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 因为 X,Y 相互独立，所以有

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & -\infty<x<+\infty,-\pi\leqslant y\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\mathrm{d}(\frac{x-\mu}{\sigma})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\frac{z-y-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\frac{z-y-\mu}{\sigma})\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{\sigma}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\frac{z-y-\mu}{\sigma})\mathrm{d}(\frac{z-y-\mu}{\sigma})=-\frac{\sigma}{2\pi}\int_{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}\Phi(u)\mathrm{d}u=\frac{\sigma}{2\pi}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}\Phi(u)\mathrm{d}u,$$

于是 $f_Z(z)=\dfrac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\dfrac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right]$.

11. $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\}=P\{Y=0\}P\{XY\leqslant z\mid Y=0\}+P\{Y=1\}P\{XY\leqslant z\mid Y=1\}+P\{Y=2\}P\{XY\leqslant z\mid Y=2\}=\dfrac{1}{4}P\{0\leqslant z\}+C_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}P\{X\leqslant z\}+C_2^2\times\dfrac{1}{4}P\left\{X\leqslant\dfrac{z}{2}\right\}=\dfrac{1}{4}P\{0\leqslant z\}+\dfrac{1}{2}P\{X\leqslant z\}+\dfrac{1}{4}P\left\{X\leqslant\dfrac{z}{2}\right\}$，当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=\dfrac{1}{2}\Phi(z)+\dfrac{1}{4}\Phi\left(\dfrac{z}{2}\right)$；当 $z\geqslant 0$ 时，$F_Z(z)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\Phi(z)+\dfrac{1}{4}\Phi\left(\dfrac{z}{2}\right)$，于是有 $F_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(z)+\dfrac{1}{4}\Phi\left(\dfrac{z}{2}\right), & z<0,\\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\Phi(z)+\dfrac{1}{4}\Phi\left(\dfrac{z}{2}\right), & z\geqslant 0,\end{cases}$ 显然 $F_Z(z)$ 在 $z=0$ 处间断.

12. (1) 因为 $P\{XY=0\}=1$，所以 $P\{XY\neq 0\}=0$，于是有 $P\{X=-1,Y=-1\}=P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=1,Y=-1\}=P\{X=1,Y=1\}=0$，而 $P\{X=-1\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=-1,Y=1\}$，所以 $P\{X=-1,Y=0\}=\dfrac{1}{4}$；同理 $P\{X=1\}=P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}$，则 $P\{X=1,Y=0\}=\dfrac{1}{4}$；又因为 $P\{Y=-1\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=1,Y=-1\}$，所以 $P\{X=0,Y=-1\}=\dfrac{1}{4}$；由 $P\{Y=1\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}$ 得 $P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{1}{4}$ 由归一性得 $P\{X=0,Y=0\}=0$，故 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$p_{\cdot j}$	1/4	1/2	1/4	1

(2) $P\{X=-Y\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=-1\}=0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第四章　随机变量的数字特征

大纲点击

1. 理解随机变量数字特征(数学期望、方差、标准差、矩、协方差、相关系数)的概念,会运用数字特征的基本性质,并掌握常用分布的数字特征.

2. 会求随机变量函数的数学期望.

基础复习模块——基本概念、原理、考点

一、数学期望

(一) 数学期望的概念

1. 一维离散型随机变量的数学期望 —— 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots,)$,若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 绝对收敛,称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望,记为 $E(X)$,即 $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$.

更一般地,若 $Y=\varphi(X)$,则 $E(Y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi(x_k)p_k$.

2. 一维连续型随机变量的数学期望 —— 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$,若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,称 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 为 X 的数学期望,记为 $E(X)$,即 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$.

更一般地,设 $\varphi(x)$ 为可积函数,且 $Y=\varphi(X)$,则 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x$.

3. 二维离散型随机变量的数学期望 —— 设离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots),$$

若级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ip_{i\cdot}$ 与 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}y_jp_{\cdot j}$ 绝对收敛,称其和分别为随机变量 X 及 Y 的数学期望,分别记为 $E(X)$ 和 $E(Y)$,即 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ip_{i\cdot}$,$E(Y)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}y_jp_{\cdot j}$.

更一般地,若 $Z=\varphi(X,Y)$,则 $E(Z)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varphi(x_i,y_j)p_{ij}$.

4. 二维连续型随机变量的数学期望 —— 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的密度为

微信公众号(顶尖考研)(ID: djky66)

$f(x,y)$，若积分$\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x$及$\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y$绝对收敛，称其为随机变量$X$和$Y$的数学期望，分别记为$E(X)$和$E(Y)$，即$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}y$和$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}y$.

更一般地，若$\varphi(x,y)$为二维可积函数，且$Z=\varphi(X,Y)$，则

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)f(x,y)\mathrm{d}y.$$

（二）数学期望的性质

1. $E(C)=C$.
2. $E(kX)=kE(X)$.
3. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.
4. $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$.
5. 若随机变量X,Y相互独立，则$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$，反之不对.

二、方差的定义及性质

（一）方差的概念

若$E[X-E(X)]^2$存在，称$E[X-E(X)]^2$为随机变量X的方差，记为$D(X)$，即$D(X)=E[X-E(X)]^2$. 称$\sqrt{D(X)}$为随机变量X的标准差.

（二）方差的计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

（三）方差的性质

1. $D(C)=0$.
2. $D(kX)=k^2D(X)$，其中k为常数.
3. 若随机变量X,Y相互独立，则$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，更一般地，有

$$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y).$$

4. $E(X-k)^2\geqslant D(X)=E[X-E(X)]^2$，说明$k=E(X)$为函数$E(X-k)^2$的最小点.

三、常见随机变量的数学期望和方差

1. 二项分布 —— 设$X\sim B(n,p)$，则$E(X)=np$，$D(X)=npq$，其中$0<p<1$，$q=1-p$.
2. 泊松分布 —— 设$X\sim P(\lambda)$，则$E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$.
3. 均匀分布 —— 设$X\sim U(a,b)$，则$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$，$D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.
4. 指数分布 —— 设$X\sim E(\lambda)$，则$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$，$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.
5. 正态分布 —— 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

四、协方差与相关系数

(一) 协方差

1. 协方差的定义 —— 称 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 为随机变量 X,Y 的协方差.

2. 协方差的计算公式 —— $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

3. 协方差的性质 ——(1)$\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$.

(2)$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$.

(3)$\mathrm{Cov}(X,Y+Z)=\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X,Z)$.

(4)$\mathrm{Cov}(kX,Y)=\mathrm{Cov}(X,kY)=k\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(5)$\mathrm{Cov}(aX+bY,Z)=a\mathrm{Cov}(X,Z)+b\mathrm{Cov}(Y,Z)$.

(6)$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$,更一般地,有

$$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)+2ab\mathrm{Cov}(X,Y).$$

(二) 相关系数

1. 相关系数的定义 —— 称 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$ 为随机变量 X 与 Y 的相关系数.

(1) 若 $\rho_{XY}=0$,称随机变量 X 与 Y 不相关;

(2) 若 $\rho_{XY}=1$,称随机变量 X 与 Y 正相关;

(3) 若 $\rho_{XY}=-1$,称随机变量 X 与 Y 负相关.



微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

2. 相关系数的性质

(1)$\rho_{XY}=\rho_{YX}$;

(2)$|\rho_{XY}|\leqslant 1$;

(3) 随机变量 X,Y 正相关的充分必要条件是 $P\{Y=aX+b\}=1$,其中 $a>0$;

(4) 随机变量 X,Y 负相关的充分必要条件是 $P\{Y=aX+b\}=1$,其中 $a<0$.

重点题型分析

题型一　随机变量数字特征的基本性质

【例 1】 设随机变量 X,Y 相互独立,且 $D(X)=3,D(Y)=2$,则 $D(3X-2Y)=$_____.

【解】 $D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)=27+8=35$.

【例 2】 随机变量 $X\sim E(\lambda)$,则 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}=$_____.

【解】 因为 $X\sim E(\lambda)$,所以 $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\end{cases}$ 且 $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$,于是

$$P\{X>\sqrt{D(X)}\}=P\left\{X>\frac{1}{\lambda}\right\}=1-P\left\{X\leqslant\frac{1}{\lambda}\right\}=1-F\left(\frac{1}{\lambda}\right)=1-(1-\mathrm{e}^{-1})=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

【例 3】 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数,每次射击命中概率为 0.4,则 $E(X^2)=$_____.

【解】 由 $X\sim B(10,0.4)$,得 $E(X)=np=4,D(X)=npq=2.4$,于是

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=18.4.$$

【例 4】 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 $E(X)=$ _____，$D(X)=$ _____.

【解】 因为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}$，所以 $X\sim N\left(1,\frac{1}{2}\right)$，于是

$$E(X)=1,\quad D(X)=\frac{1}{2}.$$

【例 5】 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $P\{X\geqslant 2\}=$ _____.

【解】 由 $X\sim P(\lambda)$ 得 $E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$，于是 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\lambda+\lambda^2$.

再由 $E[(X-1)(X-2)]=1$ 得 $E(X^2)-3E(X)+2=1$ 即 $(\lambda-1)^2=0$，故 $\lambda=1$.

于是 $P\{X\geqslant 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-\frac{1}{0!}e^{-1}-\frac{1}{1!}e^{-1}=1-\frac{2}{e}$.

题型二　一维随机变量的数字特征

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 1】 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，求 $E(X)$ 及 $E(X^2)$.

【解】 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0$，$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=\Gamma(3)=2$.

【例 2】 试验成功的概率为 $\frac{3}{4}$，失败的概率为 $\frac{1}{4}$，独立重复试验直到成功 2 次为止，以 X 表示所需要进行的试验次数，求 X 的概率分布与数学期望.

【解】 $P\{X=k\}=C_{k-1}^1\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=C_{k-1}^1\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\left(\frac{3}{4}\right)^2(k=2,3,\cdots)$，

$$E(X)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2},$$

$$S(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\left(\sum_{k=2}^{\infty}x^k\right)''=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}(|x|<1),$$

则 $S\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{128}{27}$，$E(X)=\frac{8}{3}$.

【例 3】 n 把钥匙中只有一把可以把门打开，现从中任取一把开门，直到打开门为止，下列两种情况分别求开门次数的数学期望和方差：

(1) 试开过的钥匙除去；　(2) 试开过的钥匙重新放回.

【解】 (1) 设 X 为第一种情况开门次数，X 的可能取值为 $1,2,\cdots,n$.

且 $P\{X=k\}=\frac{1}{n}$，$k=1,2,\cdots,n$.

设第 3 次才能打开门，则

$$P\{X=3\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n},$$
$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{n+1}{2},\ E(X^2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{n^2-1}{12}.$$

(2) 设 Y 为开门次数，Y 的可能取值为 $1,2,\cdots,n,\cdots$，且

$$P\{Y=k\}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n},k=1,2,\cdots.$$
$$E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}k\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)'\Big|_{x=1-\frac{1}{n}}=n,$$
$$E(Y^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}=2n^2-n,$$
$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=n^2-n.$$

【例 4】 设有 20 人在某 11 层楼的底层乘电梯上楼，电梯在途中只下不上，每个乘客在哪一层下等可能，且乘客之间相互独立，求电梯停的次数的数学期望.

【解】 利用随机变量分解法(从未考过).

设 X 为随机变量停靠的总的次数，令 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 楼电梯停}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 楼电梯不停}\end{cases}(i=2,3,\cdots,11)$，则

$$X=X_2+X_3+\cdots+X_{11},\quad E(X)=\sum_{i=2}^{11}E(X_i).$$
$$P\{X_i=0\}=\left(1-\frac{1}{10}\right)^{20}=\left(\frac{9}{10}\right)^{20},\quad P\{X_i=1\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20},$$

因为 $E(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$，所以 $E(X)=\sum_{i=2}^{11}E(X_i)=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]$.

【例 5】 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}(-\infty<x<+\infty,\lambda>0)$，求 $E(X),D(X)$.

【解】
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}\mathrm{d}x\xlongequal{\frac{x-\mu}{\lambda}=t}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda t+\mu)e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}\,\mathrm{d}t=\mu\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=\mu,$$
$$D(X)=E[X-E(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\lambda^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)^2e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}\mathrm{d}\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)\xlongequal{\frac{x-\mu}{\lambda}=t}\frac{\lambda^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$$
$$=\lambda^2\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}\mathrm{d}t=\lambda^2\Gamma(3)=2\lambda^2.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: dky66)

题型三　一维随机变量函数的数字特征

【例 1】　设随机变量 $X\sim E(1)$，又 $Y=X+\mathrm{e}^{-2X}$，则 $E(Y)=$_____.

【解】　因为 $X\sim E(1)$，所以密度函数为 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 则

$$E(Y)=E(X+\mathrm{e}^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+\mathrm{e}^{-2x})f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}(x+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}(3x)=\Gamma(2)+\frac{1}{3}\Gamma(1)=\frac{4}{3}.$$

【例 2】　设射击的命中率为 $\frac{1}{6}$，用 X 表示直到命中两次的射击次数，求 $E(X)$.

【解】　令 $\frac{1}{6}=p$，X 的分布律为

$$P\{X=k\}=p\cdot C_{k-1}^{1}p\cdot(1-p)^{k-2}=(k-1)p^{2}(1-p)^{k-2}(k=2,3,\cdots),$$

$$E(X)=\sum_{k=2}^{\infty}kP\{X=k\}=p^{2}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)(1-p)^{k-2},$$

令 $S(x)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}(-1<x<1)$，则

$$S(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\Big(\sum_{k=2}^{\infty}x^{k}\Big)''=\Big(\frac{x^{2}}{1-x}\Big)''=\frac{2}{(1-x)^{3}}$$

于是 $E(X)=p^{2}S(1-p)=\dfrac{2}{p}=12.$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 3】　设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.4\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)+0.6\Phi(2x-3)$，求随机变量 X 的数学期望.

【解】　随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=0.2\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)+1.2\varphi(2x-3)$，则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0.2\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\Big(\frac{x-1}{2}\Big)\mathrm{d}x+1.2\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(2x-3)\mathrm{d}x$$

$$=0.8\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2}\Big)\varphi\Big(\frac{x-1}{2}\Big)\mathrm{d}\Big(\frac{x-1}{2}\Big)+0.3\int_{-\infty}^{+\infty}[(2x-3)+3]\varphi(2x-3)\mathrm{d}(2x-3)$$

$$=0.8\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\varphi(x)\mathrm{d}x+0.3\int_{-\infty}^{+\infty}(x+3)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=0.4+0.9=1.3.$$

题型四　二维随机变量的数字特征

【例 1】　设 $U\sim U[-2,2]$，$X=\begin{cases}-1, & U\leqslant -1,\\ 1, & U>-1,\end{cases}$ $Y=\begin{cases}-1, & U\leqslant 1,\\ 1, & U>1,\end{cases}$ 求

(1) X,Y 的联合分布律；　(2) $D(X+Y)$.

【解】 (1)(X,Y) 的可能取值为$(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)$,

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\leqslant -1,U\leqslant 1\}=P\{U\leqslant -1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\leqslant -1,U>1\}=0,$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\leqslant 1\}=P\{-1<U\leqslant 1\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=P\{U>1\}=\frac{1}{4},$$

$$(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(-1,-1) & (-1,1) & (1,-1) & (1,1)\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

(2)$X+Y\sim\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$, $(X+Y)^2\sim\begin{pmatrix}0 & 4\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

$E(X+Y)=0$, $D(X+Y)=E(X+Y)^2=2$.

【例 2】 现有 2 封信需要投入编号为 1,2,3 的三个邮箱,X,Y 表示投入 1,2 号邮箱的信件个数,

(1) 求 X,Y 的联合分布律; (2) 判断 X,Y 是否独立;

(3)$U=\max\{X,Y\}$,$V=\min\{X,Y\}$,求 $E(U),E(V)$ 及 $E(UV)$.

【解】 (1)X,Y 的可能取值为 0,1,2,则

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_2^2}{3^2}=\frac{1}{9},\quad P\{X=0,Y=1\}=\frac{C_2^1C_1^1}{3^2}=\frac{2}{9},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_2^2}{3^2}=\frac{1}{9},\quad P\{X=1,Y=0\}=\frac{C_2^1C_1^1}{3^2}=\frac{2}{9},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{C_2^1C_1^1}{3^2}=\frac{2}{9},\quad P\{X=2,Y=0\}=\frac{C_2^2}{3^2}=\frac{1}{9},$$

于是(X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

(2)X 的分布律为

X	0	1	2
p	4/9	4/9	1/9

Y 的分布律为

Y	0	1	2
p	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

因为 $P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0)$,所以 X,Y 不独立.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

(3)U 的可能取值为 0,1,2,

$$P\{U=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{9},$$

$$P\{U=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{6}{9},$$

$$P\{U=2\}=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=2,Y=0\}=\frac{2}{9};$$

V 的可能取值为 0,1,

$$\begin{aligned}P\{V=0\}&=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}\\&\quad+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=0,Y=2\}\\&=\frac{7}{9},\end{aligned}$$

$$P\{V=1\}=\frac{2}{9}.$$

则 $E(U)=\frac{10}{9}$，$E(V)=\frac{2}{9}$.

因为 $UV=XY$，所以 $E(UV)=E(XY)$，而 $XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$，故 $E(UV)=\frac{2}{9}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 3】 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}A\sin(x+y), & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 A；(2) 求 $E(X),D(X)$ 及 $E(Y),D(Y)$；(3) 求 ρ_{XY}.

【解】 (1) 由 $A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\mathrm{d}y=1$ 得 $A=\frac{1}{2}$.

$$(2)E(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(x+y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4},$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin(x+y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{8}-2,$$

则 $D(X)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{16}-2$. 由对称性得 $E(Y)=\frac{\pi}{4}$，$D(Y)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{16}-2$.

(3) 由 $E(XY)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}xy\sin(x+y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-1$，得

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-1,$$

于是 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{8\pi-\pi^2-16}{8\pi+\pi^2-32}$.

【例 4】 设二维随机变量(X,Y)在平面区域 D 上服从均匀分布，其中

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+\frac{y}{2}\leqslant 1\},$$

求 $D(X),D(Y),D(XY)$.

【解】 因为(X,Y)在平面区域D上服从均匀分布,所以(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

$$E(X)=\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\mathrm{d}y=2\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

$$E(X^2)=\iint_D x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\mathrm{d}y=2\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{18}.$$

$$E(Y)=\iint_D yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 y\mathrm{d}y\int_0^{1-\frac{y}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^2 y\left(1-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{2}{3},$$

$$E(Y^2)=\iint_D y^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 y^2\mathrm{d}y\int_0^{1-\frac{y}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^2 y^2\left(1-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{2}{3},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{2}{9}.$$

$$E(XY)=\iint_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}y\mathrm{d}y=2\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6},$$

$$E[(XY)^2]=\iint_D x^2y^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}y^2\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3\mathrm{d}x=\frac{2}{45},$$

$$D(XY)=E[(XY)^2]-[E(XY)]^2=\frac{1}{60}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

【例 5】 设(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & x^2+y^2>1,\end{cases}$判断$X,Y$的相关性与独立性.

【解】 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=0$,同理$E(Y)=0$,

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}y\mathrm{d}y=0,$$

因为$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$,所以X,Y不相关.

当$|x|>1$时,$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=0$;

当$|x|\leqslant 1$时,$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$.

即$f_X(x)=\begin{cases}0, & |x|>1,\\ \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & |x|\leqslant 1,\end{cases}$同理$f_Y(y)=\begin{cases}0, & |y|>1,\\ \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & |y|\leqslant 1,\end{cases}$

因为$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,所以X,Y不独立.

【例 6】 设二维随机变量(X,Y)在$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$上服从均匀分布,令

$$U=\begin{cases}0, & X\leqslant Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & X\leqslant 2Y,\\ 1, & X>2Y.\end{cases}$$

(1) 求(U,V)的联合分布律；　(2) 求ρ_{UV}.

【解】　(1)(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$

U,V的可能取值为0,1,

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X\leqslant Y,X\leqslant 2Y\}=P\{X\leqslant Y\}=\iint\limits_{x\leqslant y}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X\leqslant Y,X>2Y\}=0,$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\leqslant 2Y\}=P\{Y\leqslant X\leqslant 2Y\}=\iint\limits_{y\leqslant x\leqslant 2y}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y,X>2Y\}=P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

故(U,V)的联合分布律为

U \ V	0	1
0	1/4	0
1	1/4	1/2

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky60)

(2) 因为$U\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$,$V\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,$UV\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

所以$E(U)=\dfrac{3}{4}$,$E(U^2)=\dfrac{3}{4}$,$E(V)=\dfrac{1}{2}$,$E(V^2)=\dfrac{1}{2}$,$E(UV)=\dfrac{1}{2}$,$D(U)=\dfrac{3}{16}$,$D(V)=\dfrac{1}{4}$,

于是　$\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{8}$,

故　$\rho_{UV}=\dfrac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\cdot\sqrt{D(V)}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

【例7】　设(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 判断X,Y的相关性；　(2) 求$D(X-2Y)$.

【解】　(1)$E(X)=\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1(2-x-y)\mathrm{d}y=\dfrac{5}{12}$,

$$E(Y)=\iint\limits_D yf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\int_0^1(2-x-y)\mathrm{d}x=\frac{5}{12},$$

$$E(XY)=\iint\limits_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1(2-x-y)y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{6},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{6}-\frac{25}{144}=\frac{-1}{144}.$$

$\rho_{XY}\neq 0$,故X,Y相关.

(2) $E(X^2)=\iint\limits_D x^2 f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^1(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{4}$，同理 $E(Y^2)=\frac{1}{4}$，

$D(X)=D(Y)=\frac{11}{144}$，$D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{59}{144}$.

题型五 二维及多维随机变量函数的数字特征

【例 1】 设 $Y\sim E(1)$，$X_k=\begin{cases}0, & Y\leqslant k,\\ 1, & Y>k\end{cases}$ $(k=1,2)$，

(1) 求 (X_1,X_2) 的联合分布律；(2) 求 $E(X_1+X_2)$.

【解】 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$

(1) (X_1,X_2) 的可能取值为 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$，

$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\leqslant 1,Y\leqslant 2\}=P\{Y\leqslant 1\}=1-\mathrm{e}^{-1}$；

$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\leqslant 1,Y>2\}=0$；

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\leqslant 2\}=P\{1<Y\leqslant 2\}=F_Y(2)-F_Y(1)=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}$；

$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=\mathrm{e}^{-2}$.

(2) X_1 的分布律为

X_1	0	1
p	$1-\mathrm{e}^{-1}$	e^{-1}

X_2 的分布律为

X_2	0	1
p	$1-\mathrm{e}^{-2}$	e^{-2}

故 $E(X_1)=\mathrm{e}^{-1}$，$E(X_2)=\mathrm{e}^{-2}$，$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{-2}$.

【例 2】 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ 且 X,Y 相互独立，令 $U=|X-Y|$，求 $D(U)$.

【解】 因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ 且 X,Y 相互独立，所以 $X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，$\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，令 $\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}=V$，则 $U=\sqrt{2}\sigma|V|$，$D(U)=2\sigma^2D(|V|)$，而

$D(|V|)=E(V^2)-[E(|V|)]^2$，

$$E(|V|)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|v|\,\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}v\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(1)=\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$E(V^2)=D(V)+[E(V)]^2=1$，

故 $D(U)=2\sigma^2D(|V|)=2\sigma^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$.

【例 3】 设二维随机变量 (X,Y) 在平面区域 D 上服从均匀分布，其中

$$D=\{(x,y)\mid 0<x<1,|y|<x\}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(1) 求 X,Y 的边缘密度,并判断 X,Y 的独立性; (2)$Z=X+2Y$,求 $D(Z)$.

【解】 (1)$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$,

当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时,$f_X(x)=0$;当 $0<x<1$ 时,$f_X(x)=\int_{-x}^{x}\mathrm{d}y=2x$,

故 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$,

当 $y\leqslant -1$ 或 $y\geqslant 1$ 时,$f_Y(y)=0$;当 $-1<y<1$ 时,$f_Y(y)=\int_{|y|}^{1}\mathrm{d}x=1-|y|$,

故 $f_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,所以 X,Y 不独立.

$E(X)=\int_0^1 xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$,$E(Y)=\int_{-1}^{1}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}y(1-|y|)\mathrm{d}y=0$,

$E(X^2)=\int_0^1 x^2f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$,$E(Y^2)=\int_{-1}^{1}y^2f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}y^2(1-|y|)\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$,

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{18}$, $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{6}$,

$E(XY)=\iint_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}y\mathrm{d}y=0$,$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$,

$D(Z)=D(X+2Y)=D(X)+4D(Y)+4\mathrm{Cov}(X,Y)=D(X)+4D(Y)=\frac{1}{18}+\frac{2}{3}=\frac{13}{18}$.

【例 4】 设 X,Y 独立同分布,且 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,令 $Z=\max\{X,Y\}$,求 $E(Z)$.

【解】 因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$,

所以 $U=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$,$V=\frac{Y-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$,且 $X=\sigma U+\mu$,$Y=\sigma V+\mu$.

因为 U,V 相互独立,所以 (U,V) 的联合密度函数为

$$f(u,v)=f_U(u)f_V(v)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}},$$

于是 $E(Z)=E(\max\{X,Y\})=E(\max\{\sigma U+\mu,\sigma V+\mu\})=\sigma E(\max\{U,V\})+\mu$,而

$$\begin{aligned}E(\max\{U,V\})&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{u,v\}f(u,v)\mathrm{d}v=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{u,v\}\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\sin\theta\cdot\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r+\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\cos\theta\cdot\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\\&=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\overset{\frac{r^2}{2}=t}{=}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{+\infty}2t\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\end{aligned}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

故 $E(Z)=\sigma E(\max\{U,V\})+\mu=\dfrac{\sigma}{\sqrt{\pi}}+\mu$.

【例 5】 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 $U=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$，求 $E(U)$ 及 $D(U)$.

【解】 令 $Y_i=X_i-\mu$，则 $Y_i\sim N(0,\sigma^2)$，从而 $\dfrac{Y_i}{\sigma}\sim N(0,1)(1\leqslant i\leqslant n)$，由

$$E(|Y_i|)=\sigma E\left(\left|\frac{Y_i}{\sigma}\right|\right)=\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}d\left(\frac{t^2}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

得
$$E(U)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i-\mu|)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|Y_i|)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

$$D(|Y_i|)=E(|Y_i|^2)-[E(|Y_i|)]^2=E(Y_i^2)-\frac{2}{\pi}\sigma^2,$$

而 $E(Y_i^2)=\sigma^2E\left[\left(\dfrac{Y_i}{\sigma}\right)^2\right]=\sigma^2\left\{D\left(\dfrac{Y_i}{\sigma}\right)+\left[E\left(\dfrac{Y_i}{\sigma}\right)\right]^2\right\}$，且 $\dfrac{Y_i}{\sigma}\sim N(0,1)$，所以 $E(Y_i^2)=\sigma^2$，于是 $D(|Y_i|)=\sigma^2-\dfrac{2}{\pi}\sigma^2$，故

$$D(U)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(|X_i-\mu|)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(|Y_i|)=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{\sigma^2}{n}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

测试题

一、选择题

1. 设 X,Y 是两个随机变量，若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则(　　).

(A) X,Y 独立　　(B) $E(X)=E(Y)$

(C) $D(XY)=D(X)D(Y)$　　(D) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

2. 设随机变量 X,Y 独立同分布，令 $U=X+Y,V=X-Y$，则 U,V(　　).

(A) 独立　　(B) 不独立　　(C) 相关　　(D) 不相关

3. 设随机变量 X,Y 的方差存在且大于零，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ 是 X,Y(　　).

(A) 不相关的充要条件　　(B) 独立的充要条件

(C) 不相关的充分非必要条件　　(D) 独立的必要非充分条件

4. 设 X,Y 都服从正态分布且不相关，下列结论正确的是(　　).

(A) X,Y 独立　　(B) X,Y 不独立

(C) $X+Y$ 服从正态分布　　(D) 若 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X,Y 独立

5. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布且 $D(X_1)=\sigma^2$，令 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则(　　).

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})=\dfrac{(n-1)\sigma^2}{n^2}$　　(B) $\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})=\sigma^2$

(C) $D(X_1+\overline{X})=\dfrac{(n+3)\sigma^2}{n}$　　(D) $D(X_1+\overline{X})=\dfrac{(n+1)\sigma^2}{n}$

二、填空题

1. 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$，则 $P\{X > \sqrt{D(X)}\} =$ _____.

2. 设试验成功的概率为 $p(0 < p < 1)$，令 X 表示 100 次试验中成功的次数，当 $p =$ ____时，$D(X)$ 最大，且最大值为_____.

3. 设 $X \sim E(1)$，则 $E(X^2 + e^{-3x}) =$ _____.

4. 设随机变量 $X_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)(n \geqslant 2)$ 独立同分布且 $E(X_{ij}) = 2$，令

$$Y = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$，则 $E(Y) =$ _____.

5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.2\Phi(x) + 0.8\Phi\left(\frac{x}{2} - 1\right)$，则 $E(X) =$ _____.

6. 随机变量 $X \sim U(-2,3)$，$Y = \begin{cases} -1, & X < 0, \\ 1, & X \geqslant 0, \end{cases}$ 则 $E(Y^2) =$ _____.

7. 独立对目标射击 n 次，用 X,Y 分别表示成功和失败的次数，令 $U = X - Y, V = X + Y$，则 $\rho_{XY} =$ _____，$\rho_{UV} =$ _____.

三、解答题

1. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = Ae^{-|x|}\ (-\infty < x < +\infty)$.

(1) 求常数 A；　(2) 求 $D(X)$；　(3) 讨论 X 与 $|X|$ 的相关性与独立性.

2. 设 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$ 且 X,Y 相互独立，$Z = \max\{X,Y\}$，求 $E(Z)$.

3. 某生产线生产次品的概率为 $p(0 < p < 1)$，各个产品合格与否相互独立，当出现次品时即停机检查. 设从开机到第一次停机已生产产品个数为 X，求 $D(X)$.

4. 设 $X_i \sim N(0,\sigma^2)(i = 1,2,\cdots n)(n \geqslant 2)$ 且相互独立，令 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, Y_i = X_i - \overline{X}(i = 1,2,\cdots,n)$.

(1) 求 $E(Y_i^2)$；　(2) 求 $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n)$.

5. 设 X,Y 相互独立且都服从参数为 2 的指数分布，令 $U = \max\{X,Y\}, V = \min\{X,Y\}$，求 $\mathrm{Cov}(U,V)$.

6. 设 A,B 为随机事件，令 $X = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 发生}, \\ -1, & \text{若 } A \text{ 不发生} \end{cases}, Y = \begin{cases} 1, & \text{若 } B \text{ 发生}; \\ -1, & \text{若 } B \text{ 不发生}. \end{cases}$

证明：随机变量 X,Y 不相关的充分必要条件是 A,B 独立.

测试题参考答案

一、选择题

1. 因为 $E(XY) = E(X)E(Y)$，所以 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$，于是 $D(X+Y) = \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y) = \mathrm{Cov}(X, X) + 2\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) = D(X) + D(Y)$，应选(D).

2. 因为 $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathrm{Cov}(X,X) - \mathrm{Cov}(Y,Y) = D(X) - D(Y) = 0$，所以 $\rho_{UV} = 0$，即 U,V 不相关，应选(D).

3. 因为 $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$，所以 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ 的充分必要条件是 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$，即 X,Y 不相关，应选(A).

4. 因为若 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X,Y 独立与 X,Y 不相关等价，应选(D).

5. 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立，所以 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0(i \neq j)$，于是 $\mathrm{Cov}(X_1, \overline{X}) = \frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_1, X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \frac{1}{n}D(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}$，故(A),(B)都不对；$D(X_1 + \overline{X}) = \mathrm{Cov}(X_1 + \overline{X}, X_1 + \overline{X}) =$

$\mathrm{Cov}(X_1,X_1)+\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})+\mathrm{Cov}(\overline{X},X_1)+\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{X})=D(X_1)+2\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})+D(\overline{X})=\sigma^2+\frac{2\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}$

$=\frac{(n+3)\sigma^2}{n}$，应选(C).

二、填空题

1. 因为 $X\sim E(\lambda)$，所以 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 又由 $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$ 得 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}=$

$P\left\{X>\frac{1}{\lambda}\right\}=1-P\left\{X\leqslant\frac{1}{\lambda}\right\}=1-F\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

2. 显然 $X\sim B(100,p)$，$D(X)=100p(1-p)$，令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}D(X)=100(1-2p)=0$ 得 $p=\frac{1}{2}$，显然 $p=\frac{1}{2}$ 为最大值点，最大值为 $D(X)=25$.

3. 因为 $X\sim E(1)$，所以 $f_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 且 $E(X)=1$，$D(X)=1$，于是 $E(X^2+\mathrm{e}^{-3x})=E(X^2)+$

$E(\mathrm{e}^{-3x})=D(X)+[E(X)]^2+E(\mathrm{e}^{-3x})=2+E(\mathrm{e}^{-3x})=2+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x=2+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-4x}\,\mathrm{d}(4x)=\frac{9}{4}$.

4. 由行列式的定义得 $Y=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}X_{1j_1}X_{2j_2}\cdots X_{nj_n}$，注意到奇偶排列个数相等且 X_{ij} 相互独立，于是

$E(Y)=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}E(X_{1j_1}X_{2j_2}\cdots X_{nj_n})=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}E(X_{1j_1})E(X_{2j_2})\cdots E(X_{nj_n})=0$.

5. 随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=0.2\varphi(x)+0.4\varphi\left(\frac{x}{2}-1\right)$，

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{0.2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+\frac{0.4}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{(\frac{x}{2}-1)^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{0.8}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{(\frac{x}{2}-1)^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}-1\right)=$

$\frac{0.8}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}2(t+1)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1.6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=1.6$.

6. 因为 $X\sim U(-2,3)$，所以 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & -2<x<3,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 又 $P\{Y=-1\}=$

$P\{X<0\}=\int_{-\infty}^{0}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\frac{1}{5}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$，$P\{Y=1\}=P\{X\geqslant 0\}=\int_0^{+\infty}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^3\frac{1}{5}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$，

于是 $E(Y^2)=(-1)^2\cdot\frac{2}{5}+1^2\cdot\frac{3}{5}=1$.

7. 因为 $X+Y=n$，所以 $Y=-X+n$，于是 $\rho_{XY}=-1$，因为 $\mathrm{Cov}(U,V)=\mathrm{Cov}(X-Y,n)=0$，所以 $\rho_{UV}=0$(注意：常数与任何随机变量独立).

三、解答题

1. (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=2A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2A=1$ 得 $A=\frac{1}{2}$.

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=0$，

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(3)=2!=2$，于是 $D(X)=2$.

(3) $E(X\cdot|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=0$，因为 $\mathrm{Cov}(X,|X|)=E(X\cdot|X|)-E(X)E(|X|)$

$=0$，所以 X 与 $|X|$ 不相关. 设 $(X,|X|)$ 的联合分布函数为 $F(x,y)$，$F(1,1)=P\{X\leqslant 1,|X|\leqslant 1\}=$

微信公众号【顶尖考研】(ID：diky66)

$P\{-1\leqslant x\leqslant 1\}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-|x|}dx=\int_{0}^{1}e^{-x}dx=1-\frac{1}{e}$，$F_X(1)=P\{X\leqslant 1\}=\int_{-\infty}^{1}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)=1-\frac{1}{2e}$，$F_{|X|}(1)=P\{|X|\leqslant 1\}=P\{-1\leqslant X\leqslant 1\}=1-\frac{1}{e}$，因为 $F(1,1)\neq F_X(1)F_{|X|}(1)$，所以 X 与 $|X|$ 不相互独立.

2. 因为 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，所以 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}(-\infty<x,y<+\infty)$，因为 X，Y 独立，所以 X，Y 的联合密度函数为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，于是 $E(Z)=\iint_D\max(x,y)f(x,y)dxdy=\iint_{D_1}xf(x,y)dxdy+\iint_{D_2}yf(x,y)dxdy$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid y<x\}$，$D_2=\{(x,y)\mid y\geqslant x\}$. 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则 $D_1=\left\{(r,\theta)\mid -\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r<+\infty\right\}$，$D_2=\left\{(r,\theta)\mid \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4},0\leqslant r<+\infty\right\}$，于是 $E(Z)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{0}^{+\infty}r^2e^{-\frac{r^2}{2}}\cos\theta dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}d\theta\int_{0}^{+\infty}r^2e^{-\frac{r^2}{2}}\sin\theta dr\right]$

$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{+\infty}r^2e^{-\frac{r^2}{2}}dr\overset{\frac{r^2}{2}=t}{=}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{2}{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. 显然 X 服从参数为 p 的几何分布，即 $X\sim G(p)$，其分布律为 $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}(k=1,2,\cdots)$. $E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot P\{X=n\}=p\sum_{n=1}^{\infty}n(1-p)^{n-1}$，令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则 $S(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，于是 $E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot P\{X=n\}=pS(1-p)=\frac{1}{p}$；$E(X^2)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot P\{X=n\}=p\sum_{n=1}^{\infty}n^2(1-p)^{n-1}$，令 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-1}+\frac{1}{(1-x)^2}=x\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''+\frac{1}{(1-x)^2}=x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$，则 $E(X^2)=pS_1(1-p)=\frac{2-p}{p^2}$，故 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1-p}{p^2}$.

4. (1) 由对称性得 $E(Y_i^2)=E(Y_1^2)$，$Y_1=X_1-\overline{X}=\left(1-\frac{1}{n}\right)X_1-\frac{1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n$，因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且服从正态分布，所以 $Y_1\sim N\left(0,\frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$，于是 $E(Y_i^2)=E(Y_1^2)=D(Y_1)+[E(Y_1)]^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$.

(2) $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=\mathrm{Cov}(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})=\mathrm{Cov}(X_1,X_n)-\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})-\mathrm{Cov}(\overline{X},X_n)+\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{X})=-\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})-\mathrm{Cov}(\overline{X},X_n)+D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}-2\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}-\frac{2}{n}\mathrm{Cov}(X_1,X_1)=\frac{\sigma^2}{n}-\frac{2\sigma^2}{n}=-\frac{\sigma^2}{n}$.

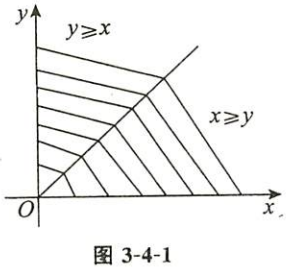


图 3-4-1

5. 因为 X，Y 独立，所以 X，Y 的联合密度函数为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-2(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 令 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x<+\infty,0\leqslant y<+\infty\}$，由对称性及图 3-4-1 得 $E(U)=4\iint_D\max\{x,y\}e^{-2(x+y)}dxdy=8\int_0^{+\infty}dx\int_0^x xe^{-2(x+y)}dy=8\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx\int_0^x e^{-2y}dy=4\int_0^{+\infty}xe^{-2x}(1-e^{-2x})dx=4\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx-4\int_0^{+\infty}xe^{-4x}dx=\int_0^{+\infty}2xe^{-2x}d(2x)-$

微信公众号【简尘考研】(ID:djky66)

$\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}4xe^{-4x}d(4x)=\Gamma(2)-\frac{1}{4}\Gamma(2)=\frac{3}{4}$；$E(V)=4\iint\limits_D\min\{x,y\}e^{-2(x+y)}dxdy=8\int_0^{+\infty}dx\int_0^x ye^{-2(x+y)}dy=$

$8\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx\int_0^x ye^{-2y}dy=2\int_0^{+\infty}e^{-2x}(1-e^{-2x}-2xe^{-2x})dx=2\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx-2\int_0^{+\infty}e^{-4x}dx-4\int_0^{+\infty}xe^{-4x}dx=$

$\int_0^{+\infty}e^{-2x}d(2x)-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-4x}d(4x)-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}4xe^{-4x}d(4x)=\Gamma(1)-\frac{1}{2}\Gamma(1)-\frac{1}{4}\Gamma(2)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$；

$E(UV)=4\iint\limits_D\max\{x,y\}\min\{x,y\}e^{-2(x+y)}dxdy=8\int_0^{+\infty}dx\int_0^x xye^{-2(x+y)}dy=8\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx\int_0^x ye^{-2y}dy=$

$2\int_0^{+\infty}xe^{-2x}(1-e^{-2x}-2xe^{-2x})dx=2\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx-2\int_0^{+\infty}xe^{-4x}dx-4\int_0^{+\infty}x^2e^{-4x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(2x)e^{-2x}d(2x)$

$-\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}4xe^{-4x}d(4x)-\frac{1}{16}\int_0^{+\infty}(4x)^2e^{-4x}d(4x)=\frac{1}{2}\Gamma(2)-\frac{1}{8}\Gamma(2)-\frac{1}{16}\Gamma(3)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{2}{16}=\frac{1}{4}$，则

$\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{16}$.

6. 令 $P(A)=p,P(B)=q,P(AB)=r$，

由 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1-q & q\end{pmatrix}$ 得 $E(X)=2p-1,E(Y)=2q-1$.

$P\{XY=1\}=P(AB)+P(\overline{A}\,\overline{B})=r+1-P(A+B)=2r+1-p-q$，

$P\{XY=-1\}=1-P\{XY=1\}=p+q-2r$，

$E(XY)=4r+1-2p-2q$，$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=4r-4pq$，

于是 X,Y 不相关的充分必要条件是 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ 或 $r=pq$，即 A,B 独立.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第五章　大数定律与中心极限定理

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

大纲点击

1. 了解切比雪夫不等式.

2. 了解切比雪夫大数定律、伯努利大数定律和辛钦大数定律(独立同分布随机变量序列的大数定律).

3. 了解棣莫弗-拉普拉斯定理(二项分布以正态分布为极限分布)、列维-林德伯格定理(独立同分布随机变量序列的中心极限定理).

基础复习模块——基本概念、原理、考点

一、切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望及方差都存在,则对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2},\text{或者 }P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geqslant1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

【注解】

切比雪夫不等式本质上说明随机变量 X 取 $E(X)$ 附近的值概率很大.

二、大数定律

定理 1(切比雪夫大数定律)　设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立,$D(X_i)$ 存在且存在常数 $M_0>0$,使得 $D(X_i)\leqslant M_0(i=1,2,\cdots)$,则对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

或 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$,即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$.

定理 2(伯努利大数定律)　设 $X_n\sim B(n,p)$,则对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1,\text{即}\frac{X_n}{n}\xrightarrow{P}p.$$

定理 3(辛钦大数定律)　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布,且 $E(X_i)=\mu$,则对任意的 $\varepsilon>0$,有 $\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$,即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$.

三、中心极限定理

定理 1(列维-林德伯格中心极限定理)　设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布,

且 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2(i=1,2,\cdots)$，则对任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

【注解】

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为有限个独立同分布的随机变量，且方差存在，则 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从期望为 $n\mu$，方差为 $n\sigma^2$ 的正态分布，即 $\sum_{i=1}^{n}X_i\overset{\cdot}{\sim}N(n\mu,n\sigma^2)$，标准化得 $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\overset{\cdot}{\sim}N(0,1)$，于是对任意实数 x，有

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}\approx\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

定理 2（棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理） 设 $X_n\sim B(n,p)(0<p<1)(n=1,2,\cdots)$，则对任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

【注解】

对随机变量服从二项分布，当 n 充分大，而 p 很小时，计算其概率时可使用拉普拉斯中心极限定理进行近似计算. 即若 $X_n\sim B(n,p)$，则 $X_n\overset{\cdot}{\sim}N(np,np(1-p))$，标准化得

$$\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\overset{\cdot}{\sim}N(0,1),$$

于是对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 有

$$P\left\{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}\approx\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

重点题型分析

题型一 利用切比雪夫不等式估计概率

【例 1】 设随机变量 $X\sim E(1)$，用切比雪夫不等式估计 $P\{|X-1|\geqslant 4\}\leqslant$ _____.

【解】 由 $X\sim E(1)$ 得 $E(X)=1, D(X)=1$，于是

$$P\{|X-1|\geqslant 4\}=P\{|X-E(X)|\geqslant 4\}\leqslant\frac{D(X)}{4^2}=\frac{1}{16}.$$

【例 2】 设 $X\sim N(0,4^2), Y\sim N(2,5^2)$，且 X,Y 相互独立，用切比雪夫不等式估计

$P\{|X+Y-2|<10\}\geqslant$ _____.

【解】 因为 X,Y 独立，所以 $X+Y\sim N(2,41)$，于是

$$P\{|X+Y-2|<10\}=P\{|X+Y-E(X+Y)|<10\}\geqslant 1-\frac{D(X+Y)}{10^2}=\frac{59}{100}.$$

【例 3】 设 X,Y 为两个随机变量，$E(X)=-2,E(Y)=3$，又 $D(X)=9,D(Y)=16$ 且 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，则由切比雪夫不等式得 $P\{|X+Y-1|\leqslant 10\}\geqslant$ _____.

【解】 令 $Z=X+Y$，则 $E(Z)=E(X)+E(Y)=1$，

$$D(Z)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=9+16-12=13,$$

由切比雪夫不等式得

$$P\{|X+Y-1|\leqslant 10\}=P\{|Z-E(Z)|\leqslant 10\}\geqslant 1-\frac{D(Z)}{10^2}=\frac{87}{100}.$$

题型二　大数定律问题

【例】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布且 $E(X_i)=0(i=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<n\}$ 为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{3}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考(ID:djky66

【解】 由辛钦大数定律，对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1,\quad \mu=E(X_i)=0(i=1,2,\cdots),$$

取 $\varepsilon=1$，则有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<1\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|<1\right\}=1,$$

因为 $\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right|<1\right\}\subset\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<1\right\}$，所以 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right|<1\right\}\leqslant P\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<1\right\}\leqslant 1$，

由极限保号性得　$1=\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right|<1\right\}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<1\right\}\leqslant 1$，

故　$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<1\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<n\right\}=1$，

应选(B).

题型三　利用中心极限定理进行概率近似计算

【例 1】 现有一批种子，其中良种占 $\frac{1}{6}$，任取 6 000 粒，问在这些种子中，良种所占比例与 $\frac{1}{6}$ 之差小于 1% 的概率是多少？

【解】 $X\sim B\left(6\ 000,\frac{1}{6}\right)$，$E(X)=\mu=1\ 000$，$D(X)=6\ 000\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5\ 000}{6}$，

由拉普拉斯中心极限定理，X 近似服从 $N\left(1\ 000,\frac{5\ 000}{6}\right)$，$\dfrac{X-1\ 000}{\sqrt{\frac{5\ 000}{6}}}$ 近似服从标准正态分布，

于是

$$P\left\{\left|\frac{X}{6\ 000}-\frac{1}{6}\right|<0.01\right\}=P\left\{\left|\frac{X-1\ 000}{\sqrt{\frac{5\ 000}{6}}}\right|\leqslant\frac{60}{\sqrt{\frac{5\ 000}{6}}}\right\}=P\left\{\left|\frac{X-1\ 000}{\sqrt{\frac{5\ 000}{6}}}\right|\leqslant 2.078\right\}$$

$$\approx\Phi(2.078)-\Phi(-2.078)=2\Phi(2.078)-1\approx 0.96.$$

【例 2】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同服从于参数为 $\lambda>0$ 的指数分布，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leqslant x\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leqslant x\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n}/\lambda}\leqslant x\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【解】 $E(X_i)=\frac{1}{\lambda}$，$D(X_i)=\frac{1}{\lambda^2}(i=1,2,\cdots)$，由列维－林德伯格中心极限定理，$\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从 $N\left(\frac{n}{\lambda},\frac{n}{\lambda^2}\right)$，标准化得 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}}$ 或 $\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}$ 近似服从标准正态分布，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$P\left\{\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}\approx\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

取极限得

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

应选(D).

【例 3】　一生产线生产成品包装箱，设每箱平均重量为 50 千克，标准差为 5 千克. 如果用最大载重为 5 吨的卡车装运，用中心极限定理计算每车最多装多少箱，可以保证卡车不超重的概率大于 0.977. ($\Phi(2)=0.977$)

【解】　设可以装运 n 箱，且设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为第 i 箱的重量. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是一组独立同分布的随机变量，总重量为 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$. 显然 $E(X_i)=50, D(X_i)=5^2$，$E(X)=50n, D(X)=25n$，则

$$P\{X\leqslant 5\,000\}=P\left\{\frac{X-50n}{5\sqrt{n}}\leqslant\frac{5\,000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{1\,000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.977=\Phi(2),$$

于是 $\dfrac{1\,000-10n}{\sqrt{n}}>2$，解得 $n<98.019\,8$，即最多装 98 箱可使卡车不超载的概率大于 0.977.

测试题

一、选择题

1. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，其分布函数为 $F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{x}{b}(b>0)$，该随机变量序列对辛钦大数定律的适用情况是(　　).

(A) 不适用　　(B) 适用　　(C) 无法确定　　(D) 适用与否与 b 取值有关

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是相互独立的随机变量序列，由辛钦大数定律，当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于数学期望，只要(　　).

(A) 同分布于指数分布　　(B) 具有相等的数学期望

(C) 同分布于同一离散型分布　　(D) 同分布于同一连续型分布

微信公众号【顶尖考研】(Qi: djkyee)

二、填空题

1. 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的简单随机样本，当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于_____.

2. 设随机变量列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，且 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2(i=1,2,\cdots)$，则 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于_____.

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布于参数为 λ 的泊松分布，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant 0\right\}=$_____.

4. 设随机变量 X,Y 满足 $E(X)=-1, E(Y)=1, D(X)=9, D(Y)=16$，且 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，根据切比雪夫不等式有 $P\{|X+Y|<5\}\geqslant$_____.

5. 设 $X\sim B\left(100,\dfrac{1}{10}\right)$，根据拉普拉斯中心极限定理，估计 $P\{X<16\}\approx$_____.

三、解答题

1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且 X_1 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 用切比雪夫不等式证明：$P\{0<\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<4n\}\geqslant\dfrac{2n-1}{2n}$.

2. 计算机在进行加法运算时，对每个加数取整. 设所有的取整误差相互独立，且都服从$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上的均匀分布，问多少个数加在一起使得误差绝对值小于 10 的概率为 0.9?

3. 一个系统由 100 个独立的元件构成，系统工作期间每个元件故障率为 10%，至少需要 85 个元件正常工作系统才能正常运行.

(1) 求系统的可靠率；

(2) 若系统由 n 个元件组成，至少需要 80% 元件正常工作系统才能正常运行，问 n 至少取多少才能保证系统正常运行的概率不低于 95%?

测试题参考答案

一、选择题

1. 密度函数为 $f(x)=\dfrac{b}{\pi(b^2+x^2)}$，辛钦大数定律要求随机变量序列数学期望存在，即广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而 $\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=+\infty$，所以辛钦大数定律不适用，应选(A).

2. 辛钦大数定律要求随机变量序列同分布且有数学期望，(B) 选项不一定同分布，(C)，(D) 不一定保证具有数学期望，(A) 选项符合辛钦大数定律的条件，应选(A).

二、填空题

1. $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $E(X^2)$，因为 $X\sim E(2)$，所以 $E(X)=\dfrac{1}{2}$，$D(X)=\dfrac{1}{4}$，

于是 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\dfrac{1}{2}$.

2. 因为 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $E(X^2)$，而 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2$.

3. 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布于参数为 λ 的泊松分布，所以 $E(X_i)=D(X_i)=\lambda(i=1,2,\cdots)$，

从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从 $N(n\lambda,n\lambda)$，标准化得 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ 近似服从 $N(0,1)$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant 0\right\}=\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$.

4. $E(X+Y)=0$，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=9+16-\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=13$，

由切比雪夫不等式得 $P\{|X+Y|<5\}\geqslant 1-\dfrac{13}{25}=\dfrac{12}{25}$.

5. $E(X)=10$，$D(X)=9$，则 X 近似服从 $N(10,9)$，于是 $\dfrac{X-10}{3}$ 近似服从标准正态分布，

于是 $P\{X<16\}=P\left\{\dfrac{X-10}{3}<2\right\}\approx\Phi(2)$.

三、解答题

1. 令 $Z=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则 $E(Z)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=nE(X_1)=n\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=n\Gamma(3)=2n$，

$D(Z)=\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)=nD(X_1)=nE(X_1^2)-n[E(X_1)]^2=2n$，

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

于是 $P\{|Z-E(Z)|<D(Z)\}=P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i-2n\right|<2n\right\}\geqslant 1-\frac{D(Z)}{[D(Z)]^2}=\frac{2n-1}{2n}$，

而 $P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i-2n\right|<2n\right\}=P\left\{0<\sum_{i=1}^{n}X_i<4n\right\}$，所以 $P\left\{0<\sum_{i=1}^{n}X_i<4n\right\}\geqslant\frac{2n-1}{2n}$.

2. 设 n 个数相加可使误差绝对值小于 10 的概率为 0.9，设 n 个数的取整误差为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，则 $X_i\sim U\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)(i=1,2,\cdots,n)$，且 $E(X_i)=0,D(X_i)=\frac{1}{12}(i=1,2,\cdots,n)$，由列维-林德伯格中心极限定理，

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|<10\right\}=P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right|<\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right\}\approx 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)-1=0.9$$

，于是 $\Phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right)=0.95=\Phi(1.645)$，即 $\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}=1.645$，解得 $n\approx 443$.

3. (1) 令 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 个元件正常工作},\\ 0, & \text{第 } i \text{ 个元件出故障},\end{cases}$

则 $X_i\sim B(1,0.9),E(X_i)=0.9,D(X_i)=0.09(i=1,2,\cdots,100)$.

$X=\sum_{i=1}^{100}X_i$ 为正常工作的元件个数，$X=\sum_{i=1}^{100}X_i$ 近似服从分布 $N(90,9)$，标准化得 $\frac{X-90}{3}$ 近似服从 $N(0,1)$，

于是可靠率为 $P\left\{X=\sum_{i=1}^{100}X_i>85\right\}=1-P\{X\leqslant 85\}=1-P\left\{\frac{X-90}{3}\leqslant-\frac{5}{3}\right\}\approx 1-\Phi\left(-\frac{5}{3}\right)=\Phi\left(\frac{5}{3}\right)=0.952$，即系统可靠率为 95.2%.

(2) $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从分布 $N(0.9n,0.09n)$，标准化得 $\frac{X-0.9n}{0.3\sqrt{n}}$ 近似服从分布 $N(0,1)$，由 $P\{X=\sum_{i=1}^{n}X_i\geqslant 0.8n\}=1-P\left\{\frac{X-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\leqslant-\frac{\sqrt{n}}{3}\right\}\approx 1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geqslant 0.95=\Phi(1.65)$ 得 $\frac{\sqrt{n}}{3}\geqslant 1.65$，解得 $n\geqslant 24.492\,5$，即 n 至少为 25 时系统正常运行的概率不低于 95%.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第六章　数理统计的基本概念

大纲点击

1. 理解总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差及样本矩的概念，其中样本方差定义为

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

2. 了解产生 χ^2 分布，t 分布和 F 分布的概念及性质，了解上侧 α 分位数的概念并会查表计算.

3. 了解正态总体的常用抽样分布.

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

微信公众号【顶尖考研】
(dingjiky66)

一、总体、样本及统计量的概念

1. 总体 —— 所研究对象的某一指标的全体称为总体，用 X 表示. 本质上总体就是一个随机变量，总体中每个元素称为个体.

2. 样本 —— 从总体 X 中抽取若干个体 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，称其为总体 X 的一个样本，其中个体的个数 n 称为样本容量. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，若满足

(1) $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立.

(2) $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中每个个体与总体 X 服从同样的分布，

称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，一般情况下我们研究的样本都是简单随机样本，简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一组取值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为样本观察值.

3. 样本的分布

(1) 设总体 X 是离散型，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观察值，则样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布律为

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=P\{X=x_1\}P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}.$$

(2) 设总体 X 是连续型，其密度函数为 $f(x)$，则样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合密度函数为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n).$$

4. 统计量 —— 设 X 为总体，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 构成的无参函数称为统计量(一个样本可以构成无数个统计量). 常用的统计量有：

(1) 样本均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$(与此相对应，$E(X)=\mu$ 称为总体均值).

(2) 样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$(与此相对应，$D(X)=\sigma^2$ 称为总体方差).

(3) 样本的 k 阶原点矩：$A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k(k=1,2,\cdots)$(与此相对应，$E(X^k)$ 称为总体的 k 阶原点矩).

(4) 样本的 k 阶中心矩：$B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k(k=1,2,\cdots)$(与此相对应，$E[(X-\overline{X})^k]$ 为总体的 k 阶中心距).

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

二、三个常用的抽样分布

(一)χ^2 分布

1. χ^2 分布的定义 —— 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且都服从标准正态分布，则称随机变量 $X=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $X\sim\chi^2(n)$.

2. χ^2 分布的性质

(1) 设 $X\sim\chi^2(n)$，X 的密度函数如图 3-6-1，即

$$P\{X>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\}=\frac{\alpha}{2},\quad P\{X>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\}=1-\frac{\alpha}{2},$$

称 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 为 X 的上 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点，称 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 为 X 的下 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点.

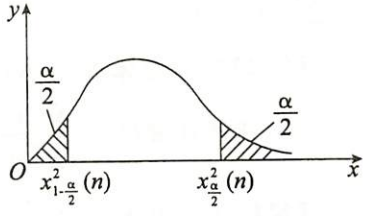


图 3-6-1

(2) 设 $X\sim\chi^2(m)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X,Y 相互独立，则 $X+Y\sim\chi^2(m+n)$.

(3) 设 $X\sim\chi^2(n)$，则 $E(X)=n$，$D(X)=2n$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(二)t 分布

1. t 分布的定义 —— 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X,Y 相互独立，则称随机变量 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $T\sim t(n)$.

注意：n 充分大时，t 分布近似于标准正态分布.

2. t 分布的性质

(1) 设 $X\sim t(n)$，其密度函数如图 3-6-2，其密度函数为偶函数，且当 n 充分大时，X 非常接近标准正态分布.

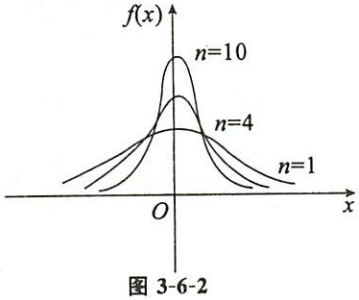


图 3-6-2

(2) 设 $X\sim t(n)$，其上下分位点是对称的，若 $P\{X>t_\alpha(n)\}=\alpha$，称 $t_\alpha(n)$ 为 X 的上(右)α 分位点.

(3) 若 $X\sim t(n)$，则 $E(X)=0$，$D(X)=\dfrac{n}{n-2}(n>2)$.

(三)F 分布

1. F 分布的定义 —— 设随机变量 $X\sim\chi^2(m)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X,Y 相互独立，则称随机变量 $F=\dfrac{X/m}{Y/n}$ 服从自由度为 m,n 的 F 分布，记为 $F\sim F(m,n)$. 设 $X\sim F(m,n)$，若 $P\{X>F_\alpha(m,n)\}=\alpha$，称 $F_\alpha(m,n)$ 为上(右)α 分位点；若

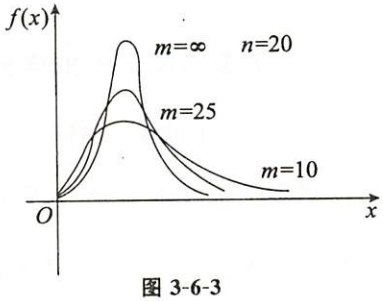


图 3-6-3

$P\{X<F_{1-\alpha}(m,n)\}=\alpha$，则称 $F_{1-\alpha}(m,n)$ 为下(左)α 分位点.

2. F 分布的性质

(1) 若 $F\sim F(m,n)$，则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n,m)$.

(2) $F_{\alpha}(m,n)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$.

(3) 若 $X\sim F(m,n)$，则其密度函数如图 3-6-3.

【例 1】 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，证明：

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n).$$

【证明】 因为 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)(1\leqslant i\leqslant n)$，由 χ^2 分布的定义，$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$.

【例 2】 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，X_1,X_2,X_3,X_4 为总体 X 的简单随机样本.

(1) 求统计量 $U=\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$ 服从的分布；(2) 求统计量 $V=\dfrac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^3}$ 服从的分布.

【解】 (1) 由 $X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，得 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，

由 $\dfrac{X_3}{\sigma}\sim N(0,1)$，$\dfrac{X_4}{\sigma}\sim N(0,1)$，得 $\dfrac{1}{\sigma^2}(X_3^2+X_4^2)\sim\chi^2(2)$，

且 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\dfrac{1}{\sigma^2}(X_3^2+X_4^2)$ 独立，由 t 分布的定义得

$$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\Big/\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2}(X_3^2+X_4^2)}=U=\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}\sim t(2).$$

(2) 由 $\dfrac{1}{\sigma^2}(X_1^2+X_2^2)\sim\chi^2(2)$，$\dfrac{1}{\sigma^2}(X_3^2+X_4^2)\sim\chi^2(2)$，

且 $\dfrac{1}{\sigma^2}(X_1^2+X_2^2)$ 与 $\dfrac{1}{\sigma^2}(X_3^2+X_4^2)$ 独立，由 F 分布的定义得

$$V=\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^3}=\frac{\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2+X_2^2)/2}{\frac{1}{\sigma^2}(X_3^2+X_4^2)/2}\sim F(2,2).$$

三、正态总体下的抽样分布

(一) 一个正态总体

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 X 的简单样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}X_1+\dfrac{1}{n}X_2+\cdots+\dfrac{1}{n}X_n$. 一个正态总体下常用分布有：

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

1. $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，标准化得 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

2. $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$.

3. $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

4. $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立.

5. $E(S^2)=\sigma^2$.

6. $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，其中 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

【注解】

因为 S^2 与 σ^2 分别为样本方差及总体方差，所以在 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 中将 σ 用 S 取代得 $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$，则 $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

(二) 两个正态总体

设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 且 X, Y 相互独立，$X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为来自总体 Y 的简单随机样本，令

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j, \quad S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2, \quad S^2 = \frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}.$$

因为 $\overline{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{m}\right)$，$\overline{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$ 且 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立，所以有

1. $\overline{X}-\overline{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}\right)$，标准化得 $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$.

2. 设 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，因为

$$\frac{(m+n-2)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2), \quad \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim N(0,1)$$

且 $\frac{(m+n-2)S^2}{\sigma^2}$ 与 $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$ 相互独立，所以有

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\Bigg/\sqrt{\frac{\frac{(m+n-2)S^2}{\sigma^2}}{m+n-2}}=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2).$$

3. 由 $\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2\sim\chi^2(m)$，$\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2\sim\chi^2(n)$，则

$$\frac{1}{m\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2\Big/\frac{1}{n\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2\sim F(m,n).$$

4. 由 $\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(m-1)$，$\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n-1)$，则

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1).$$

重点题型分析

题型一　统计量及服从的分布

【例 1】 设 X 为总体，X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 X 的简单随机样本，以下不是统计量的为(　　).

(A) $\frac{X_1+2X_2+3X_3+4X_4}{10}$　　(B) $X_1^2+X_2^2+X_3+2X_4$

(C) $a(X_1-2X_2)^2+2(3X_3-4X_4)^2$　　(D) $X_1^2+X_2^2$

【解】 因为统计量的定义为样本的无参数函数，显然(C)中样本的函数中含参数 a，故其不是统计量，应选(C).

【例 2】 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $X\sim N(0,4)$ 的简单样本，且 $U=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 服从 χ^2 分布，求 a,b 及自由度.

【解】 因为 X_1,X_2,X_3,X_4 为独立的正态变量，所以 $X_1-2X_2\sim N(0,20)$，标准化得 $\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1)$，$3X_3-4X_4\sim N(0,100)$，标准化得 $\frac{3X_3-4X_4}{10}\sim N(0,1)$，又因为 $\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}$ 与 $\frac{3X_3-4X_4}{10}$ 独立，所以

$$\left(\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2+\left(\frac{3X_3-4X_4}{10}\right)^2=\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_3-4X_4)^2\sim\chi^2(2),$$

故 $a=\frac{1}{20}$，$b=\frac{1}{100}$，自由度为 $n=2$.

【例 3】 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 是总体 X 的简单样本，求统计量

$$U=\frac{\sum_{i=1}^{10}(-1)^iX_i}{\sqrt{\sum_{i=11}^{20}X_i^2}}$$ 所服从的分布.

【解】 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 独立同分布，且服从 $N(0,\sigma^2)$，所以

$$\sum_{i=1}^{10}(-1)^iX_i\sim N(0,10\sigma^2)\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{10}(-1)^iX_i}{\sqrt{10}\sigma}\sim N(0,1).$$

$$\sum_{i=11}^{20}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(10).$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

令 $\frac{\sum_{i=1}^{10}(-1)^iX_i}{\sqrt{10}\sigma}=Y,\sum_{i=11}^{20}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2=Z$，则 Y,Z 相互独立.

$$U=\frac{\sum_{i=1}^{10}(-1)^iX_i}{\sqrt{\sum_{i=11}^{20}X_i^2}}=\frac{\sqrt{10}\sigma Y}{\sqrt{\sigma^2Z}}=\frac{Y}{\sqrt{Z/10}}\sim t(10).$$

【例 4】 设总体 X,Y 独立同分布且都服从正态分布 $N(0,9)$，$X_1,\cdots,X_9$ 与 $Y_1,\cdots,Y_9$ 是分别来自总体 X,Y 的简单样本，求统计量 $U=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$ 所服从的分布.

【解】 因为 $X_1,\cdots,X_9$ 是相互独立的正态变量，所以 $X_1+X_2+\cdots+X_9\sim N(0,81)$，标准化得

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

$$\frac{1}{9}(X_1+\cdots+X_9)\sim N(0,1).$$

又因为 $Y_i\sim N(0,9)$ 且 $Y_1,\cdots,Y_9$ 相互独立，所以 $\frac{1}{3}Y_i\sim N(0,1)(i=1,2,\cdots,9)$，于是

$$\frac{1}{9}(Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2)\sim\chi^2(9).$$

因为 $\frac{1}{9}(X_1+\cdots+X_9)$ 与 $\frac{1}{9}(Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2)$ 相互独立，所以由 t 分布的定义，

$$\frac{\frac{1}{9}(X_1+X_2+\cdots+X_9)}{\sqrt{\frac{1}{9}(Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2)/9}}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}\sim t(9).$$

【例 5】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 X 的简单样本，令

$$Y_1=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}X_i,\quad Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),\quad S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2,\quad Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S},$$

证明：$Z\sim t(2)$.

【证明】 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$Y_1=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}X_i\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{6}\right),\quad Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{3}\right),$$

且 Y_1 与 Y_2 独立，于是 $Y_1-Y_2\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{2}\right)$，标准化得 $\frac{Y_1-Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\sim N(0,1)$，又 $\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$，因

为 Y_1,Y_2 都与 S^2 独立，所以 $\dfrac{Y_1-Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}$ 与 $\dfrac{2S^2}{\sigma^2}$ 独立，由 t 分布的定义，

$$\frac{Y_1-Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\Big/\sqrt{\frac{\frac{2S^2}{\sigma^2}}{2}}=Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}\sim t(2).$$

【例 6】 设 $X\sim t(n)$，求 $\dfrac{1}{X^2}$ 服从的分布.

【解】 由 $X\sim t(n)$ 得：存在 $U\sim N(0,1),V\sim \chi^2(n)$ 且 U,V 独立，使得 $X=\dfrac{U}{\sqrt{V/n}}$，于是 $\dfrac{1}{X^2}=\dfrac{V/n}{U^2/1}$. 因为 $U\sim N(0,1)$，所以 $U^2\sim\chi^2(1)$，故 $\dfrac{1}{X^2}\sim F(n,1)$.

【例 7】 设总体 $X\sim N(0,0.3^2)$ 且 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 为来自总体的简单随机样本，求

$$P\Big\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\Big\}.$$

【解】 由 $X_i\sim N(0,0.3^2)$，得 $\dfrac{X_i}{0.3}\sim N(0,1)(i=1,2,\cdots,10)$，于是 $\dfrac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10}X_i^2\sim\chi^2(10)$，故

$$P\Big\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\Big\}=P\Big\{\frac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10}X_i^2>\frac{1.44}{0.09}\Big\}=P\Big\{\frac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10}X_i^2>16\Big\},$$

查表得 $\chi^2_{0.1}(10)=16$，于是 $P\Big\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\Big\}=0.1$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

题型二 统计量的数字特征

【例 1】 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则 $E\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\Big]=$_____.

【解】 因为 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$，

所以 $E\left[\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=n-1$，于是 $E\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\Big]=(n-1)\sigma^2$.

【例 2】 设 X 为总体，且 $E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2,X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+m}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $\overline{X}'=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{X}''=\dfrac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}X_{n+j}$，令 $U=a\overline{X}'+b\overline{X}''$，求常数 a,b 满足 $a>0,b>0,a+b=1$，使得 $D(U)$ 最小.

【解】 由 $E(\overline{X}')=E(\overline{X}'')=\mu$，得 $E(U)=\mu$，

$$D(U)=a^2D(\overline{X}')+b^2D(\overline{X}'')=\Big(\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{m}\Big)\sigma^2=\Big[\frac{a^2}{n}+\frac{(1-a)^2}{m}\Big]\sigma^2,$$

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}D(U)=\left[\frac{2a}{n}-\frac{2(1-a)}{m}\right]\sigma^2=0$，得 $a=\frac{n}{m+n}$，$b=\frac{m}{m+n}$，由问题的实际意义及驻点的唯一性，当 $a=\frac{n}{m+n}$，$b=\frac{m}{m+n}$ 时，$D(U)$ 最小.

【例 3】 设总体 $X\sim N(60,12^2)$，从总体中抽取容量为 n 的简单样本，问容量 n 至少为多少时，才能使样本均值大于 54 的概率不小于 0.975.

【解】 因为 $X\sim N(60,12^2)$，所以 $\overline{X}\sim N(60,12^2/n)$，$\frac{\overline{X}-60}{12/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，而

$$P\{\overline{X}>54\}=P\left\{\frac{\overline{X}-60}{12/\sqrt{n}}>\frac{54-60}{12/\sqrt{n}}\right\}=1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\geqslant 0.975,$$

又 $\Phi(1.96)=0.975$，所以 $\frac{\sqrt{n}}{2}\geqslant 1.96\Rightarrow n\geqslant 15.4$，即样本容量至少为 16 时，才能使样本均值大于 54 的概率不小于 0.975.

【例 4】 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，求 $E(X_1T)$.

【解】 令 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 $T=(n-1)S^2$，由对称性得

$$E(X_1T)=E(X_2T)=\cdots=E(X_nT),$$

于是 $E(X_1T)=\frac{1}{n}[E(X_1T)+E(X_2T)+\cdots+E(X_nT)]=\frac{1}{n}E[(X_1+X_2+\cdots+X_n)T]$

$$=E[\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)T]=E(\overline{X}T),$$

因为 $\overline{X}$ 与 S^2 独立，所以

$$E(X_1T)=E(\overline{X})\cdot E(T)=\mu\cdot E[(n-1)S^2]=(n-1)\mu\sigma^2.$$

【注解】

$E(X_1T)=E(X_1)\cdot E(T)$ 是错误的，因为不能保证 X_1 与 S^2 独立.

【例 5】 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\geqslant 2)$ 为总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$，令 $U_i=(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$，求 $E(U_i)$.

【解】 (1) 令 $Y_i=X_i+X_{n+i}$，则 $Y_i\sim N(2\mu,2\sigma^2)(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立，不妨设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是来自总体 $Y\sim N(2\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i=2\overline{X}$.

因为 $E(U_1)=E(U_2)=E(U_n)$，所以

$$E(U_i)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(U_k)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{k=1}^{n}U_k\right)=\frac{n-1}{n}E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(Y_k-\overline{Y})^2\right],$$

令 $S_Y^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(Y_k-\overline{Y})^2$，则 $E(S_Y^2)=2\sigma^2$，所以 $E(U_i)=\frac{2(n-1)}{n}\sigma^2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 6】 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$，求 $E(Y)$ 及 $D(Y)$.

【解】 令 $Z_i=\frac{X_i-\mu}{\sigma}$，则 $Z_i\sim N(0,1)(i=1,2,\cdots,n)$，

$$E|X_i-\mu|=\sigma\cdot E\left|\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right|=\sigma E|Z_i|=\sigma\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d\left(\frac{z^2}{2}\right)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(1)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

因为 $E|X_1-\mu|=E|X_2-\mu|=\cdots=E|X_n-\mu|$，

所以 $$E(Y)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|\right)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$D(Y)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|\right)=\frac{1}{n}D|X_i-\mu|$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}D\left|\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right|=\frac{\sigma^2}{n}D|Z_i|=\frac{\sigma^2}{n}[E(Z_i^2)-(E|Z_i|)^2],$$

因为 $Z_i\sim N(0,1)$，所以 $E(Z_i^2)=1$，而 $E|Z_i|=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$，于是 $D(Y)=\frac{\sigma^2}{n}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

测试题

一、选择题

1. 设 $X\sim N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 有 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 为(　　).

(A)$u_{1-\alpha}$　　(B)$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　(C)$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　(D)$u_{\frac{\alpha}{2}}$

2. 设总体 $X\sim N(1,3^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，且 $a\overline{X}-2\sim N(0,1)$，则(　　).

(A)$a=2,n=9$　　(B)$a=2,n=36$　　(C)$a=-2,n=9$　　(D)$a=-2,n=36$

3. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单随机样本，其中 μ,σ^2 为未知参数，则下列是非统计量的是(　　).

(A)$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$　　(B)$\sum_{i=1}^{n}X_i$　　(C)$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$　　(D)$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

4. 设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，则(　　).

(A)$X+Y\sim N(0,2)$　　(B)$X^2+Y^2\sim\chi^2(2)$

(C)$\frac{X^2}{Y^2}\sim F(1,1)$　　(D)$X^2\sim\chi^2(1)$，$Y^2\sim\chi^2(1)$

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单样本，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\quad S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的统计量是(　　).

(A)$\frac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$；　(B)$\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$；　(C)$\frac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$；　(D)$\frac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

6. 设总体 $X \sim N(0,1)$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则(　　).

(A) $nS^2 \sim \chi^2(n)$　　(B) $n\overline{X} \sim N(0,1)$

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$　　(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$

7. 设总体 $X_1, X_2, \cdots, X_{18}$ 为来自总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，且统计量 $U = \dfrac{2(X_1^2 + \cdots + X_i^2)}{X_{i+1}^2 + \cdots + X_{18}^2}$ 服从 F 分布，则 i 等于(　　).

(A)4　　(B)5　　(C)6　　(D)7

二、填空题

1. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则 $X_{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n+1} X_i$ ~ _____.

2. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 且 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 为来自总体的简单样本，则 $D(S^2) =$ _____..

3. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体的简单随机样本，令 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，则 $\dfrac{1}{\sigma^2}\left[n(\overline{X}-\mu)^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] \sim$ _____.

4. 设 (X,Y) 服从二维正态分布，且联合密度函数为 $f(x,y) = \dfrac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}$，则 $X^2/Y^2 \sim$ _____.

5. 设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 X 的简单随机样本，设 $P\{1 < \overline{X} < 3\}$ 最大，则 $\sigma =$ _____.

6. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，

记 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，则 $\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\dfrac{X_{n+1} - \overline{X}}{S} \sim$ _____.

7. 设总体 X, Y 独立同分布且 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，又 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别为来自总体 X 与 Y 的简单随机样本，则 $D\left[\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2 + \sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j - \overline{Y})^2}{m+n-2}\right] =$ _____.

三、解答题

1. 设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n (n > 2)$ 是来自总体的简单随机样本，令 $Y_i = X_i - \overline{X} (i = 1,2, \cdots, n)$.

(1) 求 $D(Y_i)$；　(2) 求 $P\{Y_1 + Y_n \leqslant 0\}$.

2. 设总体 $X \sim N(0,1)$，X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是来自总体 X 的简单随机样本，已知

$Y = \dfrac{a(X_1 + X_2)}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}} \sim t(n)$，求 a 及 n.

3. 设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$ 与总体 $Y \sim N(0,\sigma^2)$，X_1, X_2, X_3, X_4 与 $Y_1, \cdots, Y_n$ 分别为来自总体 X 与总体 Y 的简单随机样本，且 $\dfrac{3(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2}} \sim t(n)$，求 n.

4. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{2n} (n \geqslant 2)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $\overline{X} = \dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n} X_i$，$U = \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2$，求 $D(U)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

测试题参考答案

一、选择题

1. u_α 为 X 的上分位点，由分位点的定义，$\alpha = P\{|X| < x\} = 1 - P\{|X| > x\} = 1 - P\{X > x\} - P\{X < -x\} = 1 - 2P\{X > x\}$，解得 $P\{X > x\} = \dfrac{1-\alpha}{2}$，于是 $x = u_{\frac{1-\alpha}{2}}$，应选(B).

2. 由 $a\overline{X} - 2 \sim N\left(a-2, \dfrac{9a^2}{n}\right)$ 得 $a - 2 = 0, \dfrac{9a^2}{n} = 1$，解得 $a = 2, n = 36$，选(B).

3. 因为(C)中含有未知参数，故非统计量，应选(C).

4. 若 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 且 X, Y 独立，则 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$，(A)不对，因为 X, Y 不独立；同理(B)，(C)都缺少独立的条件，显然应选(D).

5. 因为 $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1), \dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{S_1}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1), \dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \dfrac{nS_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \dfrac{(n-1)S_3^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$，

$\dfrac{nS_4^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$，所以 $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Big/ \sqrt{\dfrac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}}{n-1}} = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S_1/\sqrt{n}} \sim t(n-1), \dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Big/ \sqrt{\dfrac{\frac{nS_2^2}{\sigma^2}}{n-1}} = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S_2/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1)$，

$\dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Big/ \sqrt{\dfrac{\frac{(n-1)S_3^2}{\sigma^2}}{n}} = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S_3/\sqrt{n-1}} \sim t(n), \dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Big/ \sqrt{\dfrac{\frac{nS_4^2}{\sigma^2}}{n}} = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S_4/\sqrt{n}} \sim t(n)$，应选(B).

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

6. 因为 $X_1^2 \sim \chi^2(1), \sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$ 且 X_1^2 与 $\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2$ 相互独立，所以 $\dfrac{X_1^2/1}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2/(n-1)} \sim F(1, n-1)$，

即 $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$，应选(D).

7. 因为 $\dfrac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + \cdots + X_i^2) \sim \chi^2(i), \dfrac{1}{\sigma^2}(X_{i+1}^2 + \cdots + X_{18}^2) \sim \chi^2(18-i)$ 且 $\dfrac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + \cdots + X_i^2)$ 与 $\dfrac{1}{\sigma^2}(X_{i+1}^2 + \cdots + X_{18}^2)$ 独立，所以 $\dfrac{\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + \cdots + X_i^2)/i}{\frac{1}{\sigma^2}(X_{i+1}^2 + \cdots + X_{18}^2)/(18-i)} \sim F(i, 18-i)$，即 $\dfrac{\frac{18-i}{i}(X_1^2 + \cdots + X_i^2)}{X_{i+1}^2 + \cdots + X_{20}^2} \sim F(i, 18-i)$，

于是 $\dfrac{18-i}{i} = 2$，解得 $i = 6$，应选(C).

二、填空题

1. 令 $Z = X_{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n+1} X_i = -\dfrac{1}{n+1}X_1 - \cdots - \dfrac{1}{n+1}X_n + \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)X_{n+1}$，因为 $X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}$ 独立且都服从正态分布，所以 Z 服从正态分布，又因为 $E(Z) = 0, D(Z) = \dfrac{n}{(n+1)^2}\sigma^2 + \dfrac{n^2}{(n+1)^2}\sigma^2 = \dfrac{n}{n+1}\sigma^2$，所以 $Z \sim N\left(0, \dfrac{n}{n+1}\sigma^2\right)$.

2. 因为 $\dfrac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15)$，所以 $D\left(\dfrac{15S^2}{\sigma^2}\right) = 2 \times 15 = 30$，于是 $\dfrac{15^2}{\sigma^4}D(S^2) = 30$，故 $D(S^2) = \dfrac{2\sigma^4}{15}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

3. 因为$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\sqrt{n}\cdot\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，所以$\dfrac{n}{\sigma^2}(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$，

又因为$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X})^2]\sim\chi^2(n-1)$且$\overline{X}$与$S^2$独立，

所以$\dfrac{n}{\sigma^2}(\overline{X}-\mu)^2+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n)$，即$\dfrac{1}{\sigma^2}\left[n(\overline{X}-\mu)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]\sim\chi^2(n)$.

4. 显然X,Y都服从正态分布且独立，因为$X\sim N(0,2),Y\sim N(0,2)$，所以$\dfrac{X}{\sqrt{2}}\sim N(0,1),\dfrac{Y}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，于是$\dfrac{X^2}{2}\sim\chi^2(1),\dfrac{Y^2}{2}\sim\chi^2(1)$，故$X^2/Y^2\sim F(1,1)$.

5. 因为$\dfrac{\overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{9}}}=\dfrac{3\overline{X}}{\sigma}\sim N(0,1)$，所以$f(\sigma)=P\{1<\overline{X}<3\}=P\left\{\dfrac{3}{\sigma}<\dfrac{3\overline{X}}{\sigma}<\dfrac{9}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\dfrac{9}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{3}{\sigma}\right)$，

令$f'(\sigma)=-\dfrac{9}{\sigma^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{81}{2\sigma^2}}+\dfrac{3}{\sigma^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{9}{2\sigma^2}}=\dfrac{3}{\sigma^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{9}{2\sigma^2}}(1-3e^{-\frac{36}{\sigma^2}})=0$，得$\sigma=\dfrac{6}{\sqrt{\ln 3}}$，因为$\sigma\in\left(0,\dfrac{6}{\sqrt{\ln 3}}\right)$时，$f'(\sigma)>0$；当$\sigma\in\left(\dfrac{6}{\sqrt{\ln 3}},+\infty\right)$时，$f'(\sigma)<0$，所以$\sigma=\dfrac{6}{\sqrt{\ln 3}}$时$P\{1<\overline{X}<3\}$最大.

6. 由$\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$得$X_{n+1}-\overline{X}\sim N\left(0,\dfrac{(n+1)}{n}\sigma^2\right)$，于是$\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$. 因为$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$且与$\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}$独立，所以$\dfrac{\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}}\sim t(n-1)$，即$\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\cdot\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$.

7. 令$S_1^2=\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2,S_2^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2$，则$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$，$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2=\dfrac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，于是$D\left[\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2\right]=2(m-1),D\left[\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2\right]=2(n-1)$或$D\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2\right]=2(m-1)\sigma^4,D\left[\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2\right]=2(n-1)\sigma^4$，

故$D\left[\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2}{m+n-2}\right]=\dfrac{2(m-1)\sigma^4+2(n-1)\sigma^4}{(m+n-2)^2}=\dfrac{2\sigma^4}{m+n-2}$.

三、解答题

1. (1) 由对称性得$D(Y_i)=D(Y_1)$，而$Y_1=X_1-\overline{X}=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)X_1-\dfrac{1}{n}X_2-\cdots-\dfrac{1}{n}X_n\sim N\left(0,\dfrac{n-1}{n}\sigma^2\right)$，于是$D(Y_i)=D(Y_1)=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$.

(2) $Y_1+Y_n=X_1+X_n-2\overline{X}=\left(1-\dfrac{2}{n}\right)X_1-\dfrac{2}{n}X_2-\cdots-\dfrac{2}{n}X_{n-1}+\left(1-\dfrac{2}{n}\right)X_n$，因为$E(Y_1+Y_n)=0,D(Y_1+Y_n)=\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^2\sigma^2+\dfrac{4(n-2)}{n^2}\sigma^2+\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^2\sigma^2=\dfrac{2n-4}{n}\sigma^2$，所以$Y_1+Y_n\sim N\left(0,\dfrac{2n-4}{n}\sigma^2\right)$，

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

故 $P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$.

2. $X_1+X_2\sim N(0,2)$，$\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，又 $X_3^2+X_4^2+X_5^2\sim\chi^2(3)$ 且 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ 与 $X_3^2+X_4^2+X_5^2$ 独立，由 t 分布的定义得 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\Big/\sqrt{\dfrac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{3}}\sim t(3)$ 或 $\dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}\sim t(3)$，故 $a=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$，$n=3$.

3. 由 $X_1+X_2\cdots+X_4\sim N(0,4\sigma^2)$ 得 $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_4}{2\sigma}\sim N(0,1)$，

再由 $Y_i\sim N(0,\sigma^2)$ 得 $\dfrac{Y_i}{\sigma}\sim N(0,1)(1\leqslant i\leqslant n)$，于是 $\dfrac{1}{\sigma^2}(Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_n^2)\sim\chi^2(n)$，

由 t 分布的定义有 $\dfrac{\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{2\sigma}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{\sigma^2}(Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_n^2)}{n}}}\sim t(n)$，即 $\dfrac{\sqrt{n}}{6}\cdot\dfrac{3(X_1+X_2+X_3+X_4)}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_n^2}}\sim t(n)$，即 $n=36$.

4. 令 $X_i+X_{n+i}=Y_i$，因为 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 相互独立且服从分布 $N(\mu,\sigma^2)$，所以 $Y_i\sim N(2\mu,2\sigma^2)$ 且 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立，又 $2\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i=\overline{Y}$，

于是 $U=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2=(n-1)\cdot\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2=(n-1)S^2$，故 $E(U)=(n-1)E(S^2)=2(n-1)\sigma^2$.

因为 $\dfrac{(n-1)S^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，所以 $D\left[\dfrac{(n-1)S^2}{2\sigma^2}\right]=2(n-1)$ 或 $\dfrac{(n-1)^2}{4\sigma^4}D(S^2)=2(n-1)$，

于是 $D(S^2)=\dfrac{8\sigma^4}{n-1}$，故 $D(U)=D[(n-1)S^2]=(n-1)^2D(S^2)=8(n-1)\sigma^4$.

微信公众号（顶尖考研）(ID:djky66)

第七章　参数估计

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

大纲点击

1. 理解参数的点估计、估计量与估计值的概念.

2. 掌握矩估计法(一阶矩、二阶矩)和最大似然估计法.

3. 了解估计量的无偏性、有效性(最小方差性)和一致性(相合性)的概念,并会验证估计量的无偏性.

4. 理解区间估计的概念,会求单个正态总体的均值和方差的置信区间,会求两个正态总体的均值差和方差比的置信区间.

基础复习模块——基本概念、原理、考点

【背景】　设总体 X 的分布已知,但在其分布中含有未知参数 θ(或两个以上参数),需要对参数 θ 进行估计,先从总体中取出简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$(其观察值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$),对未知参数 θ 进行估计常有两种方法:

(1) 估计出参数的估计量 $\hat{\theta}=\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 或估计值 $\hat{\theta}=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,由于估计出的结果在 x 轴上反映为一个点,故称此方法为参数的点估计.

(2) 给出一个小概率 α,求出 $\hat{\theta}_1=\varphi_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 及 $\hat{\theta}_2=\varphi_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,使得 $P\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\}=1-\alpha$,即估计出参数位于一个区间,故称此方法为参数的区间估计.

一、点估计

(一) 点估计的概念

设 X 为总体(其中含未知参数 θ),$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,若用特定的方法得统计量 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 作为未知参数 θ 的估计,称 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的点估计量,记 $\hat{\theta}=\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观察值,则称 $\hat{\theta}=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为参数 θ 的点估计值.

【注解】

参数点估计量本质上是随机变量,但参数点估计值本质上为常数.

(二) 点估计的评价标准

用不同方法对总体中的同一个未知参数进行点估计,有时会得到不同的点估计量,判断估计量的优劣的评价标准通常有如下三个:

1. 无偏性 —— 设 $\hat{\theta}=\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为参数 θ 的点估计量,若 $E[\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)]$

$=\theta$，称 $\hat{\theta}=\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的无偏估计量.

2. 有效性 —— 设 $\hat{\theta}_1=\varphi_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\varphi_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是参数 θ 的无偏估计量，若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1=\varphi_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是比 $\hat{\theta}_2=\varphi_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 更有效的参数 θ 的估计量.

3. 一致性 —— 设 $\hat{\theta}=\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)(n=1,2,\cdots)$ 为 θ 的估计量，若对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1,$$

即 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ，称 $\hat{\theta}=\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为参数 θ 的一致估计量.

【例】 设总体 $X\sim B(n,p)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 $k=$_____.

【解】 因为 $E(\overline{X})=E(X)=np$，$E(S^2)=D(X)=np(1-p)$，所以

$$E(\overline{X}+kS^2)=np+knp(1-p)=np[1+k(1-p)].$$

又因为 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，所以 $np[1+k(1-p)]=np^2$，于是 $k=-1$.

（三）点估计的方法

1. 矩估计法 —— 设总体 X 的分布已知，但其分布含有未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的简单随机样本，计算总体 X 的 k 阶原点距 $E(X^k)$，$A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k(k=1,2,\cdots)$ 为样本的 k 阶原点矩，令 $E(X^k)=A_k(k=1,2,\cdots)$，解得关于未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 的一组解 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_n$，称 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_n$ 为参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 的矩估计量.

具体做法如下：

情形一：设总体 X 服从的分布只含一个参数 θ

令 $E(X)=\overline{X}$ 或 $E(X^2)=A_2$，可求出参数的估计量 $\hat{\theta}=\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$；

情形二：设总体 X 服从的分布含两个参数 θ_1,θ_2

$$\text{令}\begin{cases}E(X)=\overline{X}\\ E(X^2)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}\text{可求出参数}\theta_1,\theta_2\text{的矩估计量}$$

$$\hat{\theta}_1=\varphi_1(X_1,X_2,\cdots,X_n),\quad \hat{\theta}_2=\varphi_2(X_1,X_2,\cdots,X_n).$$

【注解】

（1）大纲要求未知参数不超过两个.

（2）矩估计法的理论基础为大数定律，因为在总体存在 k 阶矩的条件下，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P}EX^k$. 所以当 n 充分大时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$ 与 $E(X^k)$ 非常接近，此时令 $E(X^k)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$，求出参数的估计量比较接近于精确值.

【例 1】 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\mu,\sigma^2$ 为未知参数$)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的简单随机样本，求参数 μ,σ^2 的矩估计量.

【解】 $E(X)=\mu$，$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\mu^2+\sigma^2$，

令$\begin{cases}E(X)=\overline{X},\\ E(X^2)=A_2\end{cases}$（其中$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$），解得参数$\mu,\sigma^2$的矩估计量为$\begin{cases}\hat{\mu}=\overline{X},\\ \hat{\sigma}^2=A_2-\overline{X}^2.\end{cases}$

2. 最大似然估计法

(1) 离散型总体参数的最大似然估计法

设总体X是离散型随机变量，其分布律为$P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots,n)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体$X$的简单随机样本.

情形一：总体X所服从的分布中含一个未知参数θ

第一步，求似然函数$L(\theta)=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_n=x_n\}$；

第二步，令$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=0$，求解此方程可得$\theta$的最大似然估计.

情形二：总体X所服从的分布中含两个未知参数θ_1,θ_2

第一步，求似然函数$L(\theta_1,\theta_2)=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_n=x_n\}$；

第二步，令$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\ln L(\theta_1,\theta_2)=0,\\ \frac{\partial}{\partial\theta_2}\ln L(\theta_1,\theta_2)=0\end{cases}$求解此方程可得参数$\theta_1,\theta_2$的最大似然估计.

(2) 连续型总体参数的最大似然估计法

设总体X是连续型随机变量，其分布密度为$f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_i)(i=1,2,\cdots,n)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体$X$的简单随机样本.

情形一：总体X所服从的分布中含一个未知参数θ

第一步，求似然函数$L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$；

第二步，令$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=0$，求解此方程可得参数$\theta$的最大似然估计.

情形二：总体X所服从的分布中含两个未知参数θ_1,θ_2

第一步，求似然函数$L(\theta_1,\theta_2)=f(x_1;\theta_1,\theta_2)\cdots f(x_n;\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2)$；

第二步，令$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\ln L(\theta_1,\theta_2)=0,\\ \frac{\partial}{\partial\theta_2}\ln L(\theta_1,\theta_2)=0,\end{cases}$求解此方程可得参数$\theta_1,\theta_2$的最大似然估计.

【例 2】 某种电子元件使用寿命X的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$$（其中参数θ未知），

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体X的简单随机样本，求参数θ的最大似然估计量.

【解】 似然函数为

$$L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta}\quad(x_i>\theta,i=1,2,\cdots,n),$$

取对数得$\ln L(\theta)=n\theta-\sum_{i=1}^{n}x_i$，因为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=n>0$，所以$L(\theta)$为$\theta$的增函数，当$\theta$取最大

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

时，$L(\theta)$ 最大，于是 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$，$\theta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$.

二、区间估计

(一) 区间估计的概念

设总体的分布已知，但其所服从的分布中含有未知参数，从总体中取出简单随机样本，用样本得到的统计量作为区间的下限和上限，使参数位于该区间的概率为 $1-\alpha$ 的参数的估计方法，称为参数的区间估计，其中 $1-\alpha$ 称为置信度，相应的区间称为置信区间.

设总体 X 中含未知参数 θ，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体的样本，$\hat{\theta}_1=\varphi_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\varphi_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为两个统计量，若 $P\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\}=1-\alpha$，称 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

(二) 一个正态总体下参数的区间估计

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 X 的简单随机样本.

1. 求置信度为 $1-\alpha$ 的参数 μ 的置信区间

情形一：设 σ 已知

第一步，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$；

第二步，确定左、右分位点 $-u_{\frac{\alpha}{2}}$ 及 $u_{\frac{\alpha}{2}}$；

第三步，$P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}}<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$；

第四步，解关于 μ 的不等式 $-u_{\frac{\alpha}{2}}<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{\frac{\alpha}{2}}$，得参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

情形二：设 σ 未知

第一步，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$；

第二步，确定左、右分位点 $-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 及 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$；

第三步，$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$；

第四步，解关于 μ 的不等式 $-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，得参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

2. 求置信度为 $1-\alpha$ 的参数 σ^2 的区间估计

情形一：μ 未知

第一步，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$；

第二步，确定左、右分位点 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 及 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$；

第三步，$P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha$；

第四步，解关于 σ^2 的不等式 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，得置信度为 $1-\alpha$ 的 σ^2 的置信区间为 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$.

情形二：μ 已知

第一步，$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$；

第二步，确定左、右分位点 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 及 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$；

第三步，$P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\}=1-\alpha$；

第四步，解关于 σ^2 的不等式 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$，得置信度为 $1-\alpha$ 的 σ^2 的置信区间为 $\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

未知参数		估计用样本函数 Z 及其分布	置信区间
μ	σ^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
	σ^2 未知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$
σ^2	μ 已知	$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$	$\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$
	μ 未知	$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

（三）两个正态总体的参数的区间估计

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 X 与 Y 相互独立，$X_1,X_2,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 分别为来自总体 X 与 Y 的简单随机样本.

令 $\overline{X}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$，$S_1^2=\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

1. 参数 $\mu_1-\mu_2$ 的区间估计

情形一:σ_1^2,σ_2^2 已知

第一步,$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\sim N(0,1)$;

第二步,确定左、右分位点 $-u_{\frac{\alpha}{2}}$ 与 $u_{\frac{\alpha}{2}}$;

第三步,$P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}}<\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}<u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$;

第四步,解关于 $\mu_1-\mu_2$ 的不等式 $-u_{\frac{\alpha}{2}}<\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}<u_{\frac{\alpha}{2}}$,得置信度为 $1-\alpha$ 的参数 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-\overline{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n},\overline{X}-\overline{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}\right)$.

情形二:σ_1^2,σ_2^2 未知且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$

第一步,$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{1/m+1/n}}\sim t(m+n-2)$;

第二步,确定左、右分位点 $-t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$ 与 $t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$;

第三步,$P\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)<\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{1/m+1/n}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\}=1-\alpha$;

第四步,解关于 $\mu_1-\mu_2$ 的不等式

$$-t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)<\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{1/m+1/n}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2),$$

得置信度为 $1-\alpha$ 的参数 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S\sqrt{1/m+1/n},\overline{X}-\overline{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S\sqrt{1/m+1/n}\right).$$

2. 参数 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计

因为 $\dfrac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(m-1)$,$\dfrac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n-1)$,所以估计过程为:

第一步,$\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}/\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}/\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1)$;

第二步,确定左、右分位点 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$ 及 $F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$;

第三步,$P\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)<\dfrac{S_1^2}{S_2^2}/\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)\}=1-\alpha$;

第四步,解关于 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的不等式 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)<\dfrac{S_1^2}{S_2^2}/\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$,得置信度为 $1-\alpha$ 的参数 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为 $\left(\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)},\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\right)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

未知参数		估计用样本函数 Z 及其分布	置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2 σ_2^2 均已知	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$	$(\overline{X}-\overline{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}$, $\overline{X}-\overline{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2})$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2})$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

重点题型分析

题型一 参数点估计的矩估计法与最大似然估计法

【例 1】 设总体 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & \theta^2 & 1-2\theta\end{pmatrix}$，其中 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{1}{2}\right)$ 是未知参数，$X_1,\cdots,X_8$ 是来自总体的简单样本，其观察值为 3,1,3,0,3,1,2,3，求 θ 的矩估计值与最大似然估计值.

【解】 $E(X)=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$，$\overline{x}=2$，

令 $E(X)=\overline{x}$ 得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}$.

似然函数为 $L(\theta)=\theta^2\cdot[2\theta(1-\theta)]^2\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)^4$，

取对数得 $\ln L(\theta)=\ln4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$，

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\dfrac{6}{\theta}-\dfrac{2}{1-\theta}-\dfrac{8}{1-2\theta}=0$，得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$.

【例 2】 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，求 μ,σ^2 的最大似然估计量.

【解】 似然函数为 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)=\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$，

取对数得 $\ln L=-n\ln\sqrt{2\pi}-\dfrac{n}{2}\ln\sigma^2-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0,\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0\end{cases}$ 得 $\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$，于是

μ,σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 3】 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；(2) 求 $D(\hat{\theta})$.

【解】 (1)$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^\theta\dfrac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\dfrac{6}{\theta^3}\int_0^\theta x^2(\theta-x)\mathrm{d}x=\dfrac{\theta}{2}$,

令 $E(X)=\overline{X}$ 得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}$.

(2)$D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\dfrac{4}{n}D(X)$,

由 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\theta\dfrac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\dfrac{3\theta^2}{10}$,得 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{\theta^2}{20}$,

故 $D(\hat{\theta})=\dfrac{\theta^2}{5n}$.

【例 4】 设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}(\theta>0\text{ 为未知参数}),$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,求参数 θ 的最大似然估计量.

【解】 似然函数为

$$L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{\theta^{2n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}\quad(x_i>0,i=1,2,\cdots,n),$$

取对数得

$$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=-\dfrac{2n}{\theta}+\dfrac{2}{\theta^3}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=0$,得参数 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$,最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}$.

【例 5】 设总体 $X\sim U(0,\theta)$,其中未知参数 $\theta>0$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

【解】 $E(X)=\dfrac{\theta}{2}$,令 $E(X)=\overline{X}$,则 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}$. 因为 $X\sim U(0,\theta)$,所以 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=\frac{1}{\theta^n}(0<x_i<\theta,i=1,2,\cdots,n).$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}L=-\dfrac{n}{\theta^{n+1}}<0$,所以 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djkyoo)

题型二 参数点估计量的评价标准

【例 1】 设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为参数 θ 的简单随机样本，

(1) 求 θ 的矩估计量，判断该估计量是否为无偏估计量；

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

【解】 (1) $E(X)=\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\mathrm{d}x\overset{\frac{x^2}{2\theta}=t}{=}\sqrt{2\theta}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t$

$$=\sqrt{2\theta}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{2\theta}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{2\theta}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2\pi\theta}}{2},$$

令 $E(X)=\overline{X}$ 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}^2}{\pi}$.

$$E(\hat{\theta})=\frac{2}{\pi}E(\overline{X}^2)=\frac{2}{\pi}\{D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2\}=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{D(X)}{n}+[E(X)]^2\right\},$$

由 $E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\dfrac{x^3}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\mathrm{d}x=2\theta\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{2\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\mathrm{d}\left(\dfrac{x^2}{2\theta}\right)$

$$\overset{\frac{x^2}{2\theta}=t}{=}2\theta\int_0^{+\infty}te^{-t}\mathrm{d}t=2\theta\ \Gamma(2)=2\theta,$$

得 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2\theta-\dfrac{\pi\theta}{2}$,

于是 $E(\hat{\theta})=\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{D(X)}{n}+[E(X)]^2\right]=\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{1}{n}\left(2\theta-\dfrac{\pi\theta}{2}\right)+\dfrac{\pi\theta}{2}\right]\neq\theta$,

即 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}^2}{\pi}$ 为 θ 的有偏估计量.

(2) $L(\theta)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=\dfrac{x_1x_2\cdots x_n}{\theta^n}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2\theta}}$（其中 $x_i>0,i=1,2,\cdots,n$），

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln\theta-2^{-1}\theta^{-1}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2),$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{1}{2\theta^2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)=0$，得 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$，于是 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$.

【例 2】 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\mu$ 已知$)$，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，设 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$\hat{\sigma}_2^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 分别为 σ^2 的两个估计量.

微信公众号【慎学考研】(ID: djky66)

(1) 判断两个估计量的无偏性；(2) 求 $D(\hat{\sigma}_1^2)$ 与 $D(\hat{\sigma}_2^2)$.

【解】 (1) 因为 $E(\hat{\sigma}_1^2)=E(S^2)=\sigma^2$，所以 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 为参数 σ^2 的无偏估计量；因为 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$，所以 $\dfrac{1}{\sigma^2}E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=n$ 或 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=n\sigma^2$，于是 $E(\hat{\sigma}_2^2)=\dfrac{1}{n}E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=\sigma^2$，故 $\hat{\sigma}_2^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 为参数 σ^2 的无偏估计量.

(2) 因为 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=S^2$，且 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，所以

$$D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2)=2(n-1),$$

于是 $D(S^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$，故 $D(\hat{\sigma}_1^2)=D(S^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$；又因为 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$，所以

$$\frac{1}{\sigma^4}D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=2n \text{ 或 } D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=2n\sigma^4,$$

于是 $D(\hat{\sigma}_2^2)=\dfrac{1}{n^2}D\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=\dfrac{2\sigma^4}{n}$.

因为 $D(\hat{\sigma}_2^2)<D(\hat{\sigma}_1^2)$，所以 $\hat{\sigma}_2^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 是比 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 更有效的参数 σ^2 的估计量.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 3】 设总体 X 的分布律为

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1-\theta & \theta-\theta^2 & \theta^2\end{pmatrix}(\text{未知参数 }\theta\in(0,1)),$$

以 $N_i(i=1,2,3)$ 表示来自总体 X 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中取 $i(i=1,2,3)$ 的个数. 求常数 a_1,a_2,a_3，使得 $T=a_1N_1+a_2N_2+a_3N_3$ 为参数 θ 的无偏估计量，并求 $D(T)$.

【解】 因为 $N_1\sim B(n,1-\theta)$，$N_2\sim B(n,\theta-\theta^2)$，$N_3\sim B(n,\theta^2)$，所以

$E(N_1)=n(1-\theta)$，$E(N_2)=n(\theta-\theta^2)$，$E(N_3)=n\theta^2$，

$$\begin{aligned}E(T)&=a_1E(N_1)+a_2E(N_2)+a_3E(N_3)=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2\\&=na_1+n(a_2-a_1)\theta+n(a_3-a_2)\theta^2.\end{aligned}$$

因为 T 是 θ 的无偏估计，所以 $na_1+n(a_2-a_1)\theta+n(a_3-a_2)\theta^2=\theta$，

于是 $\begin{cases}a_1=0,\\ n(a_2-a_1)=1,\\ a_3-a_2=0,\end{cases}$ 解得 $a_1=0,a_2=a_3=\dfrac{1}{n}$，即 $T=\dfrac{1}{n}(N_2+N_3)=\dfrac{1}{n}(n-N_1)$.

$$D(T)=D\left[\frac{1}{n}(n-N_1)\right]=\frac{1}{n^2}D(n-N_1)=\frac{1}{n^2}D(N_1)=\frac{1}{n^2}\cdot n\theta(1-\theta)=\frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

【例 4】 设总体 $X\sim U(0,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，证明 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$ 是参数 θ 的一致估计量.

【证明】 因为总体 $X\sim U(0,\theta)$，所以总体 X 的密度函数及分布函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 1, & x\geqslant\theta.\end{cases}$$

$$F_{\hat{\theta}}(x)=P\{\hat{\theta}\leqslant x\}=P\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}(X_i)\leqslant x\}=P\{X_1\leqslant x,X_2\leqslant x,\cdots,X_n\leqslant x\}$$
$$=P\{X_1\leqslant x\}P\{X_2\leqslant x\}\cdots P\{X_n\leqslant x\}=F_{X_1}(x)F_{X_2}(x)\cdots F_{X_n}(x)$$
$$=F^n(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^n}{\theta^n}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 1, & x\geqslant\theta,\end{cases}$$

所以 $f_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 于是

$$E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x=n\int_0^{\theta}\frac{x^n}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n\theta}{n+1},$$

$$E(\hat{\theta}^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x=n\int_0^{\theta}\frac{x^{n+1}}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n\theta^2}{n+2}.$$

对任意的 $\varepsilon>0$,

$$P\{|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon\}=\int_{|x-\theta|\geqslant\varepsilon}f_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{|x-\theta|\geqslant\varepsilon}\frac{(x-\theta)^2}{\varepsilon^2}f_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\theta)^2f_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x=\frac{E(\hat{\theta}^2)-2\theta E(\hat{\theta})+\theta^2}{\varepsilon^2}=\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$，即 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$ 是参数 θ 的一致估计量.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题型三 正态总体下的置信区间

【例 1】 设总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$，$X_1,\cdots,X_9$ 是来自总体 X 的简单随机样本且 $\overline{x}=5$，求未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

【解】 σ^2 已知，取 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{9}}=\dfrac{\overline{X}-\mu}{0.3}\sim N(0,1)$，查表得分位点为 $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$，由 $P\{-1.96<\dfrac{\overline{X}-\mu}{0.3}<1.96\}=0.95$，得置信区间为(4.412,5.588).

【例 2】 设一批瓶装矿泉水的重量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现从中取出 16 袋，计算得 $\overline{x}=503.75$，$S=6.202\ 2$，求置信度为 0.95 的参数 μ 的置信区间.

【解】 σ^2 未知，取 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{16}}=\dfrac{\overline{X}-\mu}{1.550\ 55}\sim t(15)$，查表得右分位点为 $t_{\frac{\alpha}{2}}(15)=t_{0.025}(15)=2.131\ 5$，由 $P\{-2.131\ 5<\dfrac{\overline{X}-\mu}{1.550\ 55}<2.131\ 5\}=0.95$ 得置信度为 0.95 的参数 μ 的置信区

间为$(503.75-2.131\,5\times1.550\,55,503.75+2.131\,5\times1.550\,55)=(500.4,507.1)$.

【例3】 设X为总体,0.5,1.25,0.8,2为来自总体X的容量为4的简单随机样本的观察值,又$Y=\ln X\sim N(\mu,1)$.

(1) 求$E(X)$;

(2) 求置信度为0.95的参数μ的置信区间;

(3) 求置信度为0.95的参数$E(X)$的置信区间.

【解】 (1) 因为$Y=\ln X\sim N(\mu,1)$,所以$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}(-\infty<x<+\infty)$,于是

$$E(X)=E(e^Y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^y\cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy\overset{y-\mu=t}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t+\mu}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}d(t-1)=e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=e^{\mu+\frac{1}{2}}.$$

(2)σ^2已知,取$\frac{\overline{Y}-\mu}{1/\sqrt{4}}=2(\overline{Y}-\mu)\sim N(0,1)$,$u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$,又

$$y_1=\ln0.5,\quad y_2=\ln1.25,\quad y_3=\ln0.8,\quad y_4=\ln2,$$

则$\overline{y}=0$,由$P\{-1.96<2(\overline{Y}-\mu)<1.96\}=0.95$,得置信度为0.95的参数$\mu$的置信区间为

$$\left(\overline{y}-\frac{1.96}{2},\overline{y}+\frac{1.96}{2}\right)=(-0.98,0.98).$$

(3) 因为置信度为0.95的参数μ的置信区间为

$$\left(\overline{y}-\frac{1.96}{2},\overline{y}+\frac{1.96}{2}\right)=(-0.98,0.98),$$

所以置信度为0.95的$E(X)=e^{\mu+\frac{1}{2}}$的置信区间为

$$(e^{\frac{1}{2}-0.98},e^{\frac{1}{2}+0.98})=(e^{-0.48},e^{1.48}).$$

【例4】 设一批瓶装矿泉水的重量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,现从中取出16袋,计算得$\overline{x}=503.75$,$S=6.2022$,求置信度为0.95的参数σ^2的置信区间.

【解】 μ未知,取$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{15S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(15)$,查表得

$$\chi^2_{0.975}(15)=6.262,\quad \chi^2_{0.025}(15)=27.488,$$

由$P\left\{6.262<\frac{15S^2}{\sigma^2}<27.488\right\}=0.95$,得置信度为0.95的参数$\sigma^2$的置信区间为

$$\left(\frac{15S^2}{27.488},\frac{15S^2}{6.262}\right)=(20.99,92.14).$$

测试题

一、选择题

1. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本,其中$E(X)=\mu$,$D(X)=\sigma^2$,下列统计量中是σ^2的无偏估计量的是(　　).

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$　　(B) $\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

(C) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$　　(D) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

2. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$(σ 已知),若样本容量 n 和置信度 $1-\alpha$ 保持不变,对样本的不同观察值,总体均值 μ 的置信区间长度(　　).

(A) 保持不变

(B) 若样本观察值均值变大,则置信区间变长

(C) 若样本观察值均值变小,则置信区间变短

(D) 不能确定

二、填空题

1. 设总体 $X\sim U(\theta,\theta+1)$(未知参数 $\theta>0$),$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,则 θ 的矩估计量为_____.

2. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,且统计量 $k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为参数 σ^2 的无偏估计量,则 $k=$_____.

3. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,其中 μ 为已知常数,则参数 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为_____,其置信区间长度的数学期望为_____.

三、解答题

1. 设总体 X 的分布函数为 $F(x,\theta)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \theta, & 1\leqslant x<2,\\ 2\theta, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3,\end{cases}$ $\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$,样本值为 1,1,3,2,1,2,3,3,求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

2. 设总体 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^{\theta}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}$(未知参数 $\theta>1$),$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

3. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$ $(-\infty<x<+\infty)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,求参数 σ 的最大似然估计量.

4. 设总体 X 的密度为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\theta>-1$ 是未知参数,$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单样本,求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

5. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$(其中未知参数 $\theta>0$),且 θ,μ 都是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机变量,求参数 θ,μ 的最大似然估计量.

6. 从一批产品中任意取出一件,用 X 表示废品个数,则 X 服从 0-1 分布,设次品率为 $p(0<p<1)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体的简单样本,证明 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为参数 p 的一致估计量.

7. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$(未知参数 $\theta>0$),$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,令 $Y=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

(1) 求 Y 的分布函数；

(2) 讨论 $Y=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$ 作为参数 θ 的估计量是否具有无偏性.

8. 设 $X\sim U(0,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求：

(1) 未知参数 θ 的最大似然估计量；(2) 判断该估计量是否具有无偏性.

测试题参考答案

一、选择题

1. 令 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，因为 $E(S^2)=\sigma^2$，所以 $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 为 σ^2 的无偏估计量，应选(C).

2. 因为 σ 已知，所以 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{x}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{x}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，置信区间的长度为 $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$，因为置信区间的长度与样本观察值无关，所以应选(A).

二、填空题

1. 因为 $X\sim U(\theta,\theta+1)$，所以 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1, & \theta<x<\theta+1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ $E(X)=\dfrac{\theta+(\theta+1)}{2}=\theta+\dfrac{1}{2}$，令 $E(X)=\overline{X}$ 得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}-\dfrac{1}{2}$.

2. 因为 $k\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为参数 σ^2 的无偏估计量，所以 $kE\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=\sigma^2$，而 $E[(X_2-X_1)^2]=E[(X_3-X_2)^2]=\cdots=E[(X_n-X_{n-1})^2]$，注意到 X_1,X_2 相互独立又 $E(X_1)=E(X_2)=\mu$，$E(X_1^2)=E(X_2^2)=E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2$，从而 $E[(X_2-X_1)^2]=E(X_1^2)+E(X_2^2)-2E(X_1)E(X_2)=2\sigma^2$，于是 $2(n-1)\sigma^2k=\sigma^2$，故 $k=\dfrac{1}{2(n-1)}$.

3. 取统计量 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$，置信区间为 $\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$，置信区间长度为 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\left[\dfrac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}-\dfrac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$，因为 $E\left[\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=n$，所以 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=n\sigma^2$，于是数学期望为 $E\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\left[\dfrac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}-\dfrac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]=n\sigma^2\left[\dfrac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}-\dfrac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$.

三、解答题

1. (1) X 为离散型随机变量，其分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \theta & \theta & 1-2\theta\end{pmatrix}$，$E(X)=3-3\theta$.

$\overline{x}=\dfrac{1+1+3+2+1+2+3+3}{8}=2$，令 $3-3\theta=2\Rightarrow\hat{\theta}=\dfrac{1}{3}$.

(2) $L(\theta)=P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}\cdots P\{X_8=3\}=\theta^3\times\theta^2\times(1-2\theta)^3$，$\ln L=5\ln\theta+3\ln(1-2\theta)$，令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L=\dfrac{5}{\theta}-\dfrac{6}{1-2\theta}=0\Rightarrow\hat{\theta}=\dfrac{5}{16}$.

2. 总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{x^{\theta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1,\end{cases}$ $E(X)=\int_1^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\dfrac{\theta}{x^{\theta}}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta}{\theta-1}$，令 $E(X)$

微信公众号【顶尖考研】(ID：dijky66)

$=\overline{X}$ 得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$. 似然函数为 $L(\theta)=\dfrac{\theta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta+1}}(x_i>1,i=1,2,\cdots,n)$, $\ln L(\theta)$ $=n\ln\theta-(\theta+1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$, 由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\dfrac{n}{\theta}-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ 得参数 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$, 估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

3. 似然函数为 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\sigma)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=\dfrac{1}{2^n\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}$, 取对数得 $\ln L=-n\ln 2-n\ln\sigma-\dfrac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$, 由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\ln L=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=0$, 解得 σ 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$, σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$.

4. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$, 令 $\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$, 得 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$, 则参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}$ $=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$. $L(\theta)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=(\theta+1)^nx_1^\theta x_2^\theta\cdots x_n^\theta$, $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta(\ln x_1+\cdots+\ln x_n)$, 令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\dfrac{n}{\theta+1}+(\ln x_1+\cdots+\ln x_n)$, 得 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$, 故参数 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

5. 似然函数为 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu,\theta)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=\dfrac{1}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}$, 其中 $x_i\geqslant\mu(1\leqslant i\leqslant n)$, 取对数得 $\ln L=-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+n\dfrac{\mu}{\theta}$, 由 $\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\dfrac{\mu}{\theta^2}=0,\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\dfrac{n}{\theta}>0,\end{cases}$ 得 θ,μ 的最大似然估计量为 $\hat{\mu}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$, $\hat{\theta}=\overline{X}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$.

6. $E(X_i)=E(X)=p$, $D(X_i)=D(X)=p(1-p)(i=1,2,\cdots,n)$, 因为 $E(\overline{X})=\dfrac{1}{n}E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=p$, 所以 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 为参数 p 的无偏估计量, 又 $D(\overline{X})=\dfrac{1}{n^2}D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{p(1-p)}{n}$.

对任意的 $\varepsilon>0$, $P\{|\overline{X}-p|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}=\dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$,

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\overline{X}-p|\geqslant\varepsilon\}=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\overline{X}-p|<\varepsilon\}=1$, 即 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 为参数 p 的一致估计量.

7. (1) 总体 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta.\end{cases}$ $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(X_i)\leqslant y\}$ $=1-P\{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(X_i)>y\}=1-P\{X_1>y,X_2>y,\cdots,X_n>y\}=1-P\{X_1>y\}P\{X_2>y\}\cdots P\{X_n>y\}$ $=1-[1-P\{X_1\leqslant y\}][1-P\{X_2\leqslant y\}]\cdots[1-P\{X_n\leqslant y\}]=1-[1-F(y)]^n=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-n(y-\theta)}, & y\geqslant\theta,\\ 0, & y<\theta,\end{cases}$

Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}n\mathrm{e}^{-n(y-\theta)}, & y>\theta,\\ 0, & y\leqslant\theta.\end{cases}$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(2) 因为 $E(Y)=E(\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\})=\int_{\theta}^{+\infty}y\cdot ne^{-n(y-\theta)}dy\overset{y-\theta=t}{=\!=\!=}n\int_0^{+\infty}(t+\theta)e^{-nt}dt=n\int_0^{+\infty}te^{-nt}dt+n\theta\int_0^{+\infty}e^{-nt}dt=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}nte^{-nt}d(nt)+\theta\int_0^{+\infty}e^{-nt}d(nt)=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx+\theta\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=\frac{1}{n}\Gamma(2)+\theta\Gamma(1)=\theta+\frac{1}{n}\neq\theta$，所以 $Y=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$ 不是 θ 的无偏估计量.

8. (1) 由 $X\sim U(0,\theta)$ 得 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 似然函数为 $L(\theta)=f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)=\frac{1}{\theta^n}$，其中 $0<x_i<\theta(1\leqslant i\leqslant n)$，$\ln L(\theta)=-n\ln\theta$，因为 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\frac{n}{\theta}<0$，所以 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 为减函数，故 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$.

(2) 总体 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{\theta}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 1, & x\geqslant\theta,\end{cases}$ 从而 $\hat{\theta}$ 的分布函数为 $F_{\hat{\theta}}(x)=P\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(X_i)\leqslant x\}=P\{X_1\leqslant x,X_2\leqslant x,\cdots,X_n\leqslant x\}=P\{X_1\leqslant x\}P\{X_2\leqslant x\}P\{X_n\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^n}{\theta^n}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 1, & x\geqslant\theta,\end{cases}$ 于是 $\hat{\theta}$ 的密度函数为 $f_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 因为 $E(\hat{\theta})=\int_0^{\theta}x\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta$，所以 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$ 非 θ 的无偏估计量.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)



微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第八章　假设检验

大纲点击

1. 理解显著性检验的基本思想，掌握假设检验的基本步骤，了解假设检验可能产生的两类错误.

2. 掌握单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验.

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

一、假设检验的概念

参数估计是通过样本观察值对总体所服从的分布中的未知参数进行估计. 实际问题中经常会遇到这样的问题，为推断总体的某些性质，对总体所服从的分布中的未知参数作出某种假设，然后通过来自总体的样本，选择合适的统计量，根据样本观察值对假设进行检验，对假设作出肯定或否定的判断，这个过程称为假设检验.

二、拒绝域与接受域、小概率原理

对原假设 H_0，若统计量落入此范围时 H_0 被否定，称此范围为假设 H_0 的拒绝域；若统计量落入某范围时 H_0 被接受，此范围称为假设 H_0 的接受域.

小概率原理即认为小概率事件在试验过程中不会发生，若试验过程中小概率事件发生了则被视为不合理. 对于充分小的数 $\alpha(0<\alpha<1)$，若一个事件的发生的概率不超过 α，这样的事件即为小概率事件，其中 α 称为显著性水平.

三、假设检验的两类错误

1. 第一类错误 —— 弃真

由于对假设作出判断的依据是样本，当实际上假设 H_0 为真时仍可能做出拒绝 H_0 的判断，这样的错误称为弃真，犯弃真的概率为 $P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\}$.

2. 第二类错误 —— 存伪

当假设 H_0 实际上不真时仍然可能做出接受假设 H_0，这样的错误称为存伪，犯这种错误的概率为 $P\{\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 为假}\}$.

四、假设检验的基本步骤

第一步，根据实际问题的特征提出原始假设 H_0 与备选假设 H_1.

第二步，选取合适的统计量.

第三步，根据显著性水平 α，求出假设 H_0 的拒绝域.

第四步，将样本观察值代入统计量中，确定统计量落入的区域，若统计量落入接受域，则接受 H_0；若统计量落入拒绝域，则拒绝 H_0.

五、一个正态总体的假设检验

（一）一个正态总体下均值的假设检验

1. U 检验 —— 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 已知，对参数 μ 进行假设检验采用 U 检验.

（1）双边检验

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

第一步，令 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$.

第二步，取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.

第三步，对给定的显著性水平 α，查表求出临界点 $u_{\frac{\alpha}{2}}$，则 H_0 的拒绝域为 $|U|\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$.

第四步，将样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代入统计量中计算出 $u=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，若 $U\in(-u_{\frac{\alpha}{2}},u_{\frac{\alpha}{2}})$，则接受 H_0，否则拒绝 H_0.

【例 1】 设生产线生产袋装食品，每袋食品的重量 $X\sim N(\mu,0.015^2)$. 当机器正常运转时，均值为 0.5 千克，为检验某天机器生产是否正常，随机抽取 9 袋，其平均重量 $\overline{x}=0.498\,5$，在显著性水平为 $\alpha=0.05$ 下机器生产是否正常？

【解】 令 $H_0:\mu=\mu_0=0.5$，$H_1:\mu\neq0.5$，

因为 σ 已知，所以取 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，左、右临界点为 $\pm u_{0.025}=\pm1.96$，H_0 的拒绝域为 $|U|\geqslant1.96$，因为 $\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\dfrac{0.0015}{0.015/3}=0.3<1.96$，所以接受 H_0，即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下机器能正常工作.

（2）左边检验

第一步，令 $H_0:\mu\geqslant\mu_0$，$H_1:\mu<\mu_0$.

第二步，取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.

第三步，对给定的显著性水平 α，查表求出左临界点 $-u_\alpha$，H_0 的拒绝域为 $(-\infty,-u_\alpha]$.

第四步，将样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代入统计量中计算出 $U=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，若 $U\in(-\infty,-u_\alpha]$，则拒绝 H_0，否则接受 H_0.

（3）右边检验

第一步，令 $H_0:\mu\leqslant\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0$.

第二步，取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.

第三步，对给定的显著性水平 α，查表求出右临界点 u_α，则 H_0 的拒绝域为 $[u_\alpha,+\infty)$.

第四步，将样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代入统计量中计算出 $U=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，若 $U\in[u_\alpha,+\infty)$，则拒绝 H_0，否则接受 H_0.

【例 2】 某厂生产的产品使用寿命 $X\sim N(\mu,40\ 000)$，以往产品的平均使用寿命为 $\mu=1\ 500$ 小时. 现采用新工艺生产产品，从新产品中抽取 25 个，测得平均寿命为 1 675 小时，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，问产品使用寿命是否显著提高？

【解】 令 $H_0:\mu\leqslant 1\ 500$，$H_1:\mu>1\ 500$，取统计量

$$U=\frac{\overline{X}-1\ 500}{\frac{200}{5}}=\frac{\overline{X}-1\ 500}{40}\sim N(0,1).$$

查表得 $u_{0.05}=1.65$，H_0 的拒绝域为 $[1.65,+\infty)$. 而 $U=\dfrac{\overline{x}-1\ 500}{40}=\dfrac{1\ 675-1\ 500}{40}=4.375$，因为 $4.375>u_{0.05}=1.65$，即拒绝 H_0，所以可以认为新工艺显著提高产品的使用寿命.

2. t 检验法 —— 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 未知，对参数 μ 进行假设检验采用 t 检验.

(1) 双边检验

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

第一步，令 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$.

第二步，取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，其中 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

第三步，对给定的显著性水平 α，查表求出临界点 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，则 H_0 的拒绝域为 $|T|\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

第四步，将样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代入统计量中计算出 $T=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，若 $T\in(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$，则接受 H_0，否则拒绝 H_0.

(2) 左边检验

第一步，令 $H_0:\mu\geqslant\mu_0$，$H_1:\mu<\mu_0$.

第二步，取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

第三步，对给定的显著性水平 α，查表求出临界点 $t_\alpha(n-1)$，则 H_0 的拒绝域为 $(-\infty,-t_\alpha(n-1)]$.

第四步，将样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代入统计量中计算出 $T=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，若 $T\in(-\infty,-t_\alpha(n-1)]$，则拒绝 H_0，否则接受 H_0.

(3) 右边检验

第一步，令 $H_0:\mu\leqslant\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0$.

第二步，取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

第三步，对给定的显著性水平 α，查表求出临界点 $t_\alpha(n-1)$，则 H_0 的拒绝域为 $[t_\alpha(n-1),+\infty)$.

第四步，将样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代入统计量中计算出 $T=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，若 $T\in[t_\alpha(n-1),+\infty)$，则拒绝 H_0，否则接受 H_0.

【例 3】 某电子元件使用寿命 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（μ,σ 皆未知），任取 16 个元件，测得平均使用寿命为 $\overline{x}=245$，$s=98$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下能否认为该批元件使用寿命大于 225 小时？

【解】 令 $H_0:\mu\leqslant\mu_0=225$，$H_1:\mu>225$.

取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，$t_{0.05}(15)=1.753\,1$，$H_0$ 的拒绝域为 $[1.753\,1,+\infty)$，因为 $T=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{245-225}{98/4}\approx0.82<1.753\,1$，所以接受 H_0，即该批元件的使用寿命不大于 225 小时.

（二）一个正态总体下方差的假设检验

1. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中参数 μ 未知，对 σ^2 进行假设检验

（1）双侧检验

第一步，令 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$.

第二步，取统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$，在 H_0 为真下 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$.

第三步，查左、右临界点 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，$H_0$ 的接受域为 $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$.

第四步，将样本观察值代入统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ 中，若 $\chi^2\in(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$，则接受 H_0，否则拒绝 H_0.

（2）左边检验

第一步，令 $H_0:\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$.

第二步，取统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$.

第三步，查左临界点 $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$，H_0 的拒绝域为 $[0,\chi^2_{1-\alpha}(n-1)]$.

第四步，将样本观察值代入统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ 中，若 $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$，则拒绝 H_0，否则接受 H_0.

（3）右边检验

第一步，令 $H_0:\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$.

第二步，取统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$.

第三步，查右临界点 $\chi^2_\alpha(n-1)$，H_0 的拒绝域为 $[\chi^2_\alpha(n-1),+\infty)$.

第四步，将样本观察值代入统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ 中，若 $\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha(n-1)$，则拒绝 H_0，否则

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

接受 H_0.

2. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,其中参数 μ 已知,对 σ^2 进行假设检验

(1) 双侧检验

第一步,令 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$,$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$.

第二步,取统计量 $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$,在 H_0 为真下 $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$.

第三步,查左、右临界点 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$,$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$,$H_0$ 的接受域为$(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n),\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n))$.

第四步,将样本观察值代入统计量 $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 中,若 $\chi^2\in(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n),\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n))$,则接受 H_0,否则拒绝 H_0.

(2) 左边检验

第一步,令 $H_0:\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$,$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$.

第二步,取统计量 $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

第三步,查左临界点 $\chi^2_{1-\alpha}(n)$,H_0 的拒绝域为$[0,\chi^2_{1-\alpha}(n)]$.

第四步,将样本观察值代入统计量中,若 $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n)$,则拒绝 H_0,否则接受 H_0.

(3) 右边检验

第一步,令 $H_0:\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$,$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$.

第二步,取统计量 $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

第三步,查右临界点 $\chi^2_{\alpha}(n)$,H_0 的拒绝域为$[\chi^2_{\alpha}(n),+\infty)$.

第四步,将样本观察值代入统计量 $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 中,若 $\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha}(n)$,则拒绝 H_0,否则接受 H_0.

附表一:一个正态总体均值、方差的检验法

检验参数	条件	原假设 H_0	备选假设 H_1	统计量	H_0 为真时服从的分布	拒绝域
μ	σ 已知	$\mu=\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$ $\mu\leqslant\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu>\mu_0$	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\lvert U\rvert\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$ $U\leqslant -u_{\alpha}$ $U\geqslant u_{\alpha}$
	σ 未知	$\mu=\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$ $\mu\leqslant\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu>\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\lvert T\rvert\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $T\leqslant -t_{\alpha}(n-1)$ $T\geqslant t_{\alpha}(n-1)$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

续表

检验参数	条件	原假设 H_0	备选假设 H_1	统计量	H_0 为真时服从的分布	拒绝域
σ^2	μ 已知	$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$ $\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2\geqslant\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n)$ $\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha}(n)$
	μ 未知	$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$ $\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\geqslant\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha}(n-1)$

六、两个正态总体的假设检验

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(一) 两个正态总体下均值的假设检验(单侧检验与一个正态总体相同,此处只讨论双侧)

1. U 检验法 ——U 检验法是对两个正态总体的方差 σ_1^2,σ_2^2 已知的情况下,对两个正态总体的均值差的假设检验. 设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,其中 σ_1^2,σ_2^2 已知,$X_1,X_2,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是分别来自总体 X 和 Y 的简单随机样本.

第一步,令 $H_0:\mu_1-\mu_2=k$,$H_1:\mu_1-\mu_2\neq k$.

第二步,取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-k}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}$,在 H_0 为真下 $U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-k}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\sim N(0,1)$.

第三步,对给定的显著性水平 α,查临界值 $\pm u_{\frac{\alpha}{2}}$,H_0 的拒接域为 $|U|\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$.

第四步,将样本观察值代入 $U=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-k}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}$ 中,若 $|U|\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$,则拒绝 H_0,否则接受 H_0.

2. t 检验法 ——t 检验法是对两个方差相同的正态总体均值差的假设.

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$,$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$,且 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是分别来自总体 X 和 Y 的简单随机样本.

第一步,令 $H_0:\mu_1-\mu_2=k$,$H_1:\mu_1-\mu_2\neq k$.

第二步,取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-k}{S_w\sqrt{1/m+1/n}}\sim t(m+n-2)$,其中 $S_w^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$.

第三步，对给定的显著性水平 α，查表求出临界点 $t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$，则 H_0 的拒绝域为 $|T| \geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$.

第四步，将样本观察值代入统计量 $T=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-k}{S_w\sqrt{1/m+1/n}}$ 中，若 $|T| \geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$，则拒绝 H_0，否则接受 H_0.

（二）两个正态总体方差的假设检验（单侧假设检验与一个正态总体同，此处只讨论双侧）

1. 设总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中参数 μ_1,μ_2 未知，且 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是分别来自总体 X 和 Y 的简单随机样本.

第一步，令 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

第二步，取统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$，在 H_0 为真下 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(m-1,n-1)$.

其中 $S_1^2=\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$.

第三步，查左、右临界点 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$，$F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$，$H_0$ 的拒绝域为 $F \leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$ 或 $F \geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$.

第四步，将样本观察值代入统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$，若 $F \leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$ 或 $F \geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$，则拒绝 H_0，否则接受 H_0.

2. 设总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中参数 μ_1,μ_2 已知，且 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是分别来自总体 X 和 Y 的简单随机样本.

第一步，令 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

第二步，取统计量 $F=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2}$，在 H_0 为真下 $F=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2} \sim F(m,n)$.

第三步，查左、右临界点 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)$，$F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)$，$H_0$ 的拒绝域为 $F \leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)$ 或 $F \geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)$.

第四步，将样本观察值代入统计量 $F=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2}$，若 $F \leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)$ 或 $F \geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)$，则拒绝 H_0，否则接受 H_0.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

附表二：两个正态总体的假设检验法

检验参数	条件	原假设 H_0	备选假设 H_1	统计量	H_0 为真时服从的分布	拒绝域
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$\mu_1-\mu_2=\mu_0$ $\mu_1-\mu_2\geqslant\mu_0$ $\mu_1-\mu_2\leqslant\mu_0$	$\mu_1-\mu_2\neq\mu_0$ $\mu_1-\mu_2<\mu_0$ $\mu_1-\mu_2>\mu_0$	$U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\lvert U\rvert\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$ $U\leqslant -u_\alpha$ $U\geqslant u_\alpha$
	σ_1^2,σ_2^2 未知且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\mu_1-\mu_2=\mu_0$ $\mu_1-\mu_2\geqslant\mu_0$ $\mu_1-\mu_2\leqslant\mu_0$	$\mu_1-\mu_2\neq\mu_0$ $\mu_1-\mu_2<\mu_0$ $\mu_1-\mu_2>\mu_0$	$T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\mu_0}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$\lvert T\rvert\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$ $T\leqslant -t_\alpha(m+n-2)$ $T\geqslant t_\alpha(m+n-2)$
$\sigma_1^2-\sigma_2^2$	μ_1,μ_2 已知	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$ $\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2}$	$F(m,n)$	$F\leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)$ 或 $F\geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)$ $F\leqslant F_{1-\alpha}(m,n)$ $F\geqslant F_\alpha(m,n)$
	μ_1,μ_2 未知	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$ $\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F(m-1,n-1)$	$F\leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$ 或 $F\geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$ $F\leqslant F_{1-\alpha}(m-1,n-1)$ $F\geqslant F_\alpha(m-1,n-1)$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

重点题型分析

题型一 一个正态总体的假设检验

【例 1】 从正态总体 $X\sim N(\mu,1)$ 中取出 100 个样品，测得 $\bar{x}=5.32$. 在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下，$H_0:\mu=5$ 是否成立？

【解】 令 $H_0:\mu=5$，取统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-5}{\sigma/\sqrt{100}}=10(\bar{X}-5)\sim N(0,1)$，在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下，临界点为 $\pm u_{\frac{\alpha}{2}}=\pm u_{0.005}=\pm 2.58$，$H_0:\mu=5$ 的拒绝域为 $\lvert U\rvert\geqslant 2.58$，而 $\lvert 10(\bar{x}-5)\rvert=3.2>2.58$，所以 H_0 被拒绝，即在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下，$H_0:\mu=5$ 不成立.

【例 2】 生产线生产袋装产品，正常情况下每袋 1 千克，标准差不超过 15 克，且每袋重量服从正态分布. 现检查机器生产情况，从中任取 10 袋，测得其均值为 $\bar{x}=998$ 克，样本均方差为 $S=30$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，问机器生产是否正常？

【解】 令 $H_0:\sigma^2\leqslant 15^2$，$H_1:\sigma^2>15^2$，取统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$，对 $\alpha=$

0.05，右临界点为 $\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，H_0 的拒绝域为 $[16.919,+\infty)$，而 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{9\times30^2}{15^2}=36\in[16.919,+\infty)$，故 H_0 被拒绝，即机器生产不正常.

题型二　两个正态总体的假设检验

【例 1】　两箱分别装甲、乙两厂生产的产品，甲厂产品重量 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，乙厂产品重量 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，设 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 但未知. 从甲生产的产品中取 10 件，测得平均重量 $\bar{x}=4.95$ 千克，样本标准差 $s_1=0.07$ 千克，从乙生产的产品中取 15 件，测得平均重量 $\bar{y}=5.02$ 千克，样本标准差 $S_2=0.12$ 千克，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验两厂产品平均重量是否有显著差异.

【解】　设 $H_0:\mu_1=\mu_2$，$H_1:\mu_1\neq\mu_2$，取统计量 $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{1/m+1/n}}\sim t(m+n-2)$，其中 $S_w^2=\dfrac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}$.

临界点为 $\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)=\pm t_{0.025}(23)=\pm2.068\ 7$，$S_w^2=\dfrac{9s_1^2+14s_2^2}{23}=0.010\ 7$ 或 $S_w=0.103\ 4$，H_0 的接受域为 $(-2.068\ 7,2.068\ 7)$.

因为 $\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{S_w\sqrt{1/m+1/n}}=\dfrac{4.95-5.02}{0.103\ 4\times\sqrt{1/10+1/15}}\approx-1.658\ 3\in(-2.068\ 7,2.068\ 7)$，所以 H_0 被接受，即两厂产品重量无明显差异.

【例 2】　某厂生产某种产品采用新工艺前后，分别取 10 件进行寿命检测. 采用新工艺前产品使用寿命样本均值为 2 460 小时，样本标准差为 56 小时，采用新工艺后产品样本均值为 2 550 小时，样本标准差为 48 小时，设产品使用寿命服从正态分布，在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下及总体方差不变下，产品使用寿命是否显著提高？

【解】　令 $H_0:\mu_1\geqslant\mu_2$ $H_1:\mu_1<\mu_2$，取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{1/m+1/n}}\sim t(m+n-2)$，对 $\alpha=0.01$，左临界点为 $-t_{0.01}(18)=-2.552$，H_0 的拒绝域为 $(-\infty,-2.552]$，而

$$S_w^2=\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}=\frac{9\times56^2+9\times48^2}{18}=151.1,$$

于是 $\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{S_w\sqrt{1/m+1/n}}=\dfrac{2460-2550}{12.29\times\sqrt{0.2}}=-16.37\in(-\infty,-2.552]$，

故 H_0 被拒绝，即产品使用寿命显著提高.

测试题

一、选择题

对正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的均值 μ 进行假设检验，若在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下接受假设 $H_0:\mu=\mu_0$，则在显著性水平 $\alpha=0.025$ 下(　　).

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(A) 拒绝 H_0　　(B) 接受 H_0 且接受域相同

(C) 接受 H_0 但接受域不同　　(D) 可能接受也可能拒绝 H_0

二、填空题

1. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 σ^2 已知，要检验假设 H_0：$\mu=\mu_0$，则选统计量_____，服从_____分布.

2. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 σ^2 未知，要检验假设 H_0：$\mu=\mu_0$，则选统计量_____，服从_____分布.

3. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 μ 未知，要检验假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$，则选统计量_____，服从_____分布.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ,σ^2 都是未知参数，令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$Q^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则对假设 $H_0:\mu=0$ 检验时应选用统计量_____.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{25}$ 是来自总体 $X \sim N(\mu,3^2)$ 的简单随机样本，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下假设 $H_0:\mu \geqslant 10$，$H_1:\mu<10$ 的接受域为_____.

三、解答题

1. 设正态总体 $X \sim N(\mu,1)$，从总体 X 中取容量为 100 的样本，样本均值为 $\overline{x}=5.32$，在显著性水平为 $\alpha=0.01$ 下能否认为总体均值为 5?

2. 设某次考试考生成绩服从正态分布，从中随机抽取 36 位考生的成绩，平均成绩为 66.5 分，总体均方差为 15 分. 问在显著性水平为 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?

3. 设元件使用寿命 $X \sim N(\mu,100^2)$，从该批元件中取 25 件，测得其平均寿命为 $\overline{x}=950$ 小时，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下能否认为该批元件使用寿命不低于 1 000 小时?

4. 某厂生产的灯泡使用寿命 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从中任取 20 件，测得平均寿命为 $\overline{x}=1\ 700$ 小时，$s=490$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下可否认为灯泡的使用寿命小于 2 000 小时?

5. 某厂生产灯泡的使用寿命服从 $X \sim N(11,\sigma^2)$，要求灯泡的方差为 1，现从中取 5 只灯泡，测得使用寿命为：10.5，11.0，11.2，12.5，12.8，在显著性水平 $\alpha=0.10$ 下，检查该厂生产的灯泡方差是否符合要求?

测试题参考答案

一、选择题

因为显著性水平越小，接受域范围越大，故接受 H_0 且接受域比原接受域大，应选(C).

二、填空题

1. 填 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$，$N(0,1)$.

2. 填 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$，$t(n-1)$.

3. 填 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，$\chi^2(n-1)$.

4. 令 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{Q^2}{n-1}$，对 $H_0:\mu=0$ 进行检验取统计量 $\dfrac{\overline{X}-0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，即 $\sqrt{n(n-1)}\dfrac{\overline{X}}{Q} \sim t(n-1)$，应填 $\sqrt{n(n-1)}\dfrac{\overline{X}}{Q}$.

5. 取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-10}{3/\sqrt{25}}=\dfrac{5(\overline{X}-10)}{3}\sim N(0,1)$，接受域为 $U>-u_{0.05}=-1.65$. 由 $\dfrac{5(\overline{X}-10)}{3}>-1.65$ 得接受域为 $\overline{X}>9.01$.

三、解答题

1. 令 $H_0:\mu=5$，$H_1:\mu\neq 5$，取统计量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{1/\sqrt{100}}=10(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1)$，因为 $|10(5.32-5)|=3.2>u_{0.005}$，所以 $H_0:\mu=5$ 被拒绝，即不能认为总体均值为 5.

2. 令 $H_0:\mu=70$，$H_1:\mu\neq 70$. 已知总体 $X\sim N(\mu,15^2)$，$\overline{x}=66.5$. 取统计量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{15/6}\sim N(0,1)$，查表得 $u_{0.025}=1.96$，接受区间为 $(-1.96,1.96)$，而 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{15/6}=1.4\in(-1.96,1.96)$，所以 H_0 被接受，即可以认为这次考试全体考生平均成绩为 70 分.

3. 设 $H_0:\mu\geqslant 1\,000$，$H_1:\mu<1\,000$. 取统计量 $\dfrac{\overline{X}-1\,000}{100/\sqrt{25}}\sim N(0,1)$，当 $\alpha=0.05$ 时，左临界点为 $-u_\alpha=-u_{0.05}=-1.65$，从而 H_0 的接受域为 $(-1.65,+\infty)$，而 $\dfrac{\overline{x}-1\,000}{100/\sqrt{25}}=\dfrac{950-1\,000}{20}=-2.5\notin(-1.65,+\infty)$，所以拒绝 H_0，即不能认为该批元件使用寿命不低于 1 000 小时.

4. 令 $H_0:\mu<2\,000$，$H_1:\mu\geqslant 2\,000$，取统计量 $\dfrac{\overline{X}-2\,000}{S/\sqrt{20}}\sim t(19)$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下右临界点为 $t_{0.05}(19)=1.729\,1$，H_0 的接受域为 $(-\infty,1.729\,1)$，因为 $\dfrac{1\,700-2\,000}{490/\sqrt{20}}\in(-\infty,1.729\,1)$，所以接受 H_0，即可以认为灯泡使用寿命低于 2 000 小时.

5. 令 $H_0:\sigma^2=1$，$H_1:\sigma^2\neq 1$，取统计量 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{4}(X_i-11)^2\sim\chi^2(5)$，在显著性水平 $\alpha=0.10$ 下左、右临界点为 $\chi^2_{0.95}(5)=1.145$，$\chi^2_{0.05}(5)=11.070$，H_0 的接受域为 $(1.145,11.070)$，因为 $\dfrac{1}{1^2}\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-11)^2=5.78\in(1.145,11.070)$，接受 H_0，即可以认为该批灯泡方差为 1.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

致读者

亲爱的读者，感谢一路走来有您相伴，您的信赖、支持和期许是我们工作的动力。图书的质量是图书的生命，好图书源于好质量，为了向读者提供更高质量的图书，世纪文都教育科技集团图书事业部现进行有奖纠错活动，对于首次指正书中错误的读者，我们将奉上精美礼品一份。

有奖纠错电话：010－88824300－8219

有奖纠错 QQ：2238719772

我们会恪尽职守，不负众望，将图书越办越好。最后，祝您考试成功，学业有成！

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

扫下方二维码，了解更多文都图书信息。

文都图书邮购目录

汤家凤精品图书系列



考研数学

复习大全





微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)











文都教育®

54200177

汤家凤精品图书系列

搜索一下

1.2022《考研数学复习大全》（数学一至三）

2.2022《全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义》

3.2022《全国硕士研究生招生考试线性代数辅导讲义》

4.2022《概率论与数理统计辅导教程》

5.2022《考研数学接力题典1800》（数学一至三）

6.2022《考研数学历年真题全解析》（数学一至三）

7.2022《考研数学强化测试10套卷》（数学一至三）

8.2022《考研数学绝对考场最后八套题》（数学一至三）

文都图书　名师精品

微信公众号「风类考研」
(ID:djky66)

新浪微博：@文都书院

图书答疑QQ群：742230365

上架指导：考研类图书

ISBN 978-7-5022-7754-3
9 787502 277543 01>

微信扫码领取赠品

文都书馆微信公众号

定价：89.00元